

Exercice 1 :.....(5 points)

On considère un entier n dont la décomposition en produit de facteurs premier est : $n = 2^\alpha \times 3 \times 19^\beta$ où α et β sont deux entiers naturels tels que $\alpha < \beta$ et $(\alpha + 1)(\beta + 1) = 8$.

1. Détermine l'entier naturel n .
2. Détermine l'ensemble des diviseurs de 456.
3. On considère l'équation suivante $(E): x^2 - \lambda x = 456$, λ étant un paramètre entier naturel. Détermine l'ensembles des valeurs de λ pour lesquelles (E) a des solutions dans $\mathbb{N}$.
4. Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation d'inconnue $(x; y)$ définie par : $x^2 + 6x = y^2 + 232$.
5. Soit $(x; y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que : $x + y = 651$ et sachant que le quotient de leur PPCM(m) et leur PGCD(d) égal à 108, détermine x et y .
6. Démontre par récurrence la propriété suivante : $\forall \epsilon \in \mathbb{N}, 2^n > n$.

Exercice :.....(5 points)

1. Résoudre $\mathbb{R}$ dans l'inéquation suivante : $x - \ln(2e^x + 1) \leq 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} e^x - 2e^y = 1 \\ x - y = \ln 3 \end{cases}$.
3. a. Vérifie que la fonction $G: x \mapsto \cos x + x \sin x$ est une primitive de la fonction $g: x \mapsto x \cos x$ sur $\mathbb{R}$.
b. Montre que : $\frac{x}{1+x \tan x} = \frac{x \cos x}{\cos x + x \sin x}$ pour $x \in [-1; 1]$.
c. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{x}{1+x \tan x} dx$.
4. On considère l'évènement A " Tirer deux cartes concernant la langue Bambara et l'évènement B " Tirer deux cartes concernant deux matières, différentes ".
a. Montre que $P(A) = \frac{1}{45}$ et $P(B) = \frac{16}{45}$.
b. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de cartes tirées concernant la langue Bambara. Vérifie que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0, 1 et 2.
c. Montre que $P(X = 0) = \frac{28}{45}$ puis donne la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Problème :(10 points)

Partie A :

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + e^{-x}$.

1. Calcule $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donne les variations de la fonction g sur chacun des intervalles $] -\infty; 0]$ et $[0; +\infty[$ (le calcul de limite n'est pas demandé)
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R} : g(x) > 0$.

Partie B :

f est la fonction numérique de la variable réelle x par : $f(x) = \ln(x + e^{-x})$.

1. Vérifie que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. a. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 b. Vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R} : \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(g(x))}{g(x)} \left(\frac{1}{xe^x} + 1 \right)$.
 c. En déduire que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on déterminera la direction.
3. a. Vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R} f(x) = -x + \ln(1 + xe^x)$.
 b. Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, puis montre que la droite $(\Delta) : y = -x$ est une asymptote oblique de (C_f) en $-\infty$.
 c. Etudie la position relative de (C_f) par rapport à la droite (Δ) sur chacun des intervalles $] -\infty; 0]$ et $[0; +\infty[$.
4. a. Vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R} : f'(x) \times g(x) = g'(x)$.
 b. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ et $g'(x)$ ont le même signe ; puis dresse le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. On admet que (C_f) admet deux points d'inflexion d'abscisses respectives α et β ($\alpha < \beta$) et que f'' est continue sur $\mathbb{R}$.

En utilisant le tableau ci-dessous des valeurs $f''(x)$, donne un encadrement de α et β d'amplitude 0,5(justifier).

x	-2,5	-2	-1,5	-1	0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f''(x)$	-0,07	-0,03	0,14	0,58	1,11	1	0,41	0,05	-0,07	-0,01

6. Trace (C_f) et (Δ) .
7. Montre graphiquement que l'équation $(1 - 2x)e^x = 2$ n'a pas solution dans $\mathbb{R}$.

« Bonne chance dans la rigueur et l'effort personnelle !!! »