

RECUEIL D'EXERCICES

TSE - TSI

Suites numériques

Sources :

- LYCEE GNETAASO (LGDK) - <http://www.gnetaaso.com/fiche.html>

EXERCICE 1 :

1. Soit la suite (U_n) définie par : $U_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel n ; $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq U_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

b) Démontrer que la suite (U_n) est convergente.

2.a) Démontrer que, pour réel x strictement positif $\frac{1}{1+x} \leq \ln(1+x) - \ln x \leq \frac{1}{x}$.

b) Pour tout entier naturel n , on pose : $V_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$.

Déduire de a) que $\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq V_n \leq \ln(2)$ et que la suite (V_n) est convergente et donner sa limite.

EXERCICE 2 :

1°/ On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $U_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$

a) Calculer U_1

b) Montrer que pour tout nombre réel positif x ; $1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$.

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $1 - \frac{1}{n+1} \leq U_n \leq 1$ et déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2°/ Soit la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $V_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n} dx$.

a) En écrivant $\frac{nx^n}{1+x^n} = \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} \times x$; montrer à l'aide d'une intégration par partie que :

$$V_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n) dx.$$

b) Sachant que pour tout nombre réel positif t , on a : $0 \leq \ln(1+t) \leq t$;

Montrer que : $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \frac{1}{n+1}$.

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \ln 2$