

Exercice 1 :.....(6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

On considère l'équation $(E) : z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.

- 1) Résous l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
- 2) On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i(-1)^{n\pi/6}}$ définie pour tout entier naturel $n \geq 1$.
 - a) Vérifie que z_1 est une solution de (E) .
 - b) Ecris z_2 et z_3 sous forme algébrique.
 - c) Place les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan complexe et trace les segments $[M_1M_2]$, $[M_2M_3]$ et $[M_3M_4]$.
- 3) Montre que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $z_n = 2^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{2} i \right)$.
- 4) a) Calcule les longueurs M_1M_2 et M_2M_3 .
 b) Montre que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.
- 5) On pose $K = M_1M_2 + M_2M_3 + \dots + M_nM_{n+1}$.
 a) Montre que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $K_n = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$.
 b) Détermine le plus petit entier naturel n tel que : $K_n \geq 1000$.

II/ soit la suite numérique (U_n) définie par $U_0 = 0$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

- 1) Montre que pour tout entier naturel non nul : $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$. (On pourra appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction qui à x on associe $\ln(x)$ sur l'intervalle $[n; n+1]$)
- 2) Dédus-en que pour tout entier naturel non nul on a : $U_n \geq \ln(n+1)$ puis calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice 2 :.....(4 points)

Dans le plan complexe $\mathbb{C}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le polynôme p tel que :

$$p(z) = z^3 - (3 + 4i)z - 2 + 8i.$$

- 1) Montre que l'équation $p(z) = 0$ admet une solution réelle z_0 que tu détermineras.
- 2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$. On désignera par z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive.
- 3) Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on considère les points G_0, A et B d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 .
 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle G_n l'isobarycentre des points A, B et G_{n-1} .
 a) Détermine l'abscisse de G_1 .
 b) Soit z_n l'abscisse de G_n . Exprime z_n en fonction de z_{n-1} .
- 5) On pose $U_n = z_n + 1$
 a) Quelle est la nature de la suite U_n ?
 b) Etudie la convergence de la suite U_n .

Problème :.....(10 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 2 cm.

Partie A :

Soit g la fonction numérique définie sur $]-\pi; 0[$ par $g(x) = \cos^2 x + \cos x - 1$.

- 1) a) Montre que g est dérivable sur $]-\pi; 0[$ et que $g'(x) = -\sin x(1 + 2\cos x)$.
 b) En déduis que $g'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]-\pi; -\frac{2\pi}{3}]$ et que $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [-\frac{2\pi}{3}; 0[$.
 c) Dresse le tableau de variation de g .
- 2) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β sur $]-\pi; 0[$ et que $\beta \in]-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}[$.

b) En déduis le signe de g sur $]-\pi; 0[$.

Partie B :

Soit f la fonction numérique définie sur $]-\pi; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{2 \sin(2x)}{1 + \cos x} + \frac{1}{2} & \text{si } x \in]-\pi; 0] \\ f(x) = 2 - \frac{3}{e^{3x} + 1} & \text{si } x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f .

1) Etudie la continuité de f en 0.

2) Etudie la dérivabilité de f en 0 puis en déduis une interprétation géométrique des résultats obtenus.

3) a) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Montre que pour tout $x \in]-\pi; 0[$, on a : $f(x) = \frac{4(1 - \cos x) \sin x \cos x}{1 - \cos^2 x} + \frac{1}{2}$ et en déduis que $\lim_{x \rightarrow -\pi} f(x) = +\infty$.

c) En déduis les asymptotes de la courbe $(\mathcal{C})$.

4) a) Calcule $f'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$ puis en déduis le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.

b) Montre que pour tout $x \in]-\pi; 0[$, on a : $f'(x) = \frac{4g(x)}{1 + \cos x}$ puis en déduis le sens de variation de f sur $]-\pi; 0[$.

c) Dresse le tableau de variation de f sur $]-\pi; +\infty[$.

5) Construis la courbe $(\mathcal{C})$, ses asymptotes et ses demi-tangentes au point d'abscisse 0.

Partie C :

On admet que tout $x \in [1,5; 2]$, on a : $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$. (R)

1) Soit h la fonction numérique définie sur $[1,5; 2]$ par : $h(x) = f(x) - x$.

Etudie les variations de h puis en déduis que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [1,5; 2]$.

2) Soit (U_n) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 1,5 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

a) Montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [1,5; 2]$. (On pourra utiliser la relation (R))

b) Montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_{n-1} - \alpha|$ et que $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

c) En déduis que la suite (U_n) est convergente.

d) Détermine un entier p tel que pour $n \geq p$ on ait : $|U_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ puis donne à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de U_p à 10^{-3} près.