

EXERCICE 1

1) Soit la fonction g définie par $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$

- a) Etudier les variations de g
- b) En déduire le signe de $g(x)$

2) Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2x + \frac{\ln x}{x}$

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthogonal d'unité graphique 2cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées

a) Déterminer la limite de f en 0

b) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

Déduire de la question 1) le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f

c) Soit (D) la droite d'équation $y = 2x$

Calculer les coordonnées du point B, intersection de la courbe et de la droite (D)

Déterminer une équation de la tangente en B à la courbe (C)

Etudier la position relative de la courbe (C) et de la droite (D)

d) Tracer la courbe (C) et la droite (D)

EXERCICE 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1 + 3 \ln \left| \frac{x+1}{x-3} \right|)$

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f

b) Calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition

c) Déterminer la dérivée f' de f puis dresser le tableau de variation de f

d) Montrer que la courbe de f admet un point d'inflexion B et que B est un centre de symétrie

e) Montrer que la courbe de f admet une asymptote oblique dont on déterminera une équation

f) Tracer la courbe de f et les asymptotes dans un repère orthonormé

EXERCICE 3

Une entreprise fabrique une quantité x d'un produit exprimée en milliers de tonnes, dont

le coût marginal C est définie sur $[0, 10]$ par : $C(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$

Le but du problème est d'étudier le coût total C_t et coût moyen C_m de la production puis de minimiser le coût moyen

Les coûts sont exprimés en milliers de francs

A) Etude de C_t

a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x de $[0, 10]$

$$C(x) = ax + \frac{b}{x+1}$$

b) La fonction C_t est la primitive de C qui s'annule pour $x = 0$. Déterminer C_t

B) Etude d'une fonction auxiliaire de f

On considère la fonction f, définie sur $[0,10]$ par :

$$f(x) = x^2 + \frac{8x}{x+1} - 8\ln(x+1)$$

a) Montrer que la fonction f' de f est donnée par :

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

b) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0,10]$. On admettra que f s'annule pour $\alpha = 1.712$

C) Etude du coût moyen C_m

La fonction C_m est définie sur $]0,10[$ par :

$$C_m(x) = \frac{Ct(x)}{x} = \frac{x}{2} + 4 \frac{\ln(x+1)}{x}$$

a) Calculer la dérivée C'_m au point x

Vérifier que l'on peut écrire :

$$C'_m(x) = \frac{f(x)}{2x^2}$$

Où f est la fonction auxiliaire introduite dans la question B)

b) Etudier le sens de variation de C_m sur $]0,10[$

c) Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimum, et quel est ce coût ?