

Exercice 1 :

On donne les renseignements suivants sur la fonction f :

- L'ensemble de définition de la fonction f est $(D_f) =]-\infty; 4[\cup]4; +\infty[$.
- $f'(x)$ est positive sur $]-\infty; -1[\cup]4; +\infty[$ et négative sur $]-1; 4[$.
- $f(0) = \frac{11}{4}$; $f(-1) = 3$; $f\left(\frac{5}{2}\right) = f(6) = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x + 5] = 0$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = 0$

1°) Dresser le tableau de variation de f ;

2°) Les équations de chacune des asymptotes ;

3°) Tracer soigneusement la courbe (C_f) de f .

Exercice 2 :

Soit f la fonction dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			-1		-5		$+\infty$

La fonction f a pour formule explicite : $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition de f .

2°) Calculer $f'(x)$.

3°) Déterminer les réels a ; b et c en utilisant les données du tableau de f .

4°) Montrer que la restriction g de f à $[0; +\infty[$ est une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

5°) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α . Montrer que α est compris entre 1 et 2.

6°) Donner une équation de la tangente (T_0) à la courbe (C_f) de f au point d'abscisse $x_0 = 1$

Exercice 3:

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O, i, j) , l'unité de longueur sur chaque axe est 2cm.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$X \rightarrow f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$$

1) Calculer lorsque f est définie, les constantes a, b, c tel que : $f(x) = x + a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$

2) Etudier la fonction f

3) Montrer que la courbe (C) représentative de f admet deux asymptotes dont l'une est la droite (D) d'équation : $y = x - 2$. On précisera la position de (C) par rapport à (D) et les coordonnées des points communs à (C) et (D).

4) Construire la courbe (C) dans le repère (O, i, j) .

Exercice 4:

A) Soit $h(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x-1}$. Déterminer les réels a ; b ; c sachant que la courbe (C_h) de la fonction h passe par les points $A(0; 2)$; $B(2; -2)$ et la dérivée de h s'annule pour $x = 2$.

B) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{-x^2 + 2x - 2}{x-1}$.

1°) Déterminer les réels α ; β ; γ tels que $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x-1}$.

2°) Étudier la fonction f .

3°) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote oblique à (C_f) .

4°) Étudier les positions relatives de (C_f) par rapport à (D).

5°) Donner une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse -2 .

6°) Montrer que le point $I(1; 0)$ est centre de symétrie de (C_f) .

7°) Tracer la courbe (C_f) dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Exercice 5 :

Soit la fonction numérique f à variable réelle x définie par $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$.

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1°/ Montre que $(\mathcal{C}_f)$ admet deux asymptotes dont on déterminera les équations.

2°/ Précisez la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à son asymptote oblique.

3°/ Étudie les variations de f .

4°/ Existe-t-il des points de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$? Si

oui trouve les équations de ces tangentes en ces points.

5°/ Tracez la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et ses asymptotes dans le plan muni du repère orthonormé

$(O; \vec{i}; \vec{j})$

6°/ Montre que la restriction g de f à l'intervalle $I =]1; 2]$ est une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera.

7°/ a-/ Calcule $(g^{-1})'(\frac{5}{2})$

b-/ Dressez le tableau de variation de g^{-1} puis trace sa courbe représentative dans le même repère que celle de f .

Exercice 6 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$

1) Déterminer Df

2) Montrer que $\forall x \in Df, f(x) = \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}$

3) Montrer f est impaire

4) Montrer que f est continue sur $[-1, 0[\cup]0, 1]$

5) f est elle dérivable en $x_0=1$

6) Etudier les variations de f et tracer sa courbe dans un repère orthonormé (o,i,j)

Exercice 7 :

On désigne par f, la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

1) Résoudre dans R, l'équation : $\sin x + \cos x = 0$. En déduire l'ensemble de définition de f

2) Montrer que f admet pour période π

3) On appelle (C) la représentation graphique dans un repère (o,i,j) de la restriction de f à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$. Montrer que (C) admet le point $A\left(\frac{\pi}{4}; \frac{1}{2}\right)$ comme centre de symétrie

4) Faire l'étude de f sur $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ et tracer (C) ainsi que la tangente à (C) en A.

Exercice 8 :

Soit la fonction définie sur l'intervalle $]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$. Montrer que f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur un ensemble J à déterminer. Pour tout x de J calculer $f^{-1}(x)$. Donner la valeur de $f(2)$ puis calculer $(f^{-1})'$ (3/4).

Exercice 9 :

A) Soit $p(x) = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 12x - 9$.

1) Calculer $p(1)$ et $p(3)$

2) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, p(x) = (x-1)(3-x)(x^2+3)$.

3) Etudier le signe de p(x) suivant les valeurs de x

B) Soit $f: x \rightarrow \frac{-x^3+3x^2-3x-3}{(x-1)^2}$. On désigne par (T) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (0 ; I ; J)

1) Déterminer Df et montrer que $\forall x \in Df; f(x) = -x + 1 - \frac{4}{(x-1)^2}$

2) Calculer les limites de f aux bornes de Df

3) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote à (T) en $-\infty$ et en $+\infty$. Trouver l'équation de l'autre asymptote à (T) et Justifier.

4) Démontrer que $\forall x \in Df; f'(x) = \frac{p(x)}{(x-1)^4}$. En déduire le signe de $f'(x)$.

5) Etablir le tableau de variation de f

6) Soit g la restriction de f à $] -\infty; 1[$

a) Justifier que g est une bijection de $] -\infty; 1[$ sur un intervalle K que l'on

Précisera.

b) En déduire que l'équation (E): $x \in] -\infty; 1[, f(x) = 0$ admet une solution

Unique x_0

c) Justifier que $x_0 \in] -1; 0[$.

d) Calculer si possible $(g^{-1})'(-3)$

7) Construire la courbe (T) puis celle de (T^{-1}) dans le même repère (0 ; I ; J).

Exercice 10 :

Soit f_m la fonction définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_m(x) = \frac{mx^2 - (m+2)x + 2}{2x - 5}$ où m est un paramètre réel et (C_m) la courbe représentative de f_m . Pour quelles valeurs de m , la fonction

f_m

-N'admet ni minimum, ni maximum

-Admet un minimum et un maximum

-Qu'y a-t-il de particulier pour $m=0$ et pour $m=\frac{4}{5}$.

Exercice 11 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ par $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ et C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

- 1) Etudier la fonction g .
- 2) Montrer qu'il existe un réel α unique tel que $g(\alpha) = 0$, puis déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près du réel α .
- 3) Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$

Partie B : Etude de la fonction f

- 1) Déterminer les limites de f aux bornes de chacun des intervalles de son ensemble de définition.

- 2) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$, $f'(x) = \frac{x \times g(x)}{(x^2 - 1)^2}$.

En déduire le tableau de variation de la fonction f .

- 3) a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$, $f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2 - 1}$.

b) En déduire que la courbe (C) de f admet une asymptote oblique (D) .

c) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à (D) .

- 4) Tracer la droite (D) et la courbe C dans le repère.

Partie C : Nombre de solution d'une équation

- 1) Déterminer les abscisses des points de la courbe (C) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x + 2$.
- 2) Déterminer une équation de chacune de ces tangentes et représenter-les dans le repère.
- 3) En déduire graphiquement, suivant les valeurs de m , le nombre de solution de l'équation $f(x) = x + m$.

Exercice 12 :

- A) 1) On se propose de déterminer sur $\mathbb{R}$ le signe de l'expression $A(x) = x - \sqrt{x^2 - 4}$.
- Déterminer le domaine de définition de (x) .
 - Quel est le signe de $A(x)$ pour x négatif ?
 - On pose $B(x) = x + \sqrt{x^2 - 4}$. Quel est le signe de $B(x)$ pour x positif ?
 - Calculer $A(x) \cdot B(x)$, déterminer son signe. En déduire le signe de $A(x)$ pour x positif.
- 2) On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = -x + \sqrt{x^2 - 4}$.
- Déterminer son domaine de définition et ses limites aux bornes de cet ensemble.
 - Préciser les asymptotes à la courbe (C_f) .
 - Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .
 - Tracer (C_f) dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
- 3) a) Démontrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} sur l'intervalle $I = [2, +\infty[$.
- Donner le tableau de variation de f^{-1} .
 - Tracer la courbe $(C_{f^{-1}})$ dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 13 :

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{3|x-1|+1}{2|x-1|-1}$.

- Écrire $f(x)$ sans valeur absolue.
- Étudier la fonction f et construire sa courbe (C_f) .
- Montrer que la courbe (C_f) admet un axe de symétrie que l'on déterminera.
- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = m$; m étant un paramètre réel. Indiquer le signe des solutions lorsqu'elles existent.

Exercice 14 :

Soit la fonction f définies sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x+2}{x^2+2}$. Montrer que f est une bijection de l'intervalle $]1; +\infty[$ sur un ensemble J à préciser. Calculer $(f^{-1})'(\frac{2}{3})$.

Exercice 15 :

- A) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x-2}$; a, b, c sont des réels et (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
- Déterminer les réels a, b, c pour que (C) passe par les points $A(-2; 0); B(3; 10)$ et admet au point E d'abscisse $x = 0$ une tangente parallèle à l'axe $(o; \vec{i})$.
- B) Dans la suite du problème on prendra $a = 1; b = 1; c = -2$.
- Déterminer trois réels $\alpha; \beta; \gamma$ tels que $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x-2}$.
En déduire que (C) admet une asymptote oblique (D) dont on déterminera une équation.
 - Étudier les variations de la fonction f .
 - Montrer que le point d'intersection des asymptotes est centre de symétrie de (C) .
 - Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = 3$.
 - Tracer (C) .
 - Soit h la restriction de f à l'intervalle $[4; +\infty[$.
 - Montrer que h réalise une bijection de $[4; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
 - Calculer $h(5); (h^{-1})'(10)$ pour $x \in [4; +\infty[$.
 - Tracer (Ch^{-1}) dans le même repère que (C) .

Exercice 16 :

Soit la fonction numérique définie par : $f(x) = x + \sin x$

- 1) Montrer que la courbe représentative de la fonction f admet un centre de symétrie
- 2) Montrer que courbe admet une direction asymptotique que l'on déterminera
- 3) Calculer $f'(x)$, étudier son signe, déterminer les points d'inflexions de la courbe
- 4) Tracer cette courbe sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$

Exercice 17 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x$.

- 1) Montrer que l'on peut restreindre l'étude de f à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- 2) a- Montrer que $f'(x) = \cos x \cos 2x$.
b- Donner pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ les signes de $\cos x$ et de $\cos 2x$. Déduisez en le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et dresser le tableau de variation de f .
- 3) Tracer la courbe représentative de f lorsque $x \in [-\pi; \pi]$.

Exercice 18 :

Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = |x - 1| + \frac{2}{x+1}$.

- 1°) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- 2°) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 3°) a) La fonction f est-elle continue au point 1 ?
b) La fonction f est-elle dérivable au point 1 ?
Interpréter graphiquement votre réponse.
- 4°) Dresser le tableau de variation de puis tracer sa courbe.

Exercice 19: Cet exercice est composé de deux parties indépendantes.

Partie A :

Soit la fonction $f: X \rightarrow \frac{x^2+ax+b}{cx^2+dx-2}$.

Déterminer les réels a ; b ; c ; d sachant que la représentation graphique (C_f) de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ donné :

- admet la droite d'équation : $x = 2$ pour asymptote ;
- n'admet pas d'asymptote parallèle à l'axe des abscisses ;
- passe par le point A de coordonnées $(1; -2)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur (-5) .

Partie B :

Soit la fonction $g: X \rightarrow \frac{x+4}{x+1}$.

- 1°) Etudier les variations de la fonction g .
- 2°) Montrer que g est une bijection de $] -1; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- 3°) Calculer $(g^{-1})'(5)$.

4°) Montrer que pour tout réel x de $[1; 3]$ on a : $-\frac{3}{4} \leq g'(x) \leq -\frac{3}{16}$.
En déduire que pour tout réel α de $]1; 3[$ on a : $\frac{13-3\alpha}{4} \leq g(\alpha) \leq \frac{43-3\alpha}{16}$.

Exercice 20 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$.

1. a) Montrez que pour tout $x \in [2; 3]$, $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq 1$.

b) Déduisez-en un encadrement de $f(x) - f(2)$ sur $[2; 3]$, puis un encadrement de $f(x)$ par deux fonctions affines g et h sur $[2; 3]$.

2. Donnez une équation de la tangente (t) à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.

3. Tracez les courbes représentatives de $f; g; h$ dans l'intervalle $[2; 3]$.

Exercice 21 :

f est la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par : $f(x) = x\sqrt{x+1}$.

1. Calculer la fonction dérivée $f'(x)$ et la dérivée seconde $f''(x)$.

2. démontrer que la fonction dérivée $f'(x)$ est croissante sur $[-1; +\infty[$ et en déduire un encadrement de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 3]$.

3. x est un réel de l'intervalle $[0; 3]$;

a) Appliquer l'inégalité des accroissements finis pour encadrer $f(x) - f(0)$, par deux fonctions affines.

b) Appliquer à nouveau l'inégalité des accroissements finis pour encadrer $f(3) - f(x)$, puis en déduire un encadrement de $f(x)$ par deux nouvelles fonctions affines.

4. Le repère ortho normal a pour unité graphique 2 cm.

a) Vérifier que deux des quatre fonctions affines trouvées précédemment correspondent aux tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses 0 et 3.

b) Représenter la fonction f et les quatre fonctions affines trouvées précédemment sur $[0; 3]$

Vérifier que les renseignements obtenus dans les questions précédentes permettent de dire que $[0; 3]$, la courbe de f est incluse dans un parallélogramme que vous hachurez.

Exercice 22 :

Soit f une fonction dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$	

La fonction f est de la forme : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

1°) Calculer $f'(x)$.

Trouver les coefficients $a; b$ et c en utilisant les données du tableau.

2°) Montrer que la courbe (C_f) admet une droite asymptote oblique (D). Étudier la position de (C_f) par rapport à (D).

3°) Donner le signe de $f(x)$ pour x élément du domaine de définition de f .

4°) Tracer la courbe (C_f) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Exercice 23 :

I- Soit la fonction f définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$.

1) Calculer $f'(x)$ et en déduire que pour tout x de $[0; 1]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

2) Montrer que pour tout x de $[0; 1]$ on a $|f(x) - 1| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |x - 1|$.

II-/ Soit la fonction k définie par $k(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{2x - 4}$.

1) Démontrer que pour tout x de $[4; 6]$ on a : $0 \leq k'(x) \leq \frac{3}{8}$.

2) Montrer que pour tout x de $[4; 6]$ on a : $|k(x) - \frac{11}{2}| \leq \frac{3}{8} |x - 6|$.

III-/ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x(x - 1)|$.

1) Exprimer $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

2) Étudier la dérivabilité de f aux points d'abscisses 0 et 1.

3) Étudier les variations de f .

4) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, construire la représentation graphique (Γ) de f et les demi tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

Exercice 24 :

Soit la fonction f définie sur $[0; \pi]$ par $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 + 2\cos x - \frac{5}{2}$.

1) a) Déterminer la fonction dérivée f' de f .

b) Étudier les variations de f' sur $[0; \pi]$.

c) Déduisez de cette étude que l'équation $f'(x) = 0$ admet sur $]0; \pi[$ une solution unique notée α .

d) Déterminer le signe de f' sur $[0; \pi]$.

2) a) Donner le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.

b) Déduisez-en le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 25 :

Soit la fonction h définie par : $h(x) = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x$.

1) Montrer que l'on peut restreindre l'étude de h à $[0; 2\pi]$.

2) a-/ Montrer que $h'(x) = \cos x \cos 2x$.

b-/ Donner pour $x \in [0; 2\pi]$ les signes de $\cos x$ et de $\cos 2x$. Déduisez en le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x et dresser le tableau de variation de h .

3) Tracer la courbe représentative de h lorsque $x \in [-\pi; \pi]$.

Exercice 26 :

Soit la fonction f définie par sa représentation graphique ci-dessous

1°) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

2°) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .

3°) Dresser le tableau de variation de f .

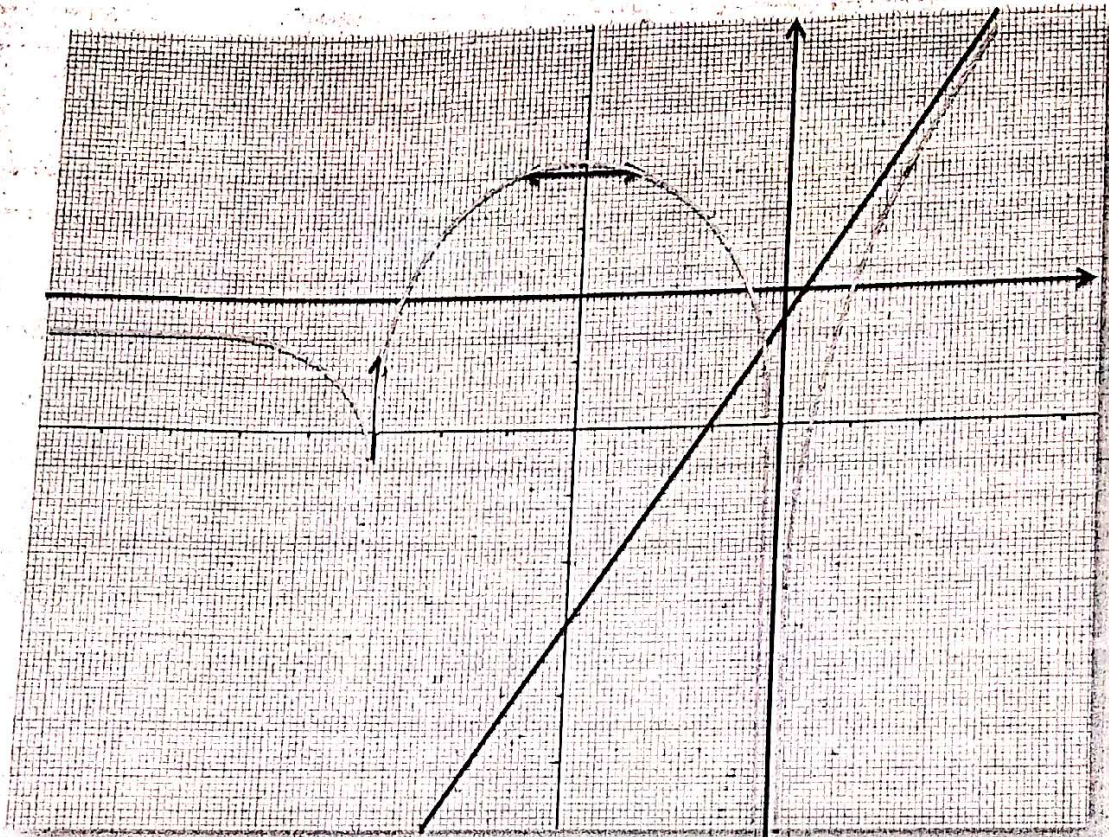
4°) La fonction f est-elle continue ; dérivable en $x = -3$? Justifier votre réponse

5°) Donner une équation de la tangente (T) à (C_f) en $x = 0$.

6°) Montrer que la restriction g de f à $[0; 3[$ est une bijection de $[0; 3[$ sur une partie J de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

7°) Déterminer les équations des asymptotes à la courbe (C_f) de f .

8°) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.



Exercice 27 :

A) Soit la fonction f_m définie par $f_m(x) = \frac{x^2 + 3x + 4m}{x^2 + (5m+1)x + 3}$; où x est la variable et m un paramètre ; à chaque valeur de m correspond une courbe (C_m).

1) Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par trois points fixes dont on déterminera les coordonnées indépendamment de m .

2) Déterminer m pour que le point d'intersection P de (C_m) et de l'asymptote parallèle à l'axe des abscisses ait pour abscisse $\frac{3}{2}$.

3) Construire la courbe (C_0).

B) Soit la famille de fonctions g_m définie par $g_m = \frac{mx^2 - 2x + 1}{x^2 - 2mx + 1}$; où m est un paramètre réel.

1°) Montrer que toutes les courbes (G_m) de g_m passent par deux points fixes A et B dont on déterminera les coordonnées.

2°) Déterminer m pour que, quel que soit le réel $x \neq \{0; -2; 2\}$, l'entier naturel $[g_m(x)]^2$ soit au plus égal à 1.

3°) Représenter graphiquement la fonction pour $m = 0$.

Exercice 28 :

A)- Soit la fonction f définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$; où a ; b et c sont des réels.

1°) Calculer $f'(x)$.

2°) Déterminer les réels a, b, c sachant que f admet 1 pour extremum en $x = 0$ et -3 pour extremum en $x = 2$.

3°) Étudier la fonction f . Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[-1; 0]$; une solution unique β dans $[0; 1]$; une solution unique λ dans $[2; 3]$.

4°) Tracer la courbe (C_f) de f .

B) soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$.

1-/ Trouver a, b et c tel que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

2-/ Montrer que la droite (D_f) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C_f) de f .

3-/ Étudier les variations de f .

4-/ Étudier les positions de (C_f) par rapport à (D_f) .

5-/ Montrer que la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; -3]$ est une bijection g de $]-\infty; -3]$ sur un intervalle I que l'on précisera.

6-/ Calculer $g(-5)$; $g(-4)$; $(g^{-1})'(-7)$.

7-/ Tracer la courbe (C_f) de f ainsi que (C') de g^{-1} dans le même repère.

8-/ Démontrer que pour tout x de $[1; 3]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$.

9-/ Résoudre et discuter graphiquement suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation $x^2 - mx + 3 - m = 0$.

C) Soit la fonction f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f(x) = \frac{-x^2+x+2}{x}$. Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique $1cm$.

1-/ Déterminer l'ensemble de définition de (D_f) de f .

2-/ Trouver les réels a ; b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$.

3-/ Montrer que la courbe (C_f) de f admet une asymptote oblique (D) que l'on précisera.

4-/ Déterminer les limites de f ; calculer sa dérivée $f'(x)$ puis dresser son Tableau de variation.

5-/ Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C_f) avec l'axe abscisses.

6-/ Étudier la position de (C_f) par rapport à son asymptote oblique (D) .

7-/ Donner une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $x = -1$.

8-/ Calculer $f(1)$; $f(2)$; puis $(f^{-1})'(2)$.

9-/ Tracer la courbe (C_f) .

Exercice 29 :

f est la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$.

1. Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]1; 2[$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a même ensemble de solutions que l'équation $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$.

3. Notons g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

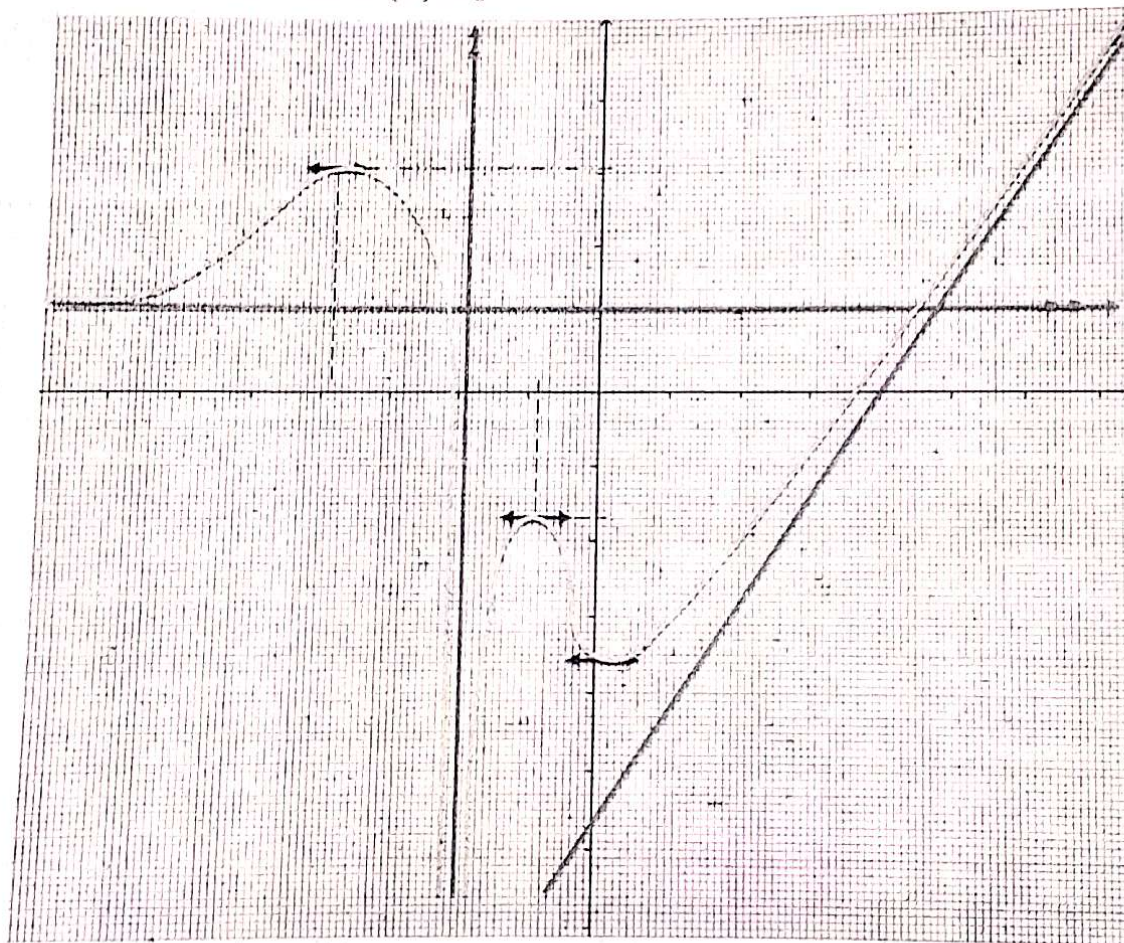
a) montrer que, pour tout $x \in [1; +\infty[$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

b) En déduire que pour tout $x \in [1; +\infty[$, $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$.

Exercice 30 :

Soit f la fonction donnée par sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
- 2°) Donner les limites de $f(x)$ aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
- 3°) Donner les équations des asymptotes à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f .
- 4°) Dresser le tableau de variation de f .
- 5°) Donner l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \geq 0$.
- 6°) Montrer que la restriction de f à $] -\infty; -4]$ réalise une bijection g de $] -\infty; -4]$ sur un intervalle P que l'on précisera.
- 7°) Tracer la courbe $(\mathcal{C}')$ de g^{-1} .



Exercice 31 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2-1}$ de représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O; I; J)$ (unité : 1cm) et la fonction h définie sur $[-1; +\infty[$ par :

$h(x) = \frac{x^2\sqrt{x+1}}{|x|}$ si $x \neq 0$ et $h(0)=0$ de représentation graphique $(\mathcal{C}_h)$ dans un repère orthonormé $(O'; I'; J')$ (unité : 3cm)

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction U définie sur $\mathbb{R}$ par $U(x) = x^3 + 3x + 8$

- 1) a) Calculer les limites de U en $-\infty$ et $+\infty$.
- b) Calculer $U'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Etudier le signe de $U'(x)$ et dresser

le tableau de variation de U .

- 2) a) Justifier que l'équation $U(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

et que $-1,6 < \alpha < -1,5$

- b) justifier que pour tout x élément de $[-\infty; \alpha[$, $U(x) < 0$ et que pour tout x élément de $[\alpha; +\infty[$ $U(x) > 0$.

Partie B : Etude d'une fonction f

- 1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$

- 2) a) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x , et justifier que $f'(x) = \frac{xU(x)}{(x^2+1)^2}$

- b) En Utilisant les résultats de la question 2) b) de la partie A), Etudier

le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation f .

- 3) Démontrer que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$

- 4) a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (Cf) .

- b) Etudier les positions relatives de (Cf) et (D) .

- 5) Construire la droite (D) et la courbe (Cf) dans le même repère $(0; I; J)$

Partie C : Etude d'une fonction h

- 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de h en -1 et 0 .

- 2) Etudier les variations de h puis dresser son tableau de variation

- 3) Soit g la restriction de h à $[0; +\infty[$; Démontrer que g réalise une bijection $[0; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser. Soit g^{-1} sa bijection réciproque.

- 4) a) Calculer $g(1)$ et justifier que g^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$ puis ; calculer $(g^{-1})'(\sqrt{2})$.

- b) Déterminer une équation de la tangente (T) à (Cg^{-1}) au point $x_0 = \sqrt{2}$

- c) Tracer (Ch) ; (Cg^{-1}) et (T) dans le même repère $(0; u; v)$