

CALCUL INTEGRAL ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES

CALCUL INTEGRAL

◆ *Intégrale et Primitives :*

- Si F est une primitive de f sur I alors $\forall a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

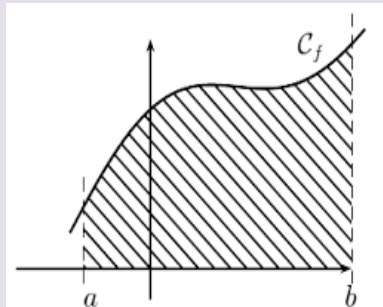
- Si $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors, $g'(x) = f(x)$ et donc g est la primitive de f qui s'annule en a

◆ *Propriétés de l'intégrale :*

- **Relation de Chasles :** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- **Antisymétrie :** $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- **Linéarité :** $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$
- **Positivité :** $f \geq 0$ sur $[a ; b]$, $a \leq b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$
- **Conservation de l'ordre :** $f \geq g$ sur $[a ; b]$, $a \leq b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
- **Inégalité de la moyenne :**
$$\begin{cases} m \leq f \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \\ |f| \leq M \Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M|b-a| \end{cases}$$
- **Valeur moyenne :** la valeur moyenne de f sur $[a ; b]$: $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$
- **Intégration par parties :** $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

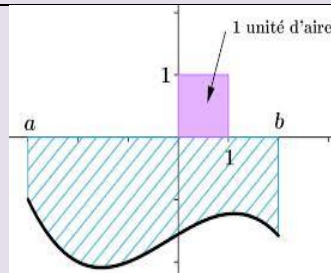
◆ *Calcul d'aires :*

***f* est positive**



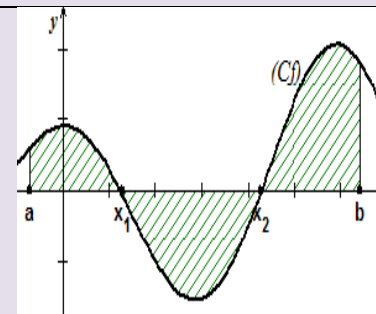
$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx \times ua$$

***f* est négative**



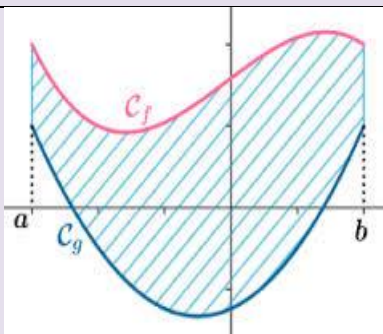
$$\mathcal{A} = - \int_a^b f(x)dx \times ua$$

***f* est de signe quelconque**



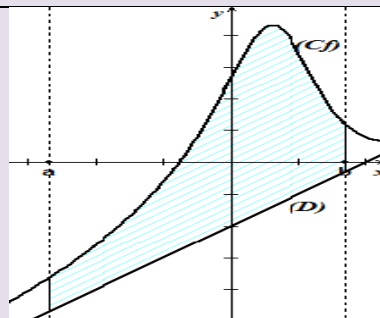
$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$$

Aire entre deux courbes

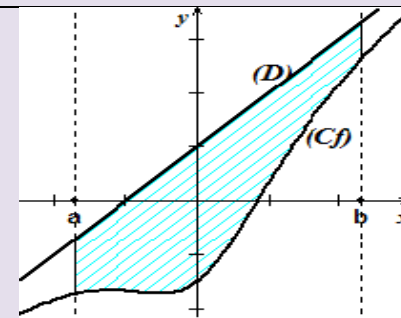


$$\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \times ua$$

Aires entre une courbe et une droite



$$\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - y]dx \times ua$$

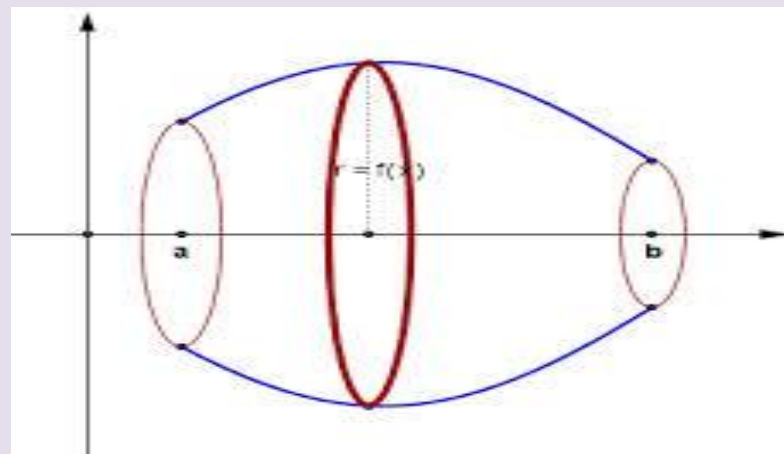


$$\mathcal{A} = \int_a^b [y - f(x)]dx \times ua$$

◆ Calcul de Volumes :

Volume du solide de révolution engendré par rotation autour de l'axe des abscisses

L'espace étant rapporté à un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la rotation de la partie du plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ délimité par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ autour de l'axe des abscisses engendre un solide de révolution.



$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \times uv$$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Au programme		
Equations différentielles	Solution générale	Solution particulière
$y' = ay$ (a réel)	$y = \overbrace{ke^{ax}}$ avec $k \in \mathbb{R}$	Il existe une unique solution satisfaisant à la condition initiale $y(x_0) = y_0$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$y = A \cos \omega x + B \sin \omega x$ avec $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$	Il existe une unique solution satisfaisant aux conditions initiales $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$

Hors programme

Equation différentielle	Solution
$ay'' + by' + c = 0$	Elle s'exprime à l'aide des racines r_1 et r_2 de son équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$. • Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors r_1 et r_2 sont réels et $y = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$ • Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ alors $r_1 = r_2 = r_0$ est réel et $y = (Ax + B)e^{r_0x}$ • Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont complexes conjugués et $y = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$ Dans tous les cas, Il existe une unique solution satisfaisant aux conditions initiales $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$