

DERIVATION ET NOTION DE PRIMITIVES

DERIVATION

♦ Etude de la dérivabilité en un point :

f est dérivable en un point x_0 , s'il existe un réel ℓ tel que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$

ou encore $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \ell$

$\ell = f'(x_0)$ est alors appelé nombre dérivé de f en x_0

$$\left. \begin{array}{l} \circ \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_1 \\ \circ \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_2 \\ \circ \ell_1 \neq \ell_2 \end{array} \right\} \text{ ou } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty \Rightarrow f \text{ n'est pas dérivable en } x_0$$

◆ *Fonctions dérivées usuelles :*

f' désigne la fonction dérivée de f sur I		
Fonction	Dérivée	I
$f(x) = k$ (k réel)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ ($n \geq 2$)	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$] 0 ; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

◆ *Opérations et dérivées :*

Opérations et dérivées		Dérivées successives
• $(u + v)' = u' + v'$ • $(ku)' = ku' (k \text{ réel})$ • $(uv)' = u'v + v'u$ • $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} (u \neq 0)$ • $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} (v \neq 0)$ • $(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$ • $(u^n)' = nu'u^{n-1} (n \geq 2)$	• $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = \frac{-nu'}{u^{n+1}} (n \geq 1)$ • $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} (u > 0)$ • $(\ln u)' = \frac{u'}{u} (u > 0)$ • $(\ln u)' = \frac{u'}{u} (u \neq 0)$ • $(e^u)' = u'e^u$	$\left\{ \begin{array}{l} \circ f^{(0)} = f \\ \circ f^{(1)} = f' \\ \circ f^{(2)} = f'' \\ \circ f^{(n)} = [f^{(n-1)}]' \forall n \geq 1 \end{array} \right.$

Dérivée d'une bijection réciproque

$$\left. \begin{array}{l} \circ f \text{ est bijective de } I \text{ sur } J \\ \circ f \text{ est dérivable sur } I \\ \circ \forall x \in I, f'(x) \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \circ f^{-1} \text{ est dérivable sur } J \\ \circ \forall y \in J, (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \end{array} \right.$$

◆ *Dérivée et sens de variation :*

Soit f' la fonction dérivée de f sur I :

- Si $\forall x \in I, f'(x) > 0$, alors, f est strictement croissante sur I
- Si $\forall x \in I, f'(x) < 0$, alors, f est strictement décroissante sur I
- Si $\forall x \in I, f'(x) = 0$, alors, f est constante sur I

◆ *Dérivée et extrémum relatif :*

Si f' s'annule x_0 et change de signe alors f admet un extrémum relatif en x_0

Plus précisément

$$\left. \begin{array}{l} \circ \forall x \in]a ; x_0[, f'(x) < 0 \\ \circ \forall x \in]x_0 ; b[, f'(x) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \text{ (minimum)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \circ \forall x \in]a ; x_0[, f'(x) > 0 \\ \circ \forall x \in]x_0 ; b[, f'(x) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \text{ (maximum)}$$

PRIMITIVES

◆ Primitives des fonctions usuelles :

F est une primitive de f sur I si $F'(x) = f(x)$		
Fonction	Primitives	I
$f(x) = 0$	$F(x) = k$ (k réel)	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + k$	$] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ ($n \geq 2$)	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + k$ ($n \geq 2$)	$] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$	$] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + k$	$\mathbb{R}$

Fonction	Primitives	I
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + k$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + k$	$] -\infty ; 0[\text{ ou }]0 ; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$	$\mathbb{R}$

◆ *Primitives et opérations :*

On suppose que u est une fonction dérivable sur I					
$f = u' u^n$	$F = \frac{1}{n+1} u^{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$		$f = u' \cos u$	$F = \sin u$	
$f = \frac{u'}{u^2}$	$F = -\frac{1}{u} (u \neq 0 \text{ sur } I)$		$f = u' \sin u$	$F = -\cos u$	
$f = \frac{u'}{u^n}$	$F = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} (u \neq 0 \text{ sur } I \text{ et } n \geq 2)$		$f = \frac{u'}{u}$	$F = \ln u (u \neq 0 \text{ sur } I)$	
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u} (u > 0 \text{ sur } I)$		$f = u' e^u$	$F = e^u$	