

NOMBRES COMPLEXES

♦ *Les différentes formes d'un nombre complexe :*

Soient $(a, b, \theta) \in \mathbb{R}^3$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$		
Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
$z = a + ib$	$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$	$z = re^{i\theta}$
$a = \Re(z)$ et $b = \Im(z)$	$r = z = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\theta = \arg(z) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{r} \\ \sin \theta = \frac{b}{r} \end{cases}$	

♦ *Egalité de deux nombres complexes :*

Avec les formes algébriques $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$	Avec les formes exponentielles $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$
$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$ En particulier : $z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$	$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

◆ *Conjugué d'un nombre complexe :*

	Propriétés	
	Soit $z \in \mathbb{C}$	Soient Soit z et $z' \in \mathbb{C}$
• $z = a + ib \Leftrightarrow \bar{z} = a - ib$ • $z = re^{i\theta} \Leftrightarrow \bar{z} = re^{-i\theta}$	• $z + \bar{z} = 2\Re(z)$ • $z - \bar{z} = 2\Im(z)$ • $z\bar{z} = z ^2$ • $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$ si $z \neq 0$ • $\overline{z^n} = \bar{z}^n \forall n \in \mathbb{Z}$	• $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ • $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$ • $\frac{\bar{z}}{z'} = \frac{\bar{z}}{z'} \text{ si } z' \neq 0$

◆ *Module d'un nombre complexe :*

Propriétés		
• $z = 0 \Leftrightarrow z = 0$ • $z + z' \leq z + z'$	• $-z = z \text{ et } \bar{z} = z$ • $zz' = z z'$	• $\left \frac{z}{z'} \right = \frac{ z }{ z' } \text{ avec } z' \neq 0$ • $z^n = z ^n \forall n \in \mathbb{Z}$

◆ *Arguments :*

Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors :	
• $\arg(z z') = \arg(z) + \arg(z')$ • $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$	• $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ • $\arg(z^n) = n \arg(z)$

◆ *Formules d'Euler et Formule de Moivre :*

Formules d'Euler	$\forall \theta \in \mathbb{R} :$ $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
Formule de Moivre	$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z} :$ $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ ou $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

◆ *Equation du second degré $az^2 + bz + c = 0$:*

Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$	
Δ est un réel	Si $\Delta \geq 0$ alors $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
	Si $\Delta < 0$ alors $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
Δ n'est pas un réel	Pour $\delta = x + iy, \delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$ Et alors $z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$

◆ *Interprétation géométrique :*

Soient M et M' deux points du plan complexe d'affixes respectives z et z'

- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est z ; la distance $OM = |z|$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z)$
- M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 $\Leftrightarrow |z| = 1$
- M appartient à l'axe des réels $(O, \vec{u}) \Leftrightarrow \arg(z) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $z = 0$
- M appartient à l'axe des imaginaires $(O, \vec{v}) \Leftrightarrow \arg(z) = \pm \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est $z' - z$ et la distance $MM' = |z' - z|$
- L'affixe du milieu de $[MM']$ est $\frac{z + z'}{2}$

Soient A, B, C et D des points du plan complexe

- L'affixe du centre de gravité du triangle ABC est $\frac{z_A + z_B + z_C}{3}$
- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$
- $|z_B - z_A| = AB$ et $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$
- $\left| \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right| = \frac{CD}{AB}$ et $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$

◆ *Caractérisation de configurations et de figures :*

- $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un réel $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0 \text{ ou } \pi \Leftrightarrow (AB) \parallel (CD)$
- $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \pm \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (AB) \perp (CD)$
- $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow ABC$ est rectangle en A
- $\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \Leftrightarrow AB = AC \Leftrightarrow ABC$ est isocèle de sommet A
- $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i \Leftrightarrow AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow ABC$ est rectangle isocèle en A
- $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\pm i \frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow ABC$ est équilatéral

◆ *Caractérisation d'ensemble de points :*

L'ensemble des points M d'affixe z tel que

- $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la médiatrice du segment $[AB]$
- $|z - z_A| = r$ est le cercle de centre A et de rayon r
- $\arg(z - z_A) = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ est la demi-droite d'origine A dirigée par le vecteur $\vec{\omega}$ tel que $(\vec{u}, \vec{\omega}) = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\frac{z - z_B}{z - z_A}$ soit réel est la droite (AB) privée de A
- $\frac{z - z_B}{z - z_A}$ soit un réel strictement négatif est le segment $[AB]$ privée de A et B
- $\frac{z - z_B}{z - z_A}$ soit un réel strictement positif est la droite (AB) privée du segment $[AB]$
- $\frac{z - z_B}{z - z_A}$ soit imaginaire pur est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B

◆ *Transformations du plan :*

M est le point d'affixe z et M' est le point d'affixe z'

- **Translation :** M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{\omega}$ si et seulement si $z' = z + z_{\vec{\omega}}$
- **Rotation de centre A :** M' est l'image de M par la rotation de centre A et d'angle θ si et seulement si $z' - z_A = e^{i\theta}(z - z_A)$
- **Rotation de centre O :** M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ si et seulement si $z' = e^{i\theta}z$
- **Homothétie :** M' est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ si et seulement si $z' - z_A = k(z - z_A)$
- **Similitude :** M' est l'image de M par la similitude de centre A et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ si et seulement si $z' - z_A = ke^{i\theta}(z - z_A)$