

Exercice 1 :(05points)

On considère le nombres complexe : $u = 1 + (2 - \sqrt{3})i$

1. a. Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivantes : $1 - i$ et $1 + i\sqrt{3}$.

b. Montre que : $\frac{(1-i)(1+i\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$ puis en déduire que : $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$.

c. Montre que : $u = (\sqrt{6} - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}$.

2. On considère les deux suites numériques $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 = 1, y_0 = 0 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) ; \begin{cases} x_{n+1} = x_n - (2 - \sqrt{3})y_n \\ y_{n+1} = (2 - \sqrt{3})x_n + y_n \end{cases}$$

a. Montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n + iy_n = u^n$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n = \frac{\cos(\frac{n\pi}{12})}{\cos(\frac{\pi}{12})^n}$ et $y_n = \frac{\sin(\frac{n\pi}{12})}{\sin(\frac{\pi}{12})^n}$.

3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$. $\forall n \in \mathbb{N}$ On note A_n le point d'affixe u^n .

a. Détermine les entiers naturels n pour les quels les points O, A_0 et A_n sont alignés.

b. Montre que pour tout entier naturel n , le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n .

4. Une urne contient : $\begin{cases} 5 \text{ boules blanches numérotées : } 1, 2, 2, 3, 3 \\ 5 \text{ boules noires numérotées : } 3, 3, 3, 4, 4 \end{cases}$ toutes les boules sont indiscernables au

Toucher. On tire simultanément trois boules de l'urne. On définit les événements suivants :

A : « Obtenir trois boules de même couleurs » et B : « le produit des numérotés obtenus est pair »

a. Calcule $P(A)$ et $P(B)$.

b. Montre que $P(A \cup B) = \frac{17}{20}$ et que $P(B/A) = \frac{9}{10}$.

c. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifie ta réponse.

Exercice 2 :(4,5points)

Soit la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 2} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$

1.a. Démontre, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 2$.

b. Démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n = \frac{\frac{1}{2}(4 - U_n^2)}{U_{n+1} + U_n}$.

c. En déduire que la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ est strictement décroissante.

2. Soit la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_n^2 - 4$ pour tout $n \geq 0$.

- a. Montre que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ dont on déterminera le premier terme.
 - b. Exprime V_n en fonction de n . En déduire la limite de (U_n) quand n tend vers $+\infty$.
 - c. Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \sqrt{4 + 5 \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.
 - d. En déduire la limite de (U_n) quand n tend vers $+\infty$.
3. a. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} U_k^2$. Montre que $S_n = 10 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + 4n$.
 - b. Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$.

Problème :(10points)

1. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x} - 1 - 2\ln x$
 - a. Dresse le tableau de variation de g .
 - b. Calcul $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.
2. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} x - x^2 \ln x & \text{si } x \in]0; +\infty[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Et on désigne par (C_f) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

 - a. Montre que f est continue à droite en 0.
 - b. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ puis interprète graphiquement cette limite.
 - c. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement les résultats obtenus.
2. a. Montre que pour $x \in]0; +\infty[$, on a : $f'(x) = x \times g'(x)$ puis dresse le tableau de variation de f .
 - b. Justifie que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0; +\infty[$ une solution unique solution α et $1,7 < \alpha < 1,8$.
 - c. En déduire que $\ln \alpha = \frac{1}{\alpha}$.
4. a. Etudie la position relative de (C_f) par rapport à la droite $(\Delta) : y = x$.
 - b. Trace la droite (Δ) et la courbe (C_f) .
5. Soit $I_\alpha = \int_1^\alpha x^2 \ln x \, dx$.
 - a. Interprète géométriquement l'intégrale I_α .
 - b. A l'aide d'une intégration par parties, montre que : $I_\alpha = \frac{-\alpha^3 + 3\alpha^2 + 1}{9}$.
6. On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$.
 - a. Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < U_n < 1$.
 - b. Prouve que la suite (U_n) est croissante.
 - c. En déduire que la suite (U_n) est convergente et calcule sa limite

« Bonne chance dans la rigueur et l'effort personnel »