

Séries :TSE**SERIES D'EXERCICES SUR L'ARITHMETIQUE****EXERCICE 1 :**

Démontrer par récurrence que :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{p=1}^n p(p+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$; b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{p=1}^n (2p-1)^3 = 2n^4 - n^2$; $\forall n \in \mathbb{N}^*, c) \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

EXERCICE 2 :

1°/ Dans une division euclidienne on augmente le dividende de 52 et le diviseur de 4 ; on constate que le quotient et le reste ne change pas. Calculer le quotient. Quels sont les dividendes possibles quand le diviseur est 10 ?

2°/ La division d'un entier naturel a par 64 donne un quotient q et un reste q^3 . Déterminer le nombre a possédant cette propriété

3°/ Le diviseur d'une division euclidienne dans $\mathbb{N}$ est 45, le reste est le carré du quotient. Calculer le dividende.

EXERCICE 3 :

1°/ Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ; n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 2 et par 3.

2°/ Démontrer que quel que soit l'entier naturel n ; $7^n + 12n - 1$ est divisible par 9.

3°/ Prouver que pour tout entier naturel n, on a :

a) $3^{2n+3} + 2^{n+3} \equiv 0[7]$; b) $3^{2n+2} + 2^{6n+1} \equiv 0[11]$; c) $22^{9n+2} - 31^{3n+2} \equiv 0[9]$

EXERCICE 4 :

1°/ Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

a) $(n+1)! \geq \sum_{i=1}^n i!$; b) $\sum_{i=1}^n i \times i! = (n+1)! - 1$

2°/ Un ouvrier dispose d'une plaque de métal rectangulaire de 110cm de longueur sur 88cm de largeur. Il veut découper dans cette plaque des carrés tous identiques, les plus grands possibles, de façon à ne pas avoir de perte.

a) Déterminer la longueur du côté du carré qui convient.

b) Déterminer le nombre de carrés qu'il pourra découper dans la plaque de métal.

EXERCICE 5 :

1°/ Développer $(k+1)^5$, en déduire l'écriture nombre 13^5 en base 12

2°/ Déterminer la base du système de numération dans la quelle le nombre 13^4 s'écrit 14641.

3°/ Déterminer, si elle existe la base x dans laquelle l'une des égalités suivantes est vraie :

$23 \times 15 = 411$; $32 \times 22 = 541$; $31 \times 412 = 23322$

EXERCICE 6 :

1°/ Soit n un entier naturel écrit $1x0y$ en base sept. Déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 15.

2°/ Un entier naturel A s'écrit bca dans le système de numération de base cinq et abc dans le système de numération de sept. Déterminer a, b, c et donner l'écriture de A dans le système décimal.

EXERCICE 7 :

1°/ Déterminer les restes de la division par 13 des différentes puissances de 3 à exposants entiers naturels.

2°/ Déterminer les entiers naturels n tels que $A_n = \frac{3^n}{3} + \frac{3^{2n}}{3} + \frac{3^{3n}}{3}$ soit divisible par 13

3°/ Les nombres $\alpha = 1110$; $\beta = 1010100$; $\gamma = 1001001100$ sont-ils divisibles par 13 ?

EXERCICE 8:

1°/ Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 3^n par 7. En déduire le reste de la division euclidienne par 7 de $(506390)^{128}$

2°/ Un entier naturel s'écrit dans le système décimal $651x$. Déterminer x pour que $(506390)^{128} + 651x$ soit divisible par 7.

EXERCICE 9:

1°/ Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 4^n par 7.

2°/ Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de $A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2$ par 7.

EXERCICE 10:

1°/ Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + 4x + 3 \equiv 0[8]$.

2°/ a) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : $5x - 11y = 4$

b) En déduire la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système : $\begin{cases} 3a \equiv 1[5] \\ 7a \equiv 9[11] \end{cases}$

3°/ Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$: a) $32x - 205x^2 = -678$; b) $x^4 + 2x^3 - 77 = 88$

EXERCICE 11:

1°/ On considère l'ensemble $E = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et la fonction de E dans E qui à tout x associe $5x + 3$

a) Montrer que f est une bijection de E dans E . Donner l'expression de la réciproque f^{-1} de f .

b) Résoudre dans E l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$.

2°/ On considère l'entier naturel $N = abcabc$ écrit dans le système de numération décimale.

a) Montrer que N est divisible par 11 et qu'il peut s'écrire $N = k \times abc$ où k est un entier naturel que l'on précisera.

b) En déduire que N est divisible par 7 et 13

EXERCICE 12:

Soit n un entier naturel. On pose $a = 2n+8$ et $b = 3n+15$ et on désigne par d le PGCD de a et b .

1°/ Montrer que pour tout n entier naturel, d divise 6.

2°/ Déterminer l'ensemble S des entiers naturels n tels que $d = 6$.

EXERCICE 13:

Tous les nombres entiers considérés sont écrits dans le système de numération décimale.

1°/ Quel est le chiffre des unités de 17^{1980}

2°/ Soit a_n le chiffre des unités du nombre 17^n ($n \in \mathbb{N}$). Quelles sont les valeurs possibles de a_n ?

Pour quelles valeurs de n a-t-on $a_n = 3$?

EXERCICE 14:

1°/ Si l'on divise 644 et 1095 par un même nombre, on obtient respectivement 15 et 22 comme reste. Quel est ce nombre ?

2°/ a) L'entier naturel 943 est-il premier ?

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $x^2 = y^2 + 943$

EXERCICE 15:

1°/ a) Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de -4751 par 125.

b) Déterminer les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles $n^2 + 2n + 5$ est divisible par $n+2$.

2°/ a) Dans quelle base a-t-on $34 + 44 = 111$?

b) Poser et effectuer l'opération $24153 + 66146$ en base 7.

3°/ Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $x^2(y-1) = 3$.

4°/ α et β sont deux entiers et $n = 2^\alpha 3^\beta$. Le nombre de diviseur de n^2 est le triple du nombre de

diviseur de n . Prouver que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$. En déduire les valeurs de n .

EXERCICE 16:

1°/ a) Décomposer les nombres 450 et 320 en produit de facteurs premiers

b) Quel est le PGCD de 450 et de 320 ?

c) Une pièce rectangulaire a pour dimensions 4,5m et 3,2m. On souhaite carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe. Quel est le plus grand côté possible (en cm) de la dalle carrée ?

2°/ a) Trouver l'ensemble des entiers naturels diviseurs du nombre 5929.

b) Trouver les couples (a, b) d'entiers naturels dont le PGCD et le PPCM sont les solutions de l'équation :

$$x^2 - 91x + 588 = 0$$

EXERCICE 17:

Soient x, y, z trois entiers naturels. On suppose que, dans le système de numération à base x , les nombres y et z s'écrivent respectivement 131 et 101.

1°/ Montrer que sans connaître x , on peut exprimer le produit xyz dans le système à base x .

2°/ On sait, en outre que dans le système décimal $x + y + z = 50$. Déterminer dans le système décimal, le nombre x et le produit xyz .

EXERCICE 18:

1°/ A l'occasion de la fête de Noël un industriel distribuait à chaque ouvrier un colis contenant des bouteilles d'huile des oranges et des jouets. Tous les colis sont identiques. Il repartit ainsi 120 bouteilles d'huile, 660 oranges et 420 jouets. Sachant qu'il a fait le plus grand nombre possible de colis, on demande le nombre et la composition de chaque colis.

2°/ a) Résoudre l'équation $(p, q) \in \mathbb{Z}^2 ; 11p + 2q = 90$

b) Amadou est encore un enfant, mais en l'an 2000, son âge était égal à la somme des chiffres de son année de naissance. En quelle année est-il né ?

EXERCICE 19:

1°/ Trouver les diviseurs dans $\mathbb{N}$ de l'entier 240. Calculer l'entier naturel n tel que $n^2 - 240$ est un carré parfait.

2°/ a) Quels sont les entiers naturels dont le carré est un diviseur de 1998 ?

b) Pour tout couple (a, b) d'entiers naturels, on désigne par μ leur PPCM et par δ leur PGCD.

Déterminer les couple (a, b) d'entiers naturels tels que : $\mu^2 - 3\delta^2 = 1998$.

3°/ a) Déterminer l'ensemble des couples (x, y) d'entiers relatifs solutions de l'équation ; $5x - 4y = 2$

b) Montrer qu'il existe un seul couple (a, b) solution de l'équation précédente tel que :

$$\text{PGCD}(a, b) = 2 \text{ et } \text{PPCM}(a, b) = 60.$$

EXERCICE 20:

Le couple (a, b) est un élément de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On pose $\mu = \text{PPCM}(a, b)$ et $\delta = \text{PGCD}(a, b)$. Déterminer l'ensemble des couples (a, b) tels que :

$$1. a+b = 96 \text{ et } \mu = 180 ; \quad 2. a+b = 168 \text{ et } \delta = 21 ; \quad 3. \delta = 27 \text{ et } \mu = 108$$

$$4. ab = 5400 \text{ et } \mu = 360 ; \quad 5. \mu - 3\delta = 108 ; \quad 6. a^2 - b^2 = 405 \text{ et } ab = 3\mu$$

$$7. a^2 + b^2 = 801 \text{ et } \mu = 120 ; \quad 8. 8\mu = 105\delta + 30.$$

EXERCICE 21:

1°/ Déterminer le PGCD des nombres 21590 et 9525

2°/ Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x pour les quels $34x \equiv 2[15]$

3°/ Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $21590x + 9525y = 1270$.

EXERCICE 22:

Soit n un entier relatif quelconque. On pose $A = n - 1$ et $B = n^2 - 3n + 6$

1°/ a) Montrer que le PGCD de A et B est égal au PGCD de A et 4.

b) Déterminer suivant les valeurs de n le PGCD de A et B .

2°/ Pour quelles valeurs de n le nombre $\frac{n^2-3n+6}{n-1}$ est-il un entier relatif ?

EXERCICE 23:

1°/ Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $6x - 13y = 5$.

2°/ En déduire la solution générale dans $\mathbb{Z}$ des systèmes de congruence : a) $\begin{cases} x \equiv 2[6] \\ x \equiv 7[13] \end{cases}$; b)

$$\begin{cases} x \equiv 2[6] \\ x \equiv 7[13] \\ x \equiv 1[7] \end{cases}$$

EXERCICE 24:

1°/ Décomposer 319 en produit de facteurs premiers.

2°/ Démontrer que si x et y sont deux entiers naturels premiers entre eux il en est de même pour $3x+5y$ et $x+2y$.

3°/ Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système : $\begin{cases} (3a+5b)(a+2b)=1276 \\ ab=2m \end{cases}$ où $m = a \vee b$

EXERCICE 25:

On considère les nombres A et B tels que : $A = 10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ et $B = 10^{9n} + 10^{6n} + 10^{3n} + 1$ où n est un entier naturel.

1°/ Vérifier que $10^3 - 1 = 9 \times 111$ et $10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13$

2°/ Démontrer que : a) $\forall n \in \mathbb{N}$, A est divisible par 111

b) Si n est impair alors A est divisible par 7 et par 13.

3°/ a) Si n est impair, démontrer que B est divisible par 7, 11 et 13.

b) Si n est pair, déterminer le reste de la division euclidienne de B par 7, 11, 13 et 111.

EXERCICE 26:

1°/ a) Etudier suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne du nombre $A = n^2 - n + 1$.

b) En déduire les entiers n tels que le nombre A soit divisible par 7.

c) Déterminer le reste de la division par 7 du nombre $B = 2753^2 - 2753 + 1$

2°/ Déterminer les triangles OAB rectangle en O , dont les cotés sont mesurés par des nombres entiers, le côté OA ayant pour mesure 12. Calculer $OB = n$ et $AB = N$.

Parmi ces triangles existe-il des triangles semblables ? Lesquels ?

EXERCICE 27:

1°/ Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $5y + 8x = 1$.

2°/ Soit N un entier naturel tel qu'il un couple (a, b) de nombres entiers vérifiant $N = 1 + 8a$ et $N = 2 + 5b$.

a) Prouver que le couple $(a, -b)$ est solution de (E).

b) Déterminer le reste de la division euclidienne de N par 40.

3°/ a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $5y + 8x = 100$.

b) A l'occasion de la fête de tabaski, un marchand de bétail a vendu tous ses taurillons et tous ses béliers faisant ainsi une recette de 1 000 000 F au total. Sur le marché, un taurillon coûtait 80 000 F et un bélier faisait 50 000 F. Sachant que le marchand avait plus de béliers que de taurillons, on demande de trouver le nombre de taurillons et celui de béliers qu'avait ce marchand pour le marché.

EXERCICE 28:

1°/ Prouver que pour tout entier relatif n , on a : $(5n^3 - n) \wedge (n + 2) = (n + 2) \wedge 38$

2°/ Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $(n + 2)$ divise $(5n^3 - n)$.

3°/ Quelles sont les valeurs possibles du PGCD de $(5n^3 - n)$ et $(n + 2)$?

4°/ Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $(5n^3 - n) \wedge (n + 2) = 19$.

EXERCICE 29:

Deux commerçantes, Awa et Fanta se rendent au marché pour acheter des mangues. Chaque

mangue coute 5F l'unité. Awa dit à Fanta, je dispose d'un montant égal à m_1 Francs et Fanta répond, moi aussi j'ai une somme égale à m_2 Francs.

L'entier m_1 s'écrit $m_1 = 1x00y2$ dans le système de numération de base huit et m_2 s'écrit $m_2 = x1y003$

dans le système de numération de base sept

1°/ Déterminer les chiffres x et y pour que chacune des deux commerçantes puisse, avec la totalité de son argent, acheter un nombre maximum de mangues.

2°/ Déterminer le montant que dispose chacune des commerçantes. En déduire le nombre de mangues que chacune d'elles peut acheter.

3°/ a) Décomposer m_1 et m_2 en produit de facteurs premiers

b) En déduire le nombre de diviseurs de m_1 et m_2 puis le pgcd (m_1 ; m_2)

4°/ Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $m_1 u + m_2 v = 5$ où u et v sont deux entiers relatifs.

EXERCICE 30:

1°/ Un lot à usage d'habitation a la forme d'un trapèze dont les deux bases mesurent respectivement 30 m et 21 m ; les deux autres côtés mesurent 18 m et 12 m. Pour la clôture, le propriétaire a besoin des poteaux de support à égale distance mesurée en nombre entier de mètres pour un minimum de poteaux, avec un poteau à chaque sommet.

a) Quelle est la distance entre deux poteaux ?

b) Déterminer le nombre de poteaux nécessaire à la clôture.

2°/ On désigne respectivement par a et b (entiers naturels non nuls) la longueur et la largeur mesurées en mètres d'un rectangle. Sachant que $a = 72$ et que plus petit multiple commun à a et b est 216, quelles sont les valeurs possibles de b ?

EXERCICE 31:

1°/ a) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue (p, q) : $11p - 7q = 1$.

b) La division euclidienne d'un entier naturel n par 7 donne pour reste 4 ; le même entier divisé par 11 donne pour reste 3. Quel sera son reste dans la division par 77 ?

c) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n inférieurs à 200.

2°/ Soit (U_n) une suite arithmétique croissante d'entiers naturels.

a) Sachant que $U_1 + U_2 + U_3 = 105$; calculer U_2 .

b) On désigne par m et d respectivement le PPCM et le PGCD de U_1 et U_3 ; sachant que

$$\frac{m}{d} = 12 ; \text{déterminer } U_1 \text{ et } U_3.$$

c) En déduire l'expression de U_n en fonction de n . Calculer $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ en fonction de n . Déterminer n pour que S_n soit égale à 525.

EXERCICE 32:

On désigne par a la classe d'équivalence modulo 15 de l'entier a .

1°/ Déterminer les couples (a, b) tels que $a \times b = 0$, $a \neq 0$ et $b \neq 0$

2°/ Résoudre dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 - 6x + 5 = 0$

3°/ Résoudre dans $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

EXERCICE 33:

1°/ Trouver trois nombres impairs consécutifs dont la somme des carrés s'écrit, dans système décimal xxxx.

2°/ Déterminer les chiffres x et y d'un nombre dont l'écriture décimale est $28x75y$ pour qu'il soit

divisible par 3 et par 11.

EXERCICE 34:

1°/ On appelle nombre triangulaire tout entier naturel qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a^2+a}{2}$ avec a un entier naturel non nul.

a) Démontrer que si n est la somme de deux nombres triangulaires, alors $4n + 1$ est la somme de deux carrés.

b) On pose $n = 3$; $4n + 1$ est-il la somme de deux carrés d'entiers ? Etudier la réciproque de la propriété a).

2°/ a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 5^{2n} - 3^{2n}$ est divisible par 49.

b) En déduire que si l'entier n n'est pas un multiple de 3 alors $5^{2n} + 15^{2n} + 3^{2n}$ est divisible par 49.

EXERCICE 35:

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^3 + 2x^2 - x - 13 \equiv 0[11]$ ①

1°/ Montrer qu'il existe deux entiers α et β tels que : $x^3 + 2x^2 - x - 13 = (x + 1)(x^2 + \alpha x + \beta) - 11$.

2°/ En déduire que les solutions de ① sont solutions de l'une des deux équations :

$$x + 1 \equiv 0[11] \text{ ② ; } \quad x^2 + x - 2 \equiv 0[11] \text{ ③}$$

Déterminer alors les solutions de l'équation ①.

EXERCICE 36:

On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 10[23] \\ x \equiv 4[7] \end{cases}$

1°/ Déterminer un couple $(\alpha ; \beta)$ d'entiers relatifs solution de l'équation $23\alpha + 7\beta = 1$

2°/ En déduire un couple $(u_0 ; v_0)$ solution de l'équation (E) : $23u - 7v = -6$. Résoudre complètement l'équation (E)

3°/ Démontrer que x est solution du système (S) si et seulement si il existe un couple $(u ; v)$ d'entiers relatifs vérifiant : $\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 10 + 23u \end{cases}$

En déduire l'ensemble des solutions de (S).

4°/ Déterminer la plus petite solution (entier naturel) de (S) divisible par 16.