

EXERCICES SUR LA FONCTION LOGARITHME

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

EXERCICE 1 :

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a) $\ln(x-2) + \ln(x+1) = \ln(3x-5)$; $\ln(2x-5) = 0$.
 b) $2\ln(x-2) + \ln(3x+1) = 2\ln 2$; $\ln(x+2) + \ln(x-2) = \ln 5 + 2\ln 3$.
 c) $\ln|x+1| + \ln|x-5| = \ln 16$; $\ln|6-x| = 1$.
 d) $\ln(-x-1) = \ln\left(\frac{-x-10}{x+2}\right)$; $\ln x - \frac{1}{\ln x} = \frac{15}{4}$.
 e) $6\ln^2 x + 7\ln x - 3 = 0$; $\ln^3 x - 2\ln^2 x - \ln x + 2 = 0$.
 f) $2\ln(2x-1) - \ln(3x-2x^2) = \ln\left(\frac{4x-3}{x}\right)$; $\ln(x+2) + 1 = \ln(x-1) + \ln 2$.
 g) $2\ln x = \ln 2 + \ln(2 + \sqrt{2}) + \ln(2 + \sqrt{2+\sqrt{2}}) + \ln(2 - \sqrt{2+\sqrt{2}})$.
 h) $(\ln x)^2 - 7\ln x + 6 = 0$; $2(\ln x)^2 - 3\ln x + 1 = 0$.
 i) $\log x + \log(3-x) = \log 5$; $\log_3^{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} + \log_9^{(4x+15)} = 0$

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- a) $\ln(x^2 - 10x + 9) \geq \ln(3x - 27)$; $\ln[x(3-x)] \leq \ln 2$
 b) $\ln(5x^2 + 6x + 1) > 0$; $2(\ln 2x)^2 - 5\ln 2x - 3 \leq 0$
 c) $\ln\left(\frac{2x-3}{5x+1}\right) \leq 0$; $\ln(x+5) + \ln(x+4) \leq \ln(x+13)$
 d) $\ln x + \ln(2-x) + \ln(x+4) \geq \ln(5x)$; $\ln^2 x + 2\ln x - 15 < 0$
 e) $\ln x - \frac{1}{\ln x} < \frac{8}{3}$; $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln 3x$.

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

- a) $\begin{cases} x+y=65 \\ \ln x + \ln y = 6\ln 2 \end{cases}$; $\begin{cases} 2\ln x - 3\ln y = 9 \\ \ln x + 5\ln y = -2 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ \ln x + \ln y = 2\ln 2 + \ln 3 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln(x^3 y^4) = 6 \\ \ln\left(\frac{x^2}{y^5}\right) = 5 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} \ln y = \ln x + 2 \\ xy = 9e^2 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln x^3 + \ln y^2 = 3 \\ \ln y^2 - \ln x^2 = -2 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln x^3 - \ln y^2 = -4 \\ \ln x + \ln y^4 - 1 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=7 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$
 c) $\begin{cases} x+y=29 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=4e \\ \log x + \log y = 2 + \ln 3 \end{cases}$; $\begin{cases} xy=243 \\ \log_x^y + \log_y^x = \frac{17}{4} \end{cases}$; $\begin{cases} xy=256 \\ \log_x^x + \log_y^y = \frac{50}{7} \end{cases}$
 d) $\begin{cases} \ln(x-2) + 3\ln(y-1) = 0 \\ 2\ln(x-2) - \ln(y-1) = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln(\sin x) + \ln(\cos x) = \ln \sqrt{3} - \ln 4 \\ 2(\sin x + \cos x) = \sqrt{3} + 1 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln\left(\frac{x}{y}\right) = 9 \\ \ln(x^5 y) = -\frac{17}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} 2^{x+1} - 3\log_2^y = -11 \\ 2^{x+2} + 7\log_2^y = 43 \end{cases}$

EXERCICE 2

1°) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 2x}$

2°) Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2x + 1 + \ln(3x - 12)$; b) $f(x) = x^2 \ln(-x^2 + 6x - 5)$; c) $g(x) = \ln(3x - 6) + \ln(x + 4)$

d) $g(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)$; e) $g(x) = x + 1 + \ln\left(\frac{2x-4}{-x+5}\right)$; f) $g(x) = \ln|-3x+12|$; g) $g(x) = \ln|x^2 - 16|$

h) $p(x) = \ln|-x^2 - 3x + 4|$; i) $q(x) = -3x + 1 + \ln\left|\frac{x+3}{-x+5}\right|$; j) $r(x) = x^2 - 3 + \ln|3x - 21|$.

k) $S(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$; L) $T(x) = 3x + 2 - \ln(\sqrt{-x^2 + 3x - 2})$; m) $u(x) = \sqrt{3 - \ln x}$

n) $v(x) = \frac{x-5}{\ln^2 x - 4 \ln x + 3}$; o) $i(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 5x + 6}{-x^2 + 7x + 8}\right)$; p) $\begin{cases} f(x) = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x} \\ f(0) = -1 \end{cases}$

q) $\begin{cases} f(x) = x \ln(3 - \ln x) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$; r) $g(x) = \frac{\ln(x^2 - 5x + 4)}{\ln(x^2 + 7x + 10)}$; s) $h(x) = \ln(x^2 - 1) - \ln(2x^2 - 8)$.

3°) Soient les fonctions $f : x \mapsto f(x) = \ln x$ et $g : x \mapsto g(x) = \ln(x + 2) + 1$.

a) Ecrire $g(x)$ en fonction de $f(x)$.

b) Déterminer les ensembles de définition de f et de g .

c) à partir du tableau de variation de f déduire celle de g .

EXERCICE 3 :

A) On considère la fonction g définie par $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

1°) Etudier les variations de g .

2°) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$.

B) On considère la fonction f définie par $f(x) = -x + 3 + \frac{\ln x}{x}$.

1°) Etudier les variations de f .

2°) Démontrer que la courbe (Cf) admet la droite (Δ) d'équation $y = -x + 3$ comme asymptote oblique. Etudier la position de (Cf) par rapport à (Δ) .

3°) Déterminer les coordonnées du point A de (Cf) où la tangente (T) à (Cf) est parallèle à (Δ) . Donner une équation de cette tangente.

4°) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0 ; 1]$; puis une solution unique β dans $[3 ; 4]$.

5°) Tracer (Cf) et (Δ) dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

6°) Déterminer l'aire **A** de la région du plan limitée par (Cf) ; la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

EXERCICE 4 :

Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = x + \ln|x|$

1°) Déterminer l'ensemble de définition de f . Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue.

Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .

2°) Calculer $f(-1)$ et $f(1)$; étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

3°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (Cf) avec la droite (D) d'équation $y = x$.

4°) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0 ; 1]$.

5°) En déduire le signe de $f(x)$ dans D_f .

6°) Tracer sa courbe représentative (Cf) dans un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

7°) Déterminer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de la région du plan limitée par (Cf) ; la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

EXERCICE 5 :

Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 1 + x - 3x \ln x$.

1°) Peut-on prolonger f par continuité au point $x_0 = 0$? Si oui déterminer son prolongement g .

2°) Déterminer l'intervalle I de définition de g .

3°) Etudier la continuité et la dérivabilité de g au point $x_0 = 0$.

4°) a) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

b) Montrer que dans $[1 ; 2]$ $g(x) = 0$ admet une solution et une seule α .

5°) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ puis interpréter.

6°) Tracer la courbe représentative de g dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

EXERCICE 6 :

I) Soit f l'application de $] -1 ; 5]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x + 1 - \ln(x + 1)$.

On désigne par (Cf) la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité 2cm.

1°) Etudier le sens de variation de f et la limite de f quand x tend vers (-1) .

Donner le tableau de variation de f .

2°) a) Calculer les images par f des réels : 0,5 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5. En donner une valeur approchée à 0,1 près.

b) Déterminer une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse : $\frac{-1}{2}$.

3°) Construire (T) et (Cf) .

II) – On appelle D l'ensemble des points du plan dont les coordonnées x et y vérifient :

$$0 \leq x \leq 5 ; \quad 1 \leq y \leq f(x).$$

A] 1°) f' désigne la fonction dérivée de f .

a) Etudier le sens de variation de f' et donner son tableau de variation.

b) En déduire, pour $x \in [0 ; 5] : 0 \leq f'(x) \leq \frac{5}{6}$.

2°) En appliquant l'inégalité des accroissements finis au segment $[0 ; x]$,
établir que : $1 \leq f(x) \leq \frac{5}{6}x + 1$.

3°) a) Tracer la droite d'équation : $y = \frac{5}{6}x + 1$.

b) Déduire de ce qui précède une majoration de l'aire de D.

B] On appelle $\mathcal{A}$ l'aire de D, en cm^2 .

1°) Exprimer $\mathcal{A}$ à l'aide d'une intégrale.

2°) Donner la dérivée de la fonction g définie par : $g(x) = (x+1) \ln(x+1)$.

En déduire $K = \int_0^5 \ln(x+1) dx$.

3°) Calculer $\mathcal{A}$; en donner une valeur approchée à 1 cm^2 près par défaut.

EXERCICE 7 :

A] Soit $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$.

1°) Etudier la fonction g ;

2°) a) Calculer $g(1)$;

b) En utilisant le tableau de variation de g , déduire que : $g(x) > 0 \quad \forall x \in]0;1[$

B] Soit $f(x) = \frac{-1}{2}x + 3 + \frac{\ln x}{2x}$

1°) a) Préciser l'ensemble de définition Df de f .

b) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

c) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout x de Df : $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.

d) En déduire le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f .

2°) Soit (Cf) la courbe de f dans le plan rapporté au repère orthonormé d'unité graphique 2 cm. Soit D la droite d'équation : $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

a) Donner suivant les valeurs de x le signe de $h(x) = f(x) - (-\frac{1}{2}x + 3)$ et en déduire la position de (Cf) par rapport à D.

b) Soient respectivement M et N les points de même abscisse x de (Cf) et D. Calculer la distance MN en fonction de x . Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

c) Construire (Cf) et D.

3°) a) Calculer la dérivée de la fonction U définie par $U(x) = (\ln x)^2$

b) En déduire l'aire A du domaine plan limité par (Cf) la droite D et les droites d'équations : $x = 1$; $x = e^2$.

EXERCICE 8:

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Soit (Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (Unité graphique : 2 cm).

1°) a) Prouver que pour tout réel $t \geq 0$ on a : $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$.

b) En déduire que $\forall x > 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \quad (1)$.

2°) Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}$

a) Calculer $g'(x)$

b) Prouver que pour tout nombre réel $x \geq 0 : 0 \leq g'(x) \leq \frac{x^2}{4}$

c) En déduire que pour tout nombre réel $x \geq 0 : 0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{12} \quad (2)$.

3°) Etude des variations de f .

a) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.

b) Etablir que pour $x \geq 0$ on a : $g(x) \leq \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$.

Grâce à (2) établir le sens de variation de f .

4°) a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b) à l'aide de (2) montrer que pour $x \geq 0$ on a :

$$x - \frac{x^3}{12} - \frac{2x}{2+x} \leq x - \ln(1+x) \leq x - \frac{2x}{2+x}, \text{ puis } \frac{1}{2+x} - \frac{x}{12} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{x+2}.$$

c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ et en déduire que $f'(0) = \frac{-1}{2}$.

d) Soit T la tangente à (Cf) en $x_0 = 0$.

En utilisant (1) montrer que (Cf) est au-dessus de T pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

5°) Dresser le tableau de variation de f . Tracer (Cf) et T dans le même repère.

EXERCICE 9:

Partie A : On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2 + 1}$.

1°) a) Calculer la dérivée g' de g . Montrer que pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $g'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x(x^2 + 1)^2}$.

b) Etudier le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x .

2°) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

3°) a) Dresser le tableau de variation de g .

b) En déduire qu'il existe un unique nombre réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Vérifier que $0,5 < \alpha < 0,6$.

4°) Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

Partie B : On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note (Cf) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 5cm.

1°) a) Montrer que pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, on a $f'(x) = g(x)$.

b) En déduire les variations de f sur $]0 ; +\infty[$.

2°) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x)$; en déduire que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

3°) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

Préciser la tangente à la courbe (Cf) en $x=0$.

4°) a) Prouver que, pour tout élément x de $[0,5 ; \alpha]$; $0 \leq f'(x) \leq f'(0,5)$.

b) En déduire que, pour tout élément x de $[0,5 ; \alpha]$:

$$0 \leq f(\alpha) - f(0,5) \leq (\alpha - 0,5) f'(0,5) \quad \text{puis que} \quad 0 \leq f(\alpha) - f(0,5) \leq \frac{1}{10} f'(0,5).$$

d) En déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-3} près.

5°) Dresser le tableau de variations de f . Tracer la courbe de f .

6°) Déterminer l'aire du domaine plan limité par la courbe de f , l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

EXERCICE 10:

Partie A : On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$$

1°) Etudier le sens de variations de g .

2°) a) Calculer $g(1)$ et $g(2)$. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $]0 ; +\infty[$.

b) Trouver un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .

3°) Déduire le signe de $g(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

Partie B : On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$$

On appelle (Cf) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal d'unité Graphique 2 cm.

1°) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$ puis interpréter graphiquement ces limites.

2°) a) Montrer que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} \times g(x)$.

b) En déduire les variations de f .

c) Montrer que, $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ et donner le tableau de variation de f .

3°) Construire la courbe (Cf) de f .

Partie C : On se propose de trouver un encadrement de l'aire A de l'ensemble des

points $M(x ; y)$ tels que
$$\begin{cases} 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

1°) Montrer que, pour tout $x \geq 1$: $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$.

2°) a) Calculer $I = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x} dx$;

b) En utilisant une intégration par parties, calculer $J = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2} dx$.

3°) a) Déduire un encadrement de $K = \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx$.

b) Exprimer A en fonction de K , puis déduire une valeur approchée de A en cm^2 .

EXERCICE 11:

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x}$.

1°) Après avoir montré que, pour tout x réel $x \neq \ln x$, préciser l'ensemble de définition de la fonction f . Déterminer la limite de $\frac{f(x)}{x-1}$ lorsque x tend vers 1.

2°) Etudier les variations de cette fonction en précisant éventuellement les asymptotes.

3°) Construire la représentation graphique des variations de la fonction f dans le plan rapporté à un repère. (On donnera l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 1$).

EXERCICE 12:

Soit la fonction P définie par $P(x) = (1 + \frac{1}{x}) \ln(1+x)$.

1°) h désigne la fonction numérique définie par : $h(x) = x - \ln(1+x)$.

Etudier le sens de variation de h et le signe de $h(x)$.

2°) Quelle est l'ensemble de définition de P noté D_p ?

Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)$; $\lim_{x \rightarrow -1} P(x)$.

On désigne par F l'application de $D_p \cup \{-1\}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} F(-1) = 0 \\ F(x) = P(x) \text{ pour } x \in D_p \end{cases}.$$

Etudier la dérivabilité de F en $x = -1$.

3°) Quelle est la limite de $P(x)$ quand x tend vers 0 ?

On désigne par f l'application de $D_p \cup \{-1\}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = F(x) \end{cases} \text{ Pour } x \in D_p \cup \{0; -1\} ;$$

4°) Etudier les variations de f en utilisant en particulier la question 1°).

Construire la courbe représentative de f .

EXERCICE 13:

1°) a) Etudier les variations de la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x(x+2)}{2(x+1)} - \ln(1+x)$$

b) Étudier les variations de la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}.$$

c) Dédire des questions précédentes que, pour tout nombre réel x strictement positif,

$$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < \frac{x(x+2)}{2(x+1)} \quad (1)$$

d) Démontrer que pour tout $x > 0$, $\frac{x(x+2)}{2(x+1)} < x$. (2).

2°) a) Dédire de (1) et (2) que pour tout $y > 0$,

$$\frac{1}{1+y} < \ln\left(1+\frac{1}{y}\right) < \frac{1}{y}.$$

b) Dédire de (1) et (2) que pour tout $z > 0$,

$$\frac{z-1}{z} < \ln z < z-1.$$

3°) Utiliser l'un de ces encadrements pour encadrer $\ln a$ dans chaque cas suivant :

$$a = 0,5 \quad ; \quad a = 0,8 \quad ; \quad a = 0,98 \quad ; \quad a = 1,02 \quad ; \quad a = 1,5.$$

EXERCICE 14:

Le but de ce problème est d'étudier la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}(x^2 + 1 - \ln x) \text{ et construire sa courbe représentative } Cf \text{ dans le plan muni d'un}$$

repère orthonormé d'unité graphique : 2 cm.

1°) Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

a) Etudier le sens de variation de g et ses limites en 0 et en $+\infty$.

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule et que $1,30 \leq \alpha \leq 1,35$.

c) Etudier le signe de $g(x)$.

2°) a) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) Exprimer $f'(x)$ à l'aide de $g(x)$. En déduire le sens de variation de f .

3°) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe Cf .

b) Déterminer le point d'intersection A de Cf et (Δ) ; préciser la position de Cf par rapport à la droite (Δ) .

c) Construire la courbe Cf et la droite (Δ) , en précisant la tangente en A à Cf .

EXERCICE 15:

A) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln|x|$

- 1) Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}^*$. Préciser la valeur de l'extremum relatif de g .
- 2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
- 3) Donner un encadrement α de par deux nombres rationnels de la forme $\frac{n}{10}$ et $\frac{n+1}{10}$ avec n entier naturel.
- 4) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

B) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$. Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Étudier les limites de f en $-\infty$; en 0 et en $+\infty$.
- 2) Calculer $f'(x)$ puis en déduire le tableau de variation de f .
- 3) Démontrer que $f(\alpha) = 3\alpha - \frac{1}{2\alpha^2}$.
- 4) En utilisant l'encadrement de α trouvé au A) 3°) montrer que :
 $1,6 < f(\alpha) < 2,1$.

C) soit les points $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ où M' est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées.

- 1) Déterminer x' et y' en fonction de x et y .
- 2) Démontrer qu'une équation de la courbe (Γ) à laquelle appartient M' lorsque M décrit la courbe (C_f) est la suivante : $y = -2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$
- 3) Étudier la position relative de (Γ) par rapport à (C_f) .

D) On considère un réel m supérieur à 1.

Soit h la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $h(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

- 1) Démontrer que H définie sur $[1; +\infty[$ par $H(x) = -\frac{1 + \ln x}{x}$ est une primitive de h .
- 2) On désigne par $A(m)$ l'intégrale $\int_1^m [2x - f(x)]dx$. Calculer $A(m)$.
- 3) Déterminer si elle existe la limite de $A(m)$ quand m tend vers $+\infty$.

EXERCICE 16:

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = 2x + 1 + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$$

- 1) Etudier les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition. On appelle (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé. Préciser les asymptotes à la courbe (C_f) de f . En particulier on établira l'existence d'une asymptote oblique ($\mathcal{D}$).
- 2) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
- 3) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à ($\mathcal{D}$).
- 4) Construire la courbe de f .

EXERCICE 17:

A/– Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \ln |x^2 - 2x - 3|$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue puis calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
4. Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est axe de symétrie de la courbe de f .
5. Tracer la courbe représentative (C_f) de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité 1 cm.

B/– Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x(\ln x)^2 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

1. Etudier le signe de $f'(x)$
2. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.
3. Quelle est la demi tangente en $x_0 = 0$?
4. Donner l'équation de la tangente (T) en $x_0 = e$.
5. Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f .
6. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x(\ln x - 1)$.
 - a) Calculer $g'(x)$ et en déduire une primitive de f .
 - b) Calculer l'aire $A(\lambda)$ de la portion du plan comprise entre $(\mathcal{C}_f)$ l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ ($0 < \lambda < 1$) ; $x = 1$.
7. Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda)$.

EXERCICE 18:

Pour m réel on considère la famille de fonctions f_m définie par

$$f_m(x) = x + \ln \sqrt{x^2 + mx + 1}$$

1. pour $m = 2$ étudier les variations de f_m
2. Déterminer l'ensemble des valeurs de m , noté V_m pour que f_m soit définie sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que les courbes (C_m) des fonctions f_m passent par un point fixe A dont on déterminera les coordonnées.
4. Pour $m = 0$, on considère la fonction f_0
 - a) Etudier les variations de la fonction f_0 .
 - b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_0 sur son ensemble de définition.
5. a) Montrer que la courbe (C_0) de f_0 admet deux points d'inflexion dont on donnera leurs coordonnées.
b) Etudier les branches infinies de (C_0) ;
c) Tracer la courbe (C_0) dans le plan muni d'un orthonormé.
6. Soit la fonction F définie par : $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \ln(x^2 + 1)$
 - a) Quel est son domaine de définition ?
 - b) Montrer que l'on a : $F'(x) = f_0(x) + \frac{x^2}{x^2 + 1}$;
 - c) Soit h une primitive de la fonction u telle que : $U(x) = \frac{1}{1+x^2}$ vérifiant $h'(x) = U(x)$ et $h(0) = 0$; $h(1) = \frac{11}{4}$. En déduire une primitive de la fonction f_0

(On montrera que : $F'(x) = f_0(x) + 1 - U(x)$). Calculer en cm^2 l'aire de la portion du plan limitée par la courbe (C_0) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
7. Pour $m \in V_m$, on considère la droite (D_m) d'équation $y = x + m$.
 - a) Montrer que pour tout m de V_m et $m > 0$ l'intersection de (C_m) et (D_m) contient toujours deux points dont on donnera les coordonnées ; on les notera M_m et M'_m .
 - b) Montrer que les points M_m et M'_m sont symétriques par rapport à un point I_m
 - c) Que se passe-t-il si on fait tendre m vers 0 ?.

EXERCICE 19:

Partie A :

On considère la fonction f définie sur $] -1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$.

1. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition ;
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]1; +\infty[$ une solution unique α . Vérifier qu'une valeur approchée de α à 10^{-1} près par défaut est 3,9.
4. Préciser suivant les valeurs de x , le signe de $f(x)$.

Partie B :

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(0) = 0$ et $g(t) = \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}$ si $t > 0$.

1. Etudier la continuité puis la dérivabilité de g au point $t = 0$.
2. Montrer que pour tout réel t strictement positif on a : $g'(t) = \frac{1}{2t\sqrt{t}} f(t)$.
3. a) Calculer la limite de g en $+\infty$.
b) Dresser le tableau de variation de g .
4. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i} ; \vec{j})$.

On prendra pour unités : 1cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées. Construire la courbe (Γ) de g .

Partie C :

Cette partie a pour objectif de déterminer l'aire A , en unités d'aire, du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe (Γ) et la droite d'équation : $x = 1$.

1. a) Démontrer que la fonction g_1 définie sur $[0; +\infty[$ par : $g_1(x) = \sqrt{x} \ln(1+x)$ est dérivable en 0.

- b) Soit ϕ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $\phi(x) = 2\sqrt{x} \ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$.

Montrer que ϕ est dérivable en tout point de l'intervalle $[0; +\infty[$ et que $\phi'(x) = g(x)$.

2. Déduisez des questions précédentes que : $A = 2 \ln 2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$

et K la fonction définie sur l'intervalle $I = \left[0 ; \frac{\pi}{2} \right]$ par : $K(\theta) = \tan^2 \theta$ et

$$h : x \mapsto \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt.$$

- a) Calculer $(h \circ k)(\theta)$;
- b) Prouver que, pour tout $\theta \in I$, $(h \circ k)'(\theta) = 4 \tan^2 \theta$.
- c) Ecrivez $\tan^2 \theta$ sous la forme $(\tan^2 \theta + 1) - 1$ puis déterminer une primitive de $(h \circ k)'$. Donner l'expression de $(h \circ k)$.
- d) Calculer $h(1)$.
4. Déduisez des résultats précédents la valeur exacte de A .

EXERCICE 20:

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés des fonctions f_n ; $n \in \mathbb{N}^*$ définies sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f_n(x) = x - n - \frac{n \ln x}{x}$. La courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 2cm est notée (C_n) .

A) Etude des variations de f_n ; $n \in \mathbb{N}^*$.

1°) Soit, pour tout entier naturel non nul n , la fonction g_n définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$g_n(x) = x^2 - n + n \ln x.$$

a) Etudier le sens de variation de g_n et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

b) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n ; et que α_n appartient à $[1 ; 3]$.

2°) a) Etablir que, pour $x \in]0 ; +\infty[$: $f_n'(x) = \frac{g_n(x)}{x^2}$.

b) Déterminer le signe de $g_n(x)$ et en déduire le sens de variation de f_n .

3°) a) Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$.

b) Montrer que la droite (D_n) , d'équation $y = x - n$ est asymptote à la courbe (C_n) , puis étudier la position de (C_n) par rapport à (D_n) sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

B) Etude des cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$.

1°) α_n étant le nombre définie en A) 1°) montrer que :

▪ Pour $n = 1$, $\alpha_1 = 1$; Pour $n = 2$; $1,2 < \alpha_2 < 1,3$.

2°) En utilisant les règles sur les inégalités et l'encadrement de α_2 ci-dessus montrer que $f_2(\alpha_2) \geq -1,24$. En utilisant le sens de variation de f_2 , montrer que $f_2(\alpha_2) \leq -1,10$.

3°) Donner les tableaux de variations de f_1 et de f_2 .

4°) Représenter dans le même repère les droites (D_1) et (D_2) puis les courbes (C_1) et (C_2) .

C) Etude des positions relatives des courbes (C_n) .

1°) Pour tout entier naturel n , et pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, calculer la différence $f_n(x) - f_{n+1}(x)$.

Calculer la limite de cette différence lorsque x tend vers $+\infty$.

2°) Soit d la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $d(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$.

a) Etudier les variations de d , préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

b) Déduire de la question précédente que l'équation $d(x) = 0$ admet une solution unique β et que β appartient à l'intervalle $]0 ; 1[$.

c) Montrer que, pour tout entier naturel non nul, on a $f_n(\beta) = \beta$.

3°) A l'aide des résultats obtenus dans les questions C) 1°) et 2°), établir que toutes les courbes (C_n) se coupent en un point A que l'on placera sur la figure.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, préciser les positions relatives de (C_n) et (C_{n+1}) .

EXERCICE 21:

Soit la fonction f définie par $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

2°) Démontrer que pour tout x de D_f $f(x) > x + |x|$.

3°) En déduire le signe de $f(x)$ sur D_f .

4°) Etudier la fonction et tracer sa courbe représentative (C_f).

5°) Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

a) résoudre l'équation $g(x) = -\ln(3 - 2\sqrt{2})$.

b) Démontrer que g est une fonction impaire ;

c) Etudier g et tracer sa courbe (C_g).

d) Démontrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; et que pour tout entier relatif n ,

$$g\left(\frac{e^n + e^{-n}}{2}\right) = n.$$

EXERCICE 22:

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln x$.

1°) Étudier les variations de la fonction f ;

2°) Construire la courbe (C_f) de f dans un repère orthogonal d'unités graphiques : 10cm sur l'axe des abscisses et 5cm sur l'axe des ordonnées.

3°) On note λ un réel strictement positif.

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_{\lambda}^1 \ln x \, dx$;

b) En déduire la valeur de $I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(x) \, dx$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

c) Déterminer la limite ℓ de $I(\lambda)$ quand λ tend vers 0^+ .

4°) Pour tout entier naturel n supérieure ou égal à 2 on pose : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n f\left(\frac{p}{n}\right)$

a) En utilisant le sens de variation de f sur $]0; 1]$; démontrer que, pour p entier naturel vérifiant $1 \leq p \leq n-1$, on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{p+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x) \, dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{p}{n}\right).$$

b) En déduire que : $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n$, puis que

$$I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

c) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{3}$.

EXERCICE 23

Une entreprise fabrique un produit en quantité x , exprimée en milliers de tonnes. Le coût total de fabrication est donné par : $C_T(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{9}{2} \ln(x+1)$

pour $x \in [0 ; 5]$. Les coûts sont exprimés en millions de francs.

A-/ Étude d'une fonction auxiliaire.

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 5]$ par : $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{9x}{x+1} - 9 \ln(x+1)$.

1°) Calculer $f'(x)$. Vérifier que $f'(x) = \frac{x(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}$.

2°) Établir le tableau de variation de f sur $[0 ; 5]$.

3°) En déduire que f s'annule sur $[0 ; 5]$ pour une valeur unique ℓ .

4°) Déterminer des résultats précédents le signe de f sur $[0 ; 5]$.

B-/ Étude d'un coût moyen C_m .

La fonction coût moyen est définie sur $[0 ; 5]$ par : $C_m(x) = \frac{C_T(x)}{x} = \frac{x}{2} + \frac{9}{2} \left[\frac{\ln(x+1)}{x} \right]$

1°) Calculer $C_m'(x)$. Vérifier que l'on peut écrire $C_m'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ où f est la fonction auxiliaire de la question A-.

2°) Étudier le sens de variation de C_m sur $]0 ; 5]$.

3°) Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal exprimé en francs par tonnes ? Quel est ce coût ?

EXERCICE 24 :

Une entreprise fabrique des objets dont le coût de production en francs, de q objets est donné par la fonction $C(q) = 20 \ln(3q+1)$.

1°) Déterminer le coût de fabrication de 5 objets, de 10 objets.

On arrondira le résultat au centimètre près.

2°) Quel est le nombre d'objets fabriqués sachant que le coût de production s'élève à 90,22F ?

3°) Étudier les variations de C et construire sa courbe représentative ($\mathcal{C}$) pour q variant de 0 à 50.

4°) Chaque objet est vendu à 3 F

a) Exprimer la fonction bénéfice B en fonction de q .

b) Calculer $B(5)$; $B(10)$; puis $B(40)$.

c) En utilisant le graphique, déterminer la quantité minimale d'objets que doit vendre l'entreprise pour être bénéficiaire en supposant qu'elle vend toute sa production.