

RECUEIL D'EXERCICES

TSE - TSI

Calcul intégral – équations différentielles

Sources :

- LYCEE GNETAASO (LGDK) - <http://www.gnetaso.com/fiche.html>

1. Calcul intégral

EXERCICE 1 :

1°/ Calculer les intégrales suivantes : $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx$; $B = \int_{-2}^2 \frac{x^2-4x+5}{x+3} dx$ et $C = \int_0^{\pi} \cos^3 x dx$

2°/ En utilisant un changement de variable affine, calculer $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{3x+1}} dx$.

3°/ Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{1}{1-\sin x}$

a) Exprimer à l'aide d'une intégrale la primitive F de la fonction f qui s'annule en 0.

b) Déterminer cette primitive. (On pourra remarquer que : $\frac{1}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$).

EXERCICE 2 :

On considère la fonction numérique φ définie sur $[1; +\infty[$ par $\varphi(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^3} dt$

1°/ Justifier l'existence de φ .

2°/ Déterminer les nombres réels a , b et c tels que : $\forall t \in [1; +\infty[; \frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1+t)^2}$.

En déduire le calcul de $\int_1^x \frac{dt}{t(1+t)^2}$ pour tout $x \geq 1$.

3°/ a) En utilisant une intégration par parties, calculer $\varphi(x)$

b) Calculer la limite de φ en $+\infty$

EXERCICE 3 :

1°/ Calculer les intégrales suivantes : $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx$; $B = \int_{-2}^2 \frac{x^3-4x+5}{x+3} dx$ et $C = \int_0^{\pi} \cos^3 x dx$

2°/ a) Déterminer les nombres réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 0\}, \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$

b) Calculer $I = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx$

c) Calculer l'intégrale $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{1+\cos x} dx$

3°/ En utilisant un changement de variable affine, calculer $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{3x+1}} dx$

EXERCICE 4 :

1°/ On considère la fonction numérique de la variable réelle $f : x \mapsto \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$

a) Démontrer trois nombres réelles a, b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R}^* ; f(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$

b) En déduire la valeur de $\int_1^3 \frac{x^2-1}{x(x^2+1)} dx$

2°/ On donne l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$.

A l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer la valeur de I .

2. Équations différentielles

EXERCICE 1 :

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y' + 4y = 4x^2 - 8x + 2$

1°/ Montrer qu'il existe une unique fonction polynôme g du second degré solution de (E).

2°/ a) Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si, la fonction $(f - g)$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y'' - 4y' + 4y = 0$

b) Résoudre l'équation (E') ; en déduire les solutions de (E).

3°/ Déterminer la solution f de (E) vérifiant les conditions : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.