

### **EXERCICE 1**

1°) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes

$$z_0 = 1 + i ; z_1 = -1 + i\sqrt{3} ; z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} ; z_3 = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} ; T = \frac{z_2}{z_3} ; P = z_2 \times z_3$$

2°) Mettre sous algébrique chacun des nombres complexes suivants

$$z_1 = (2 + i)(-1 + i) + (1 + 2i) ; z_2 = (1 + i\sqrt{3})^3 ; z_3 = \frac{1 - 3i}{3 - i} .$$

3°) Mettre sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes

$$z_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{13} ; z_2 = 1 + i\sqrt{3} ; z_3 = \frac{(\sqrt{3} + i)^9 (1 - i)}{(1 + i)^2} ; z_4 = \sin \alpha + i(1 + \cos \alpha) , \alpha \in [0 ; \pi[$$

4°) soit  $\alpha$  un nombre réel élément de  $]0 ; \pi[$  . Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes :  $z_0 = 1 - e^{i\alpha} ; z_1 = 1 + e^{i\alpha} ; Z = \frac{z_0}{z_1} ; T = z_0 \times z_1 .$

### **EXERCICE 2**

Soient A ; B et M les points du plan complexe d'affixes respectives

$$z_A = -2 + i ; z_B = 2 - 3i \text{ et } z = x + iy .$$

1°) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $\frac{z + 2 - i}{z - 2 + 3i} = \frac{1}{2}$

2°) Déterminez et construire l'ensemble  $(\mathcal{E}_0)$  des points M tels que  $\left| \frac{z + 2 - i}{z - 2 + 3i} \right| = 1$

3°) Déterminez et construire l'ensemble  $(\mathcal{E}_1)$  des points M tels que  $MA^2 + MB^2 = 32$

4°) On pose  $K = (z + 2)(z + 1 + i)$  . Déterminez l'ensemble  $(\mathcal{E}_2)$  des points M tels que K soit un réel.

### **EXERCICE 3**

1°) Déterminer l'ensemble des images des nombres complexes z tels que le nombre complexe  $A = (1 - z)(1 - iz)$  soit : a) un réel ; b) un imaginaire pur.

2°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i} ; \vec{j})$  on considère un point M

d'affixe  $z = x + iy$  , ( $z \neq -i$ ) et on pose  $P = \frac{z + 2}{z + i}$  .

a) Écrire P sous la forme algébrique en fonction de x et y.

b) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

- P soit un réel ;
- P soit imaginaire pur.

3°) Pour tout nombre complexe  $z = x + iy$  ; on pose  $Z_0 = \frac{iz + 3}{(1 + i)z - 1}$  .

a) Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que  $Z_0$  soit un réel

b) Déterminer l'ensemble (F) des points M tels que  $Z_0$  soit un imaginaire pur.

4°) Déterminer l'ensemble des images des complexes z tels que les images des nombres complexes : i ; z ; iz soient alignées.

## **EXERCICE 4**

Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par  $f(z) = z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}z - 16$

1°) Trouver les réels  $a$  et  $b$  tels que  $f(z) = (z^2 + 4)(z^2 + az + b)$

2°) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $f(z) = 0$

3°) Placer dans le plan rapporté au repère orthonormé  $(o, \vec{u} ; \vec{v})$  les images  $A ; B ; C ; D$  des solutions de  $f(z) = 0$  ; puis préciser que ces points appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

## **EXERCICE 5**

1°) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

a)  $z^2 + 3(1 + i)z + 5i = 0$  ; b)  $z^2 - (5 + 3i)z + 4 + 7i = 0$  ; c)  $iz^2 - 2z - 4 - 4i = 0$

d)  $z^2 - (1 - i)z - 18 + 13i = 0$  ; e)  $z^2 + (1 + 6i)z + (1 + 23i) = 0$  ;

f)  $z^4 - (5 - 14i)z^2 - (24 + 10i) = 0$  ; g)  $z^4 + z^2 + 1 = 0$  ; h)  $z^6 - (1 - i)z^3 - i = 0$

i)  $(2iz + 3 - i)^2 + (z + 1 + 5i)^2 = 0$  ; j)  $z^3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$  ;

k)  $z^6 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$  ; l)  $z^4 = 2(-1 + i\sqrt{3})$

2°) – a) Déterminer les solutions complexes de l'équation :  $z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$  les écrire sous forme trigonométrique ;

b) Vérifiez que  $a = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$  est une racine quatrième de  $8(1 - i\sqrt{3})$ .

En déduire la forme algébrique des solutions de l'équation précédente.

## **EXERCICE 6**

Soient les complexes  $z_1 = 1 - i$  et  $z_2 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$

1°) Mettre sous forme trigonométrique  $z_1$  ;  $z_2$  ;  $\frac{z_2}{z_1}$  ;  $z_1 \times z_2$ .

2°) En déduire que  $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$  et que  $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

3°) On considère l'équation d'inconnue réelle  $x$

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2})\sin x = 2$$

Résolvez cette équation dans  $\mathbb{R}$  ; puis placez les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

## **EXERCICE 7**

1°) Soit  $z$  et  $Z$  les nombres complexes définis par :  $z = \sqrt{1+\sqrt{2}} + i\sqrt{\sqrt{2}-1}$  et  $Z = z^4$   
Déterminer les racines quatrièmes de  $Z$  sous forme trigonométrique.

En déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{8}$  et  $\sin \frac{\pi}{8}$ .

2°) Déterminer  $A = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1987}$  ;  $B = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1992}$

3°) Déterminer et construire l'ensemble ( $E$ ) des points  $M$  du plan dont l'affixe  $z$  vérifie la condition proposée :

a)  $|z+1+2i| = |z-4|$  ; b)  $|z-3i| = 2$  ; c)  $|\bar{z}-2+i| = 1$  ; d)  $|(1+i)z-2i| = 2$ .

## **EXERCICE 8**

1°) a) Calculer les nombres:  $a = i^4$  ;  $b = i^5$  ;  $c = i^6$  ;  $d = i^7$ .

b) En déduire les valeurs de :  $i^{4n}$  ;  $i^{4n+1}$  ;  $i^{4n+2}$  ;  $i^{4n+3}$  avec ( $n \in \mathbb{N}$ ).

c) Calculer :  $A = i^{60}$  ;  $B = i^{149}$  ;  $C = i^{134}$  ;  $D = i^{167}$  ;

$E = i^{156}$  ;  $F = i^{205}$  ;  $G = i^{94}$  ;  $H = i^{215}$ .

2°) a) Linéariser :  $\cos^5 x$  ;  $\sin^5 x$  ;  $\cos^3 x$  ;  $\sin^3 x$ .

c) Écrire  $\cos(4x)$  en fonction de  $\sin x$ .

d) Écrire  $\sin(4x)$  en fonction de  $\sin x$  et  $\cos x$ .

e) Écrire  $\cos(3x)$  en fonction de  $\cos x$ .

f) Écrire  $\sin(3x)$  en fonction de  $\sin x$ .

g) En déduire une linéarisation de :

$$H = \cos(4x)\sin x \quad ; \quad G = 4\cos^3 x - 3\cos x - 4\sin^3 x + 3\sin x ;$$

$$K = \cos(3x)\sin^2 x \quad ; \quad L = \sin(3x)\sin^2 x;$$

4°) Linéariser les expressions suivantes :

$$A = \cos^2 x \sin^3 x ; B = \sin 3x \cos^2 x ; C = \cos x \sin^4 x ; D = \sin^4 x + \sin^2 x ;$$

$$E = \cos^2 x \sin^5 x ; F = \cos^3 x \sin^3 x ; G = \cos^3 x \sin^2 x ; H = \cos^4 x + \sin^4 x.$$

## **EXERCICE 9**

Le plan est orienté et rapporté au repère orthonormé direct. Soit A et B deux points distincts d'affixes respectives **a** et **b**

1- construire le point  $M_1$  dont l'affixe  $z_1$ , vérifie :  $\frac{z_1 - a}{z_1 - b} = -1$

2- construire le point  $M_2$  dont l'affixe  $z_2$ , vérifie :  $\frac{z_2 - a}{z_2 - b} = 2$

3- construire le point  $M_3$  dont l'affixe  $z_3$ , vérifie :  $\frac{z_3 - a}{z_3 - b} = i$

4- construire le point  $M_4$  dont l'affixe  $z_4$ , vérifie :  $\frac{z_4 - a}{z_4 - b} = -i$

## **EXERCICE 10**

1- Pour tout complexe  $z$  distinct de 1, on appelle A ; M et M' les points d'affixes respectives 1 ;  $z$  ;  $z^2$ . Déterminer les points M tels que le triangle AMM' soit équilatéral.

2 – Déterminer les racines cubiques du nombre complexe  $i$  sous forme trigonométrique et algébrique.

En déduire la résolution dans  $\mathbb{C}$  de l'équation :  $[(1-2i)z]^3 - i = 0$

3- Calculer le module et l'argument du nombre complexe  $u = \frac{1}{1+itg\theta}$ .

(On discutera suivant les valeurs de  $\theta$ ).

## **EXERCICE 11**

Pour chaque réel  $\alpha \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ , on définit l'application

$$f_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$Z \mapsto f_\alpha(z) = z^2 \cos^2 \alpha - 2z \cos \alpha + 1 + \sin^2 \alpha.$$

Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé (o,i,j) on désigne par (E)

l'ensemble des points M d'affixes  $z$  telle qu'il existe  $\alpha \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ , vérifiant  $f_\alpha(z) = 0$ .

1-a) résolvez dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $f_\alpha(z) = 0$ .

b) si le point  $M(z)$  appartient à (E), que peut-on dire du point M' d'affixe  $\bar{z}$  ?

2- Pour  $\alpha \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  fixé on pose :  $Z = \frac{1}{2}i(z'+z'')$  où  $z'$  et  $z''$  sont les solutions de l'équation  $f_\alpha(z) = 0$ . Déterminer les racines quatrièmes de Z et représenter les points images sur un cercle.

## **EXERCICE 12**

Soit l'application  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$Z \mapsto f(z) = z^3 - 3(1+i)z^2 + (3+10i)z + 3(1-3i)$$

1- Déterminer les nombres complexes  $a$ ,  $b$  ; et  $c$  pour que

$$f(z) = (z-1-i)(az^2 + bz + c)$$

2- résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $f(z) = 0$

3- Montrer que les points images dans le plan complexe, des solutions de cette équation sont alignés.

## **EXERCICE 13**

Soit le polynôme complexe  $P(z)$  de la variable complexe  $z$

$$P(z) = z^3 - (7+9i)z^2 + (39i-14)z + 50$$

1-Montrer que l'équation  $P(z) = 0$  admet une racine  $z_0$  imaginaire pure.

2- Résoudre l'équation  $P(z) = 0$ . On notera  $z_1$  la racine non imaginaire pur ayant la plus petite partie réelle et  $z_2$  la troisième.

3-Dans le plan affine euclidien rapporté au repère  $(o, i, j)$  orthonormé on considère les points  $A$ ,  $B$ , et  $C$  d'affixes respectives  $z_0$  ;  $z_1$  ;  $z_2$ . Déterminer et construire l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :  $MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4$ .

## **EXERCICE 14**

1- Soit le polynôme  $P(z) = z^3 - (3+6i)z^2 - (9-15i)z + 22-6i$

a) Montrer que l'équation  $P(z) = 0$  admet une racine réelle que l'on déterminera.

b) En déduire une résolution dans  $\mathbb{C}$  de  $P(z) = 0$  ;

c) Soient  $A$  ;  $B$  ;  $C$  les images respectives des solutions de  $P(z)=0$ . Placer dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé ces points et en déduire la nature du triangle  $ABC$ . Donner une équation cartésienne du cercle  $(C)$  circonscrit au triangle  $ABC$ .

2- Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$ .

3- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les systèmes :

$$a) \begin{cases} 5iz + (2-i)z' = 1+12i \\ (2-3i)z + (5-2i)z' = 39-10i \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2iz + (1-3i)z' = 14+6i \\ (1-i)\bar{z} + (5-2i)\bar{z}' = 4-18i \end{cases} \quad c) \begin{cases} (1+i)z_1 + 2i\bar{z}_2 = 3-i \\ 2z_1 + 3\bar{z}_2 = 5 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2iz + 2z' = 4-4i \\ (1+i)z - 2z' = -5+7i \end{cases} ; \quad e) \begin{cases} 2z_1z_2 = 3 \\ \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases} ; \quad f) \begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = 1 \\ z_1z_2z_3 = 1 \end{cases}$$

4- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

$$a) \quad z^7 = \frac{(4+4i)^3}{(1+i\sqrt{3})^4} \quad b) \quad z^5 = \frac{[1-2\sqrt{3}+i(2+\sqrt{3})]^7}{(2-i)^7(\sqrt{2}+i\sqrt{6})^2}$$

## **EXERCICE 15**

Soit le polynôme complexe  $P(z) = (z^2 + 3z)^2 + (3z + 5)^2$ .

1) Factoriser  $P(z)$  en un produit de deux polynômes du second degré à coefficients complexes.

2) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 + 3(1+i)z + 5i = 0$

3) En déduire la résolution dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $P(z) = 0$  ; puis montrer que  $P(z)$  est le produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

## **EXERCICE 16**

Le plan rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{u} ; \vec{v})$

1- Résolvez dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(z + \frac{1}{2} + i)^2 + \frac{1}{4} = 0$

2- On donne les points  $A(-1 ; -5)$  et  $B(\frac{1}{3} ; \frac{1}{6})$ . A tout point  $M$  d'affixe  $z$ , ( $z \neq -1-5i$ ) on

associe le point  $M'$  d'affixe  $Z$  tel que :  $Z = 3i \times \left( \frac{z - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}i}{z + 1 + 5i} \right)$

a) Déterminer l'ensemble  $(\Gamma)$  des nombres complexes tels que  $Z = z$

b) Déterminer l'ensemble  $(E)$  des points  $M$  tels que :  $|Z| = 3$  ;

c) Déterminer l'ensemble  $(\Delta)$  des points  $M$  tels que  $M'$  décrit le cercle de centre l'origine  $O$  du repère et de rayon 1 ;

d) Déterminer et construire l'ensemble  $(F)$  des points  $M$  tels que  $M'$  décrit le demi axe  $[O, \vec{u})$  privé de  $\{0\}$ .

## **EXERCICE 17**

Soit  $\alpha$  un nombre réel appartenant à  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ . on considère l'équation d'inconnue  $z$  complexe  $(E) : (1+iz)^3(1-\operatorname{tg} \alpha) = (1-iz)^3(1+\operatorname{tg} \alpha)$

1- soit  $z$  une solution de  $(E)$

a) Montrer que  $|1+iz| = |1-iz|$ .

b) En déduire que  $z$  est un réel.

2- a) Exprimer  $\frac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha}$  en fonction de  $e^{i\alpha}$

b) Soit  $z$  un nombre réel, on pose  $z = \operatorname{tg} \varphi$  où  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ .

Ecrire l'équation portant sur  $\varphi$  traduisant  $(E)$  et le résoudre.

c) Déterminer les solutions  $z_1 ; z_2 ; z_3$  de  $(E)$ .

### **EXERCICE 18**

Soit  $u$  le nombre complexe défini par  $u = \cos\theta + i \sin\theta$  où  $\theta \in ]-\pi ; \pi ]$

1- Calculer le module et un argument de  $\frac{1-u}{1+u}$  (On discutera suivant les valeurs de  $\theta$ )

2- En déduire le module et un argument de  $z$  tel que :  $u = \frac{2+iz}{2-iz}$

3- Résoudre  $(2+iz)^6 = (2-iz)^6$ .

### **EXERCICE 19**

Le plan rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{u} ; \vec{v})$

1- Trouvez l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que les points images des nombres complexes  $1 ; z ; 1+z^2$  soient alignés.

2- On désigne par  $M$  le point d'affixe  $z$  et  $M'$  le point d'affixe  $Z$  tel que  $Z = \frac{z+1}{z-1}$

a) Trouver l'ensemble  $(D)$  des points  $M$  tel que  $Z$  soit un réel ;

b) Trouver l'ensemble  $(\mathcal{E})$  des points  $M$  tel que  $Z$  soit un imaginaire pur ;

c) Trouver l'ensemble  $(\Gamma)$  des points  $M$  tel que  $O ; M ; M'$  soient alignés.

### **EXERCICE 20**

Soit l'équation dans  $\mathbb{C} : z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = 0$

1) Montrer que l'équation admet dans  $\mathbb{C}$  une solution réelle.

2) En déduire la résolution dans  $\mathbb{C}$  de cette équation.

3) Soient  $A ; B ;$  et  $C$  les points images de ces solutions dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé. Déterminer la nature du triangle  $ABC$ .

4) Déterminer l'affixe de l'isobarycentre  $G$  de ce triangle.

### **EXERCICE 21**

Soit l'application  $f : z \mapsto f(z) = \frac{iz}{z+i} ; z \neq -i$

1- Déterminer les coordonnées du point  $B$  dont l'affixe  $z_0$  est telle que :  $f(z_0) = 1+2i$

2- Soit  $z \in \mathbb{C} - \{-i\}$ . On note  $r$  le module de  $z+i$  et  $\alpha$  une mesure de son argument. Donner la forme trigonométrique de  $f(z) - i$  en fonction de  $r$  et  $\alpha$ .

3- Soit  $A$  le point d'affixe  $-i$ .

a) Déterminer l'ensemble  $(\mathcal{E})$  des points  $M$  vérifiant :  $|f(z)-i| = \sqrt{2}$  et l'ensemble  $(D)$  des points  $M$  tels que  $\frac{\pi}{4}$  soit une mesure l'argument de  $f(z) - i$ .

b) Montrer que  $B$  appartient à  $(\mathcal{E})$  et  $(D)$  puis construire  $(\mathcal{E})$  et  $(D)$ .

4- à tout point d'affixe  $Z = (\sqrt{2}-\sqrt{2} - i\sqrt{2}+\sqrt{2})z$ . Déterminer l'ensemble  $(\mathcal{E})$  des points  $M$  tels que  $|Z| = 8$ .

5- résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $z^2 - (1 + i\sin 2\theta)z + \frac{1}{2}i\sin 2\theta = 0$  où  $\theta$  est un paramètre réel. En discutant selon les valeurs de  $\theta$ , on écrira les solutions  $z_1$  et  $z_2$  de cette équation sous la forme trigonométrique.

## **EXERCICE 22**

1°) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe  $z = 7 - i + \frac{5}{(1-7i)(i-1)}$

2°) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe  $t$  dans les cas suivants :

$$\text{a) } t = \frac{(1+i)^4}{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)} ; \quad \text{b) } t = -2e^{i\frac{2\pi}{3}} ; \quad \text{c) } t = \frac{1+e^{i\frac{2\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{2\pi}{3}}}.$$

3°) a) Déterminer les racines sixièmes de l'unité ; puis les écrire sous formes Trigonométrique et algébrique.

b) Calculer  $(1-i)^6$ .

c) En déduire les racines sixièmes du complexe  $T = 8i$  sous formes trigonométrique et algébrique.

## **EXERCICE 23**

1°) a) Vérifier que  $(2+i)^4 = -7 + 24i$

b) Trouver les racines quatrièmes de 1

c) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^4 + 7 - 24i = 0$

2°) Soit l'équation (E) :  $z^3 - 2iz^2 - 9z + 18i = 0$

a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure  $z_0$  que l'on déterminera.

b) Résoudre (E).

3°) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z^2 + z - 1 + 3i = 0$ .

## **EXERCICE 24**

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

A est le point d'affixe  $z = 1+2i$  ; B est le point d'affixe  $t = 1+5i$

C est le point d'affixe  $k = 4+2i$ . On pose  $Z = \frac{k-z}{t-z}$

1°) Que représente  $|Z|$  ?

2°) Que représente  $\arg(Z)$  ?

3°) Calculer  $Z$  et en déduire la nature du triangle ABC

4°) Déterminer l'ensemble ( $\mathfrak{I}$ ) des points M d'affixe  $m$  tels que  $|m-z| = |\overline{m}-t|$ .

## **EXERCICE 25**

1) Déterminer dans  $\mathbb{C}$  les racines carrées de  $u = 7 + 24i$ .

2) Les racines  $z_1$  et  $z_2$  d'une équation du second degré à coefficients

complexes vérifient : 
$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_1 z_2 = 4 \\ \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} = 1 \end{cases} . \text{ Former cette équation et la résoudre dans } \mathbb{C}.$$

## **EXERCICE 26**

**I)** Soit le complexe  $Z = (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)$ .

1°) Déterminer le module et un argument de  $z^2$ . En déduire le module et un argument de  $z$ .

2°) Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

3°) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $(\sqrt{3}+1)\cos x + (\sqrt{3}-1)\sin x = \sqrt{2}$

**II)** 1°) Trouver l'ensemble des points  $M(x ; y)$  du plan d'affixe  $z$  tel que :  
 $Z^2 + 2z - 3$  soit un réel .

2°) Déterminer l'ensemble des nombres  $z$  tels que :  $\frac{z+2i}{z-4i}$  soit réel (on suppose  $z \neq 4i$ ).

## **EXERCICE 27**

On pose  $P(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$ .

1°)  $\alpha$  désigne un complexe quelconque. Montrer que  $P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$ .

Déduisez que si  $P(\alpha) = 0$ , alors  $P(\bar{\alpha}) = 0$ .

2°) Calculer  $P(1-i)$  ; en déduire les solutions de l'équation  $P(z) = 0$

3°) Placer les points images des solutions de l'équation  $f(z) = 0$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ .

4°) Montrer que tous ces points appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon (points cocycliques).

## **EXERCICE 28**

On donne  $A = 5\sqrt{2}(1+i)$  ;  $B = -5(1+i\sqrt{3})$

1°) Déterminer le module et un argument des nombres complexes :  $A$  ;  $B$  ;  $\bar{A}$  ;  $\frac{1}{A}$ .

2°) Soit  $Z$  le complexe tel que  $AZ = B$ . Écrire  $Z$  sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

3°) En déduire les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$

## **EXERCICE 29**

Soit l'équation (E) :  $z^3 - 10z^2 + 36z - 40 = 0$ .

1°) Vérifier que 2 est une solution de l'équation (E).

2°) Trouver les réels  $a$  ;  $b$  ;  $c$  tels que :  $z^3 - 10z^2 + 36z - 40 = (z-2)(az^2 + bz + c)$ .

3°) En déduire la résolution dans  $\mathbb{C}$  de l'équation (E).

4°) On pose  $z_A = 2$  ;  $z_B = 4 - 2i$  ;  $z_C = 4 + 2i$ . Placer les images respectives  $A$  ;  $B$  ;  $C$  dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé.

5°) Calculer  $|z_C - z_A|$  ;  $|z_C - z_B|$  ;  $|z_A - z_B|$ . En déduire la nature du triangle ABC.

### **EXERCICE 30**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, on considère le polynôme complexe  $f(z) = z^3 - (5+i)z^2 + 2(5+3i)z - 4(2+4i)$ .

- 1°) Calculer  $f(2i)$ . Que peut-on conclure ?
- 2°) Trouver les complexes  $a$  ;  $b$  ;  $c$  tels que  $f(z) = (z-2i)(az^2 + bz + c)$ .
- 3°) a) Calculer  $(1+2i)^2$ .  
b) En déduire la résolution de l'équation  $f(z) = 0$ .
- 4°) Soient  $A$  ;  $B$  ;  $C$  les points d'affixes respectives  $2i$  ;  $3+i$  ;  $2-2i$ .  
a) Placer les points  $A$  ;  $B$  ;  $C$ .  
b) On pose  $Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ . Donner la forme algébrique de  $Z$ . en déduire le module et un argument de  $Z$ .  
c) Interpréter le module et un argument de  $Z$ .
- 5°) Soit  $D$  le point d'affixe  $z_D$  tel que  $z_D - z_C = z_A - z_B$ . Déterminer les coordonnées de  $D$  puis le placer sur la figure précédente.
- 6°) En déduire la nature du quadrilatère  $ABCD$ .

### **EXERCICE 31**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (unité graphique = 1cm).

Soit le polynôme complexe  $f(z) = z^3 - (5+8i)z^2 - (13-32i)z + 57-24i$

- 1°) Montrer que l'équation  $f(z) = 0$  admet une solution réelle  $\alpha$ .
- 2°) Déterminer les complexes  $P$  et  $Q$  tels que  $f(z) = (z-\alpha)(z^2 + Pz + Q)$ .
- 3°) En déduire la résolution dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $f(z) = 0$ . (On notera  $z_A$  la solution réelle ;  $z_B$  la solution non imaginaire dont la partie réelle est positive ; et  $z_C$  la troisième solution).
- 4°) Soient  $A$  ;  $B$  ;  $C$  les points images respectives des solutions  $z_A$  ;  $z_B$  ;  $z_C$  de l'équation  $f(z) = 0$ . Placer ces points dans le plan complexe. En déduire la nature du triangle  $ABC$ .
- 5°) Déterminer les coordonnées du point  $I$  d'affixe  $z = x + iy$  tel que :
$$|z - z_A| = |z - z_B| = |z - z_C|.$$
- 6°) Déterminer et construire l'ensemble  $(Q)$  des points  $M(x ; y)$  du plan tel que :
$$MA^2 + MC^2 = 32.$$
- 7°) Soit  $D$  le point d'affixe  $z_D = -1-3i$ .  
a) Déterminer la nature du polygone  $ABCD$ .  
b) Calculer le périmètre et l'aire du polygone  $ABCD$ .

### **EXERCICE 32**

Soit le polynôme complexe  $P(z) = z^3 - iz^2 - 11z + 51i$

1) Calculez  $P(3i)$

2) Déterminez les complexes  $a$  et  $b$  tels que  $P(z) = (z - 3i)(z^2 + az + b)$

3) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$

4) Placez dans le plan complexe les points  $A, B, C$  d'affixes respectives :

$$Z_A = 3i ; Z_B = -4 - i ; Z_C = 4 - i.$$

5) a) Calculez  $|Z_B - Z_A| ; |Z_C - Z_A| ; |Z_C - Z_B|$ .

b) En déduire la nature du triangle  $ABC$ .

6) Déterminez et construisez l'ensemble  $(E)$  des points  $M$  du plan tels que :  
 $MB^2 + MC^2 = 64$ .

### **EXERCICE 33**

On désigne par  $\mathbb{C}$  des nombres complexes. On pose :

$$f(z) = z^3 - (3+3i)z^2 - (2-9i)z + 8 - 6i ; z \in \mathbb{C}$$

1°) Montrer que l'équation  $f(z) = 0$  admet une solution réelle  $m$ .

2°) Déterminer le polynôme  $g(z)$  à coefficients complexes tel que  $f(z) = (z-m)g(z)$ .

3°) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $f(z) = 0$ .

### **EXERCICE 34**

On veut déterminer trois nombres complexes. Les modules de ces trois nombres forment une suite géométrique de raison 2, et leurs arguments une suite arithmétique de raison  $\frac{2\pi}{3}$ . Déterminer ces trois nombres  $z_1 ; z_2 ; z_3$  sachant que leur produit est

$z_1 z_2 z_3 = 4 + 4i\sqrt{3}$  ; et que l'argument de  $z_1$  appartient à  $]0 ; \frac{\pi}{2}[$ . On donnera la réponse sous forme trigonométrique.

### **EXERCICE 35**

Soient trois nombres complexes  $Z_1 = [r_1 ; \theta_1] ; Z_2 = [r_2 ; \theta_2] ; Z_3 = [r_3 ; \theta_3]$  tels que les modules  $r_1 ; r_2 ; r_3$  forment une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et les arguments  $\theta_1 ; \theta_2 ;$

$\theta_3$  forment une suite arithmétique de raison  $\frac{\pi}{3}$ . Déterminez ces trois nombres

complexes  $Z_1 ; Z_2 ; Z_3$  sachant que leur produit est  $Z_1 Z_2 Z_3 = -i$  et que  $\theta_1 \in ]0 ; \frac{\pi}{2}[$ . On

donnera les nombres complexes  $Z_1 ; Z_2 ; Z_3$  sous forme trigonométrique ; algébrique et exponentielle.