

EXERCICES D'ARITHMÉTIQUE

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

EXERCICE 01 :

1) Démontrer par récurrence que :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1+3+5+\dots+(2n+1) = (n+1)^2$

d) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{p=1}^n p(p+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

e) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

f) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{p=1}^n p(p+1)(p+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

g) $\forall n \in \mathbb{N}^* : 2 \times 6 \times 10 \times \dots \times (4n-2) = (n+1)(n+2) \times \dots \times 2n.$

h) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^n k 2^{k-1} = (n-1) \times 2^n + 1 ;$

i) $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} ; a \in \mathbb{R}_+, (1+a)^n > (1+n a)$

j) $\forall n \in \mathbb{N} \text{ et } n \geq 4, 2^n > n^2$

k) $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} .$

2°) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* , 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

En déduire la somme : $S = 12^3 + 13^3 + 14^3 + \dots + 20^3$.

3°) On pose $I_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* , I_n = \sqrt{2 + I_{n-1}} .$

Démontrer que $I_n = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

EXERCICE 02 :

1°) La division de 900 par un entier naturel b a pour quotient 14 et pour reste r. Quelles sont les valeurs possibles de b et r ?

2°) Détermine les entiers naturels n dont la division euclidienne par 16 a un reste égal au carré du quotient.

3°) Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b. Sachant que $a + b + r = 3025$ et $q = 50$. Rétablir la division.

4°) Détermine le reste de la division euclidienne de 11^{1999} par 7.

EXERCICE 03 :

1°) Quels sont les restes successifs de la division par 8 de 7^n . En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que : $7^n + 4n + 1$ soit divisible par 8.

2°) a) Quel est le reste de la division de 5^{136} par 7 ?

b) Un nombre s'écrit : $\overline{3x53}$ en base dix. Déterminer x pour que :

$5^{136} + \overline{3x53}$ soit divisible par 7.

3°) Les nombres sont écrits en base cinq ; effectuer les opérations suivantes

$$\begin{array}{r} 3421 \\ + 240 \\ \hline \\ = \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3421 \\ \times 230 \\ \hline \\ = \end{array}$$

EXERCICE 04 :

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

1) $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

2) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

3) $n^3 - n$ est divisible par 3.

4) $n^7 - n$ est divisible par 7.

EXERCICE 03 :

Dans le système de numération de base trois, un nombre s'écrit : $\overline{2101}^3$.

1°) Dans quel système de numération n ce nombre s'écrit : $\overline{224}^n$?

2°) Existe-t-il un système de numération dans lequel il s'écrit : $\overline{174}$.

3°) Soit a un entier naturel strictement supérieur à 2. On considère les nombres

$N = 2(a-1)$ et $N' = (a-1)^2$. Ecrire N et N' dans le système de base a .

4°) Démontrer que dans tout système de numération de base b (avec $b \geq 4$) le nombre $\overline{1331}$ est le cube d'un entier x .

EXERCICE 04 :

1°) Existe-t-il un entier N qui s'écrit $\overline{abcca}^5$ en base cinq et $\overline{bbab}^8$ en base huit.

2°) Déterminer x, y, z sachant que : $\overline{xyz}^7 = \overline{zyx}^9$.

3°) Déterminer le nombre entier A du système décimal qui s'écrit :

$$\overline{ab7}^9 \text{ et } \overline{a7b}^8.$$

4°) En utilisant la factorisation de $(x^2 + 3x + 1)^2 - 1$ montrer que dans tout système de numération de base b supérieur à 3 on a : $\overline{10} \times \overline{11} \times \overline{12} \times \overline{13} + 1 = (\overline{131})^2$.

EXERCICE 05:

1°) Le nombre entier naturel N , qui s'écrit $\overline{341}$ dans le système décimal, s'écrit $\overline{2331}^a$ en base a .

a) Trouver un encadrement de a^3 .

b) Déterminer a et vérifiez.

2°) Développer $(k + 1)^5$. Ecrire le nombre 13^5 dans le système de base 12.

EXERCICE 06:

1°) Soient x, y , et z trois entiers naturels avec $x \geq 2$. On suppose qu'en base x ; y s'écrit : $\overline{304}$ et z s'écrit : $\overline{100}$.

a) Quelle est l'écriture en base x du produit yz ?

b) Sachant que l'écriture décimale de $y + z$ est 104, déterminer les écritures décimales de x et du produit yz .

2°) Les nombres x, y et z étant trois entiers naturels, on suppose que l'écriture en base x de y est 131 et que l'écriture de z en base x est 101. Montrer que l'on peut sans connaître x , exprimer dans le système de base x le produit xy .

EXERCICE 07 :

Les entiers $\overline{cb}$, $\overline{bc}$, $\overline{ac}$ sont écrits dans le système à base dix. Déterminer les chiffres a , b , et c sachant que :

$$\begin{cases} a + b + 5c + 3 = \overline{cb} \\ \overline{bc} - \overline{ac} = 10c \end{cases}$$

EXERCICE 08 :

1°) Trouver le nombre de chiffres de l'écriture en base dix de : 2^{1999} .

2°) Trouver 3 entiers naturels a, b, c premier entre eux deux à deux tel que :

$$abc = 495$$

3°) x, y, z étant des chiffres de la base dix ; on considère le nombre $A = \overline{x13y8z}$ en base 10. Déterminer tout les triplets $(x ; y ; z)$ pour lesquels A est divisible par 495.

EXERCICE 09 :

1°) On note n un entier naturel non nul, p l'entier naturel $(3n + 1)$ et q l'entier naturel $(5n - 1)$ c'est-à-dire $p = 3n+1$ et $q = 5n-1$.

a) Démontrer que le P.G.C.D de p et q est un diviseur de 8.

b) Pour quelles valeurs de n ce **p.g.c.d** est-il égal à 8 ? . Calculer alors le P.P.C.M de p et q .

2°) Déterminer, selon les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne par 9 de 4^n . En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$ le nombre

$N = 22^{9n+2} - 31^{3n-1}$ est divisible par 9.

EXERCICE10:

1°) Déterminer un nombre N de trois chiffres tels que leur somme est égale à 17. Si on permute le chiffre des dizaines et celui des centaines le nombre augmente de 360. Si on permute le chiffre des unités et celui des centaines le nombre diminue de 198.

2°) Trouver tous les couples $(\dot{a}; \dot{b})$ d'éléments de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ tels que :

$$\dot{a}\dot{b} = \dot{0} \text{ et } \dot{a} - \dot{b} = \dot{5}.$$

Résoudre dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + \dot{3}x - \dot{4} = \dot{0}$.

3°) Calculer x^4 pour x appartenant à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. En déduire la valeur de $x^5 - x$. Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation : $x^5 + y^5 = \dot{3}$ puis l'équation : $x^2 - \dot{3}x + \dot{2} = \dot{0}$. Déterminer les entiers relatifs n tels que le reste de la division euclidienne de $n^2 - 3n$ par 5 soit égal à 3.

EXERCICE 11 :

1°) Montrer que $\forall x \in \mathbb{Z} : (x + 1)^4 \equiv x^4 + x^3 + x + 1 \pmod{3}$. En déduire l'ensemble (E) des éléments x de $\mathbb{Z}$ tels que : $x^4 + x^3 + x + 1 \equiv 0 \pmod{3}$. Discuter suivant les valeurs de m le nombre de solutions dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ de l'équation :

$$x^2 + x - m = \dot{0} \quad (m \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}).$$

2°) Ecrire les expressions des éléments de $\mathbb{Z}$ congrues à **a** modulo n .

a) **a** = $m - 1$; **n** = $m + 1$ avec $m \in [-1; +\infty[$;

b) **a** = $m^2 + 2$; **n** = $m - 4$ avec $m \in [1; +\infty[$;

3°) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les congruences : a) $n+5 \equiv 0 \pmod{n+3}$ b) $n^2 - 3n + 6 \equiv 0 \pmod{n+1}$.

4°) Trouver les restes des divisions euclidiennes de n^3 par 7. **n** entier naturel.

a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les congruences : $x^3 - 1 \equiv [7]$; $x^6 - 1 \equiv [7]$.

b) Quels sont les restes des divisions euclidiennes de 100 ; 102 ; 103 par 7 ?

c) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $100 + 102^n + 103^n \equiv 0 \pmod{7}$.

EXERCICE 12 :

1°) Soit $A = \frac{2n+18}{n+3}$; $n \in \mathbb{N}$.

- a) Pour quelles valeurs de n , A est-il un entier naturel ?
- b) Pour quelles valeurs de n , A est-il irréductible ?

2°) On considère l'entier naturel représenté en base b par : $N = \overline{342x}^b$.

Déterminer le chiffre x pour que ce nombre soit :

- a) divisible par 5 quand $b = 6$;
- b) On donne $x = 1$. Trouver la plus petite valeur de b sachant que N est divisible par 3.

EXERCICE 13

1°) Pour quelle valeurs de l'entier naturel n le nombre $A = 2n^2 - 3n + 3$ est-il divisible par $(n - 3)$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

a) $3x - 5y = 6$; b) $\begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ y \equiv x^2 [5] \end{cases}$

3°) Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

a) $(x \wedge y) + (x \vee y) = y + 9$; b) $2(x \vee y) + 3(x \wedge y) = 78$; c) $(x \vee y) - 18(x \wedge y) = 791$
d) $8(x \vee y) = 105(x \wedge y) + 30$; e) $(x \wedge y) = y + 9$.

f) $\begin{cases} x + y = 651 \\ \frac{x \vee y}{x \wedge y} = 108 \end{cases}$; g) $\begin{cases} x \vee y = 120 \\ x^2 + y^2 = 801 \end{cases}$; h) $\begin{cases} x + y = 56 \\ x \vee y = 105 \end{cases}$; i) $\begin{cases} x \wedge y = 7 \\ x \vee y = 84 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x \vee y = 168 \\ x \times y = 1008 \end{cases}$; k) $\begin{cases} x \wedge y = 354 \\ x + y = 5664 \end{cases}$; L) $\begin{cases} x + y = 312 \\ x \vee y = 1980 \end{cases}$

EXERCICE 14:

1°) Soit b un entier naturel strictement positif supérieur à 1. On rappelle que :
 $b^2 - 1 = (b - 1)(b + 1)$.

a) Quel est le P.G.C.D de b^2 et $(b - 1)$?

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $b^2x + (b - 1)y = 1$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{N}$: $3^{3x} - 5 \times 3^{2x} - 3^x + 5 \equiv 0 [11]$.

3°) Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $34x \equiv 2 [5]$.

4°) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $21590x + 9525y = 1270$.

EXERCICE 15:

Soit l'équation (E) : $324x - 245y = 7$ où $(x ; y) \in \mathbb{Z}^2$.

1°) Montrer que pour toute solution $(x ; y)$ de (E), x est multiple de 7.

2°) Résoudre l'équation (E).

3°) Soit $(x ; y)$ un couple solution de (E). On pose $x \wedge y = d$.

a) Quelles sont les valeurs possibles de d ?

b) Déterminer les solutions $(x ; y)$ de (E) telles que x et y soient étrangers.

4°) Résoudre les systèmes d'inconnues $(a ; b)$:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} P.G.C.D(a ; b) = 4 \\ P.P.C.M(a ; b) = 1680 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} a + b = 96 \\ a \vee b = 180 \end{cases} \end{array}$$

EXERCICE 16 :

1°) Pour tout nombre entier naturel n , calculer le reste de la division euclidienne par 7 de 5^n et de 4^n . Comment faut-il choisir n pour que le nombre $5^n - 4^n$ soit divisible par 7 ?

2°) Résoudre dans $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2$ puis dans $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^2$ le système :
$$\begin{cases} 3x + 3y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

3°) En utilisant l'algorithme d'Euclide déterminer : $354 \wedge 25$ et trouver deux entiers relatifs k et ℓ tels que : $354k + 25\ell = 1$; x et y tels que $45x - 28y = 1$

4°) a) Trouver l'ensemble des entiers naturels qui divisent 276.

b) Trouver les paires d'entiers naturels dont le plus grand commun diviseur d et le plus petit commun multiple m vérifient :
$$\begin{cases} m + 3d = 276 \\ 10 \leq d \leq 30 \end{cases}$$

5°) a) Déterminer l'ensemble des diviseurs de 124.

b) Déterminer l'ensemble des couples $(x ; y)$ d'entiers naturels tels que : $d = x \wedge y$ et $m = x \vee y$ vérifient la relation
$$\begin{cases} m - 4d = 124 \\ 3 \leq d \leq 50 \end{cases}$$

6°) a) Déterminer l'ensemble des diviseurs de 108.

b) Déterminer l'ensemble des couples $(a ; b)$ d'entiers naturels tels que : $d = x \wedge y$ et $m = x \vee y$ vérifient la relation
$$\begin{cases} m - 3d = 108 \\ 10 \leq d \leq 15 \end{cases}$$

EXERCICE 17:

Soit m un nombre entier.

1°) Montrer que l'équation : $(x ; y) \in \mathbb{Z}^2$; $6y - 3x = m$ admet des solutions si et seulement si m est multiple de 3.

2°) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations :

a) $6y - 3x = 5$

b) $6y - 3x = 3$

3°) Dédire de ce qui précède les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation :
$$(6y - 3x - 4)(6y - 3x + 4) = 1$$

EXERCICE 18 :

Un nombre de quatre chiffres est un carré parfait. Le chiffre des unités est égal au chiffre des dizaines et le chiffre des centaines est égal au chiffre des unités de mille.

1°) Montrer que ce nombre est divisible par 121. Trouver ce nombre.

2°) Ecrire ce nombre dans le système à base 8.

EXERCICE 19 :

1°) Déterminer les chiffres x et y du nombre n dont l'écriture décimale est $n = 28x75y$ pour que ce nombre soit divisible par 3 et 11.

2°) Un nombre s'écrit $x43y$ dans la base dix. Déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 2 et par 9

3°) Soit le nombre n qui s'écrit dans la base dix, $n = y17x35$; trouver x et y pour que n soit divisible par 9 et 11.

4°) Déterminer les chiffres x , y , et z pour que le nombre dont l'écriture décimale est $n = 13xy45z$ soit divisible par 8 ; 9 et 11.

5°) Déterminer les entiers x tels que : $5 / (4x^2+1)$ et $13 / (4x^2+1)$.

6°) Trouve un entier naturel de deux chiffres sachant qu'il est égal à 3 fois la somme de ses chiffres ; qu'en le multipliant par 3, on trouve pour résultat le carré de la somme de ses chiffres.

EXERCICE 20 :

On veut planter des arbres sur le périmètre d'un terrain triangulaire de côtés respectifs 132m ; 156m et 204m de telle sorte que qu'il y ait un arbre à chaque sommet du triangle et que les arbres soient également espacés. Quel est le nombre minimum d'arbres que l'on pourra planter si l'on veut que la distance entre deux arbres soit exprimée en un nombre entier de mètres ?.

EXERCICE 21 :

1°) Soient p et q deux entiers relatifs étrangers, n un entier naturel non nul.

Démontrer que p et q^n sont étrangers.

2°) Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polynôme à coefficients entiers relatifs admettant une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ (p et q entiers relatifs étrangers) ;

Démontrer que p divise a_0 et q divise a_n .

3°) Factoriser le polynôme $3x^3 + 7x^2 + 7x + 4$.

EXERCICE 22 : « Nombres amiables – Nombres parfaits »

1°) « On appelle **diviseurs stricts** d'un entier naturel n tout diviseur de n positif autre que lui-même ». Déterminer les diviseurs stricts de 220.

2°) « On appelle **nombres amiables** deux entiers naturels tels que, chacun d'eux est égal à la somme des diviseurs stricts de l'autre ».

Vérifier que 220 et 284 sont amiables. 17 296 et 18 416 sont amiables.

3°) « On appelle **nombre parfait** tout entier naturel égal à la somme de ses diviseurs stricts (c'est-à-dire amiable avec lui-même) ».

a) Le nombre 28 est-il parfait ?

b) Déterminer un nombre premier p tel que $(2^4 \times p)$ soit un nombre parfait

c) Soit n et p deux entiers naturels, tels que p soit premier. Quelle doit être l'expression de p en fonction de n pour que $(2^n \times p)$ soit parfait.

d) Dresser la liste des **nombres parfaits** de cette forme, pour $n < 10$.