

EXERCICES SUR PRIMITIVE – INTEGRALE T S E 2021/2022

Exercice 1 :

I- Dans chacun des cas suivants F et f sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Démontre que F est une primitive sur l'intervalle I de f :

$$F(x) = x^5 + 6x - 1999 \text{ et } f(x) = 5x^4 + 6$$

$$F(x) = x\sqrt{x} + 2 \text{ et } f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$F(x) = x + \frac{1}{x^2} \text{ et } f(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$$

$$F(x) = x \cos x + 56 \text{ et } f(x) = \cos x - x \sin x$$

II- Détermine les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$h(x) = 2 \sin x - 1$$

$$k(x) = 2x(x^2 + 5)^3$$

$$t(x) = \frac{-1}{x^2} + 2x$$

$$g(x) = 2x + 1 + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

III- Dans chacun des cas ; trouve la primitive de la fonction :

$$1) f(x) = 2x + 1, \cos x^2 + x - 2,$$

$$4) f(x) = (2x + 3)(x^2 + 3x - 1)$$

$$2) f(x) = 2\sqrt{2x - 1},^3$$

$$5) f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 3x - 4)^4$$

$$3) f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

IV- Dans chacun des cas suivants f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Détermine la primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$

$$f(x) = 5x^4 + 6 \text{ et } x_0 = 1 ; y_0 = 0$$

$$f(x) = \sin x \text{ et } x_0 = \frac{\pi}{2} ; y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \text{ et } x_0 = -1 ; y_0 = 1$$

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x^3} \text{ et } x_0 = 2 ; y_0 = -1$$

$$f(x) = x + 5 \text{ et } x_0 = -2 ; y_0 = 2$$

Exercice 2 : Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.

1) Exprime $\sqrt{x^2 + 1}$ à l'aide de $u(x)$ et $u'(x)$.

2) Détermine des primitives pour chacune des fonctions ci-dessous :

$$f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1} \sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Exercice 3 :

A) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R} ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x^3 - 11x^2 + 20x - 10}{(x - 2)^3}$.

a) Détermine les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x - 2)^3}$.

b) En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R} ; +\infty[$.

B) g est la fonction définie sur $\mathbb{R} ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{4x^3 - 3x}{(2x - 1)^3}$

a) Ecris g sous la forme $g(x) = ax + b + \frac{c}{(2x - 1)^3}$.

b) Détermine les primitives de g sur $\mathbb{R} ; +\infty[$.

c) En déduis la primitive de g qui s'annule en 1.

Exercice 4 : Vérifie dans chaque cas que la fonction f possède des primitives sur l'intervalle I et détermine sa primitive F telle que $F(x_0) = y_0$.

$$1) f(x) = 2x - 1, x^2 - x + 3, \quad I = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad x_0 = 1 ; y_0 = 2$$

$$2) f(x) = \frac{6x - 1}{3x^2 - 2}, \quad I =]1 ; +\infty[\quad \text{et} \quad x_0 = 2 ; y_0 = 0$$

$$3) f(x) = \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}, \quad I =]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad \text{et} \quad x_0 = \frac{\pi}{4} ; y_0 = -1$$

Exercice 5 :

Prof M. OUSMANE-Lycée Annoura Gao MALI (+223) 79 14 60 15/65 01 25 52

Primitive

-Intégral

I- Soit les fonctions $f(x) \rightarrow x \cos x$ et $g(x) \rightarrow x \sin x$.

1- En calculant $f'(x) + g(x)$; Trouve une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.

2- En procédant de même; Détermine une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

II- Soit $h(x) = \sin^2 x \cos^3 x$

1- Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \cos x (\sin^2 x - \sin^4 x)$.

2- Détermine alors toutes les primitives de h sur $\mathbb{R}$.

3- En déduis la primitive H de h sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur $\sqrt{2}$ en π .

Exercice 6 : Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x \cos^2 x$ et $g(x) = x \sin^2 x$.

1- Détermine une primitive de $f + g$ sur $\mathbb{R}$.

2- En utilisant Euler linéarise $\cos^2 x - \sin^2 x$.

3- Détermine deux réels a et b tel que la fonction $h(x) = a \sin(2x) + b \cos(2x)$ soit une primitive de $f - g$ sur $\mathbb{R}$.

4- En déduis une primitive de f et de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 : Soit la fonction définie par $f(x) = \sin 2x \cos^3 x$ et (C) sa courbe représentative

dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Montre que f est une fonction impaire et aussi périodique de période π .

2) Linéarise $f(x)$.

3) En déduis la primitive de f qui s'annule en 0.

4) Calcule $f'(x)$ puis montre que $f'(x) = 2 \cos^2 x (4 \cos^2 x - 3)$.

5) Étudie les variations de f sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

6) Construis (C) sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 8 :

1) Calcule la valeur moyenne de la fonction $\sin x$ sur $[\frac{\pi}{3}; \pi]$.

2) On considère la fonction définie sur $[3; 4]$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$. Donne un encadrement de $\int_3^4 f(x) dx$.

3) Soit la fonction h définie sur $[0; \frac{2}{3}]$ par : $h(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

a) Montre h est borné sur $[0; \frac{2}{3}]$.

b) En déduis un encadrement de $\int_0^{\frac{2}{3}} h(x) dx$.

Exercice 9 : Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère la fonction $f(x) \rightarrow x^3 - \frac{3}{2}x^2$.

1- Représente la partie P du plan limitée par l'axe des abscisses; la courbe de f et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

2- Calcule l'aire A de P .

Exercice 10 :

1) Représente dans le plan muni d'un repère orthonormé la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$.

2) Calcule l'aire A de la partie limitée par la courbe de f ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$.

3) En déduire que l'aire A' de la partie limitée par la courbe de f ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$ est égale à $\int_{-1}^2 -f(x) dx$.

Exercice 11 : Soit les intégrales : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$.

1- Calcule $I + 2J$ et $2J - I$.

2- En déduire les valeurs de I et J .

Exercice 12 :

1) Montre que $\frac{1}{1+x} > 1 \rightarrow$ pour tout réel x de $]0; 1]$.

2) Montre que $\frac{1}{1+x} dx > \frac{1}{4}$.

3) Montre que $\forall x > 0; -x \leq \sin x \leq x$.

4) En déduire que $\forall x > 0; 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$.

5) Calcule les intégrales suivantes :

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx \quad \text{et} \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

Exercice 13 : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ de courbe représentative C d'unité graphique 2cm .

1) Étudie les variations de f puis dresse son tableau de variation.

2) Montre que C admet une asymptote oblique dont on déterminera une équation cartésienne en étudiant les branches infinies en $+\infty$.

3) Étudie la position relative de la courbe C par rapport à son asymptote oblique.

4) Représente C et son asymptote oblique.

5) Hachure le domaine D_1 défini par : $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ puis calcule l'aire de D_1 en cm^2 .

$$0 \leq y \leq f(x)$$

6) Soit α un nombre réel tel que $\alpha > 1$. Hachure le domaine D_α limité par les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$; la courbe C et l'asymptote oblique. Calcule en cm^2 l'aire du domaine D_α .