

RECUEIL DE PROBLEMES

TSE - TSI

Étude de fonctions numériques d'une variable réelle

Sources :

- LYCEE GNETAASO (LGDK) - <http://www.gnetaaso.com/fiche.html>

PROBLEME 1 :**PARTIE A**

Soit l'application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + 3 + \sqrt{x^2 + 1}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

1°/ Déterminer la limite de f en $-\infty$. Quelle en est la conséquence graphique ?

2°/ Démontrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

3°/ Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.

4°/ a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle K à préciser. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f .

b) Calculer $f^{-1}(4)$ et $(f^{-1})'(4)$

5°/ Construire $(\mathcal{C})$ et la courbe $(\mathcal{C}')$ de f^{-1} dans le repère (O, I, J)

PARTIE B

Soit la fonction h définie sur $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ par $h(x) = \sqrt{x+1}$

1°/ Montrer que la fonction dérivée h' de h est strictement décroissante sur $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

2°/ Soit a un nombre réel de l'intervalle $[0; 1]$.

a) Vérifier que pour tout élément x de $[0; a]$, on a : $\frac{1}{2\sqrt{1+a}} \leq h'(x) \leq \frac{1}{2}$.

b) En appliquant les inégalités des accroissements finis à h sur l'intervalle $[0; a]$, montrer que : $1 + \frac{a}{2\sqrt{1+a}} \leq \sqrt{1+a} \leq 1 + \frac{a}{2}$.

$$\frac{a}{2\sqrt{1+a}} \leq \sqrt{1+a} \leq 1 + \frac{a}{2}$$

PROBLÈME 2 :**PARTIE A**

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln x$

1°/ Étudier les variations de g .

2°/ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $0,65 \leq \alpha \leq 0,66$.

3°/ Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

PARTIE B

Soit la fonction numérique de variable réelle x définie par $f(x) = 1 - x + \frac{1+\ln x}{x}$ de courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormé d'unité graphique 4 cm.

1°/ a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f puis interpréter graphiquement.

2°/ a) Montrer que $(\mathcal{C})$ admet une droite asymptote (D) en $+\infty$ que l'on précisera.

b) Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D)

3°/ Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

4°/ Montrer que $f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$

5°/ Montrer qu'il existe un point A de $(\mathcal{C})$ dont précisera les coordonnées où la tangente (T) est parallèle à (D) .

6°/ Construire (D) ; (T) et $(\mathcal{C})$.

PROBLEME 3 :

A) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x} \ln(1+e^x)$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique 1cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

1.a) Déterminer la limite de f en $-\infty$. (On pourra poser $h = e^x$).

b) Vérifier que, pour tout réel x ; $f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1+e^{-x})$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

En déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ admet deux asymptotes que l'on précisera.

2. g est la fonction numérique définie sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ par $g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t)$.

Démontrer que g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. En déduire le signe de $g(t)$ lorsque $t > 0$.

3.a) Calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g(e^x)$, f' désignant la fonction dérivée de f .

b) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

B) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction F .

2.a) Vérifier que, pour tout nombre réel, $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$ et calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$

b) En déduire à l'aide d'une intégration par parties le calcul de $F(x)$.

c) Vérifier que $F(x)$ peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$(1) \quad F(x) = x - \ln(1+e^x) - f(x) + 2\ln 2$$

$$(2) \quad F(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - f(x) + 2\ln 2$$

3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} [F(x) - x]$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

PROBLÈME 4 :**PARTIE A**

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 - x^2 e^{-x}$

1°/ Étudier les variations de f .

2°/ Montrer que la courbe représentative (C) de f rencontre l'axe des abscisses en seul point d'abscisse α dont on déterminera une valeur approchée à 10^{-1} près

3°/ Tracer la courbe (C) dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

4°/ a) Déterminer les nombres réels a , b et c tels que la fonction : $x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \mapsto x^2 e^{-x}$.

b) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

PARTIE B

1°/ En désignant par f' et f'' les dérivées première et seconde de la fonction f définie dans la partie A, vérifier que pour tout nombre réel ; $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = -2e^{-x} + 1$.

2°/ On se propose de déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 2y' + y = -2e^{-x} + 1$$

a) Montrer qu'une fonction g est solution de l'équation (E) si et seulement si, $(g - f)$ est solution de l'équation différentielle $(E') : y'' + 2y' + y = 0$.

b) Résoudre l'équation (E') ; en déduire les solutions de (E).

c) Déterminer la solution φ de l'équation différentielle (E) telle que $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$.

PARTIE C

On considère les fonctions numériques φ_n définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi_n(x) = (-x^2 + nx + n)e^{-x} \text{ où } n \text{ est un entier naturel.}$$

1°/ Montrer que toutes les courbes (C_n) des fonctions φ_n passent par un point fixe I.

2°/ Montrer que la fonction φ_n admet deux extremums que l'on précisera.