

Exercice 1 :(5 points)

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 8$ et $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases}, n \in \mathbb{N}.$

- 1) Montre par récurrence que les points M_n de coordonnées (x_n, y_n) sont sur la droite (Δ) dont une équation est $5x - y + 3 = 0$. En déduis que $x_{n+1} = 4x_n + 2$.
- 2) Montre par récurrence que tous les x_n sont des entiers naturels.
En déduis que tous les y_n sont aussi des entiers naturels.
- 3) Montre que :
 - a) x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3.
 - b) Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3 alors ils sont premiers entre eux.
- 4) a) Montre par récurrence que $x_n = \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$.
b) En déduis que $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3 pour tout entier naturel n .

Exercice 2 :(5 points)

Une société de distribution d'électricité ayant une production insuffisante en électricité pour assurer une alimentation continue dans tout le pays, procède à des délestages.

Ainsi, à partir d'un certain jour, les délestages ont débuté dans la ville à un rythme décrit comme suit :

- Le premier jour, la ville est délestée.
- Si la ville est délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{2}{9}$.
- Si elle n'est pas délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{5}{6}$.

On désigne par D_n l'événement : « La ville est délestée le $n^{\text{ième}}$ jour » et p_n la probabilité de l'événement D_n , $p_n = p(D_n)$.

- 1) Montre les égalités suivantes : $p(D_1) = 1$; $p(D_{n+1}/D_n) = \frac{2}{9}$; $p(D_{n+1}/\overline{D}_n) = \frac{5}{6}$.
- 2) Exprime p_{n+1} en fonction de $p(D_{n+1} \cap D_n)$ et $p(D_{n+1} \cap \overline{D}_n)$.
- 3) En déduis que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $p_{n+1} = -\frac{11}{18}p_n + \frac{5}{6}$.
- 4) On pose $U_n = 6p_n - \frac{90}{29}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
 - a) Montre que la suite (U_n) est géométrique. Préciser sa raison et son 1^{er} terme.
 - b) Exprime U_n puis p_n en fonction de n .
 - c) Un match de football doit se jouer le 20^{ème} jour.
Quelle est la probabilité pour que les habitants de la ville le suivent sans délestage ?

Problème :(10 points)

Partie A :

On considère la fonction f_n définie $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^{n+1} \left(e^{-x} - \frac{1}{2} \right)$ avec $n \in \mathbb{N}$.

On désigne par $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique 4 cm).

- 1) a) Etudie la limite de f_n en $+\infty$.
b) Etudie, suivant la parité de n , la limite de f_n en $-\infty$.
- 2) Calcule la dérivée f'_n de f_n et montre que $f'_n(x) = x^n h_n(x)$ avec $h_n(x) = e^{-x}(-x + n + 1) - \frac{n+1}{2}$.
- 3) a) Dresse le tableau de variation de h_n .
b) Montre que l'équation $h_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha_n > 0$.
c) Détermine le signe de h_n sur $\mathbb{R}$, en déduis celui de f'_n sur $\mathbb{R}$ (on distinguera le cas n pair et n impair)

d) Dresse, suivant la parité de n , le tableau de variation de f_n .

Partie B :

Dans cette partie, on prend $n = 0$ donc $f_0(x) = xe^{-x} - \frac{x}{2}$ et $h_0(x) = (1-x)e^{-x} - \frac{1}{2}$.

1) a) Démontre que : $0 < \alpha_0 < 1$.

b) En utilisant h_0 , montre que : $e^{-\alpha_0} = \frac{1}{2(1-\alpha_0)}$. En déduis l'expression de $f_0(\alpha_0)$ ne contenant pas $e^{-\alpha_0}$.

c) Déduis de la partie A) 3) d) le tableau de variation de f_0 .

d) Démontre que la courbe (C_0) admet une asymptote en $+\infty$ dont on précisera une équation.

2) a) Etudie le signe de f_0 sur $\mathbb{R}$.

b) On donne $\alpha_0 = 0,315$. Construis (C_0) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3) a) Détermine les nombres réels a et b tels que, la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \mapsto xe^{-x}$.

b) Calcule l'aire en cm^2 du domaine plan limité par la courbe (C_0) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. (On donnera la valeur exacte puis une valeur arrondie à 10^{-1} près).

Partie C :

On considère la suite (U_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \frac{1}{n} [\sum_{k=1}^n \ln(n+k)] - \ln(n)$.

1) Démontre que : $U_n = \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right]$

2) Soit k un entier naturel tel que : $0 \leq k \leq n-1$.

a) Démontre que : $\frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{k+1}{n} \right)$.

b) En déduis que : $U_n - \frac{1}{n} \ln 2 \leq \int_1^2 \ln(x) dx \leq U_n$. Calcule $J = \int_1^2 \ln(x) dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

c) Déduis de ce qui précède un encadrement de U_n et la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$.