

Limites et continuité – 2BAC SM

Mohibi Maths

Cours de soutien à distance : +212 711-201796 (Whatsapp)

Limite d'une fonction numérique

Exercice 01 :

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x - x^2}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (\sqrt{3x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x}).$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x} - 2}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x\sqrt{x^2 + x} - 3x^2 + x}{5\sqrt{x^2 + 3}}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+6}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{8-2x}}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - 4}}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} - x \right).$$

$$8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x-2}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}} \right).$$

Exercice 02 :

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x^2 - 2x| - 8}{x^2 - 5x + 4}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 4}}{x + \sqrt{x+2}}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^4 - x^3} - x^2).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x\sqrt{4x^2 + 3x - 7} - 2x^2).$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{10x^2 + 9} - 7}{\sqrt{2-x} + \sqrt{x^2 + 5} - 5}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1} - \sqrt{x^4 - 1}}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}.$$

7. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier, suivant les valeurs de α , la limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^3 + \alpha x^2 + x + 1} - x\sqrt{x+1}).$$

8. Soit $a \in \mathbb{R}_+$, calculer :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x^2 - ax} + \sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{x - a}}.$$

Exercice 03 :

Soit m un nombre réel et f la fonction définie par $f(x) = \frac{mx^3 + (m-2)x^2 + (m-1)x + m-3}{x(x-2)(x-3)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition.

Exercice 04 :

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{7x}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{\sin x}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x - \sin x}{\sqrt{x}}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin 2x}{1 - \cos x}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 4x}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{(x^2 + x) \tan 3x}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin(\pi x)}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x + 2 \tan x - 3}{\sin x \cos x}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x + \cos x}{2 \cos x - 1}.$$

Exercice 05 :

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x + x \cos 4x}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \tan 2x - \sqrt{3} \cos x}{\pi - 2x}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x \tan x - \frac{\pi}{2 \cos x} \right).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x - 1}{2 \cos x + \cos 3x}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \tan x.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} (2 - 3x + x^2) \tan \left(\frac{\pi}{2} x \right).$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x + 1) \sin^2 \left(\frac{1}{x} \right).$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{4 \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right)}.$$

$$9. \text{ Soit } (a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2, \text{ calculer : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2}.$$

Exercice 06 :

Soit f une fonction numérique vérifiant $(\forall x \in \mathbb{R}), \quad 1 + x - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x - x^2 + x^4$.
Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x^2).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1 - x}{x^2}.$$

Exercice 07 :

En utilisant les propriétés des limites et le théorème d'encadrement, calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+2}{5-4\sin x}.$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \cos x}{x^2 + 1}.$

4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \cos x).$

6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - E(x)}{x^2}.$

7. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(E(x))}{x}.$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin(x^7)}{x^2 - 3}.$

9. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)\sqrt{5-x}}{2 + \sin\left(\frac{1}{x-2}\right)}.$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)}.$

11. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \cos^2 x}{(x+1)^2}.$

12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - E(x)}{x^2}.$

Continuité d'une fonction en un point

Exercice 08 :

On considère la fonction f définie par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^5 - x^4 + x^3 + 3}{x+1} & \text{si } x \neq -1, \\ f(-1) = 12. \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue en -1 .

Exercice 09 :

On considère la fonction f définie par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{3 + \cos x} - 2}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ f(0) = -\frac{1}{8}. \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue en 0 .

Exercice 10 :

Déterminer le réel a sachant que la fonction f définie par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\cos^3 x - 1}{\sin^2 x} & \text{si } x \neq 0, \\ f(0) = a \end{cases}$$
 est continue en 0 .

Exercice 11 :

Déterminer le réel a sachant que la fonction f définie par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{\sin x} - 1}{x - \frac{\pi}{2}} & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2}, \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a \end{cases}$$
 est continue au point $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 12 :

Soit a un réel strictement positif.

On considère la fonction g définie par
$$\begin{cases} g(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x+a} - \sqrt{a}}{x} & \text{si } x \geq -a \text{ et } x \neq 0, \\ g(0) = \frac{1}{2\sqrt{a}}. \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue en 0.
2. Préciser la limite de g lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 13 :

Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction f au point x_0 :

1. $f(x) = \frac{|x^2 - 5| + 3}{\sqrt{x} + 2}, \quad x_0 = 1.$
2.
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} & \text{si } x \neq 2, \\ f(2) = 18, \end{cases} \quad x_0 = 2.$$
3.
$$\begin{cases} f(x) = (x^2 - 9) \sin\left(\frac{1}{x-3}\right) & \text{si } x \neq 3, \\ f(3) = 0, \end{cases} \quad x_0 = 3.$$
4.
$$\begin{cases} f(x) = \frac{(1 - \tan x)^2}{1 + \cos 4x} & \text{si } x \neq \frac{\pi}{4}, \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Continuité à gauche – Continuité à droite

Exercice 14 :

Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction f à droite et à gauche au point x_0 :

1.
$$\begin{cases} f(x) = \frac{|x| + 3x}{x^2 - 2|x|} & \text{si } x \neq 0, \\ f(0) = 4, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$
2. $f(x) = xE\left(\frac{1}{x+1}\right), \quad x_0 = 0.$
3.
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x - 2\sqrt{x}}{x - 4} & \text{si } 0 \leq x < 4, \\ f(4) = \frac{1}{2}, \\ f(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{x-4} & \text{si } x > 4, \end{cases} \quad x_0 = 4.$$

$$4. \begin{cases} f(x) = \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^3} & \text{si } x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[, \\ f(0) = 1, \\ f(x) = \frac{\tan x - \sin x}{x^3} & \text{si } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

Exercice 15 :

On considère la fonction numérique g définie par

$$\begin{cases} g(x) = (2x + \pi) \tan x & \text{si } x \in \left] -\pi, -\frac{\pi}{2} \right[, \\ g(x) = \frac{1 - \cos^3 x}{x \tan x \cos^2 x} & \text{si } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[, \\ g(x) = \frac{3\sqrt{1+x^4} - x}{2+x} & \text{si } x \in [0, +\infty[. \end{cases}$$

1. Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x).$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} g(x).$

(c) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} g(x).$

2. Étudier la continuité de la fonction g en 0.

Exercice 16 :

Déterminer les deux réels a et b sachant que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + x - a}{x - 2} & \text{si } x > 2, \\ f(x) = \frac{2x + b}{3} & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

est continue au point $x_0 = 2$.

Exercice 17 :

Déterminer les réels a , b et c sachant que la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 - 2bx + 1}{2x^2 + ax - a - 2} & \text{si } x < 1, \\ f(1) = \frac{2+c}{3}, \\ f(x) = \frac{-2x^2 + 3x + 3}{x^2 + 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

est continue au point $x_0 = 1$.

Exercice 18 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

On considère la fonction f_n définie par
$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{(3-x)^n - a}{x-2} & \text{si } x < 2, \\ f_n(x) = \frac{3x+b}{4} & \text{si } x \geq 2, \end{cases}$$

Déterminer a et b sachant que f_n est continue en 2.

Exercice 19 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{ax^2 + bx - 1}{x^2 - 1} & \text{si } x \geq 2, \\ f(x) = 3x + c & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

Déterminer les réels a , b et c sachant que les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.
3. f est continue au point $x_0 = 2$.

Prolongement par continuité

Exercice 20 :

Pour chacun des cas suivants, montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité en x_0 , puis donner ce prolongement :

1. $f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}$, $x_0 = 1$.
2. $f(x) = \frac{\sqrt{x+6} + \sqrt{2x+5} - 3}{4-x^2}$, $x_0 = -2$.
3. $f(x) = \frac{\tan x - \sin x}{x + \sin x}$, $x_0 = 0$.
4. $f(x) = \frac{\cos x - \sqrt{1 + \sin x}}{x}$, $x_0 = 0$.

Exercice 21 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{8x+1}}{2(x-1)} + \frac{3|x|}{1-x^2}$.

1. Déterminer D_f , le domaine de définition de f .
2. f admet-elle un prolongement par continuité en 1 ?

Exercice 22 :

On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{3x^2 + 5x + 2}{x^2 - 1 - |x + 1|}$.

1. Déterminer D_g , le domaine de définition de g .
2. g admet-elle un prolongement par continuité en -1 ?

Exercice 23 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 E\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $x - x^2 \leq f(x) \leq x$.
2. En déduire que f admet un prolongement par continuité en 0 , puis donner ce prolongement.

Exercice 24 :

Pour chacun des cas suivants, montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité en x_0 , puis donner ce prolongement :

1. $f(x) = \frac{2x^{17} - 17x + 15}{x - 1}$, $x_0 = 1$.
2. $f(x) = \frac{1 + \cos x \cos 2x}{x - \pi}$, $x_0 = \pi$.
3. $f(x) = \frac{x^n - a^n}{x - a}$, $x_0 = a$, où $(a, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$.
4. $f(x) = \frac{x \sin x - \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{x + \pi}$, $x_0 = -\pi$.
5. $f(x) = \frac{\sin(\pi \sqrt{\cos x})}{x}$, $x_0 = 0$.
6. $f(x) = \frac{x^{p+1} - (p+1)x + p}{(x-1)^2}$, $x_0 = 1$, où $p \in \mathbb{N}^*$.
7. $f(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x} - a}{\tan x}$, $x_0 = 0$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$.
8. $f(x) = \frac{\tan x - 1}{\sqrt{2} \cos x - 1}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.
9. $f(x) = \frac{\cos x + \cos 2x - 2}{\cos 3x + \sin x - 1}$, $x_0 = 0$.
10. $f(x) = \frac{1}{(5-x)^2} \left(1 - \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right)\right)$, $x_0 = 5$.

Exercice 25 :

Soit f la fonction définie par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-1}} & \text{si } |x| > 1, \\ f(x) = x^2 - 3x + 2 & \text{si } |x| < 1. \end{cases}$$

- (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.
(b) f admet-elle un prolongement par continuité en 1 ?
- f admet-elle un prolongement par continuité en -1 ?

Exercice 26 :

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{(1 - \tan x)^2}{\cos 2x}$.

- La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en $\frac{\pi}{4}$? Justifier la réponse.

Exercice 27 :

On considère la fonction f définie par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{3x^2 + 6} & \text{si } x \geq 1, \\ f(x) = \frac{1}{x^2 - x} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

- Étudier la continuité de la fonction f en 1.
- f admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?

Exercice 28 :

On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{\tan(\pi x)}{x - E(x)}$.

- Déterminer D_g , le domaine de définition de g .
- g admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?

Limite d'une composée de deux fonctions

Exercice 29 :

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \sqrt{\cos x})}{x}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \tan\left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right).$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{17}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan\left(\sqrt{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos\left(\frac{E(\sqrt{x})}{x}\right).$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \tan\left(\pi \sqrt{\frac{x^2 - 1}{4x^2 + 1}}\right).$$

Exercice 30 :

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{x-1}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan\left(\frac{\pi \sin x}{6|x-x^2|}\right).$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\tan(2\pi x) - \tan(6\pi x)}{3x}\right).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} E\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi x^3 + 2x}{5 - 4x^3}\right).$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 2x\right).$$

Continuité sur un intervalle

Exercice 31 :

Pour chacun des cas suivants, montrer que la fonction f est continue sur son domaine de définition :

$$1. f(x) = -5x^3 + 7x^2 - 5.$$

$$2. f(x) = \frac{x^2 + 2}{(x+2)(x-1)(2x-3)}.$$

$$3. f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x - \sin x.$$

$$4. f(x) = \frac{\cos x}{3x^2 - 5x + 2}.$$

$$5. f(x) = \sin^3 x - 5 \cos x + 4.$$

$$6. f(x) = \frac{\sqrt{x^4 - 5x^2 + 6}}{(x-1)(x^2+1)}.$$

$$7. f(x) = \sin(\sqrt{x}) + \frac{x^2 + 4x - 5}{\sqrt{x}}.$$

Exercice 32 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 + 6}{3x - 2} & \text{si } x \leq -1, \\ f(x) = \cos(\pi x) & \text{si } -1 < x < 1, \\ f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 3} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 33 :

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition, puis étudier la continuité sur chaque intervalle de ce domaine :

$$1. f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2x-1}\right).$$

$$2. g(x) = \sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right).$$

$$3. h(x) = \frac{x^2 - \sqrt{2-x}}{|x+1| - 2}.$$

$$4. k(x) = \frac{1 - \cos(2\pi x)}{x(x-1)}.$$

$$5. \begin{cases} u(x) = \frac{1 - \cos \sqrt{|x|}}{|x|} & \text{si } x \neq 0, \\ u(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$6. v(x) = \frac{x}{\tan(\pi x)}.$$

Exercice 34 :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} g(x) = \alpha^2 x + 3 & \text{si } x \leq 1, \\ g(x) = \frac{8 - \beta^2 x}{2x - 1} & \text{si } 1 < x < 3, \\ g(x) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{\beta^2}{5}x + \alpha\beta & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

- Déterminer les réels α et β sachant que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 35 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.
Déterminer les images par f des intervalles suivants :

- $I =]0, +\infty[.$

- $J =]0, 1[.$

- $K =]-\infty, -1[.$

Exercice 36 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} f(x) = 2x - 3 & \text{si } x < 2, \\ f(x) = x^2 - 3 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

- Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer :
 - $f([-2, 4])$.
 - $f(]-\infty, 1])$.

Exercice 37 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$.

- Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $I = \left[-\frac{3}{2}, -1\right]$.
- Déterminer l'image de I par la fonction f .

3. En déduire que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution dans l'intervalle I .

Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 38 :

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation proposée admet au moins une solution dans l'intervalle I :

1. $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$, $I = [2, 3]$.

2. $x^4 - 2x - \sqrt{x} + 1 = 0$, $I =]0, 1[$.

3. $x^4 + x^2 + 4x = 1$, $I = [0, 1]$.

4. $x - 2 \sin x = 0$, $I = \left] \frac{\pi}{3}, \pi \right[$.

5. $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} = x$, $I = \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2} \right]$.

6. $6 \cos x = x$, $I = [0, \pi]$.

Exercice 39 :

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation proposée admet au moins une solution dans l'intervalle I :

1. $2x^3 + 3x - 3 = 0$, $I = [0, 1]$.

2. $\sin x = 2 - x$, $I = \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$.

3. $\tan x + 4x = 5$, $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right]$.

4. $x^3 + E\left(\frac{x}{3}\right) = x + 1$, $I = [1, 2]$.

Exercice 40 :

Montrer que chacune des équations suivantes admet au moins une solution dans l'intervalle I :

1. $x^3 - 3x^2 + 15x - 7 = 0$, $I = \mathbb{R}$.

2. $1 + \sin x - x^2 = 0$, $I = \mathbb{R}$.

3. $x^{17} = x^{11} + 1$, $I = \mathbb{R}_+$.

4. $\sqrt{x^3 + 5x + 4} = 100$, $I = \mathbb{R}_+$.

5. $\cos x = \frac{2}{(x+1)^2}$, $I = \mathbb{R}$.

6. $x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$, $I = \mathbb{R}_+$.

Exercice 41 :

1. Montrer que l'équation $x^5 + x^3 - x^2 + x + 1 = 0$ admet une unique solution dans $\left] -\infty, \frac{1}{2} \right]$.

- Montrer que la courbe de la fonction f , définie par $f(x) = 2x^3 + 3x + 4$, coupe l'axe des abscisses en un seul point dont l'abscisse α vérifie $-1 < \alpha < 0$.
- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 6x^2 + 11$.
 - Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$, notées x_1, x_2 et x_3 , avec $x_1 < x_2 < x_3$.
 - En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 42 :

Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - \cos(\pi x)$.

- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0, 1[$.
- Par la méthode de dichotomie, trouver un intervalle $[a, b]$ de longueur 0,25 tel que $a < \alpha < b$.

Exercice 43 :

Soit n un entier naturel non nul.

- Montrer que l'équation $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos(nx) = 0$ admet au moins une solution dans $[0, \pi]$.
- Montrer que l'équation $\frac{2 \sin^n x}{1 + \cos x} = \frac{1}{4} - x$ admet une unique solution dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Théorème de la fonction réciproque

Exercice 44 :

Dans chacun des cas suivants, montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer, puis déterminer une expression de $f^{-1}(x)$:

- $f(x) = \frac{x^2 + 5x}{x - 2}$, $I = \left[2 + \sqrt{14}, +\infty\right[$.
- $f(x) = x^2 - 6x + 5$, $I =]-\infty, 3[$.
- $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $I = \mathbb{R}_+$.
- $f(x) = \left(\sqrt{3 - x} + 1\right)^2$, $I =]-\infty, 3]$.
- $f(x) = x - \sqrt{x^2 - x}$, $I = [1, +\infty[$.
- $f(x) = 2x - \sqrt{x}$, $I = \left[0, \frac{1}{16}\right]$.

Exercice 45 :

On considère la fonction f définie sur $] -1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x + 1}}$.

- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} , définie sur un intervalle J à déterminer.
- Dresser le tableau de variations de la fonction f^{-1} .

3. Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Fonction racine n -ième – Puissance rationnelle

Exercice 46 :

1. Simplifier les nombres suivants :

$$(a) a = \frac{\sqrt{18} \sqrt{\sqrt[3]{256}} \sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{1024} \sqrt[3]{64} \times 10^6}.$$

$$(b) b = \frac{\sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9} (\sqrt{9})^3}{\sqrt[3]{27} \sqrt{\sqrt{3}}}.$$

$$(c) c = \frac{\sqrt[3]{2048} \sqrt[3]{160000}}{\sqrt[3]{4096} \sqrt{\sqrt{256}} \sqrt{512}}.$$

2. Simplifier les nombres suivants :

$$(a) x = (27)^{\frac{2}{3}} + (16)^{\frac{3}{4}} - \frac{2}{\sqrt[3]{8^{-2}}} + \frac{\sqrt{2}}{4^{\frac{2}{3}}}.$$

$$(b) y = \frac{(81)^{\frac{2}{3}} (27)^{\frac{1}{3}} 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{14}{3}}}.$$

$$(c) z = \frac{a^{\frac{5}{3}} \left(\sqrt[4]{\frac{1}{a^2}} \right)^3 b^{\frac{5}{2}}}{\left(a^{\frac{5}{3}} \right)^{\frac{2}{3}} \sqrt[5]{b^{-\frac{3}{4}}}}, \quad \text{où } (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2.$$

3. Comparer les deux nombres $\sqrt[3]{91}$ et $\sqrt[3]{15}$.

4. Ordonner dans l'ordre croissant les nombres $A = \sqrt{2}$, $B = \sqrt[3]{4}$, $C = \sqrt[3]{5}$, $D = \sqrt[3]{3}$.

5. Rationaliser les dénominateurs des nombres suivants :

$$(a) \frac{1}{2\sqrt[3]{4}}.$$

$$(b) \frac{2}{\sqrt[3]{3}-1}.$$

$$(c) \frac{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}.$$

$$(d) \frac{1}{\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}}.$$

Exercice 47 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1. x^2 - 25 = 0.$$

$$2. x^3 + 8 = 0.$$

$$3. x^7 = \sqrt{3}.$$

$$4. \sqrt[3]{x} = \sqrt[4]{7}.$$

$$5. x^4 = 16.$$

$$6. (3x - 4)^5 = 32.$$

$$7. \sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} + 4 = 0.$$

$$8. 9x - 7\sqrt[3]{x} - 2 = 0.$$

Exercice 48 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^4 - 5x^2 - 24 = 0$.
2. $x^6 + 3x^3 - 4 = 0$.
3. $\sqrt{3x^2 + 5x + 8} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1$.
4. $\sqrt{x^2 - 4} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$.
5. $\sqrt[4]{\frac{2-x}{3+x}} + \sqrt[4]{\frac{3+x}{2-x}} = 2$.
6. $(\sqrt[3]{x} - 1)^3 - 54 = 0$.
7. $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} = \sqrt[4]{2}$.
8. $\sqrt[3]{x+8} + \sqrt[3]{27-x} = 5$.
9. $\sqrt[3]{x+8} - \sqrt[3]{8-x} = \sqrt[6]{64-x^3}$.
10. $\sqrt{3+\sqrt{x}} + \sqrt{3-\sqrt{x}} = \sqrt[4]{2x}$.
11. $5x - 4\sqrt[3]{x} - 1 = 0$.
12. $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 12 = 0$.
13. $\frac{\sqrt[3]{x+3}}{3} + \sqrt{\frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x}}{2}$.

Exercice 49 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x+2} < x$.
2. $\sqrt{2x+1} - 3 < \sqrt{x+2}$.
3. $(2-x)^3 \leq x$.
4. $\sqrt[3]{x^2+8} - 2 < x$.
5. $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + x + 1} \geq x - 1$.
6. $2\sqrt[3]{x^4} - \frac{3x}{\sqrt[3]{x}} \leq 20$.

Exercice 50 :

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{x}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^2} - x}{x}$.
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x^2} + 1}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt[3]{x+6}}{3 - \sqrt{2x+5}}$.
5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{\sqrt[4]{x} - 1}$.
6. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{5-x} - 1}{2 - \sqrt[3]{x+4}}$.
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x} - x \right)$.
8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt[3]{x} - \sqrt{x} \right)$.
9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - 2x \right)$.
10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x \right)$.
11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^2 - x} - x - 1 \right)$.
12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^4 + 5} + 2x \right)$.

Exercice 51 :

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} - x^2}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x-1} - \sqrt{x}}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} \right).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{5}{2}} \right).$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^3-x} - \sqrt[3]{x^3+2x}}{x}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{(4-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}{x-8}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+x-3}}{5x}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4+x-3}}{x}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x+2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{x+1}}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}} \sqrt[4]{x}.$$

Exercice 52 :

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\tan x} - \sqrt[3]{1+\sin x}}{x^3}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{x}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2} - \sqrt[3]{x+7}}{1 - \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{\frac{1+8x}{x^4}}}.$$

La fonction arctangente

Exercice 53 :

Simplifier les expressions suivantes :

$$1. \arctan\left(\tan \frac{41\pi}{17}\right).$$

$$2. \arctan\left(\tan\left(-\frac{79\pi}{3}\right)\right).$$

$$3. \arctan\left(\tan\left(5 \arctan \sqrt{3}\right)\right).$$

$$4. \arctan\left(\frac{1}{\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)}\right).$$

$$5. \tan(\arctan 2016).$$

$$6. \tan\left(\arctan \frac{2}{3} - \arctan \frac{3}{7}\right).$$

$$7. \tan(-\arctan 5).$$

$$8. \tan(2 \arctan 3).$$

Exercice 54 :

1. Simplifier les expressions suivantes :

$$(a) A = \arctan 2 + \arctan \frac{1}{2}.$$

$$(b) B = \arctan(1 - \sqrt{2}) - \arctan(1 + \sqrt{2}).$$

2. Établir les égalités suivantes :

- (a) $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.
- (b) $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.
- (c) $4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$.
3. On pose $\alpha = 2 \arctan \left(\frac{1}{2} \right) - \arctan \left(\frac{1}{7} \right)$.
- (a) Vérifier que $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$.
- (b) Calculer $\tan \alpha$, puis en déduire la valeur de α .

Exercice 55 :

Résoudre les équations suivantes :

- $\arctan(3x) = \frac{\pi}{8}$.
- $\arctan(x^2 + 2) = \arctan(3x)$.
- $\arctan(x^2 - x) = \frac{3\pi}{4}$.
- $\arctan x = \frac{\pi}{4} + 2 \arctan \frac{1}{4}$.
- $\arctan x + \arctan(2x) = \frac{\pi}{3}$.
- $\arctan \sqrt{x} = -\frac{\pi}{4}$.

Exercice 56 :

Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(3x)}{x}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + 4x)}{x}$.
- $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \arctan(x^4 - x)$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) \arctan \left(\frac{1}{x} \right)$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \arctan x - \frac{\pi}{2} x \right)$.
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\arctan \left(\frac{1}{1-x^2} \right) + \frac{\pi}{2}}{x-1}$.
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 2\sqrt{\arctan x - \frac{\pi}{4}} - 1}{x-1}$.
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\arctan \sqrt[3]{x-1}}{x-1}$.

Exercices de perfectionnement

Exercice 57 :

Soit n un entier naturel non nul. Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{(2-x)^n - 1}$.
- $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2n})^-} \frac{\sqrt{\frac{\sin(2nx)}{1+\cos(nx)}}}{4n^2x^2 - \pi^2}$.

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cdots \cos(nx)}{x^2}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 - \sin^2 x) \cdots (1 - \sin^n x)}{\cos^{2n} x}.$$

Exercice 58 :

Étudier la continuité en 0 des fonctions suivantes :

$$1. \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1+x^2}}{x+1} & \text{si } x \geq 0, \\ f(x) = \frac{\cos x - \sqrt{1+\sin x}}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} g(x) = \frac{\sin x - \tan x}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0, \\ g(0) = 0, \\ g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} h(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0, \\ h(0) = 0, \\ h(x) = \frac{x - E(x)}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} k(x) = \arctan x \sin\left(1 + \frac{2}{x^3}\right) & \text{si } x < 0, \\ k(0) = 0, \\ k(x) = \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Exercice 59 :

Soit f_m la fonction définie par
$$\begin{cases} f_m(x) = \frac{\cos\left(\frac{2}{3}x\right) - \sqrt{3} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{\cos 2x} & \text{si } x > 0, \\ f_m(x) = x^2 + mx + m + \frac{2m+1}{x+1} & \text{si } x \leq 0 \text{ et } x \neq -1, \end{cases} \quad \text{où } m \in \mathbb{R}.$$

1. Calculer :

(a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f_m(x).$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x).$

2. Déterminer m sachant que f_m est continue en 0.

3. Déterminer m sachant que f_m est prolongeable par continuité en -1 .

Exercice 60 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x - E(x)} - x$.

1. Déterminer D_f , le domaine de définition de f .
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
3. Soit p un entier relatif.
 - (a) Étudier la continuité de f en p .
 - (b) Étudier la continuité de f sur $]p, p+1[$.
4. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad -x \leq f(x) \leq 1 - x$.
5. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Exercice 61 :

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique.
Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère la fonction f_n définie par $f_n(x) = \frac{1 + \cos x + \cos^2 x + \dots + \cos^n x}{1 + \cos^{2n} x}$.

Montrer que f_n est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 62 :

On considère la fonction f définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ f(0) = 0. \end{cases}$

1. Montrer que $(\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[) \quad \sin x \leq x \leq \tan x$.
2. En déduire que, pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $0 < f(x) < \frac{1 - \cos x}{\sin x}$.
3. Étudier la continuité à droite de f en 0.

Exercice 63 :

On considère la fonction g définie par $\begin{cases} g(x) = \frac{ax^2 - ax}{x^2 - 5x + 4} & \text{si } x > 1, \\ g(x) = \frac{x^3 - 1}{\sqrt[3]{x} + x - 2} & \text{si } x < 1. \end{cases}$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que la fonction g soit prolongeable par continuité en 1.

Exercice 64 :

On considère la fonction définie par $f(x) = \tan x \, E\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Déterminer D_f , le domaine de définition de f .
2. Montrer que $(\forall x \in D_f), \left|f(x) - \frac{\tan x}{x}\right| \leq |\tan x|$.
3. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0, puis donner ce prolongement.

Exercice 65 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$ tels que $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2), |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 66 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2), f(x + y) = f(x) + f(y)$.

1. Montrer que si f est continue en 0, alors elle est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 67 :

1. Montrer que l'équation $2x^3 - 4x + 1 = 3\sqrt{x + x^2}$ admet au moins une solution dans $[0, 1]$.
2. Montrer que l'équation $4x^5 + x^3 = 27$ admet une unique solution dans $]1, 2[$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{9x^5 - x - 2}{x^2 + 1} - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.
Montrer que la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse appartient à $[0, 1]$.
4. Soient u et v les deux fonctions définies par $u(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 7x + 1}$ et $v(x) = \sqrt{5 - x^2}$.
Montrer que les courbes C_u et C_v se coupent en un point dont l'abscisse appartient à $]0, 2]$.

Exercice 68 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{x^2 + 2x}}{x} - 1$.

1. Déterminer D , le domaine de définition de f .
2. Calculer les limites de f aux bornes de D .
3. Montrer qu'il existe un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\left(\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right), \alpha x \leq \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{x^2 + 2x} \leq \beta x$.
4. Montrer qu'il existe un réel $c \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ tel que $\sqrt{1 + \frac{1}{c}} - \sqrt{c^2 + 2c} = c$.

Exercice 69 :

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2x}{x+1}} + \sqrt{2x-x^2} \right)$.

1. Déterminer D , le domaine de définition de f .
2. Justifier la continuité de la fonction f sur D .
3. Montrer qu'il existe un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\left(\forall x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right] \right), \quad 2\alpha \leq \sqrt{\frac{2x}{x+1}} + \sqrt{2x-x^2} \leq 2\beta.$$

4. Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$.
5. Soit $(a, b) \in [0, 1]^2$ tel que $a < b$.

Montrer que $(\exists c \in [a, b]), \quad f(c) = \frac{a-c}{a-2b+c}$.

Exercice 70 :

Soit f une fonction définie de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ et continue sur $[0, 1]$.

Établir que $(\exists c \in [0, 1]), \quad f(c) + f(1-c) = 2c$.

Exercice 71 :

Soit $(a, b) \in [0, 1]^2$ tel que $a < b$.

Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue sur $[a, b]$.

Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 72 :

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$.

Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(c) = \frac{1-c}{1+c}$.

Exercice 73 :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b)$.

Montrer que l'équation $f(x) = f\left(x + \frac{b-a}{2}\right)$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.

Exercice 74 :

Soient f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que $(f(0) - g(0))(f(1) - g(1)) \leq 0$.

1. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = g(c)$.
2. On suppose dans cette question que $f(0) = g(1) = 0$ et $f(1) = g(0) = 1$.
Montrer que $(\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*)(\exists a \in [0, 1]), \quad f(a) = \lambda g(a)$.

Exercice 75 :

Soit $(a, b) \in [0, 1]^2$ tel que $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et soient p et q deux réels strictement positifs.

Montrer qu'il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que : $pf(a) + qf(b) = (p + q)f(c)$.

Exercice 76 :

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que $(\exists a \in \mathbb{R}), (f \circ f)(a) = a$.

Montrer que $(\exists c \in \mathbb{R}), f(c) = c$.

Exercice 77 :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On suppose que f ne s'annule pas sur I .

Montrer que f garde un signe constant sur I .

Exercice 78 :

Soient f et g deux fonctions définies de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, continues sur $[0, 1]$, telles que $f \circ g = g \circ f$.

1. Montrer que si un réel a est solution de l'équation $f(x) = x$, alors $g(a)$ est aussi solution de cette équation.
2. Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in [0, 1]$ tel que $f(\alpha) = g(\alpha)$.
On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

Exercice 79 :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, et soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des éléments distincts de $[a, b]$.

Montrer qu'il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$.

Exercice 80 :

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $ab < 0$.

Soit f une fonction numérique continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$.

1. Montrer que $(\exists (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2), f(x_0)f(y_0) < 0$.
2. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 81 :

Soit P une fonction polynomiale de degré impair.

1. Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet au moins une solution réelle.

Exercice 82 :

Soit f une fonction numérique continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

On considère la fonction f_n définie sur $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ par $f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$.

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} f_n\left(\frac{k}{n}\right)$.
2. En déduire que l'équation $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ admet au moins une solution dans $]0, 1[$.

Exercice 83 :

Soit f une fonction continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} < 1$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 84 :

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$.

1. Montrer que f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{2n}{n+1}\right]$.
2. En déduire que $f\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0$.
3. Montrer qu'il existe au moins un réel $\alpha \in \left[\frac{2n}{n+1}, 2\right]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
4. Vérifier que $\alpha^n = \frac{1}{2 - \alpha}$.

Exercice 85 :

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

Soit f une fonction numérique continue sur $[a, b]$ telle que $f(a) < ab$ et $b^2 < f(b)$.

Montrer que $(\exists \alpha \in [a, b]) \quad f(\alpha) = ab$.

Exercice 86 :

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

1. Soit f une fonction continue et strictement positive sur un segment $[a, b]$.
Montrer que $(\exists \alpha > 0)(\forall x \in [a, b]), \quad f(x) \geq \alpha$.
2. Soient g et h deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que $(\forall x \in [a, b]), \quad g(x) > h(x)$.
Montrer que $(\exists \beta > 0)(\forall x \in [a, b]), \quad g(x) \geq h(x) + \beta$.

Exercice 87 :

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

Soit f une fonction numérique continue sur $[a, b]$.

Montrer qu'il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c}$.

Exercice 88 :

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt[3]{x^3 + 3} \right).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{1 - x^3} - \sqrt{x^4 - 1} \right).$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 1}{\sqrt[4]{x-1} - 1}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt{x-1}}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[4]{x-1} - \sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt{x-1}}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x+63} - 4}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x+3} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x}} \sqrt[4]{x}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[15]{x^5}}{2\sqrt[9]{(x-1)^3} - \sqrt[3]{x}}.$$

Exercice 89 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1. \sqrt[3]{2+x} - \sqrt[3]{2-x} = \sqrt[6]{4-x^2}.$$

$$2. \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[6]{2} \sqrt{x-1}.$$

$$3. 2x\sqrt[3]{x} - 3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 20.$$

$$4. \left(\frac{1 - \sqrt[3]{x}}{3 - \sqrt[3]{x}} \right)^3 + 125 = 0.$$

Exercice 90 :

1. Résoudre les équations suivantes :

$$(a) \sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x(x-1)} + 2\sqrt[3]{(x-1)^2} = 0.$$

$$(b) \sqrt[3]{(1+x)^2} + 4\sqrt[3]{(1-x)^2} = 4\sqrt[3]{1-x^2}.$$

2. Calculer les limites suivantes :

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x-1} \right).$$

$$(b) \text{ Calculer } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[4]{x^4 + x} - x - 2 \right) \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[4]{x^4 + x} - x - 2 \right).$$

3. Étudier, selon les valeurs du paramètre réel m , la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1 + mx} \right).$

Exercice 91 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+8} > 3.$

2. $\sqrt[3]{x^2+8} < x+2.$

3. $x\sqrt[3]{x^4} \leq 20 + \frac{3x}{\sqrt[3]{x}}.$

4. $\frac{x - \sqrt[3]{x}}{4} \geq \frac{\sqrt{x} - 1}{3}.$

5. $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 5x - 6} > x - 2.$

6. $3\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} \geq 20.$

Exercice 92 :

Un marcheur parcourt 12 km en une heure.

1. Montrer qu'il existe au moins un intervalle de 30 minutes pendant lequel il parcourt exactement 6 km.

Exercice 93 :

Discuter, suivant les valeurs des paramètres réels a, b, c et m , l'existence et la valeur des limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c} + mx\sqrt{x+2} \right).$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} + mx \right).$

Exercice 94 :

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $[0, 1]$.

On suppose que $(\forall x \in [0, 1]), (f \circ f)(x) = x$ et que $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que f est strictement monotone sur $[0, 1]$.
3. En déduire que f est strictement croissante sur $[0, 1]$, puis que $(\forall x \in [0, 1]) \quad f(x) = x.$

Exercice 95 :

On considère la fonction h définie par $h(x) = \arctan \left(\frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - 2} \right).$

1. Déterminer D_h , le domaine de définition de h .
2. Calculer les limites de h aux bornes de D_h .
3. Montrer que h réalise une bijection de $K =]\sqrt{2}, +\infty[$ sur un intervalle L à déterminer.
4. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]\sqrt{2} - 1, +\infty[$ par $f(x) = h(x+1).$

Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer, puis déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.