

DS 1 Limites et continuité - 2BAC SM 25/26 - modèle 1

Mohibi Maths

Cours de soutien à distance : +212 711-201796 (Whatsapp)

Exercice 01 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \prod_{k=1}^n \cos(kx)}{x^2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \prod_{k=1}^n \cos^k(x)}{x^2}$$



Exercice 02 :

Soit la fonction f définie sur $[0, 1]$ par : $(\forall x \in \mathbb{R}), f(x) = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}E(2x) - \frac{1}{2}E(1 - 2x)$
où $E(x)$ désigne la partie entière du réel x

1. Étudier la continuité de f sur $[0, 1]$, puis tracer la courbe (C_f) .
2. Montrer que f est une bijection de $[0, 1]$ sur lui-même.

Exercice 03 :

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I telles que :

- f est bornée sur I et discontinue en un point $x_0 \in I$.
- g est continue en x_0 .

Montrer que la fonction $f \cdot g$ est continue en x_0 si et seulement si $g(x_0) = 0$.

Exercice 04 :

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a < b$.

Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a; b]$ telles que :

$$(\forall x \in [a; b]) (\exists y \in [a; b]), f(x) = g(y).$$

Montrer qu'il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ tel que : $f(c) = g(c)$.

Exercice 05 :

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $(\forall x \in \mathbb{R}), f(x) = x^4 + x^2 + ax - 2$.

1. Montrer que l'équation $(E) : f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1; 2]$.
2. Cette solution est-elle unique ? Justifier votre réponse.

Exercice 06 :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, tel que l'équation : $f(f(x)) = x$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe au moins un nombre réel c tel que : $f(c) = c$.

Exercice 07 :

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0; 1]$ telle que : $f(0) = 1$ et $f(1) = 5$.

Montrer qu'il existe au moins un réel $c \in [0; 1]$ tel que : $f\left(c + \frac{1}{2}\right) - f(c) = 2$.

Exercice 08 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (non vide et non réduit à un point) et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I .

L'objectif de cette exercice est de montrer que **f est strictement monotone sur I si et seulement si elle est injective.**

↔ On suppose f que est injective sur l'intervalle I .

1. Ecrire à l'aide des quantificateurs et connecteurs logiques la négation de l'assertion :
 $A : f$ est strictement monotone sur I .
2. On suppose que f n'est pas strictement monotone sur I , donc il existe $(a, b, c, d) \in I^3$, tels que :

$$a < b \quad \text{et} \quad f(a) \geq f(b) \quad \text{et} \quad c < d \quad \text{et} \quad f(c) \leq f(d)$$

(a) Justifier que $f(a) > f(b)$ et $f(c) < f(d)$.

(b) Soit h la fonction définie sur $[0; 1]$ par : $(\forall t \in [0; 1]), h(t) = f(at + (1-t)c) - f(bt + (1-t)d)$.

Montrer que h est bien définie et continue sur $[0; 1]$

(c) Montrer que $\exists t_0 \in]0; 1[, h(t_0) = 0$

(d) Dédire que h n'est pas injective.

3. Conclure.

↔ On suppose f que est strictement monotone sur l'intervalle I .

4. Montrer que f est injective sur l'intervalle I .
5. Conclure.



Exercice 09 :

On considère la fonction f définie sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $(\forall x \in I), f(x) = \sin x$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} et déterminer son domaine $D_{f^{-1}}$.
2. Montrer que la fonction f^{-1} est impaire.
3. Représenter graphiquement dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.
4. On considère la fonction $\varphi : x \mapsto f^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$
 - (a) Déterminer l'ensemble de définition D_φ .
 - (b) Montrer que : $\left(\forall x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right], \varphi(x) = 2f^{-1}(x)\right)$.



Solution 2 :

1. Étudions la continuité de f sur $[0; 1]$, puis traçons la courbe (C_f) .

Soit $x \in [0; 1]$.

— Si $x = 0$, alors $f(x) = 0$.

— Si $x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$, alors $0 < 2x < 1$ et $-1 < -2x < 0$.

Donc $E(2x) = 0$ et $0 < 1 - 2x < 1$.

Donc $E(2x) = 0$ et $E(1 - 2x) = 0$.

Donc $f(x) = \frac{1}{2} - x$.

— Si $x = \frac{1}{2}$, alors $f(x) = \frac{1}{2}$.

— Si $x \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$, alors $1 < 2x < 2$ et $-2 < -2x < -1$.

Donc $E(2x) = 1$ et $E(1 - 2x) = -1$.

Donc $f(x) = \frac{3}{2} - x$.

— Si $x = 1$, alors $f(x) = 1$.

$$\text{Par conséquent : } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{2} - x, & \text{si } x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } x = \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{2} - x, & \text{si } x \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[, \\ 1, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Comme $x \mapsto \frac{1}{2} - x$ est continue sur $\left]0; \frac{1}{2}\right[$ et $x \mapsto \frac{3}{2} - x$ est continue sur $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$ car elles sont polynomiales, alors f est continue sur $\left]0; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; 1\right[$.

Étude de la continuité à droite en 0 :

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{1}{2}.$$

Et $f(0) = 0$.

Donc f n'est pas continue à droite en 0.

Étude de la continuité en $\frac{1}{2}$:

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \left(\frac{3}{2} - x\right) = 1.$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \left(\frac{1}{2} - x\right) = 0.$$

$$\text{Et } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$



On a :

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= -f(x) + \frac{1}{2} (E(2f(x)) - E(-2f(x))) \\ &= x - \frac{1}{2} (E(2x) - E(-2x)) \\ &\quad + \frac{1}{2} [E(-2x + E(2x) - E(-2x)) - E(2x + E(-2x) - E(2x))] \\ &= x - \frac{1}{2} E(2x) + \frac{1}{2} E(-2x) \\ &\quad + \frac{1}{2} [E(-2x) + E(2x) - E(-2x) - E(2x) - E(-2x) + E(2x)] \\ &= x - \frac{1}{2} E(2x) + \frac{1}{2} E(-2x) + \frac{1}{2} E(2x) - \frac{1}{2} E(-2x) \\ &= x. \end{aligned}$$

Donc f est involutive.

Donc f réalise une bijection de $[0; 1]$ sur $[0; 1]$.

Et on a : $(\forall x \in [0; 1]), \quad f^{-1}(x) = f(x).$

