

AVANT-PROPOS

Sachez chers candidats que l'étude d'une fonction au BAC est un exercice classique qui s'inscrit dans le cadre des habitudes: les mêmes questions, les mêmes raisonnements, les mêmes démonstrations, qui est aussi notée généralement sur 10 points. Et pourtant, beaucoup d'élèves ont du mal à y avoir la moyenne. Partant de ce constat, nous avons conçu cette brochure qui traite de manière générale toutes les questions sur l'étude d'une fonction avec des méthodes compréhensives.

Nous avons dénommé cette brochure:

« LES MYSTÈRES DES FONCTIONS »

Vos suggestions et critiques seront les bienvenues pour l'amélioration de cette brochure.

L'auteur:

SARRE Mouhamad

(+223) 70 64 74 69

(+223) 65 36 01 70

SOMMAIRE

N°	Mystères	page
1	Comment déterminer l'ensemble de définition d'une fonction f ?	4
2	Comment calculer la limite d'une fonction ?	5
3	Comment écrire une fonction f sans le symbole de la valeur absolue ?	8
4	Comment déterminer les nombres réels $a, b, c, \dots$ d'une fonction ?	9
5	Comment démontrer la parité et la périodicité d'une fonction ?	10
6	Comment étudier la continuité d'une fonction f en un point x_0 ?	11
7	Comment démontrer qu'une fonction f admet un prolongement par continuité en un point x_0 ?	12
8	Formule des dérivées	13
9	Comment étudier la dérivabilité d'une fonction f en point x_0 ?	13
10	Comment déterminer le signe de la dérivée d'une fonction f ?	14
11	Comment déterminer le sens de variation d'une fonction f ?	15
12	Comment dresser le tableau de variation d'une fonction f ?	15
13	Comment déterminer les extremums relatifs d'une fonction f ?	16
14	Comment démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α ?	16
15	Comment encadrer α ?	16
16	Comment déterminer le signe d'une fonction f ?	17
17	Comment déterminer les asymptotes d'une courbe ?	20
18	Comment étudier la position relative de (C) par rapport à (D) ?	22
19	Comment déterminer les tangentes ?	22
20	Comment déterminer les branches infinies ?	24
21	Comment déterminer les points particuliers ?	26

22	Comment montrer que la droite d'équation $x=a$ est un axe de symétrie de (C) ?	27
23	Comment montrer que le point $A(a,b)$ est un centre de symétrie de (C) ?	27
24	Comment calculer $f(a)$?	28
25	Comment encadrer $f(a)$?	29
26	Comment tracer la courbe représentative d'une fonction ?	30
27	Comment démontrer qu'une fonction f admet une bijection de l'intervalle I vers $f(I)$?	31
28	Comment démontrer qu'une fonction f admet une bijection réciproque f^{-1} ?	31
29	Comment calculer $(f^{-1})'(\beta)$?	32
30	Inégalité des accroissements finis	34
31	Comment déterminer la restriction d'une fonction ?	35
32	Comment déterminer le point d'inflexion de (C) ?	36
33	Comment montrer qu'une fonction est convexe et concave ?	37
34	Formules des primitives	38
35	Comment montrer qu'une fonction h est une primitive d'une fonction f ?	38
36	Cours sur les intégrales	39
37	Cours sur $\ln$ et $\exp$	42
	Problème 1	
	Problème 2	
	Problème 3	
	Problème 4	
	Problème 5	

Mystère 1 : Comment déterminer l'ensemble de définition d'une f?

La notation : $Df = \{x/x \in \mathbb{R}, \text{condition}(s)\}$ ou $x \in Df \Leftrightarrow \text{condition}(s)$

Les conditions d'existences :

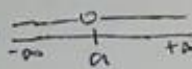
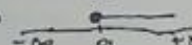
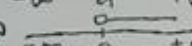
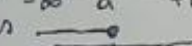
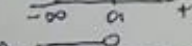
- Pour une fonction polynôme ou monôme pas de condition : $Df =]-\infty; +\infty[$
 - Pour une fonction rationnelle, $f(x) = \frac{qqch}{qqch'}$: $Df = \{x/x \in \mathbb{R}, qqch' \neq 0\}$
 - Pour une fonction racine carrée, $f(x) = \sqrt{qqch}$: $Df = \{x/x \in \mathbb{R}, qqch \geq 0\}$
 - Pour une fonction ln, $f(x) = \ln(qqch)$: $Df = \{x/x \in \mathbb{R}, qqch > 0\}$ et Si elle porte une valeur absolue, $f(x) = \ln|qqch|$: $Df = \{x/x \in \mathbb{R}, qqch \neq 0\}$
 - Pour une fonction expo, $f(x) = e^{qqch}$, la condition est posée selon qqch.
 - Pour une fonction valeur absolue, $f(x) = |qqch|$, la condition est posée selon qqch.
- NB : Si une fonction possède plusieurs conditions, on pose toutes ces conditions.

La résolution de la condition posée

La représentation des solutions :

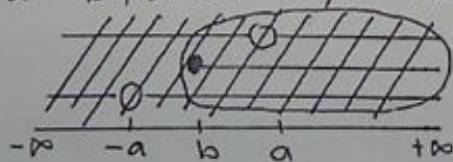
Il existe plusieurs méthodes pour la représentation des solutions, j'opte pour cette méthode.

- Signifie que l'intervalle est ouvert en ce point.
- Signifie que l'intervalle est fermé en ce point.

- si $x \neq a$, alors  , $Df =]-\infty; a[\cup]a; +\infty[$
- si $x \geq a$, alors  , $Df = [a; +\infty[$
- si $x > a$, alors  , $Df =]a; +\infty[$
- si $x \leq a$, alors  , $Df =]-\infty; a]$
- si $x < a$, alors  , $Df =]-\infty; a[$

- Pour plusieurs valeurs, on fait une seule représentation pour toutes ces valeurs en tenant compte de la supériorité des valeurs et l'ensemble de définition correspond à l'endroit où toutes les barres sont hachurées ensembles.

Exemple : on a $x \neq a$ et $x \geq b$ et $x \neq -a$ avec $a > b$



donc

$$Df = [b; a[\cup]a; +\infty[$$

NB : Pour le cas des signes ($<$, $>$ ou $\leq$, $\geq$) concernant les fonctions polynômes de degré supérieur à 1, les fonctions valeurs absolues et les fonctions rationnelles, il faut opter pour un tableau de signes.

Exercice d'application

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^3 - x^2 + 5x + 1 \quad g(x) = \sqrt{-x^2 + x} \quad h(x) = \frac{x \ln x}{x+1} \quad k(x) = e^{2x-3}$$

Solution

$$D_f =]-\infty; +\infty[$$

• $g(x) = \sqrt{-x^2 + x}$
 $D_g = \{x/x \in \mathbb{R}, -x^2 + x \geq 0\}$

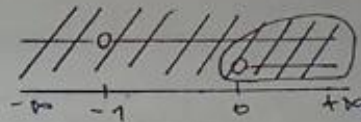
posons $-x^2 + x = 0$
 $\Rightarrow x(-x+1) = 0$
 $\Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$
$-x+1$	$+$	$+$	0	$-$
$-x^2+x$	$-$	0	$+$	$-$

$$D_g = [0; 1]$$

• $h(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$

$x \in D_h \Leftrightarrow x > 0$ et $x+1 \neq 0$
 $\Leftrightarrow x > 0$ et $x \neq -1$



$$D_h =]0; +\infty[$$

• $k(x) = e^{2x-3}$

$$D_k =]-\infty; +\infty[$$

Mystère 2 : Comment calculer la limite d'une fonction ?

Les formes indéterminées

$$\frac{0}{0} ; 0 \times \infty ; \frac{\infty}{\infty} ; +\infty - \infty$$

Mnémotechnique

ORO de IRI est ROI de RIO

$$\frac{0}{\text{Réel}} = 0 \quad \frac{\infty}{\text{Réel}} = \infty \quad \frac{\text{Réel}}{0} = \infty \quad \frac{\text{Réel}}{\infty} = 0$$

Les méthodes de calculs d'une limite :

- Utilisation d'une factorisation
- Utilisation de l'expression conjuguée
- Utilisation de l'expression conjuguée et d'une factorisation
- Utilisation d'un taux de variation : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$
- Utilisation du changement d'écriture
- Utilisation du changement de variable
- Utilisation de la comparaison (le théorème des gendarmes) :

Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et que $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = l \\ \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = l \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$

- Utilisation des limites de référence :

Limites de référence de la fonction $\ln(x)$

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$	3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$	5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$	4. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$	6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Limites de référence de la fonction $\exp(x)$

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$	3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$	4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$	

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

On constate, ici, que : les limites en $+\infty$ donnent $+\infty$ et les limites en $-\infty$ donnent 0

Limites de référence (croissance comparée)

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$	2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$	3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} x^a \ln x = 0$	5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x ^a e^x = 0$	

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Exercice d'application

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-2} - \sqrt{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - 1}{3x - \pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin\left(\frac{2x+1}{x^2-1}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x \cos x$$

Solution

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 5x + 6} = \frac{0}{0} \text{ "FI"}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 5x + 6} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x-3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 5x + 6} = -5}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-2} - \sqrt{x-3} = +\infty - \infty \text{ "FI"}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-2} - \sqrt{x-3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x-2})^2 - (\sqrt{x-3})^2}{(\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3})} \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-2} - \sqrt{x-3} = 0}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{0}{0} \text{ "FI"}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \cdot \sin x}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0} \quad \text{car} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - 1}{3x - \pi} &= \frac{0}{0} \text{ "FI"} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - 1}{3x - \pi} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2(\cos x - \frac{1}{2})}{3(x - \frac{\pi}{3})} \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{3}}{x - \frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{2}{3} (\cos' \frac{\pi}{3})' \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - 1}{3x - \pi} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin\left(\frac{2x+1}{x^2-1}\right)$$

posons $X = \frac{2x+1}{x^2-1}$
quand $x \rightarrow -\infty$; $X \rightarrow 0$

Explication

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x^2-1} = 0$$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin\left(\frac{2x+1}{x^2-1}\right) = \lim_{X \rightarrow 0} \sin X = \sin 0$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin\left(\frac{2x+1}{x^2-1}\right) = 0}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x \cos x$$

on a $-1 \leq \cos x \leq 1$
 $\Rightarrow -x \leq x \cos x \leq x \Rightarrow -x^2 \leq -x \cos x \leq x^2$
 $\Rightarrow x^2 - x \leq x^2 - x \cos x \leq x^2 + x$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x = +\infty \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x \cos x = +\infty}$$

Mystère 3: Comment écrire une fonction f sans le symbole de la valeur absolue?

Il s'agit d'étudier le signe de la fonction qui se trouve dans la valeur absolue et conclure avec :

$$\begin{cases} |f(x)| = f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ |f(x)| = -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

Exercice d'application

Soit $f(x) = x^2 - |2x + 3|$ avec $D_f = \mathbb{R}$

Écrire la fonction $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue

Solution

Étudions le signe de $2x + 3$

posons $2x + 3 = 0$

$\Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x + 3$	$-$	0	$+$
$ 2x + 3 $	$-2x - 3$	0	$2x + 3$
$f(x)$	$x^2 - (-2x - 3)$	$x^2 - (2x + 3)$	

$\forall x \in]-\infty; -\frac{3}{2}[, f(x) = x^2 + 2x + 3$

$\forall x \in]-\frac{3}{2}; +\infty[, f(x) = x^2 - 2x - 3$

Mystère 4: Comment déterminer les nombres réels $a, b, c \dots$ d'une fonction f ?

Il faut opter pour la méthode de l'identification ou celle de la division euclidienne.

Exercice d'application

$$\text{Soit } f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{x^3 - 1}$$

Déterminer les nombres réels a, b et c tels $\forall x \in Df, f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$

Solution

$$\begin{aligned} \text{on a } f(x) &= \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1} \\ &= \frac{a(x^2+x+1) + (x-1)(bx+c)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{ax^2 + ax + a + bx^2 - bx + cx - c}{x^3 - 1} \\ f(x) &= \frac{(a+b)x^2 + (a-b+c)x + a-c}{x^3 - 1} \end{aligned}$$

$$\text{or } f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{x^3 - 1}$$

Par identification

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a-b+c=-2 \\ a-c=-2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3a &= -3 \\ \Rightarrow \boxed{a=-1} &\text{ donc } \boxed{b=2} \quad \text{et} \quad \boxed{c=1} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{f(x) = \frac{-1}{x-1} + \frac{2x+1}{x^2+x+1}}$$

Mystère 5 : Comment démontrer la parité et la périodicité d'une fonction f ?

- f est paire si $\forall x \in Df, -x \in Df$ et $f(-x) = f(x)$
- f est impaire si $\forall x \in Df, -x \in Df$ et $f(-x) = -f(x)$
- f est périodique de période T si $\forall x \in Df, (x+T) \in Df$ et $f(x+T) = f(x)$

Exercice d'application

A) Etudier la parité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x^2-2}{2x^3}$$

$$h(x) = \frac{x^2-2}{x^2}$$

B) Soit $f(x) = \frac{1}{2-\sin x}$ avec $Df = \mathbb{R}$

Montrer que f est périodique de période 2π .

Solution

A) Etudions la parité des fonctions

$$f(x) = \frac{x^2-2}{2x^3}$$

$$Df = \{x/x \in \mathbb{R}, 2x^3 \neq 0\}$$

$$Df =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

$$\forall x \in Df, -x \in Df \text{ et } f(-x) = \frac{(-x)^2-2}{2(-x)^3}$$

$$= \frac{x^2-2}{-2x^3}$$

$$= -\frac{x^2-2}{2x^3}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

donc f est impaire

$$h(x) = \frac{x^2-2}{x^2}$$

$$Dh = \{x/x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 0\}$$

$$Dh =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

$$\forall x \in Dh, -x \in Dh \text{ et } h(-x) = \frac{(-x)^2-2}{(-x)^2} = \frac{x^2-2}{x^2}$$

$$h(-x) = h(x)$$

donc h est paire.

B) Montrons que f est périodique de période 2π

On a $D_f = \mathbb{R}$ donc $\forall x \in D_f, (x+2\pi) \in D_f$
et montrons que $f(x+2\pi) = f(x)$

$$f(x+2\pi) = \frac{1}{2 - \sin(x+2\pi)}$$

$$= \frac{1}{2 - \sin x}, \text{ car } \sin(x+2\pi) = \sin x$$

$$\boxed{f(x+2\pi) = f(x)}$$

donc f est périodique de période 2π .

Mystère 6: Comment étudier la continuité d'une fonction f en un point x_0 ?

Il s'agit de prouver que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Et si la fonction se présente par un intervalle, on prouve alors que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad (\text{ou } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0))$$

< >

Exercice d'application

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}, & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = -2 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en 2.

Solution

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} = \frac{0}{0} \text{ "FI"}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-4)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x-4) \end{aligned}$$

$$= -2$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)}$$

donc f est continue en 2.

Mystère 7: Comment démontrer qu'une fonction f admet un prolongement par continuité en un point x_0 ?

Il s'agit de prouver que si $x_0 \in Df$, on a : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \text{réel}$

Alors ce prolongement se définit comme suit :

Soit g ce prolongement défini par : $\begin{cases} \forall x \in Df, g(x) = f(x) \\ g(x_0) = \text{réel} \end{cases}$

Exercice d'application

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

1/ Déterminer l'ensemble de définition de f .

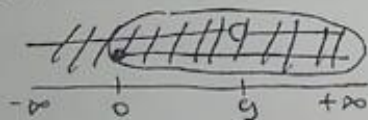
2/ f admet-elle un prolongement par continuité au point 9 ? Si oui, définir alors ce prolongement.

Solution

1) Déterminons l'ensemble de définition de f .

$$Df = \{x/x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \text{ et } x-9 \neq 0\}$$

$$(\Rightarrow) x \geq 0 \text{ et } x \neq 9$$



$$Df = [0; 9[\cup]9; +\infty[$$

2)

$$\text{on a } 9 \notin Df \text{ et } \lim_{x \rightarrow 9} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$$

$$= \frac{0}{0} \text{ "FI"}$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x})^2 - (3)^2}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x}+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = \frac{1}{6}$$

donc f admet un prolongement par continuité en 9.
Et ce prolongement se définit comme suit
Soit g ce prolongement défini par :

$$\begin{cases} \forall x \in Df, g(x) = f(x) \\ g(9) = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Mystère 8 : Formules des dérivées.

Fonction	Cste	Af	$f+g$	$f \times g$	$\frac{f}{g}$	$\sqrt{f}$	$\frac{1}{f}$	f^n	$\cos f$
Dérivée	0	af'	$f'+g'$	$f'g+g'f$	$\frac{f'g-g'f}{g^2}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$-\frac{f'}{f^2}$	$nf'f^{n-1}$	$-f'\sin f$
		$\sin f$	$\ln f$	e^f	$g \circ f$				
		$f'\cos f$	$\frac{f'}{f}$	$f'e^f$	$f' \times g'(f)$				

Mystère 9 : Comment étudier la dérivabilité d'une fonction f en un point x_0 ?

Il s'agit de prouver que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \text{réel}$

Le réel en question se nomme le nombre dérivé et est égal à $f'(x_0)$.

Conséquence graphique : (Cf) admet une tangente au point d'abscisse x_0 d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Et si la fonction se présente par intervalle, on prouve que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ <}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ >}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \text{réel}$$

Exercice d'application

Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 1[, f(x) = -x^2 + x \\ \forall x \in]1; +\infty[, f(x) = x^2 - x \end{cases}$

Etudier la dérivabilité de f en 1.

Solution

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + x}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} -x$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} x$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1}$$

f n'est pas dérivable en 1, car $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

Mystère 10: Comment déterminer le signe de la dérivée d'une fonction f ?

- S'il s'agit des fonctions polynômes ou rationnelles, il faut poser $f'(x) = 0$, puis résoudre.
 - S'il s'agit des fonctions racines carrées, il faut savoir que $\forall x \in Df, \sqrt{qqch} \geq 0$, donc le signe dépend de l'autre fonction si elle existe.
 - S'il s'agit des fonctions $\ln$, il faut généralement poser $f'(x) > 0$, puis résoudre. Tu conclus que $f'(x) > 0$ sur cet intervalle et tu en déduis que $f'(x) < 0$ sur l'autre intervalle.
 - S'il s'agit des fonctions expo, il faut savoir que $\forall x \in Df, e^{qqch} > 0$, donc le signe dépend de l'autre fonction si elle existe.
- NB : il faut conclure par un tableau de signes.

Exercice d'application

Déterminer le signe des fonctions suivantes :

$$f'(x) = 4x^2 - 6x + 2 ; g'(x) = x\sqrt{2x+1} ; h'(x) = 1 + \ln x ; p'(x) = (x-2)e^{1-x}$$

Solution

on a $f'(x) = 4x^2 - 6x + 2$

posons $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow 4x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-\frac{1}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow x=1 \text{ ou } x=\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$4x^2 - 6x + 2$	+	-	+	+

on a $g'(x) = x\sqrt{2x+1}$

$\forall x \in D_g, \sqrt{2x+1} \geq 0$
donc le signe de $g'(x)$ dépend de x .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$g'(x)$	-	0	+

on a $h'(x) = 1 + \ln x$

$$\text{posons } h'(x) > 0 \Rightarrow 1 + \ln x > 0 \Rightarrow \ln x > -1$$

$$\Rightarrow x > e^{-1} \Rightarrow x > \frac{1}{e} \Rightarrow x \in]\frac{1}{e}; +\infty[$$

donc $\forall x \in]\frac{1}{e}; +\infty[, h'(x) > 0$

On en déduit que $\forall x \in]0; +\infty[, h'(x) < 0$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+

on a $p'(x) = (x-2)e^{1-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{1-x} > 0$, donc le signe de $p'(x)$ est celui de $(x-2)$.

$$\text{posons } x-2=0 \Rightarrow x=2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	-	0	+
$p'(x)$	-	0	+

Mystère 11: Comment déterminer le sens de variation d'une fonction f ?

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I .

- $\forall x \in I, f'(x) > 0 \Rightarrow$ donc f est strictement croissante sur I .

- $\forall x \in I, f'(x) < 0 \Rightarrow$ donc f est strictement décroissante sur I .

NB : on se sert du tableau de signes de la fonction dérivée.

Mystère 12: Comment dresser le tableau de variation d'une fonction f ?

Il faut utiliser le tableau de signes de la fonction dérivée, en ajoutant un tableau de la fonction en question dont il faut préciser :

- Les variations (croissante et décroissante)
- Les extrema de la fonction (c.à.d les maxima et les minima)
- Les limites, seulement si elles sont demandées.

Mystère 13: Comment déterminer les extremums relatifs d'une fonction f ?

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un élément de I .
 f admet un extremum relatif $f(a)$ en a si et seulement si f' s'annule en a en changeant de signe.

NB : un extremum relatif est soit un maximum relatif, soit un minimum relatif.
 On se sert du tableau de variation de la fonction.

Mystère 14: Comment démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α ?

Le théorème de la bijection:

Si g est une fonction continue et strictement monotone (croissante ou décroissante) sur un intervalle I , elle réalise donc une bijection de I dans $g(I)$ et si $0 \in g(I)$ alors l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α sur I .

Corollaire:

Si g est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$ et si $g(a) \times g(b) < 0$, alors l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $[a; b]$.

NB : si on vous demande de vérifier que $\alpha \in [a; b]$, il faut utiliser le corollaire.

Mystère 15: Comment encadrer α ?

La méthode par balayage: soit $\alpha \in]a; b[$

- Encadrement de α d'ordre 1 (ou 0,1 près)

x	a	$a \pm 0,1$	$a \pm 0,2$	...	...	...	...	...	...	...	b
$f(x)$	signe	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

α est encadré par les valeurs de signes contraires. Soit $\alpha \in]a'; b'[,$

- Encadrement de α d'ordre 2 (ou 0,01 près)

x	a'	$a' \pm 0,01$	$a' \pm 0,02$	...	...	...	...	...	...	b'
$f(x)$	signe	...	...	...	...	...	...	...	...	...

α est encadré par les valeurs de signes contraires. Etc...

La méthode de dichotomie :

On calcule $f(x_0)$ avec $x_0 \in]a; b[$

- Si $f(x_0) > 0$ alors $\alpha \in]a; x_0[$

- Si $f(x_0) < 0$ alors $\alpha \in]x_0; b[$

Les calculs se font dans un tableau qui se présente comme :

a	b	$x_0 = \frac{a+b}{2}$	$f(x_0)$	Encadrement de α
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	Jusqu'au résultat demandé

Mystère 16 : Comment déterminer le signe d'une fonction f ?

- Une fonction f est dite positive ($f(x) > 0$) sur un intervalle I si elle est minorée par 0 sur I . ou $\forall x \in I, f(x) > 0$, si le minimum absolu est positif.

- Une fonction f est dite négative ($f(x) < 0$) sur un intervalle I si elle est majorée par 0 sur I . ou $\forall x \in I, f(x) < 0$, si le maximum absolu est négatif.

Exercice d'application (Mystère 11 à 16)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x + 1$

1. Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
3. En déduire les extremums relatifs de la fonction g .
4. a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α .
b. Vérifier que : $\alpha \in]-1; 0[$
5. Donner un encadrement de α par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2.
6. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

$$g(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x + 1$$

1) Calculons les limites de g

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^3 - 9x^2 + 6x + 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^3 - 9x^2 + 6x + 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty}$$

2) Etude le sens de variation de g
* Calcul de la dérivée

Solution

3) Déterminons les extremums relatifs
 $g'(x)$ s'annule et change de signe en $\frac{1}{2}$ et en 1.

$$\text{on a } g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} \text{ et } g(1) = 2$$

On déduit que $\frac{9}{4}$ est le maximum relatif de g et 2 est le minimum relatif de g.

4) a) Démontrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α .

d'après le tableau de variation de g
Sur $] -\infty; \frac{1}{2} [$, g est continue et strictement croissante, alors g réalise une bijection de $] -\infty; \frac{1}{2} [$ vers $] -\infty; \frac{9}{4} [$, or $0 \in] -\infty; \frac{9}{4} [$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in] -\infty; \frac{1}{2} [$.

5) Donnons un encadrement de α par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2.

on a $\alpha \in]-1; 0[$

encadrement de α d'ordre 1

x	-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0
$g(x)$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+

donc $-0,2 < \alpha < -0,1$

encadrement de α d'ordre 2

x	-0,2	-0,19	-0,18	-0,17	-0,16	-0,15	-0,14	-0,13	-0,12	-0,11	-0,1
$g(x)$	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+

donc $-0,14 < \alpha < -0,13$

6) déterminer le signe de $g(x)$

x	$-\infty$	α	$1/2$	1	$+\infty$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$						
signe de $g(x)$	$-$	0	$+$			

On en déduit :

$\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0$, car g est majorée par 0.

$\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$, car g est minorée par 0.

Mystère 17: Comment déterminer les asymptotes d'une courbe représentative de f ?

- Si $\lim_{x \rightarrow \text{réel}} f(x) = \infty$, alors (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = \text{réel}$.

- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \text{réel}$, alors (C) admet une asymptote horizontale d'équation $y = \text{réel en cet } \infty$.

Retiens ça : RIVIRH

RIV $\rightarrow \lim_R = I \Rightarrow \text{asym Verticale}$

IRH $\rightarrow \lim_I = R \Rightarrow \text{asym Horizontale}$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, alors (C) admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ en cet ∞ .

Exercice d'application

Soit $f(x) = \frac{3x^2+2}{x^2+1}$, de courbe représentative (C_f)

Calculer la limite de f en $-\infty$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Soit $g(x) = \frac{x^3}{x-1}$, de courbe représentative (C_g)

Calculer la limite de g en 1, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Soit $h(x) = \frac{x^2+2x+5}{x+1}$, de courbe représentative (C_h)

Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C_h) en $+\infty$.

Solution

• $f(x) = \frac{3x^2+2}{x^2+1}$

Calculons la limite de f en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2+2}{x^2+1}$$

Mystère 18 : Comment étudier la position relative de (C)
par rapport à (D) ?

Il s'agit

d'abscisse x_0 .

Exercice d'application

Soit $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$, de courbe représentative (C).

Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

Sachant que $f'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(1+x^3)^2}$.

Soit $f(x) = \sqrt{x}$, de courbe représentative (C').

Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter le résultat obtenu.

Soit $f(x) = x^2 - 2x$, de courbe représentative (C'').

Démontrer que (C'') admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

Solution

• $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$

Déterminons l'équation de la tangente (T.)

on a (T) : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$\Rightarrow y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

on a $f'(0) = -1$ et $f(0) = 1$

donc $y = -x + 1$

• $f(x) = \sqrt{x}$

Etudions la dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{x \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$

Interprétation :

(C') admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

• $f(x) = x^2 - 2x$

Démontrer que (C') admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x - (-1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \end{aligned}$$

$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0}$, donc (C') admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

Mystère 20: Comment déterminer les branches infinies?

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty, \text{ alors } (C) \text{ admet une branche parabolique de direction } (0j). \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \text{ alors } (C) \text{ admet une branche parabolique de direction } (0i). \end{cases}$

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$, alors on calcule: $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$

- Si cette limite égale à b , alors (C) admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ en cet ∞ .

- Si cette limite égale à ∞ , alors (C) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation: $y = ax$.

Exercice d'application

Soit $f(x) = 2x^2 - x - \frac{2}{x-1}$, de courbe représentative (C)

Calculer la $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Soit $f(x) = \sqrt{x}$, de courbe représentative (C')

Démontrer que (C') admet une branche parabolique dont-on précisera sa direction.

Solution

- $f(x) = 2x^2 - x - \frac{2}{x-1}$

Calculons le $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x - \frac{2}{x-1}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 2x^2 - x^2 + x - 2}{x(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + x - 2}{x^2 - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty}$$

Interprétation: (C) admet une branche parabolique de direction (OJ)

- $f(x) = \sqrt{x}$; $\mathcal{D}_f = [0; +\infty[$

Démontrons que (C') admet une branche parabolique

Calculons d'abord la $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

PAO (Possibilité d'Asymptote Oblique)

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0}$$

donc (C') admet une branche parabolique de direction (OI)

Mystère 21 : Comment déterminer les points particuliers?

- Pour trouver le point d'intersection entre (C) et l'axe des abscisses, on résout nécessairement l'équation $f(x) = 0$. (il faut savoir que $y = 0$)
- Pour trouver le point d'intersection entre (C) et l'axe des ordonnées, on calcule $f(0)$. (il faut savoir que $x = 0$)

Exercice d'application

Soit la fonction f définie par :
$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 1[, f(x) = 2x^2 - x - \frac{2}{x-1} \\ \forall x \in]1; +\infty[, f(x) = x - \frac{2}{x-1} \end{cases}$$

(C) et (C') sont des respectivement les courbes représentatives de f sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

Déterminer les coordonnées des points d'intersection :

1) de (C) avec l'axe des ordonnées.

2) de (C') avec l'axe des abscisses.

Solution

1) Déterminons les coordonnées du point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées

soit A le point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées

Calculons $f(0)$

$$f(0) = 2(0)^2 - (0) - \frac{2}{0-1}$$

$$f(0) = 2$$

donc

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2) Déterminons les coordonnées du point d'intersection de (C') avec l'axe des abscisses

soit B le point d'intersection de (C') avec l'axe des abscisses

Réolvons l'équation $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x - \frac{2}{x-1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - x - 2}{x-1} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 2$$

Or $-1 \notin]1; +\infty[$, d'où $x = 2$

donc
$$B \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mystère 22: Comment montrer que la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de (C) ?

On montrer que $\forall x \in Df$, on a $(2a - x) \in Df$ et $f(2a - x) = f(x)$.

Exercice d'application

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 7$, de courbe représentative (C)

Démontrer que la droite (D) d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de (C) .

Démontrons que la droite (D) d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de (C) . *Solution*

on a $Df = \mathbb{R}$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $(4 - x) \in \mathbb{R}$ et montrons que $f(4 - x) = f(x)$

$$\begin{aligned} f(4 - x) &= (4 - x)^2 - 4(4 - x) + 7 \\ &= 16 - 8x + x^2 - 16 + 4x + 7 \\ &= x^2 - 4x + 7 \end{aligned}$$

$$f(4 - x) = f(x)$$

donc la droite (D) d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de (C) .

Mystère 23: Comment montrer que le point $A(a; b)$ est un centre de symétrie de (C) ?

On montrer que $\forall x \in Df$, on a $(2a - x) \in Df$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$

Exercice d'application

Soit $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$, de courbe représentative (C)

Démontrer que le point $A(2; 3)$ est un centre de symétrie de (C) .

Solution

Démontrons que le point $A(2; 3)$ est un centre de symétrie de (C)

$$Df = \{x/x \in \mathbb{R}, x - 2 \neq 0\}, \text{ donc } Df =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a $(4-x) \in \mathbb{R}$ et montrons que $f(4-x) + f(x) = 6$.

$$\begin{aligned}
 f(4-x) + f(x) &= \frac{(4-x)^2 - (4-x) - 1}{(4-x) - 2} + \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} \\
 &= \frac{16 - 8x + x^2 - 4 + x - 1}{x - 2} + \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} \\
 &= \frac{-x^2 + 7x - 11}{x - 2} + \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} \\
 &= \frac{-x^2 + 7x - 11 + x^2 - x - 1}{x - 2} \\
 &= \frac{6x - 12}{x - 2} \\
 &= \frac{6(x - 2)}{x - 2} \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

$f(4-x) + f(x) = 6$, donc le point $A(2;3)$ est un centre de symétrie de (C)

Mystère 24: Comment calculer $f(\alpha)$?

Pour calculer $f(\alpha)$, on se sert généralement de $g(x)$ et de $f(x)$.

(l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α signifie que $g(\alpha)=0$)

- On remplace α dans $f(x)$, puis on cherche l'expression de la fonction qui est dans $f(\alpha)$ et qui ne se trouve pas dans $f(\alpha)$ à démontrer, à partir de l'équation $g(\alpha)=0$.

- On remplace cette expression dans $f(\alpha)$, puis on termine la démonstration.

Exercice d'application

Solent $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$ et $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

Montrer que $f(\alpha) = \frac{2(1-\alpha)}{3(1+\alpha^2)}$, sachant que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α .

Solution

Montrons que $f(\alpha) = \frac{2(1-\alpha)}{3(1+\alpha^2)}$

On a $f(\alpha) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha^3}$

$$\text{On } g(\alpha) = 0 \Rightarrow 2\alpha - 3\alpha^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^3 = \frac{3\alpha^2 + 1}{2}$$

remplaçons α^3 dans $f(\alpha)$

$$f(\alpha) = \frac{1-\alpha}{1 + \frac{3\alpha^2+1}{2}} \Rightarrow f(\alpha) = \frac{1-\alpha}{\frac{2+3\alpha^2+1}{2}}$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = \frac{2(1-\alpha)}{3\alpha^2+3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(\alpha) = \frac{2(1-\alpha)}{3(\alpha^2+1)}}$$

Mystère 25: Comment encadrer $f(\alpha)$?

On se sert de l'encadrement de α pour déterminer celui de $f(\alpha)$.

Exercice d'application

Soit $f(\alpha) = 2\alpha + 1 + \frac{2}{\alpha-1}$, on donne $-0,4 < \alpha < -0,3$

Justifier que : $-1,34 < f(\alpha) < -1,03$

Solution

justifions que : $-1,34 < f(\alpha) < -1,03$

on a $-0,4 < \alpha < -0,3$

$$\Rightarrow -0,8 < 2\alpha < -0,6$$

$$\Rightarrow 0,2 < 2\alpha + 1 < 0,4 \quad (1)$$

Par ailleurs :

$$-0,4 < \alpha < -0,3$$

$$\Rightarrow -1,4 < \alpha - 1 < -1,3$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{1,3} < \frac{1}{\alpha-1} < -\frac{1}{1,4}$$

$$\Rightarrow -1,54 < \frac{2}{\alpha-1} < -1,43 \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 0,2 - 1,54 < 2\alpha + 1 + \frac{2}{\alpha-1} < 0,4 - 1,43$$

donc

$$\boxed{-1,34 < f(\alpha) < -1,03}$$

Mystère 26: Comment tracer la courbe représentative d'une fonction ?

- On utilise un tableau de valeurs de la fonction.

x	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$f(x)$	...	...	...	...	...	...	...	...	...

- On se sert du tableau de variation de la fonction pour représenter la courbe de la fonction en précisant les asymptotes, les tangentes et les points particuliers.

NB : il faut d'abord représenter les asymptotes, les tangentes et les points particuliers avant de représenter la courbe.

La courbe représentative d'une fonction ne doit pas toucher les asymptotes (verticales et horizontales).

Exercice d'application

Soit le tableau de variation de f , de courbe représentative (C)

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-4	$+\infty$	4	$+\infty$	

- La droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à (C).
- La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
- Le point A $(-1; 0)$ est le centre de symétrie de (C).
- $y = -3x - 11$ est une équation de la tangente au point d'abscisse -2 .

Solution

Tableau de valeurs

u	-5	-3	-2	0	1	2	3	5
$f(u)$	-5	-4	-5	5	4	$\frac{13}{3}$	5	$\frac{40}{3}$

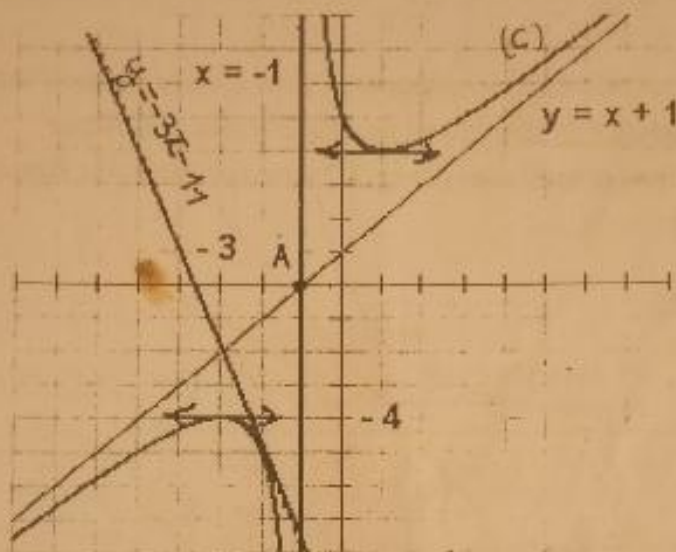
$$(T): y = -3x - 11$$

x	-2	-5
y	-5	4

• (C) admet une asymptote horizontale en -3 et 1.

$$y = x + 1$$

x	0	-1
y	1	0



Mystère 27: Comment démontrer qu'une fonction f réalise une bijection de l'intervalle I vers $f(I)$?

Le théorème de bijection : voir mystère 13

Mystère 28: Comment démontrer qu'une fonction f admet une bijection réciproque f^{-1} ?

Si f réalise une bijection, alors elle admet une bijection réciproque f^{-1} .

Son tableau de variation:

Si $f: A \rightarrow B$, alors $f^{-1}: B \rightarrow A$

- f et f^{-1} ont le même sens de variation.

Exemple:

x	$-\infty$	$+\infty$	α
$f'(x)$		+	
$f(x)$			β



x	3	5	β
$(f^{-1})'x$		+	
$(f^{-1})x$			$+\infty$

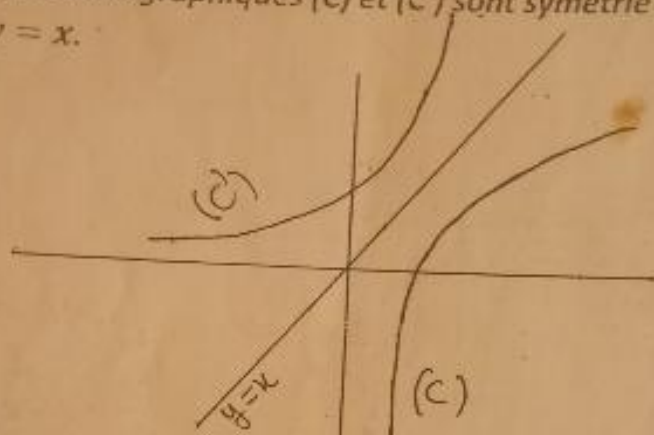
$-\infty$

Attention : si la fonction est décroissante, il faut bien regarder l'intervalle.

- La représentation de f^{-1} : soit (C') sa représentation graphique

leurs représentations graphiques (C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple :



NB : si on demande d'expliciter la bijection réciproque de f^{-1} , il faut résoudre l'équation $f(x) = b$; puis remplacer b par x . Tu obtiens enfin $f^{-1}(x)$.

Mystère 29 : Comment calculer $(f^{-1})'(\beta)$?

Soit f une bijection sur un intervalle I .

- On détermine α , tel que : $f(\alpha) = \beta$.
- On calcule $f'(\alpha)$ et on vérifie si $f'(\alpha) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable au point β .
- On conclue : $(f^{-1})'(\beta) = \frac{1}{f'(\alpha)}$

Exercice d'application (Mystère 27 à 29)

Soit h la restriction de f à l'intervalle $]1; +\infty[$ ($\forall x \in]1; +\infty[, f(x) = h(x)$)

1. Justifier que h est une bijection de $]1; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
2. Dresser le tableau de h^{-1} la bijection réciproque de h .
3. Calculer $(h^{-1})'(0)$.

On donne :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$+\infty$ $-\infty$

$$f(x) = x - \frac{2}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2}$$

Solution

- 1) Justifions que h est une bijection de $]1; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$

Tableau variation de h

x	1	$+\infty$
$h'(x)$		+
$h(x)$		$+\infty$ $-\infty$

d'après le tableau de variation de h sur $]1; +\infty[$, h est continue et strictement croissante, donc h réalise une bijection de $]1; +\infty[$ vers $h(]1; +\infty[) =]-\infty; +\infty[$

- 2) Dressons le tableau de variation de h^{-1}

x	$-\infty$	$+\infty$
$h^{-1}(x)$		+
$h^{-1}(x)$	1	$+\infty$

- 3) Calculons $(h^{-1})'(0)$

- Résolvons l'équation $h(x) = 0$

d'après la solution de l'exo du mystère 21

On a $\boxed{x = 2}$

- Calculons $h'(2)$

$$h'(2) = \frac{(2)^2 - 2(2) + 3}{(2-1)^2}$$

$$\boxed{h'(2) = 3} \Rightarrow h'(2) \neq 0$$

$$\text{donc } (h^{-1})'(0) = \frac{1}{h'(2)}$$

$$\boxed{(h^{-1})'(0) = \frac{1}{3}}$$

Mystère 30 : Inégalité des accroissements finis.

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$. S'il existe deux nombres réels m et M tels que $\forall x \in [a; b], m \leq f'(x) \leq M$, alors on a :
 $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$
- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$. S'il existe un nombre réel M tel que $\forall x \in [a; b], |f'(x)| \leq M$, alors on a : $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$

Exercice d'application

Soit $f(x) = \sqrt{1+x}$, en utilisant l'inégalité des accroissements finis sur $[0; a]$.

Démontrer que $\forall a \in [0; 1], \frac{a}{2\sqrt{1+a}} \leq \sqrt{1+a} - 1 \leq \frac{1}{2}a$

Sachant que f' est strictement décroissante sur $[0; a]$.

Solution

Démontrons que $\forall [0; 1], \frac{a}{2\sqrt{1+a}} \leq \sqrt{1+a} - 1 \leq \frac{1}{2}a$

On a $x \in [0; a] \Rightarrow 0 \leq x \leq a$

Comme f' est strictement décroissant sur $[0; a]$

on a donc $f'(a) \leq f'(x) \leq f'(0)$

$$\text{Or } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{1+a}} \text{ et } f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } \frac{1}{2\sqrt{1+a}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$$

d'après le théorème des accroissements finis sur $[0; a]$

$$\text{on a } \frac{1}{2\sqrt{1+a}} (a-0) \leq f(a) - f(0) \leq \frac{1}{2} (a-0)$$

$$\boxed{\frac{a}{2\sqrt{1+a}} \leq \sqrt{1+a} - 1 \leq \frac{1}{2}a}$$

Mystère 31 : Comment déterminer la restriction d'une fonction h ?

On dit que h est la restriction de f sur un intervalle $[a; b]$ si et seulement si $\forall x \in [a; b], h(x) = f(x)$ avec $D_h = [a; b]$

Exercice d'application

Soient $f(x) = |x - 2|$, $D_f = \mathbb{R}$ et $h(x) = \left| \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} \right|$

Démontrer que h est la restriction de f sur un intervalle dont-on déterminant.

Solution

Démontrons que h est la restriction de f

on a $D_h = \{x/x \in \mathbb{R}, x + 3 \neq 0\}$

$$x + 3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq -3$$

$$\text{donc } D_h =]-\infty, -3[\cup]-3, +\infty[$$

$$\forall x \in D_h, h(x) = \left| \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} \right|$$

$$= \left| \frac{(x-2)(x+3)}{x+3} \right|$$

$$= |x - 2|$$

$$\forall x \in D_h, h(x) = f(x)$$

donc h est la restriction de f sur $]-\infty, -3[\cup]-3, +\infty[$.

Mystère 32: Comment déterminer le point d'inflexion de C ?

Soit f une fonction deux fois dérivable en un point a et de courbe représentative (C) . Le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de (C) si et seulement si f'' s'annule en a en changeant de signe.

Exercice d'application

Soit $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$, de courbe représentative (C) .

Montrer que le point $A(-\frac{1}{3}; -\frac{16}{27})$ est point d'inflexion de (C) .

Solution

Montrons que le point $A(-\frac{1}{3}; -\frac{16}{27})$ est point d'inflexion de (C)

On a $D_f = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

$$f''(x) = 6x + 2$$

$$\text{posons } f''(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$f(-\frac{1}{3}) = (-\frac{1}{3})^3 + (-\frac{1}{3})^2 - (-\frac{1}{3}) - 1$$

$$f(-\frac{1}{3}) = -\frac{16}{27}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

Donc $A(-\frac{1}{3}; -\frac{16}{27})$ est point d'inflexion de (C)

Mystère 33: Comment montrer qu'une fonction f est convexe et concave?

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

- Si f'' est strictement positive sur I , alors f est convexe sur I .
- Si f'' est strictement négative sur I , alors f est concave sur I .

Exercice d'application

Soit $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 1$

Montrer que f est convexe sur $]1; +\infty[$ et concave sur $]-\infty; 1[$

Solution

Montrons que f est convexe sur $]1; +\infty[$ et concave sur $]-\infty; 1[$

On a $\mathcal{D}_f =]-\infty; +\infty[$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^2 - 2x$$

$$\Rightarrow f''(x) = 2x - 2$$

$$\text{posons } f''(x) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$\forall x \in]-\infty; 1[$, f'' est strictement négative
donc f est concave sur $]-\infty; 1[$
 $\forall x \in]1; +\infty[$, f'' est strictement positive
donc f est convexe sur $]1; +\infty[$



Mystère 34 : Formules des primitives.

fonction f	fonction primitive F	fonction f	fonction primitive F	fonction f	fonction primitive F	fonction f	fonction primitive F
0	$k(C)$	$\sin x$	$-\cos x$	af	aF	$\frac{1}{x}$	$\ln x $
a (cte)	ax	$\cos x$	$\sin x$	$\frac{u'u^a}{(a \neq -1)}$	$\frac{u^{a+1}}{a+1}$	$\frac{u'}{u}$	$\ln u $
x^n ($n \neq -1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\sin(ax+b)$ ($a \neq 0$)	$-\frac{1}{a} \cos(ax+b)$	$\frac{u'}{u^n}$ ($n \neq 1$)	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	e^x	e^x
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\cos(ax+b)$ ($a \neq 0$)	$\frac{1}{a} \sin(ax+b)$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	e^{nx} ($n \neq 0$)	$\frac{e^{nx}}{n}$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3} x\sqrt{x}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$\frac{u'}{\cos^2 u}$	$\tan u$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cotan x$	$u' \cos u$	$\sin u$	$\frac{u'}{\sin^2 u}$	$-\cotan u$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	$f+g$	$F+G$	$u' \sin u$	$-\cos u$	$u' \tan u$	$-\ln \cos u $

Mystère 35 : Comment montrer qu'une fonction h est une primitive d'une fonction f ?

Il s'agit de montrer que $h'(x) = f(x)$.

Exercice d'application

Soient $f(x) = x + 2 + xe^{-2x}$ et $g(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2})e^{-2x}$

Montrer que g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.