Nouveau programme

Ministère de l'Education
de l'Alphabétisation et de la
Promotion des langues Nationales

République du Mali
****
Un peuple – Un but – Une foi

Mali – Maths

Série : TSE – STI

Tome 1

(Nombres complexes – Arithmétiques – Fonctions numériques)

- Rappel de cours.
- Exercices et problèmes inédits.
- Corrigés détaillés.
- Sujets de types Bac(*voirdans le tome 4*).

6.000 FCFA

Edition 2014

Conçu et Réalisé par :

Mr DEMBELE Idrissa.(PESG

Cel : 79298938 / 65787728

Etablissement

(ECICA – Bamako – Mali)

Email : *idrissa_dembele30@yahoo.fr*

Mr DEMBELE Idrissa ☆ Le Professeur Chargé du Cours ☆ Reproduction Interdite

CISSOKO.D

Scanned by CamScanner



Avants - Propos :

Conformément au nouveau programme des mathématiques au Mali, ce présent manuel est le résultat d'un travail réalisé avec assiduité. Il a pour objectif d'être un tremplin pour les élèves des classes inférieurs afin d'uniformiser le niveau de ceux des classes supérieures. Outre cet objectif pédagogique, ce manuel est d'un apport inestimable pour l'acquisition des connaissances requises en mathématiques.
Chacun des chapitres recouvrant l'ensemble du programme, est composé de **04** parties :

Le cours :

Rien que **l'essentiel dans un langage clair et simple** soutenu par des **démonstrations**. Chaque définition ou théorème est suivi d'un exemple simple, en parfaite harmonie avec le programme en vigueur.

Les exercices et problèmes :

- **Les exercices :** Inédits et ordonnés suivant **l'évolution des cours**. Ils contribuent à l'acquisition et à l'assimilation correcte des cours.

- **Les problèmes :** Ils viennent en appoint aux exercices tout en restant fidèle au programme en vigueur.

Les corrigés:

Ils sont rédigés avec assiduité et appuyés par des **démonstrations claires et explicites**. Chaque corrigé est suivi d'un commentaire simple afin de faciliter son appréhension au profit de tous les élèves.

Les sujets de type Bac

Introduit par des conseilles pratiques, ils sont le fruit d'une longue expérience professionnelle. En outre, ils sont constitués chacun de deux exercices et d'un problème. Cette séquence de sujets permet aux Bacheliers de s'auto-évalués après 9 mois d'acquisition de connaissance.

Je souhaite donc une utilisation rationnelle de ce manuel qui ne saurait se substitue aux cours des professeurs en classe, mais qu'il constitue un support efficace et utile surtout au profit des apprenants pour mieux comprendre les mathématiques dans toute sa diversité. A cet effet, je tien à remercier **Dieu le tout puissant** de m'avoir donné l'occasion de réalisé ce manuel et tous ceux qui de loin ou de près on contribués à l'élaboration de ce modeste travail. Compte tenue du faite que toute œuvre humaine est imparfaite, vos critiques et suggestions seront la bienvenue pour améliorer d'avantage la qualité de ce travail que je publierais dans une future édition.

...30@yahoo.fr

Scanned by CamScanner

Sommaire

Chapitres	Pages
Nombres complexes Rappels et compléments des propriétés dans $\mathbb{R}$. Evaluation diagnostique. Définition et propriétés. Opérations dans $\mathbb{C}$. Conjugué d'un complexe. Module et argument d'un complexe. Forme trigonométrique d'un complexe. Forme polaire d'un complexe. Forme exponentielle. Formules de Moivre – Formules d'Euler. Equations dans $\mathbb{C}$. Complexe et configurations géométriques du plan. Complexe et lieux géométriques. Complexe et transformations géométriques du plan. **Exercices et corrigés**	**1**
Arithmétiques Ensemble d'application. Raisonnement par récurrence. Division Euclidienne dans $\mathbb{N}$. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Système de numération. Congruence modulo n. Congruence et structure d'anneau. Nombre entier naturel premier PPCM et PGCD de deux entiers naturels a et b. Algorithme d'Euclide. Nombres premiers entre eux. Résolution dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $ax + by + c = 0$ **Exercices et corrigés**	**51**
Fonctions numériques Généralité sur les fonctions numériques. Limites. Continuités. Dérivations. Etude de fonctions. **Exercices et corrigés**	**95**

Scanned by CamScanner

Chapitre 1 Nombres complexes

COURS

I- Rappels et compléments des propriétés dans $\mathbb{R}$

1) Ensemble des entiers naturels

L'ensemble des entiers naturels est noté : $\mathbb{N}$ tel que : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots \ldots + \infty\}$

L'ensemble des entiers naturels privé de zéro est noté $\mathbb{N}^*$ tel que : $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4 \ldots + \infty\}$

2) L'ensemble des entiers relatifs

L'ensemble des entiers relatifs est noté : $\mathbb{Z}$ tel que : $\mathbb{Z} = \{ -\infty \ldots . -2 ; 0, 1, 2, 3, 4, \ldots + \infty\}$.

NB : L'ensemble des entiers relatifs positifs est noté : $\mathbb{Z}^+$ tel que $\mathbb{Z}^+ = \{0 ; +1 ; \ldots + \infty\}$

L'ensemble des entiers relatifs négatifs est noté : $\mathbb{Z}^-$ tel que $\mathbb{Z}^- = \{-\infty \ldots - 2 ; -1 \ldots 0\}$

L'ensemble des entiers relatifs privés de zéro est noté : $\mathbb{Z}^*$ tel que :

$\mathbb{Z}^* = \{ -\infty \ldots - 2 ; -1 \ldots + 1 ; +2 ; \ldots + \infty\}$

L'ensemble des entiers relatifs positifs et privés de zéro est noté : $\mathbb{Z}_+^*$ tel que :

$\mathbb{Z}_+^* = \{ +1 ; +2 ; \ldots + \infty\}$

L'ensemble des entiers relatifs négatifs et privés de zéro est noté : $\mathbb{Z}_-^*$ tel que :

$\mathbb{Z}_-^* = \{ -\infty \ldots - 2 ; -1\}$

3) L'ensemble des nombres rationnels

L'ensemble des nombres rationnels est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire comme quotient de deux entiers relatifs.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$ tel que : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{P}{Q} avec P \in \mathbb{Z} ; q \in \mathbb{Z}^*\right\}$

4) L'ensemble des nombres réels

Certains nombre comme : $\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et π ne peuvent pas s'écrire comme quotient de deux entiers relatifs. Ce sont des nombres irrationnels et l'ensemble des nombres irrationnels et rationnels forment l'ensemble des nombres réels.

L'ensemble des entiers relatifs est noté : $\mathbb{R}$ tel que :

$\mathbb{R} = \{ -\infty ; -\sqrt{2} ; \frac{-3}{2} ; -2 ; 0; 1 ; 2 ; \sqrt{2} ; \frac{3}{2}, \ldots + \infty\}$.

NB : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Scanned by CamScanner

II- Définition ; vocabulaire et interprétation graphique

1) Définition :

On appelle nombre complexe, tout couple ordonné de deux nombres réels a et b tel que $Z = a + ib$ où i est un imaginaire tel que $i^2 = -1$.

2) Notation et vocabulaire : Soit Z un nombre complexe tel que $Z = a + ib$.

- l'écriture $Z = a + ib$ est appelée forme algébrique de Z.
- le nombre réel a est appelé partie réelle de Z et est noté $\mathrm{Re}(Z)$
- le nombre réel b est appelé partie imaginaire de Z et est noté $\mathrm{Im}(Z)$

NB :

- Si $b = 0$; alors $Z = a$ (**Z est un nombre à la fois réel et complexe**) car $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

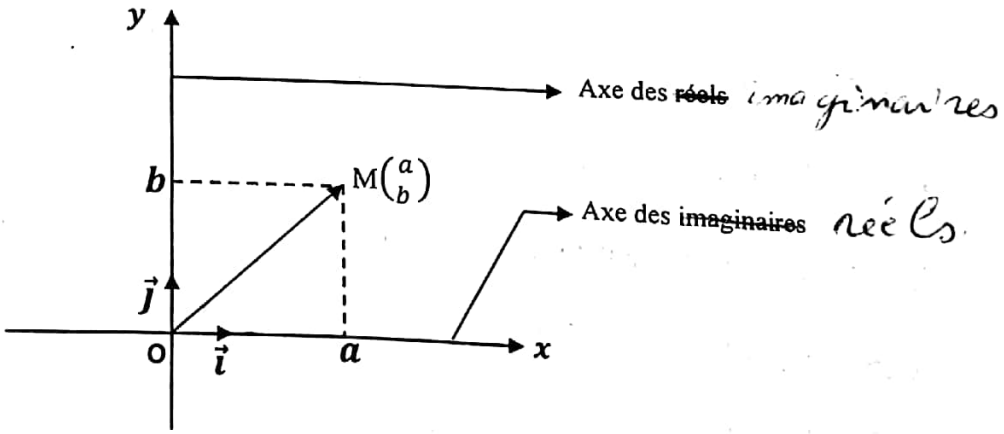
- Si $a = 0$; alors $Z = ib$ (**Z est un imaginaire pur**).

3) Interprétation graphique :

A tout point $M\binom{a}{b}$ du plan P, on peut associer un nombre complexe $Z = a + ib$.

- M est le point image et Z l'affixe du point M.
- $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image du nombre complexe $Z = a + ib$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Ainsi on a la représentation graphique du point M comme suit :



III- Operations dans $\mathbb{C}$:

Soient Z et Z' deux nombres complexes tels que : $Z = a + ib$ et $Z' = a' + ib'$.

1) Egalité :

Deux nombres complexe Z et Z' sont égaux si et seulement si $Z = Z' \Leftrightarrow$ $a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$.

2) Somme:

La somme des deux complexes Z et Z' est tel que : $Z + Z' = (a + a') + i(b + b')$.

3) Produit :

Le Produit des deux complexes Z et Z' est tel que :

$Z \times Z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$ (**avec** $i^2 = -1$).

Scanned by CamScanner

4) Quotient :

Le quotient de deux complexes Z et Z' est tel que :

$$\frac{z}{z'} = \frac{aa' + bb'}{(a')^2 + (b')^2} + i\frac{a'b - ab'}{(a')^2 + (b')^2}$$

N.B : Le nombre $\frac{1}{z}$ est appelé inverse du complexe Z tel que : $\frac{1}{Z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$

IV- Conjugué d'un nombre complexe :

1) Définition :

Soit $Z = a + ib$ l'expression algébrique d'un nombre complexe. On appelle conjugué de Z, le nombre complexe noté $\bar{Z}$ tel que $\bar{Z} = a - ib$.

NB : les images des deux nombres complexes Z et $\bar{Z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

2) Propriétés :

Soient Z et Z' deux complexes :

P_1 : $Z = \bar{Z} \Leftrightarrow$ Z est un réel

P_2 : $Z = -\bar{Z} \Leftrightarrow$ Z est un imaginaire pur

P_3 : $\overline{Z + Z'} = \bar{Z} + \bar{Z'}$

P_4 : $\overline{Z \times Z'} = \bar{Z} \times \bar{Z'}$

P_5: $\overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)} = \frac{\bar{Z}}{\bar{Z'}}$ $(avec\ Z' \neq 0)$

P_6 : $\overline{\left(\frac{a}{Z}\right)} = \frac{a}{\bar{Z}}$ $(avec\ Z' \neq 0\ et\ a \in \mathbb{R})$

P_7 : $\overline{Z^n} = (\bar{Z})^n$

P_8 : $\mathrm{Re}(Z) = \frac{Z + \bar{Z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(Z) = \frac{Z - \bar{Z}}{2i}$

P_9 : $Z \times \bar{Z}$ est un réel positif

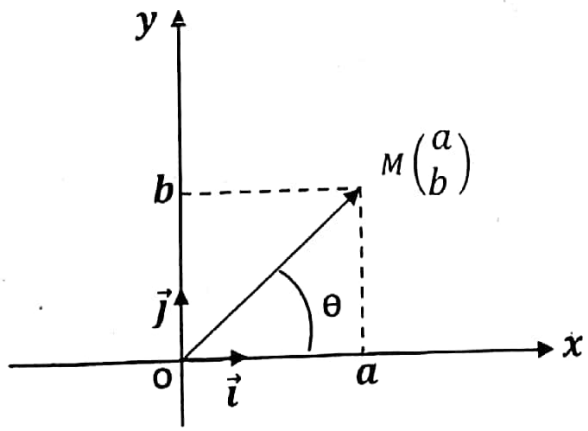
NB : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$

Module et argument d'un nombre complexe !

1) Module :

Dans le plan rapporté à un repère $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$; plaçons le point M de Z dont l'affixe est

$Z = a + ib \Rightarrow M\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$



Ici : $\|\overrightarrow{OM}\| = d(OM) = \sqrt{a^2 + b^2}$

Mr DEMBELE Idrissa
Le Professeur Chargé du Cours
Reproduction interdite

Scanned by CamScanner

a- Définition :

Soit Z = $a + ib$ un nombre complexe. On appelle module de Z, le nombre réel positif ou nul noté : $|Z|$ tel que $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Si M est le point image de Z alors $|Z| = d(O ; M) = \sqrt{a^2 + b^2}$

b- Propriétés :

P1 : $|Z|$ est toujours positif ; **P2** : $|Z| = |\bar{Z}|$; **P3** : $|Z| = 0 \Leftrightarrow Z = 0$

P4 : $|Z \times Z'| = |Z| \times |Z'|$; **P5** : $|Z + Z'| \leq |Z| + |Z'|$ $(Inégalité\ triangulaire)$

P6: $\left|\frac{Z}{Z'}\right| = \frac{|Z|}{|Z'|}$ $(avec\ Z' \neq 0)$; **P7** : $\left|\frac{a}{Z}\right| = \frac{a}{|Z|}$ $(avec\ Z \neq 0\ et\ a \in \mathbb{R})$;

P8 : $|Z^n| = |Z|^n$ $(avec\ n \in \mathbb{N}^*)$

2) Argument :

a- Définition :

En observant la figure ci-dessus représentant un triangle rectangle d'angle θ, on a :

$$\begin{cases} Cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ Sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

Soit **Z** est un nombre complexe de module $|Z|$ ($avec\ |Z| \neq 0$). On appelle argument de **Z**, le nombre réel noté **θ** ou **arg (Z)** tel que :

$$\begin{cases} Cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ Sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Cos\theta = \frac{a}{|Z|} \\ Sin\theta = \frac{b}{|Z|} \end{cases}$$

b- Propriétés :

Soient Z et Z' deux nombres complexes d'arguments respectifs arg(Z) et arg (Z')

P1 : $\arg(Z \times Z') = \arg(Z) + \arg(Z')$; **P2** : $\arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg(Z) - \arg(Z')$

P3 : $\arg(Z^n) = n\arg(Z)$ $(avec\ n \in \mathbb{N}^*)$; **P4** : $\arg\left(\frac{a}{Z}\right) = -\arg(Z)$ $(avec\ Z \neq 0)$

P5 : $\arg(\bar{Z}) = -\arg(Z)$

V- Forme trigonométrique d'un nombre complexe :

1) Définition :

Soit Z = $a + ib$ un nombre complexe de module r et d'argument θ. On appelle forme trigonométrique de Z toute écriture de la forme $Z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ **avec** $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et

Scanned by CamScanner

$\theta \in [-\pi\ ;\ \pi[$ $\begin{cases} Cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ Sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

2) Propriétés :

Soient Z et Z' deux complexe tels que $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $Z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

P1 : $Z \times Z' = r \times r'[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')]$

P2 : $\frac{Z}{Z'} = \frac{r}{r'}[\mathrm{Cos}(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta')]$

P3 : $Z^n = r^n[\mathrm{Cos}(n\theta) + i\sin(n\theta)]$

NB : si r = 1 on a : $Z^n = [\mathrm{Cos}(n\theta) + i\sin(n\theta)]$ **(formule de Moivre)**

VI- Forme polaire d'un nombre complexe

1) Définition :

Soit Z un nombre complexe de module r et d'argument θ. On appelle forme polaire de Z toute écriture de Z de la forme **Z= [r ; θ]**

2) Propriétés :

Soient Z et Z' deux complexe tels que Z =[r ; θ] et Z' = [r' ; θ']

P1 : $Z \bullet Z' = [r \bullet r' ; \theta + \theta']$

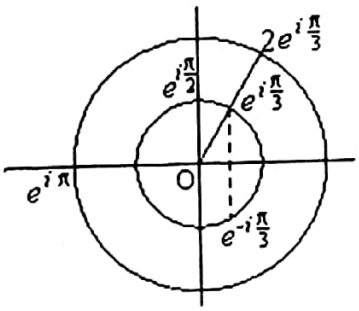
P2: $\frac{Z}{Z'} = \left[\frac{r}{r'} ; \theta - \theta'\right]$

P3 : $Z^n = [r^n; n\theta]$

VII- Forme exponentielle d'un nombre complexe :

1) Définition :

Soit Z un nombre complexe de module **r** et d'argument **Θ**. On appelle forme exponentielle d'un nombre complexe Z, toute écriture de Z se ramenant sous la forme $\mathbf{Z = re^{i\theta}}$ où sonconjuguéest$\overline{\mathbf{Z}} = \mathbf{re^{-i\theta}}$



2) Propriétés :

Soient Z et Z' deux nombres complexes de formes exponentielles respectives :

$\mathbf{Z = re^{i\theta}}$ **et** $\mathbf{Z' = r'e^{i\theta'}}$

Scanned by CamScanner

$P_1 : Z \cdot Z' = r \cdot r' e^{i(\theta+\theta')}$ $\quad P_2 : \frac{Z}{Z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$

$P_3 : Z \cdot \bar{Z} = r^2 e^{i(\theta-\theta)} = r^2 e^{i(0)} = r^2 e^0 = r^2 \cdot 1 = r^2$ (Avec $e^0 = 1$)

$P_4 : Z^n = r^n e^{in\theta}$ $\quad P_5$: **Formule d'Euler**

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + \bar{e}^{i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - \bar{e}^{i\theta}}{2i} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} e^{in\theta} + \bar{e}^{in\theta} = 2\cos n\theta \\ e^{in\theta} - \bar{e}^{in\theta} = 2i\sin n\theta \end{cases}$$

VIII- Formules de Moivre et formules d'Euler:

1) Définition :

Soit Z un nombre complexe **de module 1 et d'argument θ.** On appelle formule de **Moivre** toute écriture de Z se ramenant sous la forme $\mathbf{Z^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)}$ **avec** $(n \in \mathbb{N}^*)$

2) Application de la formule de Moivre :

Soit z un nombre complexe de module 1 et d'argument θ tel que :

$z = cos\theta + isin\theta$ et $\bar{z} = cos\theta - isin\theta$

- **Recherche de :** $z + \bar{z}$ **et** $cos\theta$

$$\begin{cases} z = cos\theta + isin\theta \\ \text{et} \\ \bar{z} = cos\theta - isin\theta \end{cases}$$

$z + \bar{z} = 2cos\theta \Rightarrow cos\theta = \frac{z+\bar{z}}{2}$

- **Recherche de :** $z - \bar{z}$ **et** $sin\theta$

$$\begin{cases} z = cos\theta + isin\theta \\ \text{et} \\ \bar{z} = cos\theta - isin\theta \end{cases}$$

$z - \bar{z} = 2isin\theta \Rightarrow sin\theta = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

- **Recherche de :** $z \times \bar{z}$

$$\begin{cases} z = cos\theta + isin\theta \\ \text{et} \\ \bar{z} = cos\theta - isin\theta \end{cases}$$

$z \times \bar{z} = (cos\theta + isin\theta)(cos\theta - isin\theta) = cos^2\theta + sin^2\theta = 1$

De façons générales on a :

$z^n + \bar{z}^n = 2cos(n\theta)$; $z^n - \bar{z}^n = 2isin(n\theta)$ et $z^n \times \bar{z}^n = 1$

Scanned by CamScanner

3) Linéarisation : de $cos^n\theta$ et $sin^n\theta$

Pour **Linéariser** $cos^n\theta$ et $sin^n\theta$ $(n \in \mathbb{N})$; on peut utiliser le procédé suivant, mettant en jeu les formules **(d'Euler ou de Moivre)** et du **(binôme de Newton ou du triangle de Pascal).**

Méthode :

- Développer et réduire : $cos^n\theta = \frac{(z+\bar{z})^n}{2^n}$ ou $sin^n\theta = \frac{(z-\bar{z})^n}{(2i)^n}$ **(Moivre)**

Ou encore $cos^n\theta = \frac{(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^n}{2^n}$ ou $sin^n\theta = \frac{(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^n}{(2i)^n}$ **(Euler)**

- Regrouper deux à deux les termes d'exposants opposés et exprimer chacun deux en fonction des termes de la forme **Coskx** et **Sinkx.**

IX- Equations dans $\mathbb{C}$

1) Equation du premier degré :

a) Définition :

On appelle équation du premier degré dans $\mathbb{C}$; toute équation de la forme $aZ + b = 0$.

Avec $(a \neq 0 \text{ et } a \in \mathbb{C})$

b) Résolution :

L'ensemble solution de l'équation $aZ + b = 0$ est $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$

2) Racines carrées d'un nombre complexe :

a) Définition :

On appelle racines carrées de Z, tout nombre complexe z tel que $Z = z^2$.

b) Résolution du cas général :

Si $Z = a + ib$ et $z = x + iy$. On dit que z est une racine carrée de **Z** si et seulement si

$$\begin{cases} z^2 = Z \\ |z^2| = |Z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+iy)^2 = a+ib \\ \left|\sqrt{x^2+y^2}\right|^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2ixy-y^2 = a+ib \\ x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-y^2+2ixy = a+ib \\ x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Autre méthode pratique

Soit $Z = a + ib$, l'écriture algébrique d'un nombre complexe.

Si $\frac{b}{2}$ est un entier relatif tel que $\frac{b}{2} = b_1 \times b_2$ avec $(b_1^2 - b_2^2 = a)$

Alors les racines carrées de Z sont : $\delta_1 = b_1 + ib_2$ et $\delta_2 = -b_1 - ib_2$

Exemple

Déterminer les racines carrées de $Z = 5 - 12i$

Ici : $a = 5$ et $b = -12$

$\frac{b}{2} = \frac{-12}{2} = -6 = -3 \times 2$

$(-3)^2 \quad (2)^2$

$9 - 4 = 5 = a$

Alors : $b_1 = -3$ et $b_2 = 2$ D'où $\delta_1 = -3 + 2i$ et $\delta_2 = -(-3 + 2i) = 3 - 2i$

3) **Equation du second degré :**

a) **Définition**:

On appelle équation du second degré dans $\mathbb{C}$, toute équation de la forme :

$aZ^2 + bZ + c = 0 \ (a \neq 0)$

b) **Résolution** :

La résolution de telles équations nécessite d'abords le calcul du discriminant associé Δ tel que $\Delta = b^2 - 4ac$.

- **Si $\Delta > 0$, on a :** $Z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- **Si $\Delta = 0$, on a :** $Z_1 = Z_2 = \frac{-b}{2a}$
- **Si $\Delta < 0$, on a :** $Z_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $Z_2 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$
- **Si $\Delta = a' + ib'$(sous forme algébrique), on a :** $Z_1 = \frac{-b + \delta_1}{2a}$ et $Z_2 = \frac{-b + \delta_2}{2a}$

Où : δ_1 et δ_2 sont les racines carrées de Δ.

4) **Racines ni^{èmes} d'un nombre complexe :**

a) **Définition** :

On appelle **racine n^{ième} de Z** tout nombre complexe z tel que : $z^n = Z$.

Scanned by CamScanner

b) Résolution :

Soit Z = $a + ib$ un complexe de forme polaire : $[r\ ;\ \theta]$

~~$z = a' + ib'$ un complexe de forme polaire : $[r'\ ;\ \theta']$~~

$z^n = Z \Leftrightarrow [r'\ ;\ \theta']^n = [r\ ;\ \theta] \Leftrightarrow [\ (r')^n\ ;\ n\theta'] = [r\ ;\ \theta]$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} (r')^n = r \\ n\theta' = \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r' = \sqrt[n]{r} \\ \theta' = \frac{\theta}{n}\left[\frac{2k\pi}{n}\right] = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases} \quad \text{avec } k \in [0\ ;\ n-1]$$

Ainsi les racines $n^{\text{ièmes}}$ de Z sont données par la formule :

$$Z_k = \sqrt[n]{|Z|}\left[cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right] \text{ ou } Z_k = \left[\sqrt[n]{|Z|}\ ;\ \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right] \quad \text{Avec } k \in [0\ ;\ n-1]$$

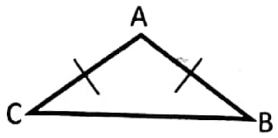
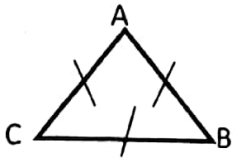
6) Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité :

Soit Z un nombre complexe tel que z = 1.

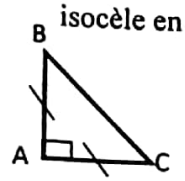
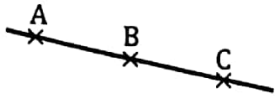
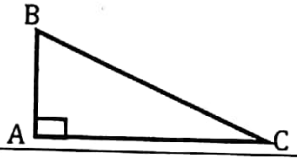
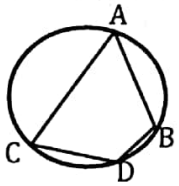
Les racines de z sont obtenues en utilisant la formule qui suit : $Z_k = \left[1\ ;\ \frac{2k\pi}{n}\right]$

X- Complexe et configurations géométriques du plan :

Dans le tableau ci-dessous sont caractérisées certaines configurations géométriques à l'aide des complexes :

Configurations géométriques	Caractérisations géométriques	Caractérisations complexes
Triangle ABC isocèle en A 	AB = AC $\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \alpha$ $(\alpha \in [0\ ;\ \pi])$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \bar{e}^{i\alpha}$
Triangle ABC équilatéral 	AB = AC = BC Et $\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{\pi}{3}$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Scanned by CamScanner

Triangle ABC rectangle et isocèle en A 	AB = AC Et $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = -\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$
Points A, B, C alignés 	$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0 + K\pi$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = a \ (a \in \mathbb{R}^*)$
Triangle ABC rectangle en A 	$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = -\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = ib$ ou $-ib$ avec b $\in \mathbb{R}^*$
Points A, B, C, D cocycliques 	mes$\hat{C} \equiv$ (mes D) [π] Ou mes $\hat{C} \not\equiv 0$ [π]	$\left.\begin{array}{l}\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} \\ \hline \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A}\end{array}\right\} \in \mathbb{R}^*$

XI- Complexe et lieux géométriques :

1) Distance entre deux points A et B :

Soient A et B, deux points d'affixes respectives Z_A et Z_B.

d(A, B) = $\|\overrightarrow{AB}\| = |Z_B - Z_A|$

2) Cercle de centre A et de rayon r :

Soit M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'affixe Z_M. A d'affixe Z_A.

d(A, M) = r $\Leftrightarrow |Z_M - Z_A| = r$

Scanned by CamScanner

3) Médiatrice d'un segment :

Soit $M\binom{x}{y}$ d'affixe Z_M ; A d'affixe Z_A et B d'affixe Z_B.

M appartient à la médiatrice du segment [A, B] si **d(A, M) = d(B, M)** $\Leftrightarrow$
$|Z_M - Z_A| = |Z_M - Z_B|$

4) Droite passant par un point A et faisant un angle α avec l'horizontale

Soit $M\binom{x}{y}$ d'affixe Z_M ; A un point d'affixe Z_A et (D) une droite du plan.

(D) passe par A et fait un angle α avec l'horizontale si $\mathbf{Arg}(Z_M - Z_A) = \alpha + k\pi$

XII- Complexe et transformations géométriques du plan

1) Translation :

La traduction complexe d'une translation est :

$f(Z) = Z + q$ **(avec** $q \in \mathbb{C}$**)**

Ainsi la translation qui transforme un point A d'affixe $a + ib$ en un point B d'affixe $a' + ib'$ est : $f(A) = B \Leftrightarrow (a + ib) + q = (a' + ib') \Rightarrow q = (a' + ib') - (a + ib)$

Ainsi on remplace q par sa valeur dans $f(Z) = Z + q$ pour trouver la traduction complexe.

2) Homothétie :

La traduction complexe d'une homothétie de rapport k et de centre ω est :

$f(Z) = kZ + q$ **(avec** $q \in \mathbb{C}$**) ou** $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} <=> Z' - \omega = k(Z - \omega)$ avec :

- Z' : image de Z
- k : le rapport
- ω : le centre d'affixe Ω

Ainsi l'homothétie de rapport k qui transforme un point A d'affixe $a + ib$ en un point B d'affixe $a' + ib'$ est :

$f(A) = B \Leftrightarrow k(a + ib) + q = (a' + ib') \Leftrightarrow q = (a' + ib') - k(a + ib)$.

Ainsi on remplace q par sa valeur dans $f(Z) = kZ + q$ pour trouver la traduction complexe.

3) Rotation :

La traduction complexe d'une rotation d'angle θ et de centre ω est :

$f(Z) = Ze^{i\theta} + q$ **(avec** $q \in \mathbb{C}$**) ou** $\overrightarrow{\Omega M'} = e^{i\Theta}\overrightarrow{\Omega M}$ $Z' - \omega = e^{i\Theta}(Z - \omega)$ avec :

- Z' : image de Z
- Θ : l'angle
- ω : le centre d'affixe Ω

Scanned by CamScanner

Ainsi la rotation d'angle θ qui transforme un point A d'affixe a + ib en un point B d'affixe $a' + ib'$ est : $f(A) = B \Leftrightarrow (a + ib)e^{i\theta} + q = (a' + ib') \Leftrightarrow q = (a' + ib') - (a + ib)e^{i\theta} \Leftrightarrow$ $q = -(a + ib)(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Ainsi on remplace q par sa valeur dans $f(Z) = Ze^{i\theta} + q$ pour trouver la traduction complexe.

4) Similitude du plan :

Expression complexe :

Soit S une similitude directe du plan qui a tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que :

- **Cas d'une similitude directe** :

$Z' = aZ + b$ (où a et b sont des complexes). Ces éléments caractéristiques sont :

- son rapport $k = |a|$
- son angle $\theta = \arg(a)$
- son centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$ avec $a \neq 1$

- **Cas d'une similitude indirecte ou inverse :**

$Z' = a\overline{Z} + b$ (où a et b sont des complexes) Ces éléments caractéristiques sont :

- son rapport $k = |a|$
- son axe (D) : $y = px + q$.
- son centre Ω d'affixe $w = \frac{b + a\overline{b}}{1 - a\overline{a}}$

5) Caractérisation des transformations

Soit f la transformation : $z' = az + b$

- $si\ a = 1$, alors f est une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'affixe b.
- si $a = -1$, alors f est la symétrie centrale de centre Ω d'affixe $w = \frac{1}{2}b$.
- $si\ a \in \mathbb{R}^* - \{-1\,;1\}$, alors f est une homothétie de rapport $k = |a|$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-b}$.
- $si\ a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = 1\ alors\ f$ est une rotation d'angle α ,d'argument $\Theta = \arg(a)$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-b}$.
- $si\ a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| \neq 1\ alors\ f$ est une similitude directe de rapport $k = |a|$, d'angle α ,d'argument $\Theta = \arg(a)$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-b}$.

Soit f la transformation : $z' = a\bar{z} + b$

- Si $|a| = 1$, alors f est une symétrie orthogonale d'axe l'ensemble des solutions de $z' = z$.

Scanned by CamScanner

- Si $|a| \neq 1 alors\ f$ est une similitude indirecte de rapport $k = |a|$, d'angle α, d'argument $\Theta = \arg(a)$, *d' axe* $(\Delta) : y = px + q$ et de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b + a\bar{b}}{1 - a\bar{a}}$

EXERCICES

Forme algébrique

1 Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes donnés puis en déduire la partie réelle et imaginaire de chacun d'eux :

a) $Z = (-1 - i)^3$; **b)** $Z = i^5$; **c)** $Z = \frac{i}{(1+i)(3-2i)}$; **d)** $Z = \left(1 + \frac{2}{i}\right)(3 - 2i)$

2 On donne les nombres complexes suivants : $Z_1 = 1 - 2i$ et $Z_2 = 3 + i$.

Ecrire sous forme algébrique : $Z_1 + Z_2$; $Z_1 - Z_2$; $Z_1 \times Z_2$; Z_1^2 ; $\frac{1}{Z_2}$; $\frac{Z_2}{Z_1}$

Forme trigonométrique - Forme exponentielle

3 Déterminer les formes trigonométriques et exponentielles des nombres complexes suivants :

a) $Z = -i$; **b)** $Z = \sqrt{3} + i$; **c)** $Z = \frac{-1-i}{2}$; **d)** $Z = -1 + i\sqrt{3}$; **e)** $Z = -1 - i$

f) $Z = \left(-\sqrt{3} - i\right)^3$; **g)** $Z = \frac{-\sqrt{3} - i}{1 + i}$; **h)** $Z = (1 + i)(-2 - 2i)$; ***i)*** $Z = (-1 + i)e^{i\frac{-5\pi}{6}}$

j) $Z = -cos\alpha + isin\alpha$; **k)** $Z = = -cos\alpha - isin\alpha$ ***l)*** $Z = = cos\alpha - isin\alpha$

4 Compléter le tableau suivant

Forme algébrique	$-5(1 - i\sqrt{3})$		
Forme trigonométrique			$2\left[Cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$
Forme exponentielle		$e^{i\left(\frac{-5\pi}{4}\right)}$	

5 On pose : $A = 5\sqrt{2}(1 + i)$; $B = -5(1 + i\sqrt{3})$

1) Déterminer le module et un argument de : A ; B ; $\bar{A}$; $\frac{B}{A}$; A×B e

2) Soit Z un nombre complexe tel que : AZ = B

a) Ecrire Z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

b) En déduire les valeurs exactes de $Cos\frac{13\pi}{12}$ et $Sin\frac{13\pi}{12}$

c) Calculer $(Z)^{12}$

Mr DEMBELE Idrissa ☆ Le Professeur Chargé du Cours ☆ Reproduction interdite

Scanned by CamScanner

6 **On pose :** $Z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$

1) Calculer Z^2 puis déterminer son module et son argument
2) En déduire de ce qui précède le module et un argument Z.

7 **I-** On pose : $|Z| = 2\sqrt{2}$ et $\arg\left[(1+i\sqrt{3})Z\right] = \frac{7\pi}{12}$.

Déterminer la forme trigonométrique et exponentielle de Z.

II- On pose : $Z = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $Z' = 1 - i$

1) Ecrire $\frac{Z}{Z'}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
2) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Détermination de l'ensemble de points

8 Déterminer les ensembles suivants :

1) L'ensemble (Ω) des points M d'affixes Z tels que : $|Z - i| = 2$

2) L'ensemble (Γ) des points M d'affixes Z tels que : $|\bar{Z} - i| = 2$

3) L'ensemble (λ) des points M d'affixes Z tels que : $|Z + 1 - 2i| = |\bar{Z} - 1 - i|$

4) L'ensemble (φ) des points M d'affixes Z tels que : $\arg(Z - 1 + 2i) = \frac{\pi}{6} + k\pi$

5) L'ensemble (ω) des points M d'affixes Z tels que : $\arg(2\bar{Z} - 2 + i) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

9 Le plan est muni d'un repère orthonormal $(o\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe distinct de 1 et soit $Z = \frac{z+1}{z-1}$

Déterminer puis construire l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les conditions indiquées :

1) $|Z| = 1$ **2)** Z est un réel. **3)** Z est un imaginaire

Linéarisation.

10 Linéariser les expressions : $A = \sin^3 x$; $B = \cos^3\frac{x}{2}$; $C = \sin^2 x \cdot \cos^3 x$

Résolution d'équations et systèmes.

11 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

Scanned by CamScanner

a) $Z^2 - 2Z + 2 = 0$; **b)** $Z^2 - 2Z + 1 = 0$; **c)** $Z^2 + 2\sin\alpha\, Z + 1 = 0$; **e)** $Z^2 - 2\cos\alpha\, Z + 1 = 0$

f) $4Z^2 - 4(1 + i)Z - (45 + 26i) = 0$

12

1) Développer le produit de facteurs suivant : $(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)$
2) Résoudre l'équation $Z^4 = 1$
3) En déduire des questions 1) et 2) la résolution des équations suivantes :

$Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$ Puis $\left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)^3 + \left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)^2 + \left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right) + 1 = 0$

13 On donne le nombre complexe Z tel que : $Z = 2 + 3i$

1) Vérifier que $Z^4 = -119 - 120i$
2) Déterminer les racines quatrièmes de l'unité.
3) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $Z^4 = -119 - 120i$

14 Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes :

1) $\begin{cases} Z_1 \times Z_2 = 6 \\ Z_1 + Z_2 = 5 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} (2+3i)Z - 5Z' = -1 \\ (1-i)Z + 2Z' = 2(1+i) \end{cases}$

Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système suivant :

$$\begin{cases} x - y + iz = 0 \\ x + y - z = 0 \\ (1+i)x - 2y = 2z - 2i \end{cases}$$

15 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le polynôme P(Z) telque :

$P(Z) = Z^3 - (3 + 5i)Z^2 + (-4 + 9i)Z + 6 - 4i$

1) Démontrer que l'équation P(Z) = 0 admet une solution réelle que l'on notera Z_1, dont on déterminera la valeur.
2) Factoriser P(Z) puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation P(Z) = 0

16 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le polynôme P(Z) telque :

$P(Z) = Z^3 - 4iZ^2 - (6 + i)Z + 3i - 1$.

1) Montrer que l'équation P(Z) = 0 admet une solution imaginaire pure.
2) Factoriser P(Z) puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation P(Z) = 0.

17 Soit f la fonction à variable complexe Z telle que : $f(Z) = Z^4 - 3Z^3 + \frac{9}{2}Z^2 - 3Z + 1$

1) Prouver que si Z_0 est une solution de l'équation $f(Z) = 0$ alors les complexes : $\overline{z_0}$ et $\frac{1}{z_0}$ en sont aussi.
2) Déterminer $f(1 + i)$ et en exploitant ce qui précède, trouver toutes les solutions de l'équation $f(Z) = 0$.

Scanned by CamScanner

18 Soit le polynôme P(Z) définie par : $P(Z) = Z^4 - (1+\sqrt{2})Z^3 + (2+\sqrt{2})Z^2 - (1+\sqrt{2})Z + 1$

1) Vérifier que : $P(Z) = Z^2\left[\left(Z+\frac{1}{Z}\right)^2 - \left(Z+\frac{1}{Z}\right)(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}\right]$ avec $Z \neq 0$

2) En utilisant la question précédente, résoudre l'équation P(Z) = 0.

19 On considère dans $\mathbb{C}$ le complexe u tel que : $u = -1 - 2i\sqrt{2}$

1- Calculer les racines carrées de u.

2- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2Z^2 + 2iZ + i\sqrt{2} = 0$.
(On notera Z_1 et Z_2 les solutions de cette équation).

3- Montrer que $\left|\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right| = \sqrt{2}$.

Figures géométriques dans le plan.

20 Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs : $-1 - i$; $2 + 3i$; $-10 - 13i$.
Démontrer que ces trois points sont alignés. (on fera une figure).

21 Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs : $3 + i$; $2i$; $2 - 2i$.

a- Démontrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

b- Déterminer l'affixe de D tel que ABCD soit un parallélogramme. (on fera une figure).

22 Soient A, B, C, D quatre points d'affixes respectifs : $-1 + i$; $-1 - i$; $2i$; $2 - 2i$.

a- Etudier la nature des triangles ABC et BCD.

3) Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon. (on fera une figure).

23 On considère un repère orthonormé directe (O ; $\vec{U}$; $\vec{V}$)du plan complexe. Soit les points A ; B ; C d'affixes respectives :

$Z_A = -1 + i$; $Z_B = \frac{2\left[Cos\left(\frac{7\pi}{15}\right) + iSin\left(\frac{7\pi}{15}\right)\right]}{Cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - iSin\left(\frac{\pi}{5}\right)}$ et $Z_C = 2 - 2i$

a- Ecrire les complexe Z_A ; Z_B et Z_C sous forme exponentielle.
b- Déterminer l'affixe Z_D du point D tel que le triangle OBD soit équilatéral direct, c'est-à-dire la mesure de l'angle ($\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OD}$) = $\frac{\pi}{3}$.

24 Le plan est rapporté au repère orthonormé directe (O ; $\vec{U}$; $\vec{V}$).
On considère :

- Le point A d'affixe $Z_A = 5 - i\sqrt{3}$.

Scanned by CamScanner

- Le point B d'affixe Z_B est tel que OAB soit un triangle équilatéral direct c'est-à-dire la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3}$.
- Le point Q d'affixe Z_Q est tel que le point Q soit milieu du segment $[OB]$.
- Le point K d'affixe Z_K est tel que ABQK soit un parallélogramme.

1) Déterminer les affixes Z_B ; Z_Q et Z_K respectivement des points B ; Q et K.

2) Démontrer que $\frac{Z_K - Z_A}{Z_K}$ est un imaginaire pur. En déduire la nature du triangle OKA.

3) Soit C la point d'affixe Z_C tel que $Z_C = \frac{2Z_A}{3}$

a- Calculer $\frac{Z_K - Z_B}{Z_K - Z_C}$. Que peut-on en déduire pour les points B ; C et K ?

On considère l'ensemble des complexes Z_n tels que : $\forall\, n \in \mathbb{C}$ on a :

25 $\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \frac{1+i}{2} Z_n \end{cases}$

1) On note M_n le point d'affixe Z_n dans le plan rapporté au repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

a- Calculer Z_1 ; Z_2; Z_3 et Z_4.
b- Placer les points M_1 , M_2 , M_3 , M_4 et M_5.

2) Calculer le quotient : $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1}}$ puis en déduire la nature du triangle $OM_{n+1}M_n$

Transformations géométriques du plan.

26 Soit (S) l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe Z associe Z' d'affixe M' tel que $Z' = (1 + i)Z + 1 - i$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (S).

Soit la similitude directe plane S de centre A (1 ; 1) ; de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ par

27 la similitude S ; le point M d'affixe Z a pour transformer le point M' d'affixe Z'.

Exprimer Z' en fonction de Z.

28 Soient A, B, C et D les points d'affixes $Z_A = -1 - i$; $Z_B = i$; $Z_C = 1 + 3i$; $Z_D = 5 + i$.

Soit S la similitude directe transformant A en C et B en D.

1) Déterminer le rapport k et l'angle θ de S

2) Déterminer l'écriture complexe f associée à S.
3) Déterminer l'affixe de Ω le centre de S

29 Déterminer la traduction complexe de la transformation (Γ) dans chacun des cas suivants :
1) (Γ) est la translation qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + 3i$

2) (Γ) est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + 3i$.

Scanned by CamScanner

3) (Γ) est la rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$ qui transforme A d'affixe $-1+i$ en B d'affixe $-2+i$.

30 Soit f la transformation définie par $Z' = aZ + 3i$

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f si : $a = 2$ puis si $a = -i$.

2) Soient A(1) ; B($2+i$) ; A'($2i$) ; B'($1+i$).Vérifier que AB = A'B'

3) Démontrer qu'il existe une unique rotation r telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$

Problèmes.

31 Soit f l'application de $\mathbb{C}-\{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(Z) = \frac{iZ}{Z+i}$. Dans le plan complexe rapporté au repère ortho normal direct$(o, \vec{u}, \vec{v})$, on note M le point d'affixe Z.

1) Déterminer les coordonnées du point B dont l'affixe Z_B et telle que $f(Z_B) = 1+2i$

2) Soit Z un élément de E. on note r le module de $Z+i$ et α une mesure de son argument.

Exprimer la forme trigonométrique de $f(Z)-i$ en fonction de r et α.

3) Soit A le point d'affixe $-i$

a) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M vérifiant $|f(z)-i| = \sqrt{2}$

b) Montrer que B appartient à (Γ).

32 **Partie A :** Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $Z^2-(2+6i)Z-16+12i = 0$
2) Soit $P(Z) = Z^3-(4+6i)Z^2-(12-24i)Z+32-24i$
a- Montrer que l'équation P(Z) = 0 admet une solution réelle notée z_0 que l'on déterminera.

b- Factoriser P(Z) puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation P(Z) = 0

Partie B:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (o, i, j)

On donne les points A(2), B($4+2i$) et C($-2+4i$).

1) a- Calculer le rapport $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et en déduire la nature du triangle ABC

b-Montrer que le point F d'affixe $2i$ est le milieu du segment $[AC]$

c-Déterminer (Δ) l'ensemble des points du plan d'affixe z vérifiant $|z-4-2i| = |z+2-4i|$

2) Soit S la similitude du plan telle que S(A) = A et S(B) = C.

Scanned by CamScanner

a- Déterminons le rapport k et l'angle θ de la similitude S.

b- Déterminer l'expression de la bijection complexe associée à la similitude S.

c- En déduire le centre de la similitude S.

Solutions

Forme algébrique

1 Ecrivons sous forme algébrique les nombres complexes donnés puis en déduisons la partie réelle et imaginaire de chacun d'eux :

a) $Z = (-1-i)^3 \Rightarrow Z = (-1)^3(1+i)^3 = (-1)^3[(1)^3 + 3(1)^2(i) + 3(1)(i)^2 + (i)^3]$
$\Rightarrow Z = -1(-2+2i) = 2-2i \Rightarrow Re(Z) = 2$ et $Im(Z) = -2$

b) $Z = i^5 \Rightarrow Z = i^2 \times i^2 \times i = (-1)(-1) \times i = i \Rightarrow Re(Z) = 0$ et $Im(Z) = 1$

c) $Z = \frac{i}{(1+i)(3-2i)} \Rightarrow Z = \frac{i}{3-2i+3i+2} = \frac{i}{5+i} = \frac{i(5-i)}{(5)^2+(1)^2} = \frac{1+5i}{26} = \frac{1}{26} + i\frac{5}{26}$

$\Rightarrow Re(Z) = \frac{1}{26}$ et $Im(Z) = \frac{5}{26}$

d) $Z = \left(1+\frac{2}{i}\right)(3-2i) \Rightarrow Z = 3-2i+\frac{6}{i}-4 = -1-2i-6$ avec $\frac{6}{i} = \frac{6(-i)}{(1)^2}$

$\Rightarrow Z = -7-2i \Rightarrow Re(Z) = -7$ et $Im(Z) = -2$

2 On donne les nombres complexes suivants : $Z_1 = 1-2i$ et $Z_2 = 3+i$.

Ecrivons sous forme algébrique : $Z_1 + Z_2$; $Z_1 - Z_2$; $Z_1 \times Z_2$; Z_1^2 ; $\frac{1}{Z_2}$; $\frac{Z_2}{Z_1}$

$Z_1 + Z_2 = (1-2i) + (3+i) = 1-2i+3+i = 4-i \Rightarrow Z_1 + Z_2 = 4-i$

$Z_1 - Z_2 = (1-2i) - (3+i) = 1-2i-3-i = -2-3i \Rightarrow Z_1 - Z_2 = -2-3i$

$Z_1 \times Z_2 = (1-2i) \times (3+i) = 3+i-6i+2 = 5-5i \Rightarrow Z_1 \times Z_2 = 5-5i$

$Z_1^2 = (1-2i)^2 = 1-4i-4 = -3-4i \Rightarrow Z_1^2 = -3-4i$

$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{3+i} = \frac{3-i}{(3)^2+(1)^2} = \frac{3-i}{10} = \frac{3}{10} - i\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{Z_2} = \frac{3}{10} - i\frac{1}{10}$

$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{3+i}{1-2i} = \frac{(3+i)(1+2i)}{(1)^2+(-2)^2} = \frac{3+6i+i-2}{5} = \frac{1+7i}{5} = \frac{1}{5} + i\frac{7}{5} \Rightarrow \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{1}{5} + i\frac{7}{5}$

Scanned by CamScanner

Forme trigonométrique - Forme exponentielle

3 Déterminer les formes trigonométriques et exponentielles des nombres complexes suivants :

a) $Z = -i \Rightarrow |Z| = 1$ et $\arg(Z) = -\frac{\pi}{2}$ alors $Z = cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

b) $Z = \sqrt{3} + i \Rightarrow |Z| = 2$ et $\arg(Z) = \frac{\pi}{6}$ alors $Z = 2\left[cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$

c) $Z = \frac{-1-i}{2} \Rightarrow |Z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\arg(Z) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ alors $Z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$

d) $Z = -1 + i\sqrt{3} \Rightarrow |Z| = 2$ et $\arg(Z) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ alors $Z = 2\left[cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

e) $Z = -1 - i \Rightarrow |Z| = \sqrt{2}$ et $\arg(Z) = \frac{5\pi}{4}$ alors $Z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$

f) $Z = \left(-\sqrt{3} - i\right)^3$. Posons $A = -\sqrt{3} - i \Rightarrow |A| = 2$ et $\arg(A) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

$\Rightarrow |Z| = |A|^3 = (2)^3 = 8$ et $\arg(Z) = \arg(A)^3 = 3\arg(A) = 3\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{7\pi}{2}$

alors $Z = 8\left[cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{2}\right)\right]$

g) $Z = \frac{-\sqrt{3} - i}{1 + i}$. Posons :

$A = -\sqrt{3} - i \Rightarrow |A| = 2$ et $\arg(A) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

$B = 1 + i \Rightarrow |B| = \sqrt{2}$ et $\arg(B) = \frac{\pi}{4}$

Alors $|Z| = \left|\frac{A}{B}\right| = \frac{|A|}{|B|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ et $\arg(Z) = \arg\left(\frac{A}{B}\right) = \arg(A) - \arg(B) = \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \arg(Z) = \frac{14\pi - 3\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}$ alors $Z = \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right]$

h) $Z = (1 + i)(-2 - 2i)$. Posons :

$A = 1 + i \Rightarrow |A| = \sqrt{2}$ et $\arg(A) = \frac{\pi}{4}$

$B = -2 - 2i \Rightarrow |B| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(B) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Alors $|Z| = |A| \times |B| = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$ et $\arg(Z) = \arg(A \times B) = \arg(A) + \arg(B)$

$\Rightarrow \arg(Z) = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$ alors $Z = 4\left[cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$

i) $Z = (-1 + i)e^{i\frac{-5\pi}{6}}$. Posons :

Scanned by CamScanner

$A = -1 + i \Rightarrow |A| = \sqrt{2}$ et $\arg(A) = -\frac{\pi}{4}$ alors $A = \sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}}$

$B = e^{i\frac{-5\pi}{6}} \Rightarrow Z = A \times B = \sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}} \times e^{i\frac{-5\pi}{6}} = \sqrt{2}e^{i\frac{-13\pi}{12}} = \sqrt{2}\left[cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right) + isin\left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right]$

Alors $Z = \sqrt{2}\left[cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right) + isin\left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right]$

j) $Z = -cos\alpha + isin\alpha$

$|Z| = \sqrt{(-cos\alpha)^2 + (sin\alpha)^2} = \sqrt{cos^2\alpha + sin^2\alpha} = 1$

$\arg(Z)$ est tel que : $\begin{cases} cos\theta = -cos\alpha \\ sin0 = sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi - \alpha$

Alors $Z = cos(\pi - \alpha) + isin(\pi - \alpha)$

k) $Z = = -cos\alpha - isin\alpha$

De même, ici : le ***cosinus*** est négatif et le ***sinus*** est négatif donc $\theta = \pi + \alpha$

Alors $Z = cos(\pi + \alpha) + isin(\pi + \alpha)$

l) $Z = = cos\alpha - isin\alpha$

De même, ici : le ***cosinus*** est positif et le ***sinus*** est négatif alors $\theta = -\alpha$

Alors $Z = cos(-\alpha) + isin(-\alpha)$

4 Le tableau Complété est le suivant :

Forme algébrique	$-5(1 - i\sqrt{3})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
Forme trigonométrique	$10\left[Cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + iSin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]$	$\left[Cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right]$	$2\left[Cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$
Forme exponentielle	$10e^{\frac{i4\pi}{3}}$	$e^{i\left(\frac{-5\pi}{4}\right)}$	$2e^{i\left(\frac{-3\pi}{4}\right)}$

5 On pose : $A = 5\sqrt{2}(1 + i)$; $B = -5\left(1 + i\sqrt{3}\right)$

1) Déterminons le module et un argument de : A ; B ; $\bar{A}$; $\frac{B}{A}$; $A \times B$ et $\frac{A}{B^2}$

$A = 5\sqrt{2}(1 + i) \Rightarrow |A| = 10$ et $\arg(A) = \frac{\pi}{4}$

$B = -5\left(1 + i\sqrt{3}\right) \Rightarrow |B| = 10$ et $\arg(B) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

Scanned by CamScanner

$|\bar{A}| = |A| = 10$ et $\arg(\bar{A}) = -\arg(A) = -\frac{\pi}{4}$

$\left|\frac{B}{A}\right| = \frac{|B|}{|A|} = \frac{10}{10} = 1$ et $\arg\left(\frac{B}{A}\right) = \arg(B) - \arg(A) = \left(\frac{4\pi}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{13\pi}{12}$

$|A \times B| = |A| \times |B| = 10 \times 10 = 100$ et $\arg(A \times B) = \arg(A) + \arg(B) = \left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{19\pi}{12}$

$\left|\frac{A}{B^2}\right| = \frac{|A|}{|B^2|} = \frac{|A|}{|B|^2} = \frac{10}{10^2} = \frac{1}{10}$ et $\arg\left(\frac{A}{B^2}\right) = \arg(A) - \arg(B^2) = \arg(A) - 2\arg(B)$

$\Rightarrow \arg\left(\frac{A}{B^2}\right) = \left(\frac{\pi}{4}\right) - 2\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{8\pi}{3} = -\frac{29\pi}{12}$

2) Soit Z un nombre complexe tel que : $AZ = B$

a- Ecrivons Z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

Forme algébrique de Z :

$AZ = B \Rightarrow Z = \frac{B}{A} = \frac{-5(1+i\sqrt{3})}{5\sqrt{2}(1+i)} = \frac{-(1+i\sqrt{3})}{\sqrt{2}(1+i)} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{(-1-i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}$

$\Rightarrow Z = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}+i(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}$

D'où la forme algébrique de Z est : $Z = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}$

Forme trigonométrique de Z :

D'après la question 1) on a : $\left|\frac{B}{A}\right| = 1$ et $\arg\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{13\pi}{12}$

D'où la forme trigonométrique de Z est : $Z = cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$

b- En déduisons les valeurs exactes de $\text{Cos}\frac{13\pi}{12}$ et $\text{Sin}\frac{13\pi}{12}$

Pour cela on égalise la forme algébrique et la forme trigonométrique.

$$\begin{cases} Z = cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{13\pi}{12}\right) \\ Z = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4} \end{cases} \Rightarrow cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}$$

Par identification, on a : $cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}$

c- Calculons $(Z)^{12}$

Pour cela on utilise la forme trigonométrique de Z

$Z = cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{13\pi}{12}\right) \Rightarrow (Z)^{12} = \left[cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right]^{12} \Rightarrow$

Scanned by CamScanner

$(Z)^{12} = cos\left(12 \times \frac{13\pi}{12}\right) + isin\left(12 \times \frac{13\pi}{12}\right) = cos(13\pi) + isin(13\pi)$

D'où $(Z)^{12} = cos(13\pi) + isin(13\pi)$

6 **On pose :** $Z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$

1) Calculons Z^2 puis déterminer son module et son argument

$Z^2 = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}} \Rightarrow Z^2 = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2$

$\Rightarrow Z^2 = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 - 2\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) + \left(i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2$

$Z^2 = \left(2-\sqrt{3}\right)^2 - 2i\left(\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}\right) - (2+\sqrt{3})$

$Z^2 = 2-\sqrt{3} - 2i - 2 - \sqrt{3} = -2\sqrt{3} - 2i \Rightarrow |Z^2| = 4$ et $\arg(Z^2) = \frac{7\pi}{6}$

2) En déduisons le module et un argument de Z

$|Z^2| = 4 \Rightarrow |Z| = 2$

$\arg(Z^2) = \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow 2\arg(Z) = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow \arg(Z) = \frac{7\pi}{12}$

7 **I-** On pose : $|Z| = 2\sqrt{2}$ et $\arg\left[(1+i\sqrt{3})Z\right] = \frac{7\pi}{12}$.

Déterminons la forme trigonométrique et exponentielle de Z.

$\arg\left[(1+i\sqrt{3})Z\right] = \frac{7\pi}{12} \Leftrightarrow \arg(1+i\sqrt{3}) + \arg(Z) = \frac{7\pi}{12} \Rightarrow \arg(Z) = \frac{7\pi}{12} - \arg(1+i\sqrt{3})$

$\Rightarrow \arg(Z) = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3}$ $\left(\text{avec } \arg(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \arg(Z) = \frac{7\pi - 4\pi}{12} = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$

D'où la forme trigonométrique de Z est : $Z = 2\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

Et la forme exponentielle de Z est : $Z = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

II- On pose : $Z = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $Z' = 1 - i$

1) Ecrivons $\frac{Z}{Z'}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique

Mr DEMBELE Idrissa
Le Professeur Chargé du Cours
Reproduction interdite

Pose $Z = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $Z' = 1 - i$

- Forme algébrique :

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \frac{Z}{Z'} = \frac{\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}}{1-i} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

- Forme Trigonométrique

$$Z = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} \Rightarrow |Z| = \sqrt{2} \quad \text{et } \arg(Z) = -\frac{\pi}{6}$$

$$Z' = 1 - i \Rightarrow |Z'| = \sqrt{2} \quad \text{et } \arg(Z) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{Z}{Z'}\right| = \frac{|Z|}{|Z'|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \quad \text{et } \arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg(Z) - \arg(Z') = \left(-\frac{\pi}{6}\right) - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12}$$

D'où la forme Trigonométrique de $\frac{Z}{Z'}$ est

$$\frac{Z}{Z'} = \frac{|Z|}{|Z'|}[cos(\theta - \theta') + isin(\theta - \theta')] \Rightarrow \frac{Z}{Z'} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left[cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{Z}{Z'} = cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

2) En déduisons les valeurs exactes de $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
Pour cela on égalise la forme algébrique et la forme trigonométrique.

$$\begin{cases} \frac{Z}{Z'} = cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ \frac{Z}{Z'} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4} \end{cases} \Rightarrow cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Par identification, on a : $cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Détermination de l'ensemble des points

8 Déterminons les ensembles suivants :

1) L'ensemble (Ω) des points M d'affixes Z tels que : $|Z - i| = 2$

Posons : $Z_A - i = 0 \Rightarrow Z_A = i \Rightarrow A\binom{0}{1}$

Alors L'ensemble (Ω) des points M cherché est le cercle de centre $A\binom{0}{1}$ et de rayon $r = 2$.

2) L'ensemble (Γ) des points M d'affixes Z tels que : $|\bar{Z} - i| = 2$

Posons : $\overline{Z_A} - i = 0 \Rightarrow \overline{Z_A} = i \Rightarrow Z_A = -i \Rightarrow \Rightarrow A\binom{0}{-1}$

Alors L'ensemble (Γ) des points M cherché est le cercle de centre $A\binom{0}{-1}$ et de rayon $r = 2$.

3) L'ensemble (λ) des points M d'affixes Z tels que : $|Z + 1 - 2i| = |\bar{Z} - 1 - i|$

Scanned by CamScanner

Posons : $\begin{cases} Z_A + 1 - 2i = 0 \\ \text{et} \\ \overline{Z_B} - 1 - i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_A = -1 + 2i \\ \text{et} \\ \overline{Z_B} = 1 + i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_A = -1 + 2i \\ \text{et} \\ Z_B = 1 - i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\binom{-1}{2} \\ \text{et} \\ B\binom{1}{-1} \end{cases}$

Alors L'ensemble (Γ) des points M cherché est la médiatrice du segment $[AB]$

4) L'ensemble (φ) des points M d'affixes Z tels que : arg($Z - 1 + 2i$) = $\frac{\pi}{6} + k\pi$

Posons : $Z_A - 1 + 2i = 0 \Rightarrow Z_A = 1 - 2i \Rightarrow A\binom{1}{-2}$

Alors L'ensemble (φ) des points M cherché est la est la droite (D) passant par le point $A\binom{1}{-2}$ et faisant un angle α = $\frac{\pi}{6} + k\pi$ avec l'horizontale.

5) L'ensemble (ω) des points M d'affixes Z tels que : arg($2\bar{Z} - 2 + i$) = $-\frac{\pi}{4} + k\pi$

$\arg(2\bar{Z} - 2 + i) = \frac{-\pi}{4} + k\pi$

$\Rightarrow -\arg(2Z + 2 - i) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

$\Rightarrow \arg(2Z + 2 - i) = \frac{\pi}{4} - k\pi$

$\Rightarrow \arg\left[2\left(Z + 1 - \frac{1}{2}i\right)\right] = \frac{\pi}{4} - k\pi \Leftrightarrow \arg(2) + \arg\left(Z + 1 - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{4} - k\pi$

$\Rightarrow \arg\left(Z + 1 - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{4} - k\pi \Rightarrow \arg\left[Z - \left(-1 + \frac{1}{2}i\right)\right] = \frac{\pi}{4} - k\pi$

$\Leftrightarrow \text{Arg}(Z_M - Z_A) = \frac{\pi}{4} - k\pi$ Avec $Z_A = -1 + \frac{1}{2}i \Rightarrow A\binom{-1}{\frac{1}{2}}$

Alors l'ensemble (ω) des points M cherchés est la droite (D) passant par le point $A\binom{-1}{\frac{1}{2}}$ et faisant un angle α = $\frac{\pi}{4}$ avec l'horizontale.

9 Le plan est muni d'un repère orthonormal $(o\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe distinct de 1 et soit Z = $\frac{z+1}{z-1}$

Déterminons puis construisons l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les conditions indiquées :

1) $|Z| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z+1|}{|z-1|} = 1 \Leftrightarrow |z+1| = |z-1|$

Posons : $\begin{cases} Z_A + 1 = 0 \\ \text{et} \\ Z_B - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_A = -1 \\ \text{et} \\ Z_B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\binom{-1}{0} \\ \text{et} \\ B\binom{1}{0} \end{cases}$

Alors L'ensemble des points M cherché est la médiatrice du segment $[AB]$

Scanned by CamScanner

2) Z est un réel.

$Z = \frac{z+1}{z-1}$

On sait que : $Z = x + iy$

$$\Rightarrow Z = \frac{(x+iy)+1}{(x+iy)-1} = \frac{(x+1)+i(y)}{(x-1)+i(y)} = \frac{[(x+1)+iy][(x-1)-i(y)]}{(x-1)^2+(y)^2}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{x^2+y^2-1+i(-2y)}{(x-1)^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} + i\frac{-2y}{(x-1)^2+y^2}$$

Z est un réel si $-2y = 0 \Rightarrow y = 0$

Alors l'ensemble cherché est l'axe des abscisses.

3) Z est un imaginaire

Z est un imaginaire si $x^2 + y^2 - 1 = 0$

Alors l'ensemble cherché est le cercle de centre $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et de rayon $r = 1$

Linéarisation.

10) En utilisant les formules de Moivre et d'Euler, linéarisons les expressions suivantes :

$A(x) = \cos^3 x$; $B(x) = \sin^3 x$; $C(x) = \text{Cos}^5\frac{x}{2}$; $D(x) = \cos^3 x \cdot \sin^3 x$

Linéarisons A ; B ; C ; D

- Utilisation des formules de Moivre

$A(x) = \cos^3 x$

Posons $\theta = x \Rightarrow A(x) = \cos^3\theta = (Cos\theta)^3 = \left(\frac{Z+\bar{Z}}{2}\right)^3 = \frac{(Z+\bar{Z})^3}{(2)^3} = \frac{Z^3+3Z^2\bar{Z}+3Z\bar{Z}^2+\bar{Z}^3}{8}$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{(Z^3+\bar{Z}^3)+(3Z^2\bar{Z}+3Z\bar{Z}^2)}{8} = \frac{(Z^3+\bar{Z}^3)+(3Z^2\bar{Z}+3Z\bar{Z}^2)}{8} = \frac{(Z^3+\bar{Z}^3)+3Z\bar{Z}(Z+\bar{Z})}{8}$$

Or $Z^n + \bar{Z}^n = 2\text{Cos}(n\theta) \Rightarrow Z^3 + \bar{Z}^3 = 2\text{Cos}(3\theta)$ et $Z + \bar{Z} = 2\text{Cos}\Theta$

De même $Z^n\bar{Z}^n = 1 \Rightarrow Z\bar{Z} = 1$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{2\text{Cos}(3\theta)+3(2\text{Cos}(\theta))}{8} = \frac{2\text{Cos}3\theta+6\text{Cos}\theta}{8} = \frac{2}{8}(Cos3\theta + 3\,Cos\theta)$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{1}{4}(Cos3\theta + 3\,Cos\theta) \text{ or } \theta = x$$

Scanned by CamScanner

$=> A(x) = \frac{1}{4}(Cos3x + 3\,Cosx)$

$B(x) = Sin^3x$

Posons $\theta = x => B(x) = Sin^3\theta = (Sin\theta)^3 = \left(\frac{Z-\bar{Z}}{2i}\right)^3 = \frac{(Z-\bar{Z})^3}{(2i)^3} = \frac{Z^3 - 3Z^2\bar{Z} + 3Z\bar{Z}^2 - \bar{Z}^3}{-8i}$

$=> B(x) = \frac{(Z^3 - \bar{Z}^3) + (-3Z^2\bar{Z} + 3Z\bar{Z}^2)}{-8i} = \frac{(Z^3 - \bar{Z}^3) - 3Z\bar{Z}(Z - \bar{Z})}{-8i}$

Or $Z^n - \bar{Z}^n = 2iSin(n\theta) => Z^3 - \bar{Z}^3 = 2iSin(3\theta)$ et $Z - \bar{Z} = 2iSin\theta$

De même $Z^n\bar{Z}^n = 1 => Z\bar{Z} = 1$

$=> B(x) = \frac{2iSin(3\theta) + 3(2iSin(\theta))}{-8i} = \frac{2iSin3\theta + 6iSin\theta}{-8i} = \frac{2i}{-8i}(Sin3\theta + 3Sin\theta)$

$=> B(x) = -\frac{1}{4}(Sin3\theta + 3Sin\theta)$ or $\theta = x$

$=> B(x) = -\frac{1}{4}(Sin3x + 3Sinx)$

$C(x) = Cos^5\frac{x}{2}$

Posons $\theta = \frac{x}{2} => C(x) = cos^5\theta = (Cos\theta)^5 = \left(\frac{Z+\bar{Z}}{2}\right)^5 = \frac{(Z+\bar{Z})^5}{(2)^5}$

$C(x) = \frac{Z^5 + 5Z^4\bar{Z} + 10Z^3\bar{Z}^2 + 10Z^2\bar{Z}^3 + 5Z\bar{Z}^4 + \bar{Z}^5}{32}$

$=> C(x) = \frac{(Z^5 + \bar{Z}^5) + (5Z^4\bar{Z} + 5Z\bar{Z}^4) + (10Z^3\bar{Z}^2 + 10Z^2\bar{Z}^3)}{32}$

$=> C(x) = \frac{(Z^5 + \bar{Z}^5) + 5Z\bar{Z}(Z^3 + \bar{Z}^3) + 10Z^2\bar{Z}^2(Z + \bar{Z})}{32}$

Or $Z^n + \bar{Z}^n = 2Cos(n\theta) => Z^5 + \bar{Z}^5 = 2Cos(5\theta)$; $Z^3 + \bar{Z}^3 = 2Cos(3\theta)$ et $Z + \bar{Z} = 2Cos\theta$

De même $Z^n\bar{Z}^n = 1 => Z\bar{Z} = 1$ et $Z^2\bar{Z}^2 = 1$

$=> C(x) = \frac{2Cos(5\theta) + 5(2Cos(3\theta)) + 10(2\,Cos\theta)}{32} = \frac{2}{32}(Cos5\theta + 5\,Cos3\theta + 10Cos\theta)$

$=> C(x) = \frac{1}{16}(Cos5\theta + 5\,Cos3\theta + 10Cos\theta)$ or $\theta = \frac{x}{2}$

$=> C(x) = \frac{1}{16}\left(Cos\frac{5x}{2} + 5\,Cos\frac{3x}{2} + 10Cos\frac{x}{2}\right)$

$D(x) = cos^3x \cdot sin^3x$

Posons $\theta = x => D(x) = cos^3\theta \cdot sin^3\theta = (Cos\theta)^3(Sin\theta)^3 = \left(\frac{Z+\bar{Z}}{2}\right)^3\left(\frac{Z-\bar{Z}}{2i}\right)^3$

Scanned by CamScanner

$$=> D(x) = \frac{(Z+\bar{Z})^3}{(2)^3} \times \frac{(Z-\bar{Z})^3}{(2i)^3} = \frac{(Z+\bar{Z})^3(Z-\bar{Z})^3}{-64i}$$

$$=> D(x) = \frac{(Z^3+3Z^2\bar{Z}+3Z\bar{Z}^2+\bar{Z}^3)(Z^3-3Z^2\bar{Z}+3Z\bar{Z}^2-\bar{Z}^3)}{-64i}$$

Après development, on a :

$$D(x) = \frac{(Z^6-\bar{Z}^6)+(-3Z^4\bar{Z}^2+3Z^2\bar{Z}^4)}{-64i} = \frac{(Z^6-\bar{Z}^6)-3Z^2\bar{Z}^2(Z^2-\bar{Z}^2)}{-64i}$$

Or $Z^n - \bar{Z}^n = 2i\text{Sin}(n\theta) => Z^6 - \bar{Z}^6 = 2i\text{Sin}(6\theta)$ et $Z^2 - \bar{Z}^2 = 2i\text{Sin}(2\theta)$

De même $Z^n\bar{Z}^n = 1 => Z^2\bar{Z}^2 = 1$

$$=> D(x) = \frac{2i\text{Sin}(6\theta) - 3(2i\text{Sin}(2\theta))}{-64i} = \frac{2i}{-64i}(Sin6\theta - 3Sin2\theta) = \frac{1}{32}(Sin6\theta - 3Sin2\theta)$$

Or $\theta = x$ $=> D(x) = \frac{1}{32}(Sin6x - 3Sin2x)$

- Utilisation des formules d'Euler

$A(x) = \cos^3 x$

Posons $\theta = x => A(x) = \cos^3\theta = (Cos\theta)^3 = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^3}{(2)^3}$

$$=> A(x) = \frac{e^{3i\theta}+3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-2i\theta}+e^{-3i\theta}}{8}$$

$$=> A(x) = \frac{e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}}{8} = \frac{(e^{3i\theta}+e^{-3i\theta})+3(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{8}$$

Or $e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\text{Cos}(n\theta) => e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} = 2\text{Cos}(3\theta)$

Et $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\text{Cos}\theta$

De même $e^{in\theta} \cdot e^{-in\theta} = 1 => e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} = 1$

$$=> A(x) = \frac{2\text{Cos}(3\theta)+3(2\text{Cos}(\theta))}{8} = \frac{2\text{Cos}3\theta+6\text{Cos}\theta}{8} = \frac{2}{8}(Cos3\theta + 3\,Cos\theta)$$

$$=> A(x) = \frac{1}{4}(Cos3\theta + 3\,Cos\theta) \text{ or } \theta = x => A(x) = \frac{1}{4}(Cos3x + 3\,Cosx)$$

Résolution d'équations et systèmes.

11 Résolvons dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $Z^2 - 2Z + 2 = 0 => \Delta = -4 = 4i^2$ alors :

$$Z_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{4i^2}}{2(1)} = \frac{2-2i}{2} = 1-i \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{4i^2}}{2(1)} = \frac{2+2i}{2} = 1+i$$

Scanned by CamScanner

$\Rightarrow S = \{1 - i\,; 1 + i\}$

b) $Z^2 - 2Z + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 0$ alors : $Z_1 = Z_2 = Z_0 = \frac{-(-2)}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow S = \{1\}$

c) $Z^2 + 2sin\alpha Z + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 4sin^2\alpha - 4 = -4(1 - sin^2\alpha) = 4i^2(cos^2\alpha) = (2icos\alpha)^2$

$Z_1 = \frac{-(2sin\alpha) - \sqrt{(2icos\alpha)^2}}{2(1)} = \frac{-2sin\alpha - 2icos\alpha}{2} = -sin\alpha - icos\alpha$ et

$Z_2 = \frac{-(2sin\alpha) + \sqrt{(2icos\alpha)^2}}{2(1)} = \frac{-2sin\alpha + 2icos\alpha}{2} = -sin\alpha + icos\alpha$

$\Rightarrow S = \{-sin\alpha - icos\alpha \;\; ; -sin\alpha + icos\alpha\}$

d) $Z^2 - 2cos\alpha Z + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 4cos^2\alpha - 4 = -4(1 - cos^2\alpha) = 4i^2(sin^2\alpha) = (2isin\alpha)^2$

$Z_1 = \frac{-(-2cos\alpha) - \sqrt{(2isin\alpha)^2}}{2(1)} = \frac{2cos\alpha - 2isin\alpha}{2} = cos\alpha - isin\alpha$ et

$Z_2 = \frac{-(-2cos\alpha) + \sqrt{(2isin\alpha)^2}}{2(1)} = \frac{2cos\alpha + 2isin\alpha}{2} = cos\alpha + isin\alpha$

$\Rightarrow S = \{cos\alpha - isin\alpha \;;\; cos\alpha + isin\alpha\}$

e) $4Z^2 - 4(1 + i)Z - (45 + 26i) = 0$

$\Delta = [-4(1+i)]^2 - 4(4)[-(45 + 26i)] = 16(1 + 2i - 1) - 16(-45 - 26i)$

$\Rightarrow \Delta = 720 + 448i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 720 \\ 2xy = 448 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(720)^2 + (448)^2} \end{cases} <=> \begin{cases} x^2 - y^2 = 720 & (1) \\ xy = 224 & (2) \\ x^2 + y^2 = 848 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) + (3)

On a : $2x^2 = 1568 => x^2 = 784 => x = -28$ *ou* $x = 28$

$(2) : xy = 224 \Rightarrow y = \frac{224}{x}$

- Si $x = -28 \Rightarrow y = \frac{224}{-28} = -8$ et $\delta_1 = x + iy \Rightarrow \delta_1 = -28 - 8i$
- Si $x' = 28 \Rightarrow y' = \frac{224}{28} = 8$ et $\delta_2 = x' + iy' \Rightarrow \delta_2 = 28 + 8i$

Alors les racines carrées de Z_2 sont $\delta_1 = -28 - 8i$ et $\delta_2 = 28 + 8i$

$Z_1 = \frac{-[-4(1+i)] + (-28 - 8i)}{2(4)} = \frac{-24 - 4i}{8} = -3 - \frac{1}{2}i$

$Z_2 = \frac{-[-4(1+i)] + (28 + 8i)}{2(4)} = \frac{-24 - 4i}{8} = 4 + \frac{3}{2}i \Rightarrow S = \left\{-3 - \frac{1}{2}i \;;\; 4 + \frac{3}{2}i\right\}$

Scanned by CamScanner

1) Développons le produit de facteurs suivant : $(x-1)(x^3+x^2+x+1)$

$(x-1)(x^3+x^2+x+1) = x^4-1$

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^4 = 1$

$Z^4 = 1 \Leftrightarrow Z^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (Z^2-1)(Z^2+1) = 0 \Leftrightarrow (Z^2-1) = 0$ ou $(Z^2+1) = 0$

Alors $Z^2 - 1 = 0 \Rightarrow Z^2 = 1 \Rightarrow Z = -1$ ou $Z = 1$
De même $Z^2 + 1 = 0 \Rightarrow Z^2 = -1 \Leftrightarrow Z^2 = i^2 \Rightarrow Z = -i$ ou $Z = i$

$\Rightarrow S = \{-1\,;1\,;-i\,;i\}$

3) En déduire des questions 1) et 2), la résolution des équations :

$(Z-1)(Z^3+Z^2+Z+1) = 0$ et $\left[\left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)-1\right]\left[\left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)^3+\left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)^2+\left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)+1\right]=0$

- $(Z-1)(Z^3+Z^2+Z+1) = 0 \Leftrightarrow Z^4 - 1 = 0$. D'après les questions 1) et 2), on a :

$Z_1 = -1$; $Z_2 = 1$; $Z_3 = -i$; $Z_4 = i$

- $\left[\left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)-1\right]\left[\left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)^3+\left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)^2+\left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)+1\right]=0$

En effectuant un changement de variable, on pose : $Z = \left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)$ ainsi l'équation dévient :

$(Z-1)(Z^3+Z^2+Z+1) = 0 \Rightarrow Z_1 = -1$; $Z_2 = 1$; $Z_3 = -i$; $Z_4 = i$

- Si $Z_1 = -1 \Leftrightarrow \frac{3Z+i}{Z-1} = -1 \Leftrightarrow 3Z + i = -1(Z-1) \Leftrightarrow 4Z = 1 - i \Rightarrow Z = \frac{1-i}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$

- Si $Z_2 = 1 \Leftrightarrow \frac{3Z+i}{Z-1} = 1 \Leftrightarrow 3Z + i = 1(Z-1) \Leftrightarrow 2Z = -1 - i \Rightarrow Z = \frac{-1-i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

- Si $Z_3 = -i \Leftrightarrow \frac{3Z+i}{Z-1} = -i \Leftrightarrow 3Z + i = -i(Z-1) \Leftrightarrow Z(3+i) = 0 \Rightarrow Z = 0$

- Si $Z_4 = i \Leftrightarrow \frac{3Z+i}{Z-1} = i \Leftrightarrow 3Z + i = i(Z-1) \Leftrightarrow Z(3-i) = -2i \Rightarrow Z = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$

$\Rightarrow S = \left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i\,; -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\,; 0\,; \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i\right\}$

13 On donne le nombre complexe Z tel que : $Z = 2 + 3i$

1) Vérifions que $Z^4 = -119 - 120i$

$Z^4 = (2+3i)^4 = (2)^4 + 4(2)^3(3i) + 6(2)^2(3i)^3 + 4(2)(3i)^3 + (3i)^4 = 16 + 96i - 216 - 216i + 81 = -119 - 120i \Rightarrow Z^4 = -119 - 120i$

2) Déterminons les racines $4^{èmes}$ de 1

Scanned by CamScanner

Les racines 4ème de 1 sont les racines 4ème de l'unité qui sont données par la formule :
$\left[1\ ;\ \frac{2k\pi}{n}\right]$ or $n=4$ => $z_0=1$; $z_1=i$; $z_2=-1$; $z_3=-i$

3) En déduisons les solutions de $Z^4=-119-120i$
On a $Z^4=-119-120i \Leftrightarrow Z^4=(2+3i)^4$.

Donc pour trouver les solutions de $Z^4=-119-120i$, on multiplie les racines 4ème de l'unité par $(2+3i)$ Ainsi :

$Z_1=z_0\times(2+3i) \Rightarrow Z_1=1\times(2+3i)=2+3i$

$Z_2=z_1\times(2+3i) \Rightarrow Z_2=i\times(2+3i)=-3+2i$

$Z_3=z_2\times(2+3i) \Rightarrow Z_3=-1\times(2+3i)=-2-3i$

$Z_4=z_3\times(2+3i) \Rightarrow Z_4=-i\times(2+3i)=3-2i$

14 Résolvons dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes :

1) $\begin{cases} Z_1\times Z_2=6 \\ Z_1+Z_2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=6 \\ S=5 \end{cases}$ Résolvons ainsi l'équation : $X^2-SX+P=0$

$\Rightarrow X^2-5X+6=0 \Rightarrow \Delta=1$ alors $X_1=2$ et $X_1=3 \Rightarrow$ $\Rightarrow S=\{(2\ ;3)\ ;\ (3\ ;2)\}$

2) $\begin{cases} (2+3i)Z-5Z'=-1 & (\mathbf{1}) \\ (1-i)Z+2Z'=2(1+i) & (\mathbf{2}) \end{cases}$

En multipliant l'équation $(\mathbf{1})$ par 2 et l'équation $(\mathbf{2})$ par 5, on a :

$$\begin{cases} (4+6i)Z-10Z'=-2 & (\mathbf{1}) \\ (5-5i)Z+10Z'=10(1+i) & (\mathbf{2}) \end{cases}$$

$\Rightarrow Z[(4+6i)+(5-5i)]=-2+10(1+i)$

$\Rightarrow Z(4+6i+5-5i)=-2+10+10i \Leftrightarrow Z(9+i)=8+10i \Rightarrow Z=\frac{8+10i}{9+i}$

$\Rightarrow Z=\frac{(8+10i)(9-i)}{(9)^2+(1)^2}=\frac{82+82i}{82}=1+i \Rightarrow Z=1+i$

En Remplaçant Z par sa valeur dans l'équation $(\mathbf{1})$, on a : $-5Z'=-5i \Rightarrow Z'=i$

$\Rightarrow S=\{(1+i\ ;\ i)\ ;\ (i\ ;\ 1+i)\}$

Résolvons dans $\mathbb{C}^3$ le système suivant :

$$\begin{cases} x-y+iz=0 \\ x+y-z=0 \\ (1+i)x-2y=2z-2i \end{cases}$$

En utilisant la méthode triangulaire (méthode du pivot de Gauss), le système devient :

Mr DEMBELE Le Professeur Chargé du Cours Reproduction Interdite

Scanned by CamScanner

$$\begin{cases} x-y+iz=0 \\ x+y-z=0 \\ (1+i)x-2y=2z-2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+iz=0 \\ 2y-z(1+i)=0 \\ Z(2+i)=2i \\ z=\frac{2i}{2+i} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z=\frac{2i}{2+i}=\frac{2i(2-i)}{(2)^2+(1)^2}=\frac{2+4i}{5}=\frac{2}{5}+i\frac{4}{5} \quad \Rightarrow Z=\frac{2}{5}+i\frac{4}{5}$$

$$y=-\frac{3}{10}+i\frac{3}{5} \quad \text{et} \quad x=\frac{1}{2}+i\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow S=\{(\frac{1}{2}+i\frac{1}{5}\ ;\ -\frac{3}{10}+i\frac{3}{5}\ ;\ \frac{2}{5}+i\frac{4}{5})\}$$

115 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$, on considère le polynôme P(Z) telque :

$P(Z)=Z^3-(3+5i)Z^2+(-4+9i)Z+6-4i$

1) Démontrons que l'équation P(Z) = 0 admet une solution réelle que l'on notera Z_1, dont on déterminera la valeur.

Soit Z_1 = a cette solution réelle telle que :

$$Z_0^3-(3+5i)Z_0^2+(-4+9i)Z_0+6-4i=0,$$

$$<=>(a)^3-(3+5i)(a)^2+(-4+9i)(a)+6-4i=0$$

$$<=>a^3-3a^2-5ia^2-4a+9ai+6-4i=0$$

$$<=>(a^3-3a^2-4a+6)+i(-5a^2+9a-4)=0$$

$$<=>\begin{cases}(a^3-3a^2-4a+6)=0\ (1)\\(-5a^2+9a-4)=0 \quad (2)\end{cases}$$

NB : On résous toujours l'équation qui semble la plus facile.

Ainsi résolvons l'équation **(2)** : $-5a^2+9a-4=0 \Rightarrow \Delta=(9)^2-4(-5)(-4)=1$

$$\Rightarrow a_1=1 \ \ et\ a_2=\frac{4}{5}$$

Et par vérification dans **(1)**, on remarque que :

$a_1=1$ est la seule solution qui vérifie l'équation (1)

D'où Z_1 = a = 1est la solution réelle

2) Factorisons P(Z) puis résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation P(Z) = 0

$P(Z)=Z^3-(3+5i)Z^2+(-4+9i)Z+6-4i$ (En utilisant la méthode d'Horner)

Scanned by CamScanner

	1	$-3-5i$	$-4+9i$	$6-4i$
1		1	$-2-5i$	$-6+4i$
	1	$-2-5i$	$-6+4i$	0

Z_1 a b c

$=>Z^3-(3+5i)Z^2+(-4+9i)Z+6-4i=(Z-Z_1)(aZ^2+bZ+c)$

$<=>Z^3-(3+5i)Z^2+(-4+9i)Z+6-4i=(Z-1)[Z^2+(-2-5i)-6+4i]$

D'où $P(Z)=0 <=> Z^3-(3+5i)Z^2+(-4+9i)Z+6-4i=0 <=>$

$(Z-1)[Z^2+(-2-5i)Z-6+4i]=0 <=> Z-1=0$ ou $Z^2+(-2-5i)Z-6+4i=0$

$=> Z=1 => Z_1=1$ ou $Z^2+(-2-5i)Z-6+4i=0$

Si $Z^2+(-2-5i)Z-6+4i=0 => \Delta=[-(2+5i)]^2-4(1)(-6+4i)=3+4i$

$$\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ 2xy=4 \\ x^2+y^2=\sqrt{(3)^2+(4)^2} \end{cases} <=> \begin{cases} x^2-y^2=3 & (1) \\ xy=2 & (2) \\ x^2+y^2=5 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) + (3)

On a : $2x^2=8=>x^2=4=>x=-2$ *ou* $x=2$

$(2): xy=2 => y=\frac{2}{x}$

- Si $x=-2 => y=\frac{2}{-2}=-1$ et $\delta_1=x+iy => \delta_1=-2-i$
- Si $x'=2 => y'=\frac{2}{2}=1$ et $\delta_2=x'+iy' => \delta_2=2+i$

Alors les racines carrées de Z *sont* : $\delta_1=-2-i$ et $\delta_2=2+i$

$Z_2=\frac{-(-3i)+(-2-i)}{2(1)}=\frac{4i}{2}=2i$

$Z_3=\frac{-(-3i)+(2+i)}{2(1)}=\frac{4+6i}{2}=2+3i => S=\{1\ ;\ 2i\ ;\ 2+3i\}$

16 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$, on considère le polynôme P(Z) telque :

$P(Z)=Z^3-4iZ^2-(6+i)Z+3i-1.$

1) Montrons que l'équation P(Z) = 0 admet une solution imaginaire pure.

Soit $Z_0=ib$ cette solution réelle telle que :

Scanned by CamScanner

$Z_0^3 - 4iZ_0^2 - (6 + i)Z_0 + 3i - 1 = 0,$

$<=> (ib)^3 - 4i(ib)^2 - (6 + i)(ib) + 3i - 1 = 0$

$<=> -ib^3 + 4ib^2 - 6ib + b + 3i - 1 = 0$

$<=> (b - 1) + i(-b^3 + 4b^2 - 6b + 3) = 0$

$$<=> \begin{cases} (b-1) = 0 & (1) \\ (-b^3 + 4b^2 - 6b + 3) = 0 & (2) \end{cases}$$

NB : On résous toujours l'équation qui semble la plus facile.

Ainsi résolvons l'équation **(1)** qui est la plus facile à résoudre : $b - 1 = 0 => b = 1$

Et par vérification dans **(2)** , on obtient :

$-(1)^3 + 4(1)^2 - 6(1) + 3 = 0$

$<=> -1 + 4 - 6 + 3 = 0$

$<=> -3 + 3 = 0$

$<=> 0 = 0$ Vraie

D'où $Z_0 = ib = i$ est la solution réelle

2) Factorisons P(Z) puis résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation P(Z) = 0.

Factorisons : $Z^3 - 4iZ^2 - (6 + i)Z + 3i - 1$

	1	$-4i$	$-6-i$	$3i-1$
i		i	3	$-3i+1$
	1	$-3i$	$-3-i$	0
		a	b	c
	Z_0			

$=> Z^3 - 4iZ^2 - (6 + i)Z + 3i - 1 = (Z - Z_0)(aZ^2 + bZ + c)$

$<=> Z^3 - 4iZ^2 - (6 + i)Z + 3i - 1 = (Z - i)(Z^2 - 3iZ - 3 - i)$

D'où $Z^3 - 4iZ^2 - (6 + i)Z + 3i - 1 = 0 <=> (Z - i)(Z^2 - 3iZ - 3 - i) = 0$

$<=> Z - i = 0$ ou $Z^2 - 3iZ - 3 - i = 0$

$Z = i => Z_0 = i$

Ou $Z^2 - 3iZ - 3 - i = 0 => \Delta = (-3i)^2 - 4(1)(-3-i) = 3 + 4i$

Scanned by CamScanner

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} \end{cases} <=> \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ xy = 2 & (2) \\ x^2 + y^2 = 5 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) + (3)

On a : $2x^2 = 8 => x^2 = 4 => x = -2 \ ou \ x = 2$

$(2) : xy = 2 => y = \frac{2}{x}$

- Si $x = -2 => y = \frac{2}{-2} = -1$ et $\delta_1 = x + iy => \delta_1 = -2 - i$
- Si $x' = 2 => y' = \frac{2}{2} = 1$ et $\delta_2 = x' + iy' => \delta_2 = 2 + i$

Alors les racines carrées de Z *sont* : $\delta_1 = -2 - i$ et $\delta_2 = 2 + i$

$$Z_1 = \frac{-(-3i)+(-2-i)}{2(1)} = \frac{-2+2i}{2} = -1 + i$$

$$Z_2 = \frac{-(-3i)+(2+i)}{2(1)} = \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i$$

$=>S = \{ \ i \ ; \ -1 + i \ ; \ 1 + 2i \}$

117 Soit f la fonction à variable complexe Z telle que : $f(Z) = Z^4 - 3Z^3 + \frac{9}{2}Z^2 - 3Z + 1$

1) Prouvons que si Z_0 est une solution de l'équation $f(Z) = 0$ alors les complexes : $\bar{Z}_0$ et $\frac{1}{Z_0}$ en sont aussi.

Z_0 est solution de l'équation $f(Z_0) = 0 \Leftrightarrow Z_0^4 - 3Z_0^3 + \frac{9}{2}Z_0^2 - 3Z_0 + 1 = 0$

En appliquant la propriété du conjugué $(\overline{Z + Z'} = \bar{Z} + \bar{Z'})$, on a :

$$=> \overline{Z_0^4 - 3Z_0^3 + \frac{9}{2}Z_0^2 - 3Z_0 + 1} = \bar{0} \Leftrightarrow \overline{Z_0^4} - 3\overline{Z_0^3} + \frac{9}{2}\overline{Z_0^2} - 3\overline{Z_0} + 1 = 0$$

De même $\frac{1}{Z_0}$ est aussi solution si $\left(\frac{1}{Z_0}\right)^4 - 3\left(\frac{1}{Z_0}\right)^3 + \frac{9}{2}\left(\frac{1}{Z_0}\right)^2 - 3 \times \frac{1}{Z_0} + 1 = 0$

Conclusion : si Z_0 est une solution de l'équation $f(Z) = 0$ alors les complexes : $\bar{Z}_0$ et $\frac{1}{Z_0}$ en sont aussi.

2) Déterminons $f(1 + i)$ et en exploitant ce qui précède, trouvons toutes les solutions de l'équation $f(Z) = 0$.

$$f(1 + i) = (1 + i)^4 - 3(1 + i)^3 + \frac{9}{2}(1 + i)^2 - 3(1 + i) + 1 = 0 =>$$

$$Z_0 = 1 + i \ ; \ \bar{Z}_0 = 1 - i \ ; \ \frac{1}{Z_0} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1)^2+(1)^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \text{ et } \left(\overline{\frac{1}{Z_0}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Scanned by CamScanner

D'où les solutions de l'équation $f(Z)=0$ sont : $S=\left\{1+i;1-i;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i;\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right\}$

18. Soit le polynôme P(Z) définie par : $P(Z)=Z^4-(1+\sqrt{2})Z^3+(2+\sqrt{2})Z^2-(1+\sqrt{2})Z+1$

1) Vérifions que : $P(Z)=Z^2\left[\left(Z+\frac{1}{Z}\right)^2-\left(Z+\frac{1}{Z}\right)(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}\right]$ avec $Z\neq 0$

$P(Z)=Z^4-(1+\sqrt{2})Z^3+(2+\sqrt{2})Z^2-(1+\sqrt{2})Z+1$

En mettant Z^2 en facteur, on a :

$P(Z)=Z^2\left[Z^2-(1+\sqrt{2})Z+(2+\sqrt{2})-\frac{1}{Z}(1+\sqrt{2})+\frac{1}{Z^2}\right] \Leftrightarrow$

$P(Z)=Z^2\left[Z^2-Z-\sqrt{2}Z+2+\sqrt{2}-\frac{1}{Z}-\frac{\sqrt{2}}{Z}+\frac{1}{Z^2}\right] \Leftrightarrow$

$P(Z)=Z^2\left[\left(Z^2+2+\frac{1}{Z^2}\right)+\left(-Z-\frac{1}{Z}\right)+\left(-\sqrt{2}Z-\frac{\sqrt{2}}{Z}\right)+\sqrt{2}\right] \Leftrightarrow$

$P(Z)=Z^2\left[\left(Z^2+2+\frac{1}{Z^2}\right)-\left(Z+\frac{1}{Z}\right)-\sqrt{2}\left(Z+\frac{1}{Z}\right)+\sqrt{2}\right] \Leftrightarrow$

$P(Z)=Z^2\left[\left(Z+\frac{1}{Z}\right)^2-\left(Z+\frac{1}{Z}\right)(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}\right] \Leftrightarrow$

2) En utilisant la question précédente, résolvons l'équation P(Z) = 0.

$P(Z)=0 \Leftrightarrow Z^2\left[\left(Z+\frac{1}{Z}\right)^2-\left(Z+\frac{1}{Z}\right)(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}\right] \Leftrightarrow Z^2\neq 0$ ou

$\left(Z+\frac{1}{Z}\right)^2-\left(Z+\frac{1}{Z}\right)(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}=0$

Effectuons un changement de variable en posant $X=Z+\frac{1}{Z}$, alors l'équation dévient :

$X^2-X(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}=0 \Rightarrow \Delta=\left[-(1+\sqrt{2})\right]^2-4(1)(\sqrt{2})=1-2\sqrt{2}+2 \Rightarrow$
$\Delta=(1-\sqrt{2})^2$. Ainsi on a :

$X_1=\frac{-[-(1+\sqrt{2})]-\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}}{2(1)}=\frac{(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})}{2}=\frac{1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

$X_1=\frac{-[-(1+\sqrt{2})]+\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}}{2(1)}=\frac{(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})}{2}=\frac{1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}}{2}=\frac{2}{2}=1$

- Si $X=\sqrt{2} \Leftrightarrow Z+\frac{1}{Z}=\sqrt{2} \Leftrightarrow Z^2-\sqrt{2}Z+1=0 \Rightarrow \Delta=(-\sqrt{2})^2-4(1)(1)=2-4=-2$
  $\Rightarrow \Delta=2i^2$

Alors $Z_1=\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $Z_2=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

- Si $X=1 \Leftrightarrow Z+\frac{1}{Z}=1 \Leftrightarrow Z^2-Z+1=0 \Rightarrow \Delta=(-1)^2-4(1)(1)=1-4=-3$
  $\Rightarrow \Delta=3i^2$

Scanned by CamScanner

Alors $Z_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $Z_4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

D'où $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

19 On considère dans $\mathbb{C}$ le complexe u tel que : $u = -1 - 2i\sqrt{2}$

1) Calculons les racines carrées de u

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ 2xy = -2\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -1 & (1) \\ xy = -\sqrt{2} & (2) \\ x^2 + y^2 = 3 & (3) \end{cases}$$

$(1) + (3) = 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$

$(2) : xy = -\sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{-\sqrt{2}}{x}$

Si $x = -1 \Rightarrow y = \sqrt{2}$ et $\delta_1 = -1 + i\sqrt{2}$

Si $x = 1 \Rightarrow y = -\sqrt{2}$ et $\delta_2 = 1 - i\sqrt{2}$

2) Résolution dans $\mathbb{C}$ l'équation $2Z^2 + 2iZ + i\sqrt{2} = 0$

On a $= \Delta' = (i)^2 - (2)(i\sqrt{2}) = -1 - 2i\sqrt{2} = (1 - i\sqrt{2})^2$

D'où $Z_1 = \frac{1 - i(1+2\sqrt{2})}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ et $Z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{1-2\sqrt{2}}{2}$

3) Montrons que $\left|\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right| = \sqrt{2}$

$$\left|\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right| = \left|\frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 \times Z_2}\right| = \left|\frac{\frac{-i}{i\sqrt{2}}}{2}\right| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Figures géométriques dans le plan.

20 Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs : $-1 - i$; $2 + 3i$; $-10 - 13i$.
Démontrons que ces trois points sont alignés. (on fera une figure).

Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs $-1 - i$; $2 + 3i$; $-10 - 13i$.

$Z_A = -1 - i \Rightarrow$ A$(-1 ; -1)$

$Z_B = 2 + 3i \Rightarrow$ B$(2 ; 3)$

$Z_C = -10 - 13i \Rightarrow$ C$(-10 ; -13)$

Démontrons que : A ; B ; C sont alignés :

Scanned by CamScanner

A ; B ; C sont alignés si det($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$) = 0

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = > \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = > \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -9 \\ -12 \end{pmatrix}$

det($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$) $= \begin{vmatrix} 3 & -9 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} = (3)(-12) - (4)(-9) = -36 + 36 = 0$

Puis que det($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$) = 0 ; alors les points A ; B ; C sont alignés.

21 Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs : $3 + i$; $2i$; $2 - 2i$.

Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs $3 + i$; $2i$; $2 - 2i$.

$Z_A = 3 + i = > A(3 ; 1)$

$Z_B = 2i = > \quad B(0 ; 2)$

$Z_C = 2 - 2i = > C(2 ; -2)$

1) Démontrons que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A. (on fera une figure).

A ; B ; C est un triangle rectangle et isocèle en A si : $\begin{cases} arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{-\pi}{2} \ ou \ \frac{\pi}{2} \\ et \\ AB = AC \end{cases}$

Or $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{(2-2i)-(3+i)}{(2i)-(3+i)} = \frac{-1-3i}{-3+i} = \frac{(-1-3i)(-3-i)}{(-3)^2+(1)^2} = \frac{10i}{10} = i$

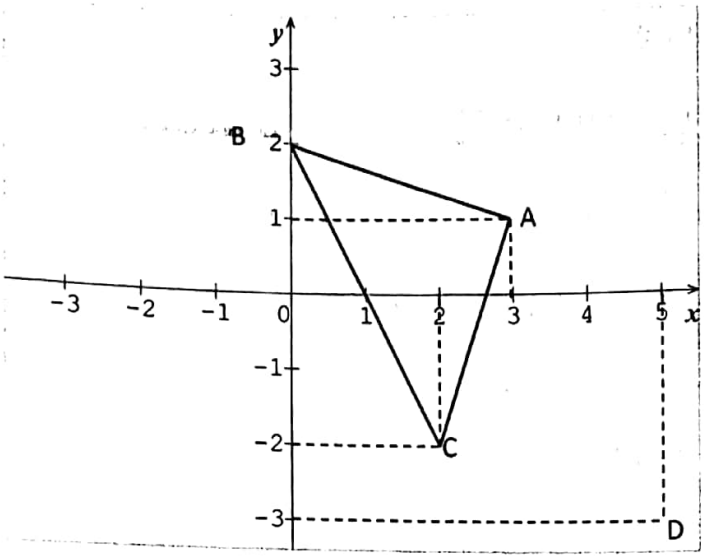
Et $\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10}$

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(2-3)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{10}$

Conclusion : Puisque : $\begin{cases} arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \\ et \\ AB = AC = \sqrt{10} \end{cases}$

Scanned by CamScanner



2) Déterminons l'affixe de D tel que ABCD soit un parallélogramme. (on placera le point D).

ABCD soit un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ Avec D $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Or $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x \\ -2-y \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} <=> \begin{pmatrix} 2-x \\ -2-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} <=> \begin{cases} 2-x = -3 \\ -2-y = 1 \end{cases} => \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$

D'où D$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

22 Soient A, B, C, D quatre points d'affixes respectifs : $-1 + i$; $-1 - i$; $2i$; $2 - 2i$.

$Z_A = -1 + i => A(-1 ; 1)$

$Z_B = -1 - i =>$ B$(-1 ; -1)$

$Z_C = 2i$ => C$(0 ; 2)$

$Z_D = -2 - 2i =>$ D$(2 ; -2)$

1) Etudions la nature des triangles ABC et BCD.

Pour le triangle ABC

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{(2i) - (-1+i)}{(-1-i) - (-1+i)} = \frac{1+i}{-2i} = \frac{(1+i)(2i)}{(0)^2 + (-2)^2}$$

$$=> \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{-2+2i}{4} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Et $\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \arg\left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\pi}{4}$

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1+3)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{2}$

Scanned by CamScanner

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(0+1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(0+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{10}$

Alors le triangle ABC est quelconque.

Pour le triangle BCD

$\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = \frac{(2-2i)-(-1-i)}{(2i)-(-1-i)} = \frac{3-i}{1+3i} = \frac{(3-i)(1-3i)}{(1)^2+(3)^2} = \frac{-10i}{10} = -i$

Et $\arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B}\right) = \arg(-i) = \frac{-\pi}{2}$

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(0+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{10}$

$CD = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{(2-0)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{20} = 5\sqrt{2}$

$BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(2+1)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{10}$

Alors le triangle BCD est rectangle et isocèle en B.

2) Démontrons que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Soit $\Omega(x ; y)$ les coordonnées du centre de ce cercle.

les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle si :

$d(A ; \Omega) = d(B ; \Omega) = d(C ; \Omega) = d(D ; \Omega) = r$

$d(A ; \Omega) = d(B ; \Omega) <=> \sqrt{(x_\Omega - x_A)^2 + (y_\Omega - y_A)^2} = \sqrt{(x_\Omega - x_B)^2 + (y_\Omega - y_B)^2}$

$<=> \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}$

$<=> (x+1)^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2$

$<=> (y-1)^2 = (y+1)^2$

$<=> -2y = 2y => y = 0$

$d(C ; \Omega) = d(D ; \Omega) <=> \sqrt{(x_\Omega - x_C)^2 + (y_\Omega - y_C)^2} = \sqrt{(x_\Omega - x_D)^2 + (y_\Omega - y_D)^2}$

$<=> \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2}$

$<=> (x-0)^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2$

En remplaçant $y = 0$ par sa valeur dans l'équation ci-dessus, on a :

$-4x + 4 = 0 => x = 1$

D'où $\Omega\binom{1}{0}$

Scanned by CamScanner

Or le rayon r est tel que r = d(A ; Ω) = d(B ; Ω) = d(C ; Ω) = d(D ; Ω)

$=> r = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(1+1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5}$

D'où les points A, B, C,D appartiennent à un même cercle de centre $\Omega\binom{1}{0}$ et de rayon $r = \sqrt{5}$

23 On considère un repère orthonormé directe (O ; $\vec{U}$; $\vec{V}$)du plan complexe. Soit les points A ; B ; C d'affixes respectives :

$Z_A = -1 + i$; $Z_B = \frac{2\left[Cos\left(\frac{7\pi}{15}\right) + iSin\left(\frac{7\pi}{15}\right)\right]}{Cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - iSin\left(\frac{\pi}{5}\right)}$ et $Z_C = 2 - 2i$

1) Ecrivons les complexe Z_A ; Z_B et Z_C sous forme exponentielle.

$Z_A = -1 + i => |Z_A| = \sqrt{2}$ et $\arg(Z_A) = \frac{3\pi}{4}$ $=> Z_A = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4}i}$

$Z_B = \frac{2\left[Cos\left(\frac{7\pi}{15}\right) + iSin\left(\frac{7\pi}{15}\right)\right]}{Cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - iSin\left(\frac{\pi}{5}\right)}$ $=> Z_B = \frac{2e^{\frac{7\pi}{15}i}}{e^{-\frac{\pi}{5}i}} = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$ $=> Z_B = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$

$Z_C = 2 - 2i$ $=> |Z_C| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(Z_C) = -\frac{\pi}{4}$ $=> Z_C = 2\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}i}$

2) Déterminons l'affixe Z_D du point D tel que le triangle OBD soit équilatéral direct, c'est-à-dire la mesure de l'angle ($\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OD}$) = $\frac{\pi}{3}$.

OBD est équilatéral direct si et seulement si : $\frac{Z_D - Z_O}{Z_B - Z_O} = e^{\frac{\pi}{3}i}$ $\Leftrightarrow \frac{Z_D}{Z_B} = e^{\frac{\pi}{3}i}$ (car l'affixe de l'origine $Z_O = 0$). Alors $Z_D = Z_B e^{\frac{\pi}{3}i} = 2e^{\frac{2\pi}{3}i} \times e^{\frac{\pi}{3}i} = 2e^{\pi i} = 2(-1) = -2 => Z_D = -2$

24 Le plan est rapporté au repère orthonormé directe (O ; $\vec{U}$; $\vec{V}$).
On considère :

- Le point A d'affixe $Z_A = 5 - i\sqrt{3}$.
- Le point B d'affixe Z_B est tel que OAB soit un triangle équilatéral direct c'est-à-dire la mesure de l'angle ($\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$) = $\frac{\pi}{3}$.
- Le point Q d'affixe Z_Q est tel que le point Q soit milieu du segment $[OB]$.
- Le point K d'affixe Z_K est tel que ABQK soit un parallélogramme.

1) Déterminons les affixes Z_B ; Z_Q et Z_K respectivement des points B ; Q et K.

- OAB est équilatéral direct si et seulement si : $\frac{Z_B - Z_O}{Z_A - Z_O} = e^{\frac{\pi}{3}i}$ $\Leftrightarrow \frac{Z_B}{Z_A} = e^{\frac{\pi}{3}i}$

(car l'affixe de l'origine $Z_O = 0$). Alors $Z_B = Z_A e^{\frac{\pi}{3}i} = \left(5 - i\sqrt{3}\right) \times \left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right) =>$

$Z_B = \left(5 - i\sqrt{3}\right) \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) => Z_B = 4 + 2i\sqrt{3}$ et $B\binom{4}{2\sqrt{3}}$

- Q est milieu du segment $[OB]$ si et seulement si :

Scanned by CamScanner

$x_Q = \frac{x_O + x_B}{2} = \frac{0+4}{2} = 2$ et $y_Q = \frac{y_O + y_B}{2} = \frac{0+2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ $\Rightarrow Z_Q = 2 + i\sqrt{3}$ et $Q\begin{pmatrix}2\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$

- $ABQK$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KQ} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_Q - x_K\\y_Q - y_K\end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix}4-5\\2\sqrt{3}+\sqrt{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-x_K\\\sqrt{3}-y_K\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-1\\3\sqrt{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-x_K\\\sqrt{3}-y_K\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}2 - x_K = -1\\\sqrt{3} - y_K = 3\sqrt{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_K = 3\\y_K = -2\sqrt{3}\end{cases}$

$\Rightarrow Z_K = 3 - 2i\sqrt{3}$ et $K\begin{pmatrix}3\\-2\sqrt{3}\end{pmatrix}$

2) Démontrons que $\frac{Z_K - Z_A}{Z_K}$ est un imaginaire pur et en déduisons la nature du triangle OKA.

$\frac{Z_K - Z_A}{Z_K} = \frac{(3-2i\sqrt{3}) - (5 - i\sqrt{3})}{(3-2i\sqrt{3})} = \frac{3-2i\sqrt{3} - 5 + i\sqrt{3}}{3-2i\sqrt{3}} = \frac{-2 - i\sqrt{3}}{3-2i\sqrt{3}} = \frac{(-2-i\sqrt{3})(3+2i\sqrt{3})}{(3)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \frac{-7\sqrt{3}}{21}i$

$\Rightarrow \frac{Z_K - Z_A}{Z_K}$ est un imaginaire pur. D'où le triangle OKA est rectangle en O.

3) Soit C la point d'affixe Z_C tel que $Z_C = \frac{2Z_A}{3}$

a- Calculons $\frac{Z_K - Z_B}{Z_K - Z_C}$. Puis en déduisons une relation entre les points B ; C et K

$Z_C = \frac{2Z_A}{3} = \frac{2}{3}Z_A = \frac{2}{3}(5 - i\sqrt{3}) = \frac{10}{3} - i\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \frac{Z_K - Z_B}{Z_K - Z_C} = \frac{(3-2i\sqrt{3}) - (4 + 2i\sqrt{3})}{(3-2i\sqrt{3}) - \left(\frac{10}{3} - i\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{3-2i\sqrt{3} - 4 - 2i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3} - \frac{10}{3} + i\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{-1 - 4i\sqrt{3}}{-\frac{1}{3} - \frac{4i\sqrt{3}}{3}} = \frac{-(1+4i\sqrt{3})}{\frac{-(1+4i\sqrt{3})}{3}}$

$\Rightarrow \frac{Z_K - Z_B}{Z_K - Z_C} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$ alors $\frac{Z_K - Z_B}{Z_K - Z_C}$ est un réel. D'où les points B ; C et K sont alignés.

25 On considère l'ensemble des complexes Z_n tels que : $\forall\, n \in \mathbb{C}$ on a :

$$\begin{cases}Z_0 = 1\\Z_{n+1} = \frac{1+i}{2}Z_n\end{cases}$$

1) On note M_n le point d'affixe Z_n dans le plan rapporté au repère $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$

Calculons Z_1 ; Z_2; Z_3 et Z_4.

$Z_1 = \frac{1+i}{2}Z_0 \Rightarrow Z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$; $Z_2 = \frac{1+i}{2}Z_1 \Rightarrow Z_2 = \frac{1}{2}i$

$Z_3 = \frac{1+i}{2}Z_2 \Rightarrow Z_3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$; $Z_4 = \frac{1+i}{2}Z_3 \Rightarrow Z_4 = -\frac{1}{4}$

2) Calculer le quotient : $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1}}$ puis en déduire la nature du triangle $OM_{n+1}M_n$

Scanned by CamScanner

On sait que $Z_{n+1} = \frac{1+i}{2}Z_n \Rightarrow \frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_{n+1}} = \frac{\left(\frac{1+i}{2}Z_n\right)-Z_n}{\frac{1+i}{2}Z_n}$ (car $Z_{n+1} = \frac{1+i}{2}Z_n$)

$\Rightarrow \frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_{n+1}} = \frac{Z_n\left(\frac{1+i}{2}-1\right)}{Z_n\left(\frac{1+i}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{1+i}{2}-1\right)}{\left(\frac{1+i}{2}\right)} = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{(1)^2+(1)^2} = \frac{-1+i+i+1}{2} = \frac{2i}{2} = i$

$\Rightarrow \frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_{n+1}}$ est un imaginaire pur. Alors $OM_{n+1}M_n$ est un triangle rectangle en O.

Transformations géométriques du plan.

26 Soit (S) l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe Z associe Z' d'affixe M' tel que $Z' = (1+i)Z + 1 - i$. Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de (S).

- Rapport : $k = |1+i| = \sqrt{(1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$
- Angle : $\theta = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$
- Centre : $\omega = \frac{b}{1-a}$ avec $a = 1+i$ et $b = 1-i \Rightarrow \omega = \frac{1-i}{1-(1+i)} \Rightarrow$

$\omega = \frac{1-i}{1-1-i} = \frac{1-i}{-i} = \frac{(1-i)(i)}{1} = 1+i$ alors le centre a pour coordonnées $\Omega\binom{1}{1}$

27 Soit la similitude directe plane S de centre A(1 ; 1) ; de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ par la similitude S ; le point M d'affixe Z a pour transformer le point M' d'affixe Z'.

Exprimons Z' en fonction de Z.

On a : le centre A(1 ; 1) ; rapport $k = \sqrt{2}$ et l'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$

L'expression de Z' en fonction de Zest donné par la formule suivante : $Z' = aZ + b$
Cherchons ainsi les complexes a et b.

$a = |a|(\cos\theta + i\sin\theta) \Leftrightarrow a = k(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow a = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow a = 1+i$

On sait que le centre A(1 ; 1) à pour affixe $\frac{b}{1-a} \Leftrightarrow 1+i = \frac{b}{1-a}$ or $a = 1+i \Leftrightarrow$

$1+i = \frac{b}{1-(1+i)} \Leftrightarrow 1+i = \frac{b}{1-1-i} \Leftrightarrow \Leftrightarrow 1+i = \frac{b}{-i} \Rightarrow b = 1-i$

D'où $Z' = (1+i)Z + 1 - i$

28 Soient A, B, C et D les points d'affixes $Z_A = -1-i$; $Z_B = i$; $Z_C = 1+3i$; $Z_D = 5+i$.

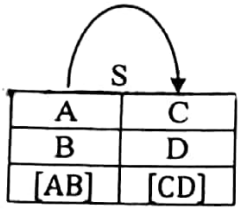
Soit S la similitude directe transformant A en C et B en D.

1) Déterminer le rapport k et l'angle θ de S

La traduction schématique d'une similitude directe S qui transforme A en C et B en D est :

M. DEMBELE Idrissa ★ Le Professeur Chargé du Cours ★ Reproduction Interdite

Scanned by CamScanner



- $k = \frac{[CD]}{[AB]} = \left|\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right| = \left|\frac{(5+i)-(1+3i)}{i-(-1-i)}\right| = \frac{|4-2i|}{|1+2i|} = \frac{\sqrt{16+4}}{\sqrt{1+4}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{4}} = \sqrt{4} = 2$

- θ = mes (AB ; CD) = $\arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right) = \arg\left(\frac{4-2i}{i+2i}\right) = \arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}$

2) Déterminons l'écriture complexe f associée à S.
L'écriture complexe f associée à S est : $f(Z) = aZ + b$.

La traduction algébrique d'une similitude directe S qui transforme A en C et B en D est :

$$S(A) = C \quad \text{et} \quad S(B) = D \Leftrightarrow \begin{cases} aZ_A + b = Z_C & (1) \\ aZ_B + b = Z_D & (2) \end{cases}$$

$(1) - (2) \Rightarrow a(Z_A - Z_B) = Z_C - Z_D \Rightarrow a = \frac{Z_C - Z_D}{Z_A - Z_B} = \frac{-4+2i}{-1-2i} = -2i$

Dans (2) on a: $aZ_B + b = Z_D \Rightarrow b = Z_D - aZ_B \Rightarrow b = (5+i) - (-2i)(i)$

$\Rightarrow b = 5 + i + 2i^2 = 5 + i - 2 = 3 + i \Rightarrow b = 3 + i$

D'où l'écriture complexe f est $f(Z) = -2iZ + 3 + i$

3) Déterminons l'affixe du centre Ω de S.

Soit ω l'affixe du centre de Ω tel que :

$$\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{3+i}{1-(-2i)} = \frac{(3+i)(1-2i)}{(1)^2+(2)^2} = 1 - i.$$

29 Déterminer la traduction complexe de la transformation (Γ) dans chacun des cas suivants :

1) La traduction complexe d'une translation est : $f(Z) = Z + q$.
$f(A) = B \Leftrightarrow f(-1 + i) = -2 + 3i \Leftrightarrow -1 + i + q = -2 + 3i \Rightarrow q = -1 + 2i$

D'où $f(Z) = Z - 1 + 2i$

2) La traduction complexe d'une homothétie est $f(Z) = kZ + q$.
$f(A) = B \Leftrightarrow f(-1 + i) = -2 + 3i \Leftrightarrow \frac{-1}{2}(-1 + i) + q = -2 + 3i \Rightarrow q = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$

D'où $f(Z) = \frac{1}{2}Z - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$

Scanned by CamScanner

3) La traduction complexe d'une rotation est $f(Z) = e^{i\theta}Z + q$.

$f(A) = B \Leftrightarrow f(-1+i) = -2+i \Leftrightarrow e^{i\frac{3\pi}{4}}(-1+i) + q = -2+i$
$\Rightarrow q = -2 + i(1+\sqrt{2})$

D'où $f(Z) = Ze^{i\frac{3\pi}{4}} - 2 + i(1+\sqrt{2})$

30 Soit f la transformation définie par $Z' = aZ + 3i$

1) Soit f la transformation définie par $Z' = aZ + 3i$

Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de f si : $a = 2$ puis si $a = -i$

<u>*Si a = 2*</u>

$Z' = aZ + 3i \Leftrightarrow f(Z) = 2Z + 3i$

- Montrons que f admet un point invariant :
  f admet un point invariant si : $f(\omega) = \omega \Leftrightarrow 2\omega+3i = \omega \Leftrightarrow \omega = -3i \Rightarrow \Omega(0 ; -3)$

- Ainsi déterminons la nature de f
  Pour cela, on exprime $Z' - \omega$ en fonction de $Z - \omega \Leftrightarrow$

  $Z' = 2Z + 3i$ **(1)**

  $\omega = 2\omega+3i$ **(2)**

  En effectuant **(1) - (2)** ; on a : $Z' - \omega = 2(Z - \omega)$; sous la forme :

  $Z' - \omega = k(Z - \omega)$ qui est l'écriture complexe d'une Homothétie

- Ces éléments caractéristiques sont :
- Centre : $\Omega(0 ; -3)$
- Rapport : $k = 2$

<u>***Si a = − i***</u>

$Z' = aZ + 3i \Leftrightarrow f(Z) = -iZ + 3i$

- Montrons que f admet un point invariant :
  f admet un point invariant si : $f(\omega) = \omega \Leftrightarrow -i\omega + 3i = \omega \Leftrightarrow \omega = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$

  $\Rightarrow \Omega(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2})$

- Ainsi déterminons la nature de f
  Pour cela, on exprime $Z' - \omega$ en fonction de $Z - \omega \Leftrightarrow$

  $Z' = -iZ + 3i$ **(1)**

  $\omega = -i\omega+3i$ **(2)**

Scanned by CamScanner

En effectuant (1) $-$ (2) ; on a : Z'$-\omega = -i(Z-\omega)$; sous la forme

$Z' - \omega = e^{i\alpha}(Z - \omega)$ qui est l'écriture complexe d'une Rotation

- Ces éléments caractéristiques sont :
- Centre : $\Omega(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2})$
- Angle = $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$

2) Soient A(1) ; B(2+ i) ; A'(2i) ; B'(1 + i)

Vérifions que AB = A'B'

Puis démontrons qu'il existe une unique rotation r telle que r(A) = A' et r(B) = B'

AB = A'B' $= \sqrt{2}$

r(A) = A' => A'$-\omega = e^{i\alpha}(A-\omega)$ => $2i - \omega = e^{i\alpha}(1-\omega)$ (1)

r(B) = B' => B'$-\omega = e^{i\alpha}(B-\omega)$ => $1 + i - \omega = e^{i\alpha}(2+ i - \omega)$ (2)

(1) $-$ (2) donne : $e^{i\alpha} = -i \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

On en déduit que $2i - \omega = -i(1-\omega) \Rightarrow \omega = \frac{3+i}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

Problèmes.

30. Soit f l'application de $\mathbb{C} - \{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(Z) = \frac{iZ}{Z+i}$. Dans le plan complexe rapporté au repère ortho normal direct$(o, \vec{u}, \vec{v})$, on note M le point d'affixe Z.

1) Déterminons les coordonnées du point B dont l'affixe Z_B et telle que $f(Z_B) = 1 + 2i$

$f(Z_B) = 1 + 2i \Leftrightarrow \frac{iZ_B}{Z_B+i} = 1 + 2i \Leftrightarrow iZ_B = (1 + 2i)(Z_B + i) \Leftrightarrow iZ_B = Z_B + i + 2iZ_B - 2$

$iZ_B - Z_B - 2iZ_B = -2 + i \Leftrightarrow Z_B(1 + i) = 2 - i \Rightarrow Z_B = \frac{2-i}{1+i} \Rightarrow Z_B = \frac{1-3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

D'où $B\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

2) Soit Z un élément de E. On note r le module de $Z + i$ et α une mesure de son argument.

Exprimons la forme trigonométrique de $f(z) - i$ en fonction de r et α.

$|f(z) - i| = \left|\frac{iZ}{Z+i} - i\right| = \left|\frac{iZ - iZ + 1}{Z+i}\right| = \left|\frac{1}{Z+i}\right| = \frac{1}{|Z+i|}$ or $|Z + i| = r \Rightarrow |f(z) - i| = \frac{1}{r}$

$\arg(f(z) - i) = \arg\left(\frac{iZ}{Z+i} - i\right) = \arg\left(\frac{iZ - iZ + 1}{Z+i}\right) = \arg\left(\frac{1}{Z+i}\right) = -\arg \arg(Z + i) = -\alpha$

Scanned by CamScanner

D'où la forme trigonométrique de $f(z) - i$ en fonction de r et α est :

$f(z) - i = \frac{1}{r}[cos(-\alpha) + isin(-\alpha)]$

3) Soit A le point d'affixe $-i$

a- Déterminons l'ensemble (Γ) des points M vérifiant $|f(z) - i| = \sqrt{2}$

$|f(z) - i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{|Z+i|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |Z + i| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |Z + i| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Posons $Z_A + i = 0 \Rightarrow Z_A = -i$

Alors l'ensemble (Γ) des points M cherchés est le cercle de centre $\Omega\binom{0}{-1}$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b- Montrons que B appartient à (Γ).

B appartient à (Γ) si et seulement si la distance du centre A à B vaut le rayon, c'est-à-dire $|Z_B - Z_A| = \sqrt{2}$

$|Z_B - Z_A| = \left|\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right) - (-i)\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i + i\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = r$

D'où B appartient à (Γ).

32 **Partie A :** Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct$(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $Z^2 - (2 + 6i)Z - 16 + 12i = 0$

$\Delta = [-(2 + 6i)]^2 - 4(1)(-16 + 12i) = 32 - 24i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 32 \\ 2xy = -24 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(32)^2 + (-24)^2} \end{cases} <=> \begin{cases} x^2 - y^2 = 32 & (1) \\ xy = -12 & (2) \\ x^2 + y^2 = 40 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) + (3)

On a : $2x^2 = 72 => x^2 = 36 => x = -6 \ ou \ x = 6$

$(2) : xy = -12 => y = \frac{-12}{x}$

- Si $x = -6 => y = \frac{-12}{-6} = 2$ et $\delta_1 = x + iy => \delta_1 = -6 - 2i$
- Si $x' = 6 => y' = \frac{-12}{6} = -2$ et $\delta_2 = x' + iy' => \delta_2 = 6 - 2i$

Alors les racines carrées de Δ $sont$: $\delta_1 = -6 - 2i$ et $\delta_2 = 6 - 2i$

$Z_1 = \frac{(2+6i)+(-6-2i)}{2(1)} = -2 + 2i$ et $Z_2 = \frac{(2+6i)+(6-2i)}{2(1)} = 4 + 2i$

Scanned by CamScanner

$=> S = \{-2 + 2i\ ;\ 4 + 2\}$

2) Soit $P(Z) = Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i$

a- Montrons que l'équation P(Z) = 0 admet une solution réelle notée Z_0 que l'on déterminera.

Soit $Z_0 = a$ cette solution réelle telle que :

$Z_0^3 - (4 + 6i)Z_0^2 - (12 - 24i)Z_0 + 32 - 24i = 0$

$<=> (a)^3 - (4 + 6i)(a)^2 - (12 - 24i)(a) + 32 - 24i = 0$

$<=> a^3 - 4a^2 - 6ia^2 - 12a + 24ai + 32 - 24i = 0$

$<=> (a^3 - 4a^2 - 12a + 32) + i(-6a^2 + 24a - 24) = 0$

$$<=> \begin{cases} a^3 - 4a^2 - 12a + 32 = 0\ (1) \\ -6a^2 + 24a - 24 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

NB : On résous toujours l'équation qui semble la plus facile.

Ainsi résolvons l'équation (2) : $-6a^2 + 24a - 24 = 0 <=> -a^2 + 4a - 4 = 0$

$=> \Delta = 16 - 16 = 0 => a = 2$

D'où $Z_0 = a = 2$ est la solution réelle

b- Factorisons P(Z) puis résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation P(Z) = 0

$P(Z) = Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i$

	1	$-4 - 6i$	$-12 + 24i$	$32 - 24i$
2		2	$-4 - 12i$	$-32 + 24i$
	1	$-2 - 6i$	$-16 + 12i$	0

Z_0 a b c

$=> Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i = (Z - Z_0)(aZ^2 + bZ + c)$

$<=> Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i = (Z - 2)[Z^2 - (2 + 6i) - 16 + 12i]$

D'où $P(Z) = 0 <=> (Z - 2)[Z^2 - (2 + 6i) - 16 + 12i]$

$<=> Z - 2 = 0$ ou $Z^2 - (2 + 6i) - 16 + 12i = 0$

$=> Z - 2 = 0 => Z_0 = 2$ ou $Z^2 - (2 + 6i) - 16 + 12i = 0$

D'après la question 1), la résolution de l'équation $Z^2 - (2 + 6i) - 16 + 12i = 0$ donne pour

Scanned by CamScanner

Solution $Z_1 = \frac{(2+6i)+(-6-2i)}{2(1)} = -2+2i$ et $Z_2 = \frac{(2+6i)+(6-2i)}{2(1)} = 4+2i$

Alors l'ensemble solution de l'équation $P(Z)=0$ est $S=\{-2\,;\,-2+2i\,;\,4+2i\}$

Partie B:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(o\,,i\,,j)$

On donne les points A(2), B$(4+2i)$ et C$(-2+4i)$.

1) a- Calculons le rapport $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ puis en déduisons la nature du triangle ABC.

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{(-2+4i)-(2)}{(4+2i)-(2)} = \frac{-2+4i-2}{4+2i-2} = \frac{-4+4i}{2+2i} = \frac{-2+2i}{1+i} = \frac{(-2+2i)(1-i)}{2} = \frac{4i}{2} = 2i$$

$\Rightarrow \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ = imaginaire pur. Alors le triangle ABC est rectangle en A.

b-Montrons que le point F d'affixe $2i$ est le milieu du segment $[AC]$

F est milieu du segment $[AC]$ si $x_F = 0$ et $y_F = 2$

$$x_F = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2-2}{2} = 0 \quad \text{et} \quad y_F = \frac{0+4}{2} = 2$$

D'où le point F d'affixe $2i$ est le milieu du segment $[AC]$

c-Déterminons (Δ) l'ensemble des points du plan d'affixe Z vérifiant :

$|Z-4-2i| = |Z+2-4i|$

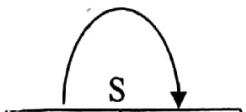
Posons : $\begin{cases} Z_D - 4 - 2i = 0 \\ \text{et} \\ Z_E + 2 - 4i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_D = 4+2i \\ \text{et} \\ Z_E = -2+4i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D\binom{4}{2} \\ \text{et} \\ E\binom{-2}{4} \end{cases}$

Alors L'ensemble (Δ) des points M cherché est la médiatrice du segment $[DE]$

2) Soit S la similitude du plan telle que S(A) =A et S(B) = C.

a- Déterminons le rapport k et l'angle θ de la similitude S

La traduction schématique d'une similitude directe S qui transforme A en A et B en C est :



A	A
B	C
[AB]	[AC]

Scanned by CamScanner

- Rapport $k = \frac{[AC]}{[AB]} = \left|\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = \left|\frac{(-2+4i)-(2)}{(4+2i)-(2)}\right| = \frac{|-4+4i|}{|2+2i|} = \frac{\sqrt{16+16}}{\sqrt{4+4}} = \sqrt{2}$

- Angle $\theta = \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \arg\left(\frac{-4+4i}{2+2i}\right) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2}$

b- Déterminer l'expression de la bijection complexe associée à la similitude S.

L'écriture complexe f associée à S est : $f(Z) = aZ + b$.

La traduction algébrique d'une similitude directe S qui transforme A en C et B en D est :

$S(A) = A$ et $S(B) = C \Leftrightarrow \begin{cases} aZ_A + b = Z_A & (1) \\ aZ_B + b = Z_C & (2) \end{cases}$

$(1) - (2) \Rightarrow a(Z_A - Z_B) = Z_A - Z_C \Rightarrow a = \frac{Z_A - Z_C}{Z_A - Z_B} = \frac{-4+4i}{2+2i} = 2i$

Dans (2) on a: $aZ_B + b = Z_C \Rightarrow b = Z_C - aZ_B \Rightarrow b = (-2+4i) - (2i)(4+2i) \Rightarrow b = 2 - 4i$

D'où l'écriture complexe f est $f(Z) = 2iZ + 2 - 4i$

c- En déduisons l'affixe du centre Ω de S.

Soit ω l'affixe du centre de Ω tel que :

$\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{2-4i}{1-(2i)} = \frac{10}{(1)^2+(2)^2} = \frac{10}{5} = 2$

Scanned by CamScanner

Chapitre 3 Fonctions numériques

COURS

I- Généralité sur les fonctions

1) Définition d'une fonction :

On appelle fonction toute relation de **A vers B** qui à chaque élément de **A** on associe **au plus un élément de B.**

2) Ensemble de définition ou domaine de définition d'une fonction numérique f :

On appelle ensemble de définition ou domaine de définition d'une fonction numérique f, **l'ensemble des éléments qui ont une image par f.** On le note **Df.**

Ainsi :

- **Si $f(x) = u(x)$ (fonction polynôme), alors $Df = \mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$**
- **Si $f(x) = \sqrt{u(x)}$ (fonction irrationnelle), alors $Df = \{x/x \in \mathbb{R}; u(x) \geq 0\}$**
- **Si $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ (fonction rationnelle), alors $Df = \{x/x \in \mathbb{R}; v(x) \neq 0\}$**

3) Opération sur les fonctions :

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur leur ensembles de définition Df et Dg.

a- **Somme :**

$\forall x \in Df$ et $\forall x \in Dg$; $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

b- **Produit :**

$\forall x \in Df$ et $\forall x \in Dg$; $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

c- **Quotient :**

$\forall x \in Df$ et $\forall x \in Dg$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ avec $g(x) \neq 0$

II- Limites

1) Propriétés sur les limites :

a) Propriété 1

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

b) Propriété 2

Scanned by CamScanner

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{K}{x^n} = 0$ $(K \in \mathbb{R})$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{K}{x^n} = 0$ $(k \in \mathbb{R})$

c) Propriété 3 :

Si k est un réel non nul alors :

$\lim_{x \to 0} \frac{k}{x} = \infty$ (le signe de ∞ dépend du signe du zéro et du signe de k).

2) Opération sur les limites

a) Somme :

f	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g	l'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f + g$	$l + l'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

b) Produit :

f	l	l 0	0	∞
g	l'	∞	∞	∞
$f \cdot g$	$l \cdot l'$	∞ règle des signes	Forme indéterminée	∞ règle des signes

c) Quotient:

f	l	l	0	l	∞	∞
g	l' 0	$l' = 0$	0	∞	l	∞
$\frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	+/– ∞ à gauche / à droite	Forme indéterminée	0	∞ règle des signes	Forme indéterminée

NB :

On remarque ainsi que l'on a quatre (4) formes indéterminées qui sont :

$-\infty + \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$.

Scanned by CamScanner

3) Limite des fonctions polynômes et rationnelles à l'infini.

a) Limite d'une fonction polynôme à l'infini

La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite de son terme du plus haut degré.

Exemple : $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - 2x^2 + 3x = \lim\limits_{x \to -\infty} -2x^2 = -2(-\infty)^2 = -\infty.$

b) Limite d'une fonction rationnelle à l'infini :

La limite d'une fonction du rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$est égale à la limite du quotient des termes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3x + 4x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1 + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} 4x = +\infty$

N.B : La propriété sur les limites des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles ne peut être utilisée qu'en $+\infty$ ou en $-\infty$.

En aucun cas, elle ne peut être utilisée lorsque x tend vers un nombre réel.

4) Limite de la composée de deux fonctions :

Soient f et g deux fonctions et fog leur composée définie sur un intervalle I contenant « a » où a est une borne. Si : $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$ et si $\lim\limits_{x \to l} f(x) = l'$ alors $\lim\limits_{x \to a} fog(x) = l'$

5) Limite des fonctions circulaires :

Si a est un nombre réel non nul, on a :

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sinx}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinax}{ax} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgax}{ax} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2}$

Scanned by CamScanner

6) Limite à gauche – Limite à droite de x_0

a) Limite à gauche de x_0

On appelle limite à gauche d'un réel x_0 d'une fonction f, la limite lors qu'elle existe quand x tend vers x_0 par valeurs inferieures on note : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

b) Limite à droite de x_0

On appelle limite à droite d'un réel x_0 en une *fonction* f, la limite lors qu'elle existe quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures on note : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

NB :

Une fonction admet une limite en un point x_0 si sa limite à gauche est égale à sa limite à droite.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

7) Théorème sur les limites

a- Théorème des gendarmes :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

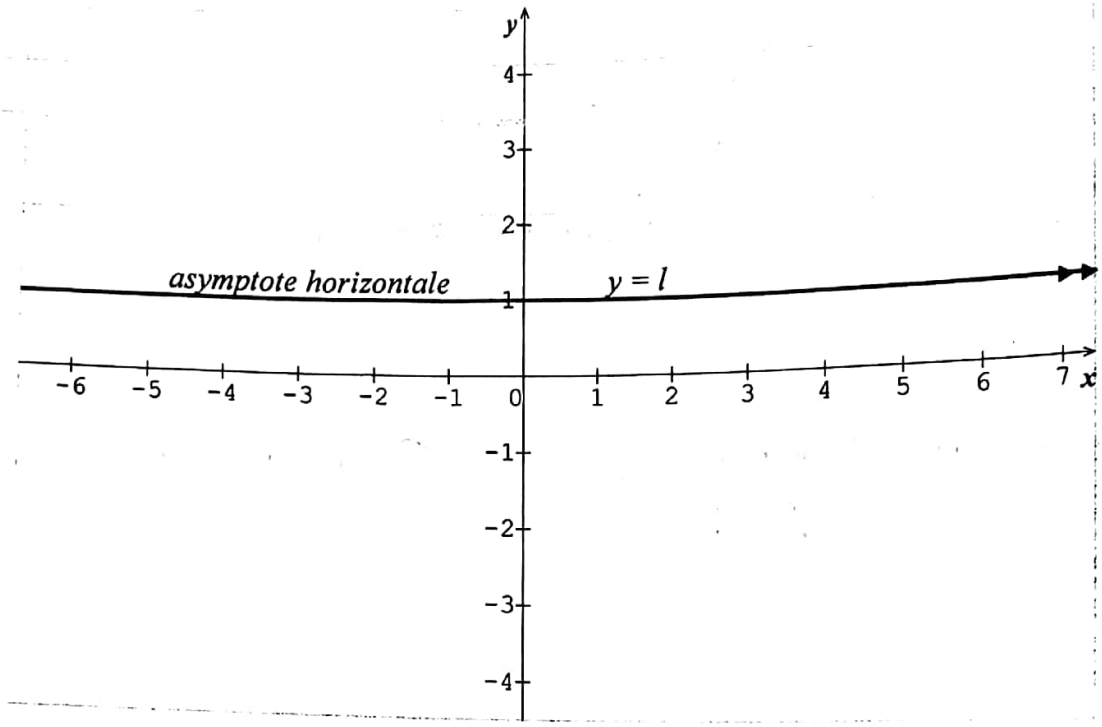
Si $f(x)$ Répond à l'inégalité : $A(x) \quad f(x) \quad B(x)$.

$$\text{et si} \begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} A(x) = l \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to \infty} B(x) = l \end{cases} \text{alors} \lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

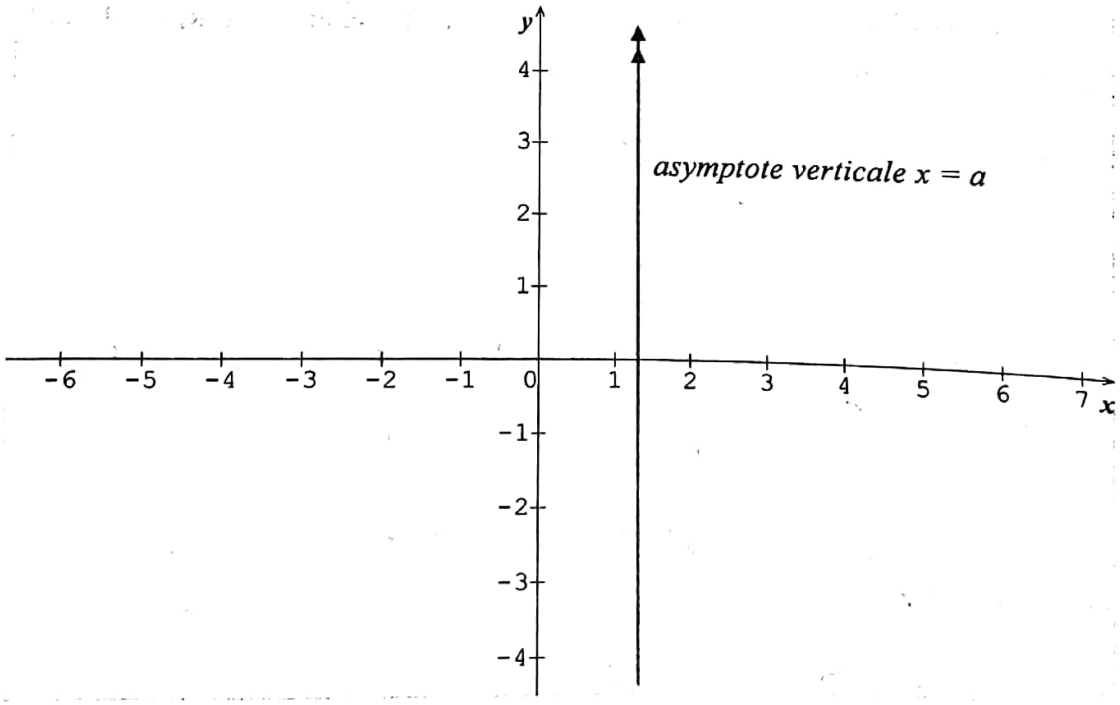
6) Interprétation graphique de la limite d'une fonction :

- Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ (**alors la droite d'équation y = l**) est asymptote **Horizontale** à la ~~co~~ Courbe représentative de f.

Scanned by CamScanner



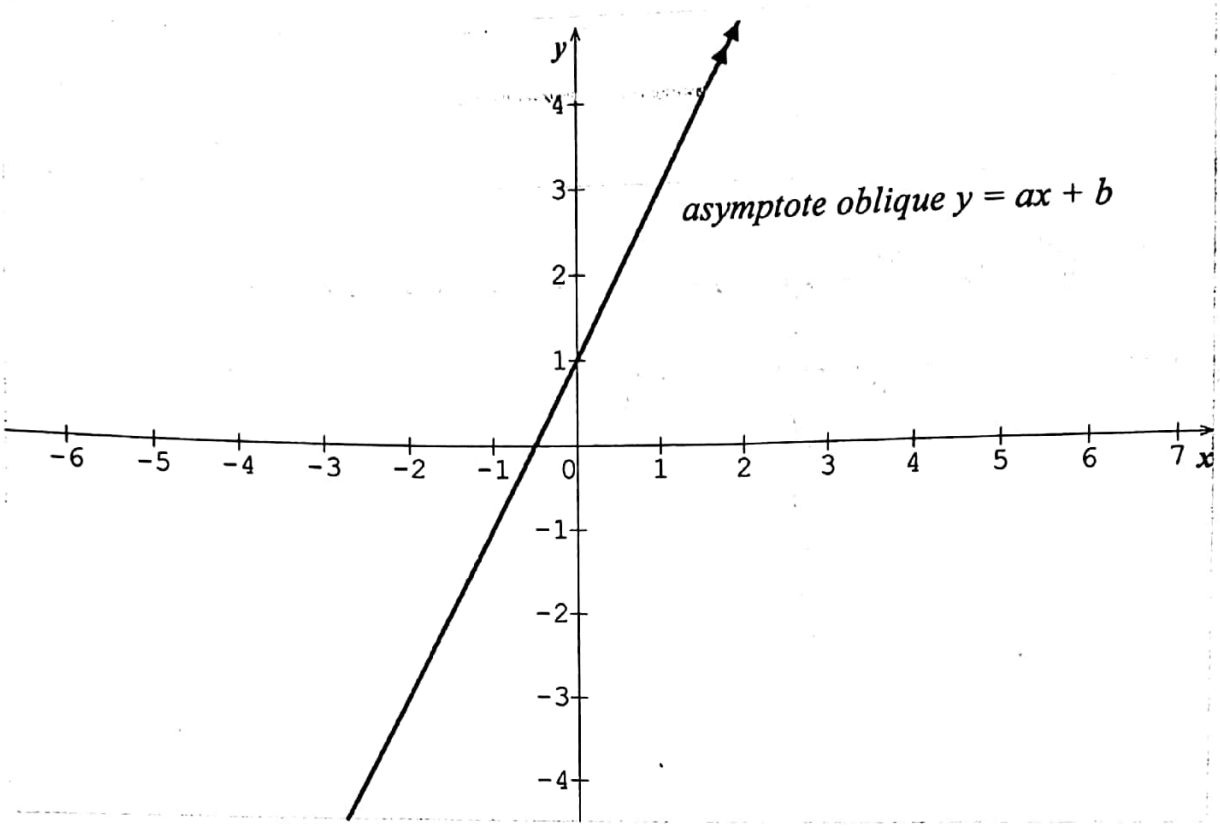
- *Si* $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$(**alors la droite d'équation $x = a$**) est asymptote **verticale** à la combe représentative de f.



- *Si* $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ *ou* $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

(**alors la droite d'équation $y = ax + b$** est asymptote **oblique** à la ~~combe~~ Courbe représentatives de f).

Scanned by CamScanner



III- Continuité

1) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit x_0 un réel appartenant à I.

On dit que f est continue en x_0 si et seulement si f est définie en x_0 et si la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 est égale à $f(x_0)$

Une fonction f est continue en x_0 si et seulement si :

$f(x_0)$ existe et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = l$ (l fini).

Remarque : les fonctions non continues en x_0 sont les fonctions non définies en x_0 et les fonctions n'admettant pas de limite en x_0

2) Continuité sur un intervalle :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a ; b]$ ou $I =]a ; b[$. On dit que f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout point de I.

3) Continuité à gauche – continuité à droite

a- Continuité à gauche :

Une fonction f est continue à gauche de x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Scanned by CamScanner

b) Continuité à droite :

Une fonction f est continue à droit de x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

NB :

Une fonction est continue en un point de x_0 si elle est **gauche** et à **droite** de x_0

4) Prolongement par continuité

Soit f une fonction numérique non définie en x_0 ; mais admettant une limite l en ce point. La fonction g définie par : $g(x)=\begin{cases} f(x) \ si \ x \neq x_0 \\ l \ si \ x = x_0 \end{cases}$

est appelée le prolongement de la fonction f par continuité au point x_0

N B : Si f n'est pas définie en x_0 mais admet une limite en ce point, alors on dit que f est prolongeable par continuité au point x_0.

IV- Dérivation :

1) Nombre dérivé en un point x_0 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0.

On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si la quantité $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0. Cette limite est appelée **nombre dérivé en x_0 et est noté $f'(xo)$.** C'est-à-dire :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

N.B : f est dérivable en x_0 est équivalente que la quantité $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers zéro ; il suffit de poser $h = x - x_0$

f est dérivable en x_0 si elle admet un nombre dérivé $f'(x_0)$

2) Lien entre la notion de limite et de continuité :

Toute fonction dérivable en un point x_0 est continue en x_0 .

N.B : La réciproque est inexacte.

3) Nombre dérivé à gauche – Nombre dérivée à droite

a) Nombre dérivé à gauche :

Scanned by CamScanner

Si lim $\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ existe et est finie, alors on dit que f est dérivable à gauche en x_o

$x \to x_0^-$

On la note $f'_g(x_0)$

b) Nombre dérivé à droite :

Si $\lim \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ Existe et est finie, alors on dit que f est dérivable à droite en x_o.

$x \to x_o^+$

On la note $f'_d(x_0)$

Théorème :

si f est dérivable à gauche et à droite en x_o et si les deux nombres dérivés sont égaux alors f est dérivable en x_o et on a :

$$\lim_{x \to x_o^-} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o^+} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'(x_o)$$

4) Interprétation graphique d'un nombre dérivé

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J)

Soit $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un point fixé de (C). $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point courant de (C) ; construisons la droite (M_0M) . Lorsque x tend vers x_0 la droite (M_0M) vient occuper une position limite (M_0T) appelée tangente à la courbe (C) au point $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$; $f'(xo)$ est appelé pente ou coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

a) Equation de la tangente au point d'abscisse x_0 :

L'équation de la tangente en un point x_0 est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

NB :

Si le nombre dérivé à gauche et le nombre dérivé à droite existent et sont différents, alors la courbe admet deux demi – tangentes en M_0 de coefficients respectifs les nombres dérivés à gauche et à droite de x_0 et fait un angle en ce point.

A retenir

Si la courbe (C) de la fonction f admet en un point x_0 , une tangente parallèle à l'axe des abscisses alors $f'(xo) = 0$

Scanned by CamScanner

- La courbe (**Cf**) passe par le point $A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ si et seulement $f(x_0) = y_0$.
- La courbe (**Cf**) admet au point $A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses c'est-à-dire l'axe ox si et seulement si $f'(x_0) = 0$.
- La courbe (Cf) admet au point $A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ une tangente parallèle à la droite (**D**) d'équation : $y = ax + b$ si et seulement si $f'(x_0) = a$.
- La courbe (Cf) admet au point $A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ une tangente de coefficient directeur k si et seulement si $f'(x_0) = k$.

5) Utilisation des dérivées :

Sens de variation d'une fonction.

Soit f une fonction définie par : $x \mapsto f(x)$. On appelle dérivée de f, la fonction f' définie par : $f' : x \mapsto f'(x)$ nombre dérivé de la fonction f au point x

6) Formules sur les dérivées :

a- Dérivées usuelles :

Fonctions	Dérivées	Domaines
a	0	$\mathbb{R}$
ax	a	$\mathbb{R}$
ax^n	nax^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{a}{x^n}$	$\frac{-nax^{n-1}}{x^{2n}}\ (x \neq 0)$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^*_+$
$\sqrt{ax+b}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$	$\mathbb{R}_+$
$cosx$	$-sinx$	$\mathbb{R}$
$sinx$	$cosx$	$\mathbb{R}$
$tanx$	$\frac{1}{Cos^2x} = 1 + tg^2x$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{k\Pi}{2}\right\}$
$cos(ax+b)$	$-asin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$sin(ax+b)$	$acos(ax+b)$	$\mathbb{R}$

b- Opérations sur les dérivées :

Fonctions	Dérivées
$u + v$	$u' + v'$
$au\ (a \in \mathbb{R})$	au'
$u \times v$	$u'v + v'u$
$\frac{a}{u}(a \in \mathbb{R})$	$\frac{-au'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{(u')(v) - (v')(u)}{(v)^2}$
$(u)^n$	$nu'u^{n-1}$
$\frac{a}{u^n}\ (a \in \mathbb{R})$	$\frac{-nau'u^{n-1}}{u^{2n}}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$sin(u)$	$u'cos(u)$
$cos(u)$	$-u'sin\ (u)$
$tan(u)$	$\frac{u'}{Cos^2u}$
$u = (gof)(x)$	$u' = f'(x)og'\ [f(x)]$

7) Dérivée de la réciproque d'une fonction f :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

Alors f réalise une bijection de I sur sur $f\ (I)$ et admet une bijection f^{-1} de $f(I)$ dans I

Ayant même sens de variation que f

Pour calculer $(f^{-1})'(x_0)$, on peut procéder comme suite :

Scanned by CamScanner

- On détermine la solution de l'équation $f(x) = x_0$
- On calcule $f'(x)$ et on vérifie que $f'(x) = 0$
- On conclue $(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(x)}$

8) Sens de variation d'une fonction.

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On retient que les variations d'une fonction dépendent du signe de sa dérivée. Ainsi :

- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in$ I, alors $\forall x \in$ I, f est strictement décroissante.
- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in$ I, alors $\forall x \in$ I, f est strictement croissante.
- Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in$ I, alors $\forall x \in$ I, f est constante ou stationnaire

N.B :

Les variations d'une fonction peuvent être résumées dans un tableau appelé tableau de variation de f. Ainsi un tableau de variation comporte les éléments suivants :

- Domaine de définition
- Valeurs pour lesquelles la dérivée s'annule
- Des flèches croissantes et décroissantes montrant les variations de f.
- Une courbe (C_f) admet en un point $A(x_0 ; y_0)$ une tangente horizontale ou une tangente parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si : $f'(x_0) = 0$.
- Une courbe (C_f) admet en un point $A(x_0 ; y_0)$ une tangente de coefficient directeur **a** si et seulement si : $f'(x_0) = a$.

9) Extremum d'une fonction :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0. Si $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en $passant\ par\ x_0$, alors f admet un extremum en x_0.

Si $f'(x)$ passe du signe négatif au signe positif on dit que f présente un minimum

Si $f'(x)$ passe du signe positif au signe négatif on dit que f présente un maximum

Ainsi on dit que : **(C_f) admet une tangente horizontale en $M_0(x_0 ; f(x_0))$**

V- Etude de fonctions :

1) Parité et périodicité d'une fonction :

a) Fonction paire :

Une fonction f est dite paire si et seulement si :

$\forall x \in Df\ et\ -x \in Df ; f(-x) = f(x)$

Mr DEMBELE Idrissa
Le Professeur Chargé du Cours
Reproduction

Scanned by CamScanner

b) Fonction impaire :

Une fonction f est dite impaire si et seulement si :

$\forall x \in Df \text{ et } -x \in Df ; f(-x) = -f(x)$

c) Fonction Périodique :

Une fonction f est dite périodique de période T s'il existe un nombre réel T tel que

$\forall x \in Df \quad et \quad x + T \in Df \quad ; f(x + T) = f(x).$

Remarque :

- La fonction Cos$x$ est paire car $Cos(-x) = Cos\, x$
- La fonction Sin$x$ est impaire car $Sin(-x) = -Sin\, x$
- Les fonctions Cos $(ax + b)$ et Sin $(ax + b)$ sont périodique et de période T = $\frac{2\prod}{|a|}$

2) Courbes symétriques :

a) Axe de symétrie :

La droite **d'équation $x = a$ est dite axe de symétrie** pour la courbe (Cf) de f si :

- $f(2a - x) = f(x)$
  ou
- $f(a + x)$ est paire
  ou
- $f(a + x) = f(a - x)$

b) Centre de symétrie :

Le **point I$\binom{a}{b}$ est dit centre de symétrie** pour la courbe (Cf) de f si

- $f(2a - x) + f(x) = 2b$

ou

- $f(a + x) - b$ est paire

ou

- $f(a + x) + f(a - x) = 2b$

N.B :

- Toute fonction paire admet l'axe $(y'\, o\, y)$ comme axe de symétrie.
- Toute fonction impaire admet le point O $\binom{0}{0}$ (origine du repère) comme centre de symétrie.

c) Recherche de centre de symétrie et d'axe de symétrie :

- **Centre de symétrie :**

Scanned by CamScanner

Soit f une fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{\gamma x+\beta}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\imath}$) où : a ; b ; c ; γ ; β sont tous des réels avec : $a \neq 0$ et $\gamma x + \beta \neq 0$.

Si f peux ce mettre sous la forme : $f(x) = a'x + b' + \frac{c'}{\gamma x+\beta}$

Alors le centre de symétrie à la courbe (C) de f à pour coordonnée :

$$I\begin{pmatrix} x_0 = \frac{-\beta}{\gamma} \\ y_0 = a'x_0 + b' \end{pmatrix}$$

- **Axe de symétrie :**

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec ($a \neq 0$)

Si f peux ce mettre sous la forme : $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

Alors l'axe de symétrie à la courbe (C) de f à pour équation $x = -\frac{b}{2a}$.

3) Maximum - Minimum - Extremum - Point d'inflexion

a) Minimum :

Soit f une fonction définie en un point x_0. S'il existe un intervalle I centré en x_0 tel que $\forall x \in$ I on a : $f(x) \geq f(x_0)$ alors f présente un minimu

m en x_0. Ce minimum est $m = f(x_0)$.

b) Maximum :

f admet un maximum relatif au point x_0, s'il existe un intervalle I centré en x_0 tel que $\forall x \in$ I on a : $f(x) \leq f(x_0)$. Le maximum est $M = f(x_0)$.

Théorème :

Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I et si $f'(x)$ s'annule en x_0 et change ce signe en passant par x_0, on dit alors que f présente un extremum en x_0. Cet extremum est égal à $f(x_0)$. Il est le minimum si f' passe du signe négatif au signe positif. Il est le maximum si f' passe du signe positif au signe négatif.

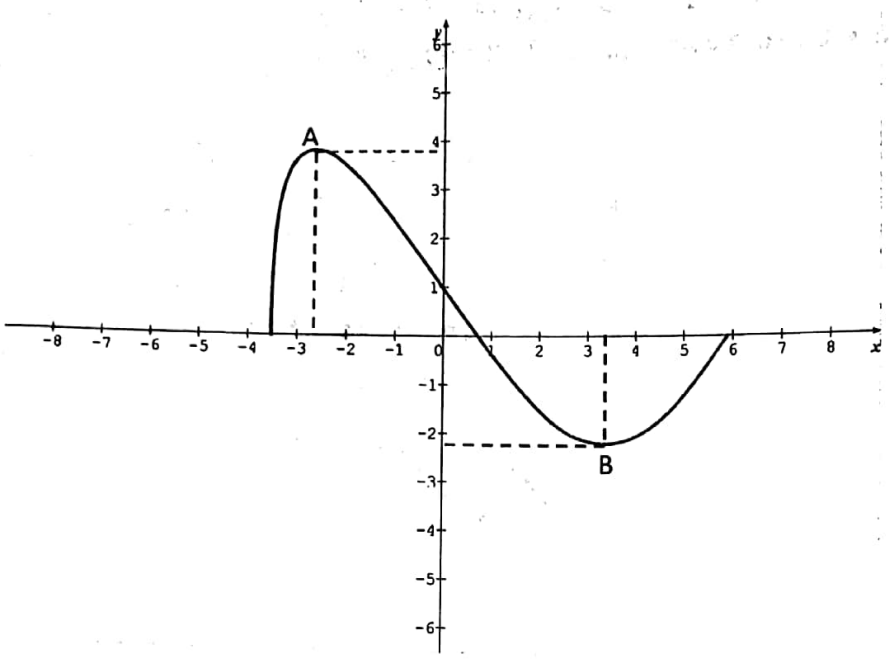
NB :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert] a ; b[, tel que la dérivée s'annule en changeant de signe au point x_0, alors la fonction f admet un extremum relatif en x_0.

c) Extremum :

Le système (Maximum-Minimum) est appelé Extremum.

Scanned by CamScanner



- A représente le maximum relatif,
- B représente le minimum relatif,

d) <u>Point d'inflexion</u> :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle] a ; b[. On appelle point **d'inflexion**, tout point où la **dérivée seconde $f''(x)$ s'annule en changeant de signe.**

e) <u>Point de reboursement</u> :

$Si\ limf'(x) = \pm\infty \quad ou \quad limf'(x) = \pm\infty$

$x \to x_o^+ \qquad\qquad x \to x_o^-$

Alors on dit que f admet un point de reboursement x_0 à tangente parallèle à l'axe des abscisses ou des ordonnées :

a) $lim\ f'(x) = +\infty$ $\qquad$ b) $limf'(x) = -\infty$

$x \to +\infty \qquad\qquad x \to -\infty$

4) <u>Fonction réciproque</u>

<u>Bijection</u> :

Une fonction f de E vers F est dite bijective si tout élément de l'ensemble d'arrivé F admet un et un seul antécédent dans l'ensemble de départ E.

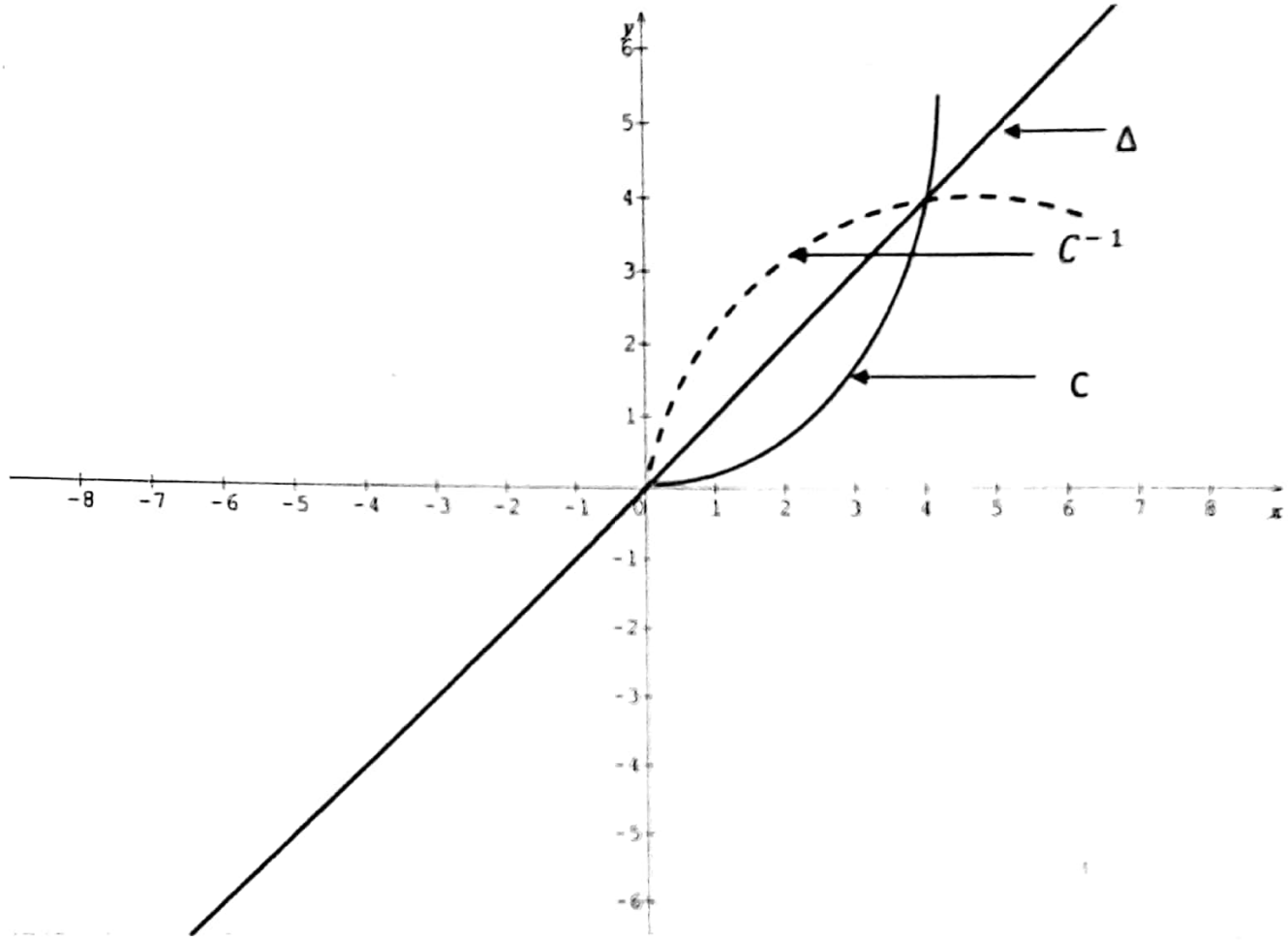
- **En Pratique :**

Une application f est bijective si et seulement si $\forall\ y \in F\ \exists!\ x \in E$ on a : $f(x) = y$

Scanned by CamScanner

- **Graphiquement**

Les courbes représentatives d'une fonction et celle de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice(Δ) d'équation $y = x$.



Théorème :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f est une bijection de **I sur $f(I)$. et admet une bijection *réciproque* f^{-1} de f (I) sur I ayant même sens de variation que f**

Les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice $\Delta : y = x$

Si M (x ; y) $\in C_f$ alors N (y ; x) $\in C_{f^{-1}}$

Si $x = a$ est asymptote à C_f alors y = a devient asymptote pour $C_{f^{-1}}$

5) Théorème de valeurs intermédiaires :

L'image d'un intervalle par une fonction continue :

Théorème 1 :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Scanned by CamScanner

Soit f une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et soit D_f son ensemble de définition. Soit $I = [\ a\ ;\ b\ ]$ ou $I =]\ a\ ;\ b\ [$ un intervalle de D_f. Si f est continue sur I alors $f(I)$ est aussi un intervalle

Théorème 2:

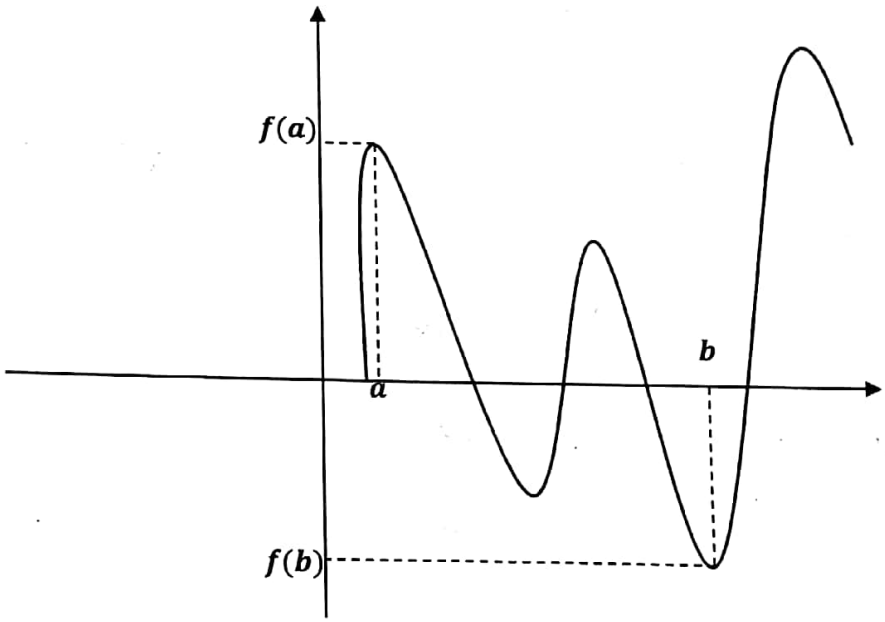
L'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé.

1ère forme :

Soit f une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et soit D_f son ensemble de définition. Soit $I = [\ a\ ;\ b\ ]$ ou $I =]\ a\ ;\ b\ [$ un intervalle de D_f. Si f est continue sur I alors $f\ (I)$ est aussi un intervalle.

2ème forme :

Si f est continue sur I et que $f(a) \times f(b) < 0$, alors il existe un réel $\alpha \in I$ tel que $\mathbf{f(\alpha) = 0}$



6) Théorème relatif aux fonctions continues et strictement monotones

1ère forme : Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[\ a\ ;\ b\ ]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors il existe un unique point x_0 élément de $]a; b[$ tel que $f(x_0) = 0$

2ème forme : Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle$[\ a\ ;\ b\ ]$ et si $f\ (a) \times f\ (b) \leq 0$ alors l'équation $f\ (x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [\ a\ ;\ b\ ]$

7) Approximation d'une solution α de l'équation $g(x) = 0$:

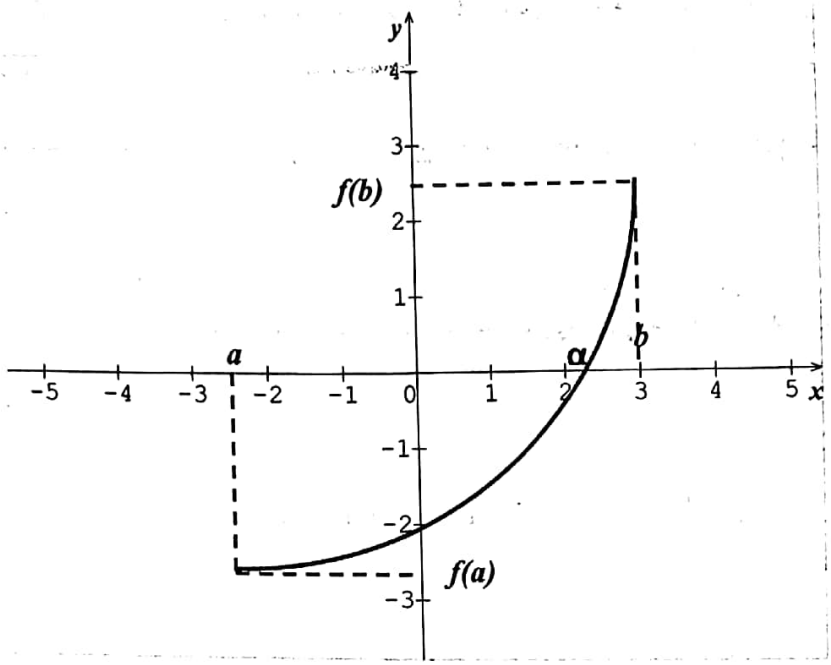
a- Méthode de dichotomie :

Soit g une fonction définie sur un intervalle $[\ a\ ;\ b\ ]$ tel que $g(a)\quad g(b) < 0$.

Posons $a_0 = b\ et\ b_0 = b$.

Scanned by CamScanner

- **Si g est strictement croissante sur $[a\ ;\ b]$**



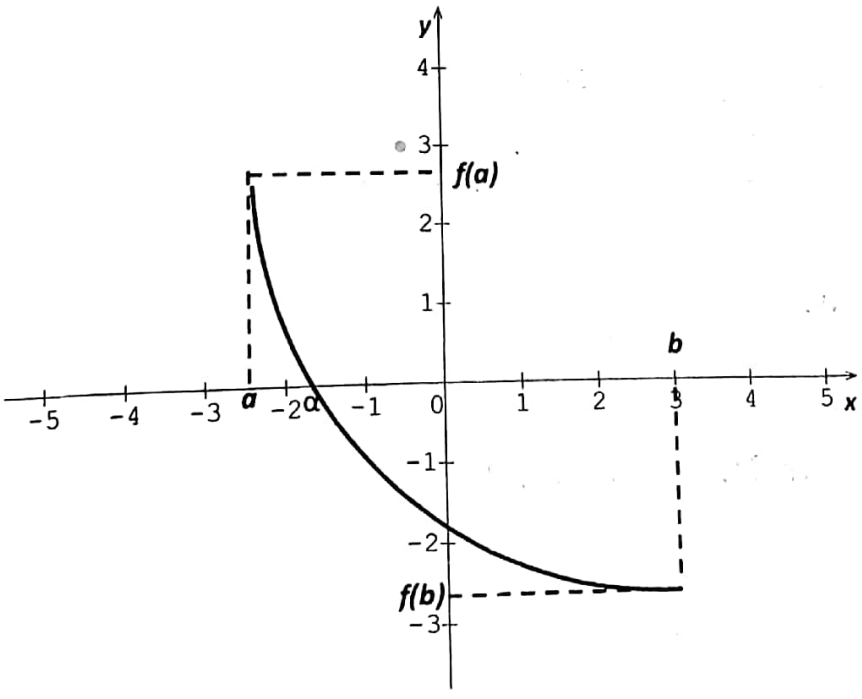
Ainsi on a deux suites numériques de termes généraux a_n et b_n tel que $\alpha \in [\, a_n\ ;\ b_n\,]$.

On calcule $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$.

- Si $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ alors $\alpha \in \left[\frac{a_n + b_n}{2}\ ;\ b_n\right]$.

- Si $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$ alors $\alpha \in \left[\, a_n\ ;\ \frac{a_n + b_n}{2}\right]$.

- **Si g est strictement décroissante sur $[a\ ;\ b]$**



Ainsi on a deux suites numériques de termes généraux a_n et b_n tel que $\alpha \in [\, a_n\ ;\ b_n\,]$.

Scanned by CamScanner

On calcule $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$.

- Si $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ alors $\alpha \in \left[a_n ; \frac{a_n + b_n}{2}\right]$.
-
- Si $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$ alors $\alpha \in \left[\frac{a_n + b_n}{2} ; b_n\right]$.

b- <u>Méthode des balayages</u> :

C'est une méthode qui consiste à déterminée une approximation de α à partir d'un tableau de valeur où la valeur de α est obtenue en encadrant la valeur de x à partir du changement de signe obtenue entre l'antécédent positif et négatif.

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	.....	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$	$f(x_6)$	$f(x_7)$	.....	$f(x_n)$

Si par exemple $f(x_5) \times f(x_6) < 0$ alors $\alpha \in [x_5 ; x_6]$ et par conséquent $\alpha = \frac{x_5 + x_6}{2}$

8) <u>Théorème de l'inégalité des accroissements finis</u>

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soit a *et* b deux réels appartenant à I tel que (a < b).

-Si m et M sont deux réels tel que $m \leq f'(x) \leq$ M, alors on a :
(b – a) $\boldsymbol{m \leq f(b) - f(a) \leq}$ **(b – a) M.**

-Si f est dérivable sur I, alors il existe un réel k appartenant à I tel que $|f'(x)| \leq k$.
Ainsi par conséquent $\forall\ a \in$ I et $b \in$ I, on a : $|f(x) - f(a)| \leq k\,|x - a|$.
(qui est le théorème de l'inégalité des accroissements fins).

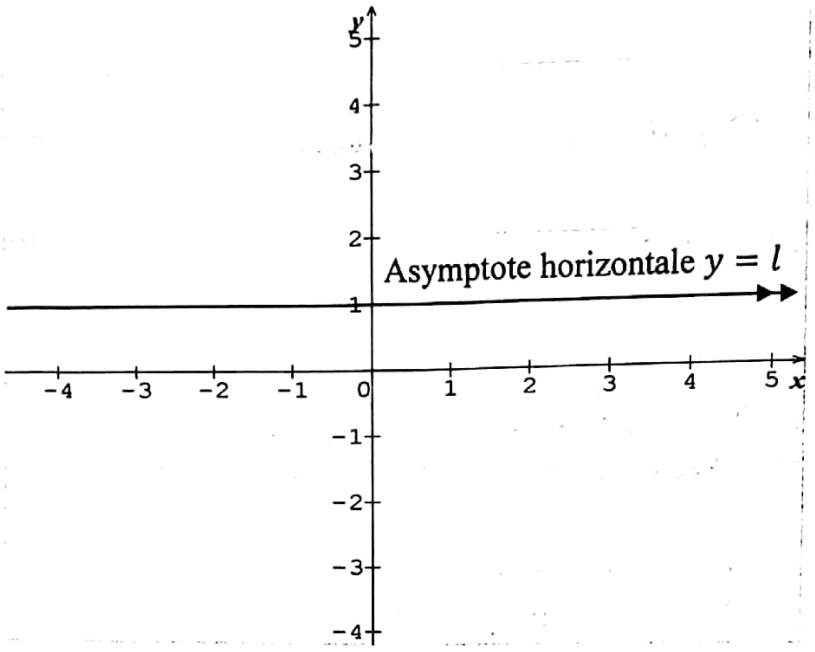
9) <u>Etude des branches infinies</u> :

<u>Notion d'asymptotes</u> :

- Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ **(alors la droite d'équation y =** l **)**

est asymptote **horizontale** à la combe représentative de f.

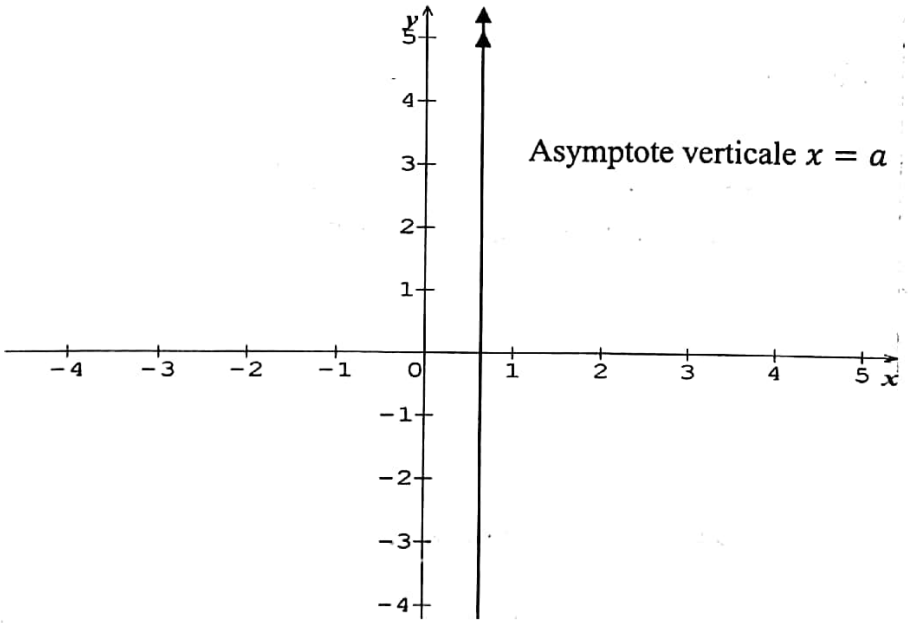
Scanned by CamScanner



- $Si\ \lim_{x \to a} f(x) = +\infty\ ou\ \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$(**alors la droite d'équation $x = a$**)

est asymptote **verticale** à la combe représentative de f.

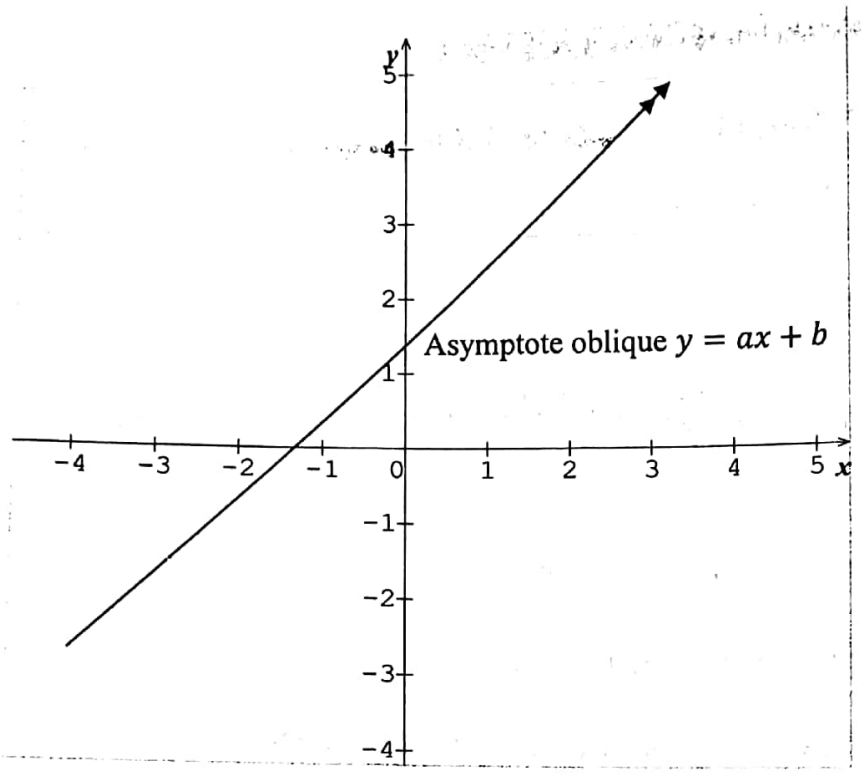
Asymptote horizontale $y = l$



- $Si\ \lim_{x \to +\infty} [\, f(x) - (ax + b)\,] = 0 \quad ou \quad \lim_{x \to -\infty} [\, f(x) - (ax + b)\,] = 0$

(**Alors la droite d'équation $y = a\,x + b$** est asymptote **oblique** à la combe représentatives de f).

Scanned by CamScanner



Recherche d'asymptote oblique :

Il est évident de dire que si : $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, alors on a une possibilité d'asymptote oblique.

Ainsi pour chercher l'asymptote oblique, on procède comme suite :

- Si $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b$ | alors la droite d'équation $y = ax + b$ est Asymptote oblique à la courbe (C) de f.

- Si $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ | alors la courbe (C) de f admet l'axe $(y'oy)$ comme branche parabolique.

- Si $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ | alors la courbe (C) de f admet l'axe $(x'ox)$ comme branche parabolique.

N.B :

Si f est une fonction rationnelle dont le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur d'une seule unité, alors on peut écrire $f(x)$ sous la forme :

Scanned by CamScanner

$f(x) = Q(x) + \frac{R}{D(x)}$ (en effectuant une division euclidienne) .

$Q(x) = y$ est le quotient et est aussi appelé Asymptote oblique.

$D(x)$ = est le diviseur et R = est le reste.

Cas Particulier d'asymptote

Toutes fonctions de la forme :

$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ ou $f(x) = \sqrt{|ax^2 + bx + c|}$; (avec $a \neq 0$ et $a > 0$)

Admet deux asymptotes :

- L'une en $-\infty$ d'équation : $y = -\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{a}\right)$

- L'une en $+\infty$ d'équation : $y = \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{a}\right)$

10) Position relative d'une courbe (Cf) et de son asymptote oblique.

Pour déterminer la position relative d'une courbe (Cf) et de son asymptote oblique (Δ), on étudie le signe de : $f(x) - y$. Ainsi :

- Si $f(x) - y < 0$, alors la courbe (Cf) est en dessous de la droite (Δ).
- Si $f(x) - y > 0$, alors la courbe (Cf) est au dessus de la droite (Δ).
- Si $f(x) - y = 0$, alors la courbe (Cf) et la droite (Δ) sont confondues.

11) Intersection de la courbe avec les axes du repère :

a) Intersection de la courbe avec l'axe des abscisses (ox)

Pour trouver le ou les points d'intersection de la courbe (Cf) avec l'axe des abscisses, on résous l'équation $f(x) = 0$. Ainsi la courbe passe par les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'axe (ox).

b) Intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées (oy)

Pour trouver le ou les points d'intersection de la courbe (Cf) avec l'axe des ordonnées, on calcule l'ordonnée $y = f(o)$. Ainsi la courbe passe par $y = f(o)$ sur l'axe des (oy).

12) Plan d'étude d'une fonction :

Pour étudier une fonction f et représenter graphiquement sa courbe (Cf) dans le repère on adopte le plan suivant :

Scanned by CamScanner

- On donne le domaine de définition ou ensemble de définition noté D_f
- On calcule les limites aux bornes de D_f
- On étudie la parité et la périodicité de f
- On étudie la continuité de f
- On étudie le sens de variation de f qui consiste à calculer la dérivée et à étudier Son signe
- On dresse le tableau de variation qui est le résumé de toutes les études précédentes
- On peut chercher les points d'intersections éventuels avec les axes de coordonnées

VI- Fonctions économiques:

1) Coût total :

On appelle coût total, l'ensemble de dépenses effectuées par une entreprise.
Il est noté par : $C_T(x)$.

2) Coût marginal :

On appelle coût marginal, la fonction dérivée du coût total.
Il est noté par : $C_m(x)$ tel que : $C_m(x) = C'_T(x)$.

3) Coût moyen :

On appelle coût moyen, le rapport entre le coût total et la quantité de produit fabriqué.
Il est noté par $C_{moy}(x)$ **tel que :** $C_{moy}(x) = \frac{C_T(x)}{x} = \frac{\text{coût total}}{\text{quatité de produit}}$.

4) Le revenu ou recette :

On appelle revenu ou recette, le produit du prix unitaire par la quantité de produit fabriqué. Il est noté $R(x)$ tel que : $R(x) = PU \times x$ ou $R(x) = PU \times q$.

5) Le bénéfice ou profit :

On appelle bénéfice ou profit, la différence entre la recette et le coût total.
Il est noté par : $B(x) = R(x) - C_T(x)$.

NB :

- Le bénéfice maximal est le maximum relatif de la fonction $B(x)$.
- Le bénéfice minimal est le minimum relatif de la fonction $B(x)$.

Scanned by CamScanner

EXERCICES

Limites

Limites en un point x_0

1 Calculer les limites suivantes aux points x_0 donnés :

a- $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^3 - 8}{-x+2}$; b- $\lim\limits_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$; c- $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{2x+5}{x^2 - x - 2}$; d- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}$

e- $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$; f- $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x^2 - 1}{-x^2 - 3x + 4}$

2 Calculer les limites suivantes aux points x_0 donnés :

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sin2x}{3x}$; b- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{Cos2x}{1 - Sinx}$; c- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sin5x}{Sin3x}$; e- $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{Sinx}{\pi - x}$; f- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sin4x}{tangx}$;

Limites à l'infinie

4 Calculer les limites suivantes à l'infinie :

a- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-8}{x + 1 - x^2}$; b- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt{x} - 1}{x + 2}$; c- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + 2}{5x^2 - x}$; d- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}$

e- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x+3}{\sqrt{4x^2 + x - 5}}$; f- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}$; g- $\lim \frac{3x - |x|}{2x - 2}$

h- $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x + \sqrt{x^2 + x + 1}$; i- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2 + Sinx}{x + 1}$ (*théorème des gendarmes*)

Limites et asymptotes

5 Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci-dessous (on donnera ci-possible les éventuelles asymptotes ou possibilité d'asymptotes)

a- $f(x) = \frac{x^2 + 5}{-x + 2}$; b- $f(x) = \frac{-x^2 + 5}{x^2 + 5x - 6}$; c- $f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{-x}$; d- $f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 1}$

6 Soit la fonction f dénie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$.

On note (Cf) sa courbe dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Scanned by CamScanner

a- Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. La courbe (Cf) admet – elle une asymptote horizontale ?

b- Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à (Cf) en $-\infty$.

Continuités

Continuité en un point x_0

7 Etudier la continuité des fonctions suivantes aux points x_0 donnés :

a- $\begin{cases} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2+x-6} \\ f(2) = 0 \end{cases}$ et $x_0 = 2$; b) $\begin{cases} f(x) = \frac{|x-1|+2}{x+3} \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$ $x_0 = 1$

Continuité et condition de faisabilité

8 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} \; si \; x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ f(2) = a \end{cases}$$

Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en $x_0 = 2$

9 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + ax \quad si \; x \in]-\infty \; ; -1[\\ f(x) = 2x - 1 \quad si \quad x \in]-1 \; ; \; 1[\\ f(x) = b(x^2 - 1) \quad si \; x \in]1 \; ; +\infty[\end{cases}$$

1) Déterminer le réel a pour que f soit continue au point $x_0 = -1$
2) Pouvez – vous déterminer la valeur de b pour que f soit continue au point $x_0 = 1$?

Prolongement par continuité

10 Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de définition de la fonction f et déterminer (s'il existe) le prolongement par continuité de cette fonction en x_0.

a) $\begin{cases} f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ x_0 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} f(x) = \frac{tgx}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$

11 Soient f et g deux fonctions définies respectivements par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$$

a- Déterminer les ensembles de définitions Df et Dg respectivement des fonctions f et g.

b- Vérifier que la fonction g est le prolongement par conitinuité de la fonction f en $x_0 = 0$.

Scanned by CamScanner

12 On considère la fonction g de la variable réelle x définie par $g(x) = \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}$

1) Déterminer son ensemble de définition Dg.
2) Montrer que g admet en 2 un prolongement par continuité que l'on notera par h.
3) Montrer que h est dérivable en 2 puis donner l'équation de la tangente à la courbe(C) de h au point d'abscisse 2.

Dérivabilité

Dérivabilité en un point x_0

13 Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes aux points x_0 donnés :

a) $\begin{cases} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2+x-6} \\ f(2) = 0 \end{cases}$ et $x_0 = 2$; **b)** $\begin{cases} f(x) = \frac{|x-1|+2}{x+3} \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$ $x_0 = 1$

Dérivabilité et condition de faisabilité

14 Déterminer les réels a et b pour que f soit continue et dérivable aux points $x_0 = 1$

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 + ax - 3 \; si \; x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2x+b}{x} \; si \; x > 1 \end{cases}$$

15 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x(x+1)}{(x+2)^2} \; si \; x \geq -1 \\ f(x) = 2x + a \; si \; x < -1 \end{cases}$$

1) Pour quelle valeur de a la fonction f est – elle continue au point -1 ?
2) Pour cette valeur, étudier la dérivabilité de la fonction f au point – 1.

Application de la dérivée

16 Déterminer une équation de la tangente en $M_0(x_0 ; f(x_0))$ à la courbe (C) de f dans les cas suivants :

$a) f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3$ et $x_0 = -2$; $b) f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$ et $x_0 = 1$

c) $f(x) = \frac{tangx}{x}$ et $x_0 = 0$

17 Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$a) f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 3$; $b) f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$; c) $f(x) = (-x^2 + 2x)^3$

d) $f(x) = \sqrt{2x^3 - 4x^2 + 1}$; e) $f(x) = (1 - 3x^2)(-x^2 + 1)$; f) $f(x) = \cos^3 x$

Scanned by CamScanner

g) $f(x) = (x-1)\sqrt{x^3 - x^2}$; h) $f(x) = \text{Sin}(3x-1)^4$; i) $f(x) = Sin^4(3x-1)$

Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$

1) Ecrire de $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
2) a– Etudier la continuité et la dérivabilité de f aux points $x_0 = -1$ et $x_0 = 3$.
   b– Que dira – t – on quant à la dérivabilité de f aux points $x_0 = -1$ et $x_0 = 3$?
3) Donner une équation de la tangente à gauche et à droite aux points $x_0 = -1$ et $x_0 = 3$.
4) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Etudes de fonctions

Analyse et interprétation d'un tableau de variation.

Analyser puis interpréter chacun des tableaux de variations suivants afin de préciser :

a- les domaines de définition.
b- les limites aux bornes du domaine de définition tout en mettant en évidence les éventuelles asymptotes et possibilités d'asymptotes.
c- Donner l'allure de la courbe (Cf) dans chaque cas.

1) ***f*** est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

De plus :
- La courbe (Cf) admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

- La courbe (Cf) admet l' axe $(y'Oy)$ comme branche parabolique.

2) ***g*** est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	$-\infty$

De plus : La courbe (Cg) admet l' axe $(y'Oy)$ comme branche parabolique.

Scanned by CamScanner

3) h est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$h(x)$	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	-1

4) p est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$p'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$p(x)$	2	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	2

20 Dresser le tableau de variation de la fonction numérique donnée, partant de ses renseignements fournis dans les cas suivants :

1) Pour f :

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que l'équation $f'(x) = 0$ admet les solutions $x = -1$ et $x = \frac{3}{2}$
- f n'est croissante qu'entre les zéros de sa dérivée f' et les points $E_1\left(\frac{3}{2}\ ; 4\right)$ et $E_2\left(-1; -\frac{5}{2}\right)$ sont ses extremums
- les droites $y = -2$ et $y = 3$ sont ses asymptotes respectives en $-\infty$ et $+\infty$

2) Pour g :

- g est définie sur $]-\infty\ ;\ 0] \cup \left[\frac{5}{2}\ ; +\infty\right[$ et admet des demi tangentes verticales aux points d'abscisses 0 et $\frac{5}{2}$
- g est strictement décroissante sur son ensemble de dérivabilité.
- la droite $y = -x$ est à la fois asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$
- les points de coordonnées $(0\ ;\ -3)$ et $\left(\frac{5}{2}\ ;\ 1\right)$ sont sur la courbe de g.

3) Pour h :

- h est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\ ;\ 2\}$ et continue sur $\mathbb{R}$.
- le point de coordonnées $(0{,}3\ ;\ 0{,}4)$ est l'extremum maximum absolue de la courbe (C_h) et h est croissante sur $[0\ ;\ 0{,}3] \cup [2\ ; +\infty[$
- les droites d'équations $y = -1$ et $y = -2x + 1$ sont asymptotes de (C_h) respectivement en $-\infty$ et $+\infty$
- les points de coordonnées $(0\ ;\ 0)$; $(1\ ;\ 0)$; et $(2\ ;\ -2)$; appartiennent à (C_h)

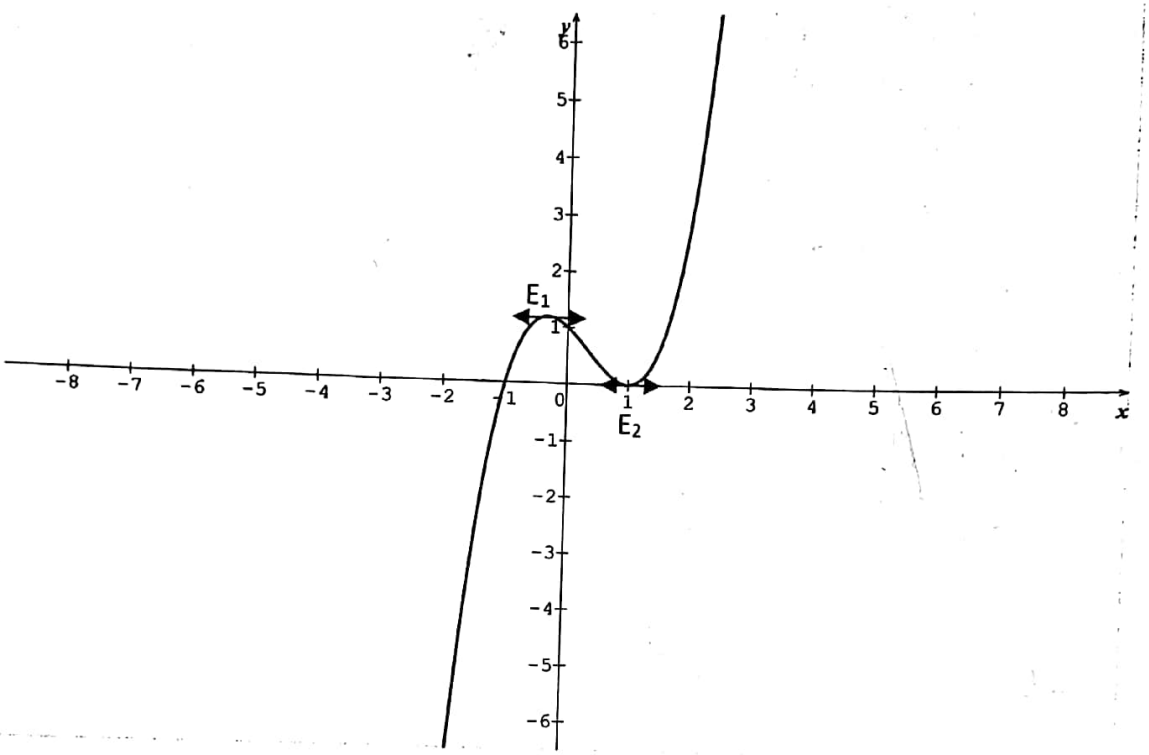
Scanned by CamScanner

Analyse et interprétation d'un graphique.

a- Analyser chacune des courbes représentatives données dans un repère orthonormé du plan afin d'établir son tableau de variation.

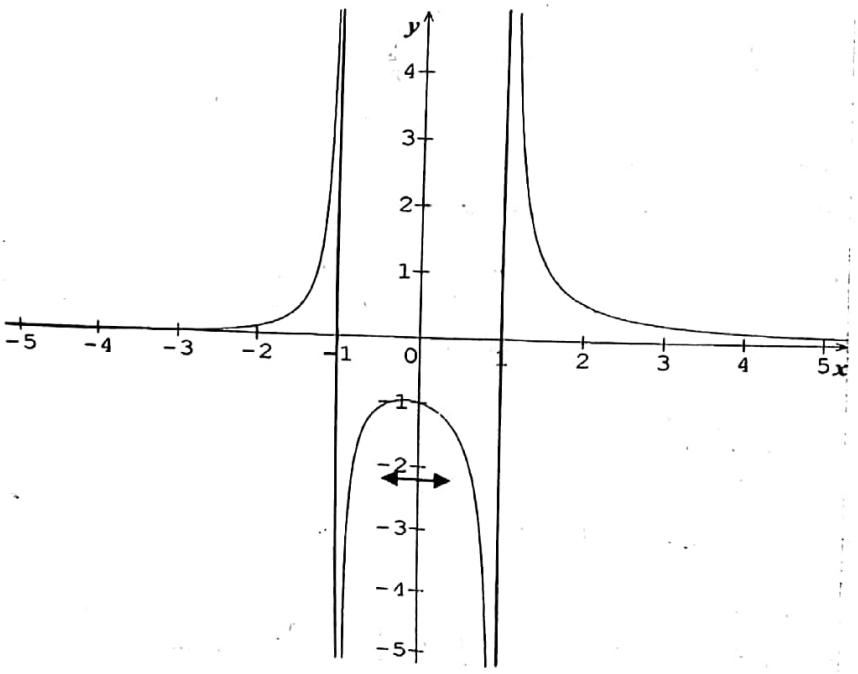
b- Déterminer les réels a ; b ; c….. en utilisant le graphique.

1) f est la fonction dont la courbe est donnée ci-dessous par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$



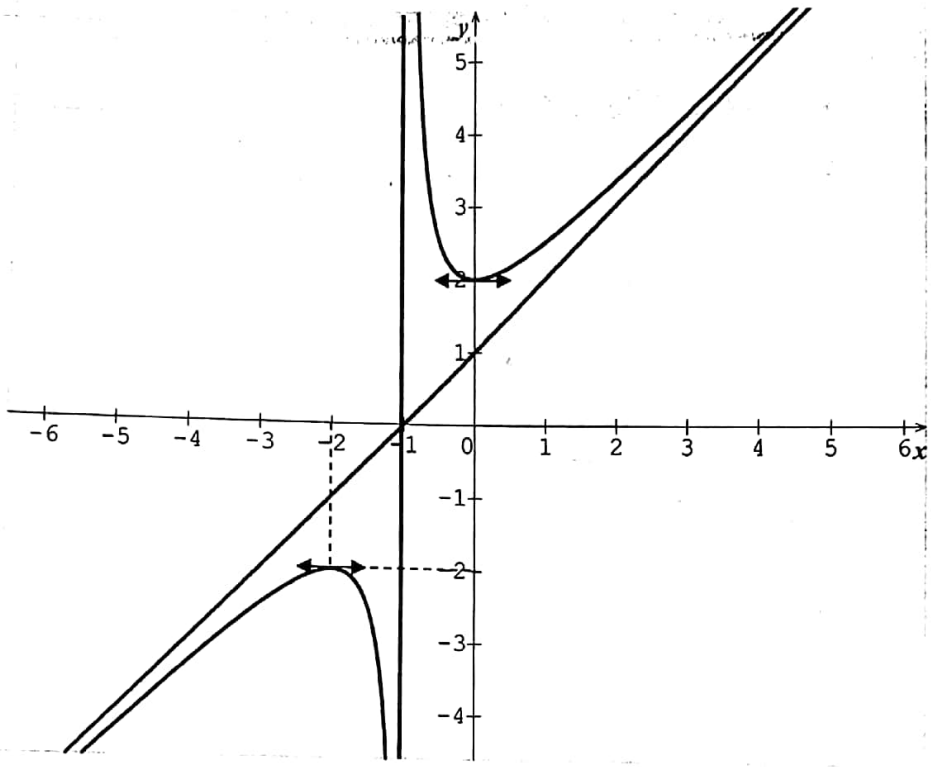
De plus : $E_1\left(\frac{-1}{3} ; \frac{32}{27}\right)$ et $E_2(1 ; 0)$ sont les sommets de la courbe (Cf)

2) La fonction donnée est g telle que : $g(x) = \frac{ax + b}{cx^2 + d}$



Scanned by CamScanner

3) La fonction donnée est h telle que : $h(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$



Fonctions d'initialisations.

22 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Déterminer l'ensemble de définition Df.
2) Calculer les limites aux bornes de Df.
3) Déterminer les réels a ; b et c tel que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$
4) a- Montrer que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe Cf .
   b- Déterminer la position de la courbe Cf et de la droite (D).
5) Montrer que le point $I\binom{-1}{0}$ est centre de symétrie pour la courbe Cf.
6) Déterminer une équation de la tangente à la courbe Cf au point d'abscisse – 2
7) Calculer la dérivée f' de la fonction f puis dresser le tableau de variation de f.
8) Construire la courbe Cf et la droite (D) dans le même repère.

23 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$)

1) Déterminer les réels a ; b ; c et d tel que :
   a- La courbe Cf admet comme asymptote les droites $x = 2$ et $x = -1$

Mr DEMBELE Idrissa ★ Le Professeur Chargé du Cours ★ Reproduction interdite

Scanned by CamScanner

b- La courbe Cf passe par le point $A\binom{1}{-2}$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -5.

2) Etudier la fonction f puis représenter sa courbe Cf dans le repère.

24 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 + ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$.

Déterminer les réels a ; b c ; m ; n et p tel que :

a- La courbe Cf admet comme asymptote les droites $x = 2$ et $x = -1$.

b- La courbe Cf passe par les points $A\binom{1}{-1}$ et $B\binom{0}{3}$ et admet au point $B\binom{0}{3}$ une tangente de coefficient directeur -3.

25 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 - 9x}{2(x^2 - 1)}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$.

1) Etudier les variations de f.
2) Préciser les asymptotes à la courbe Cf.
3) Soit Δ l'asymptote non parallèle aux axes de coordonnées, déterminer la position de Cf par rapport à Δ dans l'intervalle $]-1 ; 1[$.
4) Construire Cf.

26 Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{2x}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$.

1) Etudier et construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$.
2) Montrer que le point d'intersection des asymptotes est un centre de symétrie de (Cf)
3) Discuter graphiquement suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines de l'équation : $x^2 + 2(1 - m)x + 4 = 0$
4) Montrer que la restriction h de f à l'intervalle $I = [2 ; +\infty[$ est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
5) Construire la courbe représentative de la fonction réciproque h^{-1} de h dans le même repère que (Cf).

Fonctions économiques.

27 Une entreprise fabrique et commercialise chaque mois x objets dont le coût total de production, exprimé en milliers de francs est donnée par $C(x) = \dfrac{x^2}{2} + 5x + 200$ avec $x \in [5 ; 60]$.

On admet que toute la production est vendue chaque mois. On rappelle que le coût moyen unitaire de fabrication d'un objet est donné par $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

Scanned by CamScanner

1) Calculer $C'_m(x)$ puis en déduire le tableau de variation de $C_m(x)$.
2) Pour quel nombre d'objets le coût moyen unitaire est il minimum ?

28 La production exprimée en tonne d'une entreprise sur les cinq dernières années est donnée par la fonction suivante $t \rightarrow f(t) = -\frac{t^2}{2} + 2t + 36$ où t s'exprime en années.

1) Calculer la dérivée $f'(t)$ de la fonction $f(t)$ puis en déduire le tableau de variation de f. Donner une interprétation commerciale en utilisant le tableau.
2) Tracer la courbe (Cf) de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
3) La production totale sur les cinq années est donnée par $\int_0^5 f(t)dt$.
Calculer la production totale.

29 Une entreprise fabrique des objets. On estime que le bénéfice, en centaine d'euros, réalisé par la production et la vente de x centaines d'objets est : $B(x) = 3x^3 + 33x - 54$ où $1 \leq x \leq 10$

1) Calculer $B'(x)$. En déduire le tableau de variations de B sur $[1 ; 10]$.

2) Quel est le nombre d'objets à produire, et à vendre, pour réaliser un bénéfice maximum ? Préciser la valeur de ce bénéfice.

30 On note $f(x)$ la population (en milliers) d'une ville fondée en 1960, où x désigne la durée écoulée depuis le début de l'année 1960, exprimée en années.

On donne $f(x) = \frac{60x + 40}{x + 10}$ où $x \in [0 ; +\infty[$.

1) Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{x + 10}$ pour $x \in [0 ; +\infty[$.
2) a- Calculer la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$.
b- Justifier que la population est croissante.
3) a- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 52$.
b- En déduire à partir de quelle année la population de cette ville sera supérieur à 52.000 habitants.
4) a- Quelle set la limite de f en $+\infty$?
b- En déduire une interprétation quant à la population de cette ville ;
5) Tracer la courbe (Cf) de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
Echelle : 1 cm → 10 ans sur l'axe des abscisses
1 cm → 10.000 habitants sur l'axe des ordonnées.

31 Une entreprise produit d'un certain nombre x de crayons de couleur par jour où : (x exprimé en millier).

Lorsque la quantité x est comprise entre 3 et 10, on admet que le coût de production journalier, exprimé en euro est donné par : $C(x) = x^3 - 48x + 600$

L'entreprise vend chaque millier de crayons à 99 euros.

Scanned by CamScanner

1) En supposant que toute la production du jour est vendue, déterminer la recette journalière en fonction de x que l'on notera $R(x)$.

2) Montrer que la bénéfice $B(x)$, exprimé en euro, est donnée par :
$B(x) = -x^3 + 147x - 600$ avec $x \in [3\ ;10]$.

3) Calculer $B'(x)$ où B'désigne la fonction dérivée de B.

4) Etudier le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[3\ ;10]$.
Dresser le tableau de variation de la fonction B.

5) En déduire le nombre de milliers de crayons à produire quotidiennement pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est alors ce bénéfice maximal ?

6) a- Montrer qu'il existe $\alpha \in]3\ ;\ 7[$ et $\beta \in]7\ ;\ 10[$ tel que $B(\alpha) = B(\beta) = 0$.

b- Calculer $B(4)$; $B(8)$; $B(5)$; $B(9)$ puis en déduire les valeurs entières minimale et maximale à l'extérieur des quelles $B(x) < 0$.

7) Quelles sont les productions qui assurent à l'entreprise un bénéfice positif ?

32 Dans le Périgord, un producteur de truffes noires cultive, ramasse et conditionne de 1 à 45kg de truffes par semaine durant la période de production de la truffe. Chaque kilo de truffes est vendu 950 FCFA.

On désigne par $f(x)$ le coût moyen, en euro par kg, pour x kg de truffes traités en une semaine.

On estime que la fonction f est définie sur $[1\ ;45]$ par : $f(x) = x^2 - 60x + 1250$.

1) Justifier que le coût de production total $C(x)$ pour x kg de truffes est donné, en FCFA, par : $C(x) = x^3 - 60x^2 + 1250x$..

2) Exprimer le bénéfice $B(x)$, en euro, réaliser par ce producteur pour x kg de truffes conditionnés et vendus.

3) a) Calculer $B'(x)$ et en déduire le tableau de variations de B sur $[1\ ;45]$.

b) Pour quelles quantité de truffes de bénéfice du producteur est-il maximal ? Arrondir le résultat à 100g près. Quel est alors ce bénéfice maximal, à 100 FCFA près ?

33 Une entreprise fabrique entre 1000 et 4000 chats en porcelaine par mois. Ils sont tous identiques. On estime que le coût total de fabrication de x milliers de bibelots, en millier d'euros, est, pour $1 \leq x \leq 4$; $C(x) = 2x - \sqrt{x}$

1) Montrer que, pour tout réel x de $[1\ ;4]$, on a : $C'(x) = \frac{4\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}$

2) a- Résoudre l'inéquation $4\sqrt{x} - 1 \geq 0$

b- En déduire le sens de variation du coût total C sur l'intervalle$[1\ ;4]$.

Scanned by CamScanner

34 Le coût total de fabrication exprimé en FCFA de x objets est donné par la fonction :

$C_T(x) = 200 + 100x - 0{,}01x^2$.

1) a- Calculer le coût total pour 1000 objets puis 1001 objets.

b- En déduire l'augmentation du coût entrainé par la fabrication de cet objet supplémentaire au centième près.

2) a- Exprimer en fonction de x la différence entre $C_T(x+1) - C_T(x)$ représentant l'augmentation du coût total de fabrication d'un objet supplémentaire, sachant que l'on a fabriqué x objets.

b- Calculer la dérivée $C'_T(x)$ de fabrication $C_T(x)$.

3) On pose $C_m(x) = C'_T(x)$

Calculer l'erreur commise $E(x)$ tel que $E(x) = C'_T(x) - C_m(x)$.

4) Le prix unitaire d'un objet est estimé à 200.

a- Exprimé la recette $R(x)$ en fonction de x.

b- Etudier les variations du bénéfice $B(x)$.

35 La société EDM désire mesurer la satisfaction journalière d'un client à partir d'une « fonction de satisfaction » f, définie sur l'intervalle$[1 ; 30]$ par $f(t) = 0{,}02t^3 - 1{,}4t^2 + 22t + 640$ où t désigne la durée en jour de consommation.

On appelle f' la dérivée de la fonction f comme la fonction « envie ».

On dit qu'il y a « envie » lorsque f'est positive. Sinon on dit qu'il y a « rejet ».

1) Quelle est la consommation du client en kilowatt du 1er juin au 21 juin.

2) Déterminer les intervalles d'envie ; de rejet.

3) On désigne par $S = \int_{10}^{15} f(t)dt$, l'aire de la zone éclairée par la lumière quant il fait nuit.

Déterminer cette aire en cm^2 et en m^2.

Fonctions circulaires.

36 Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \frac{Sin3x}{Cos^3x}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Montrer que l'ensemble de définition Df peut se réduit
2) Etudier la parité et la périodicité de f puis en déduire un intervalle d'étude D_E.
3) Montrer que $\forall x \in Df, f'(x) = \frac{3Cos2x}{Cos^4x}$ puis dresser le tableau de variation de f.
4) En déduire le tracé de (Cf) sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ par symétrie.

Scanned by CamScanner

37 Soit la fonction f définie sur $[-\pi\ ;\ \pi]$ par $f(x) = \frac{1 + Cos3x}{Cos^3x}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition Df.
2) Etudier la parité et la périodicité de f puis en déduire un intervalle d'étude D_E.
3) Montrer que $\forall\, x \in Df, f'(x) = \frac{3(1-2Cosx)Sinx}{Cos^4x}$
4) Etudier le signe de $(1 - 2cosx)$ sur D_E puis en déduire les variations de f sur D_E.
5) Déterminer les coordonnées des points d'intersections de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.
6) En déduire le tracé de (Cf) sur $[-\pi\ ;\ \pi]$ par symétrie.

38 On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = Sin2xCosx$.

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.

1) a- Prouver que la verticale $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe Cf et étudier la parité de f.

   b- Justifier que l'on peut étudier f sur $D_E = \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ puis décrire les étapes à suivre pour avoir la courbe Cf sur $\mathbb{R}$.

2) a- Déterminer $f'(x)$ et justifier que $f'(x) = 2cosx(3cos^2x - 2)$ pour tout $x \in D_E$

   b- Etablir le tableau de variation de f sur D_E

3) Tracer $(C\,f)$ sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ puis sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ par symétrie.

Fonctions paramétriques.

39 Soit f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = (2m - 1)\,x^4 - (m + 4)\,x^2 - m + 5$.
Où x est la variable et m est un paramètre réel.
Soit (C_m) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.

1) Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.
2) Etudier la fonction f_0 puis représenter sa courbe (C_0) dans le repère orthonormé.

40 Soit f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = \frac{x^2 + 3x + 4m}{x^2 + (5m + 1)x + 3}$.

Où x est la variable et m est un paramètre réel.
Soit (C_m) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.

1) Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par trois points fixes dont on déterminera les coordonnées.

Scanned by CamScanner

2) Déterminer m pour que le point d'intersection I de (C_m) et l'asymptote parallèle à $(x'ox)$ ait pour abscisse $\frac{3}{2}$.
3) Etudier les fonctions f_0 et f_1 puis représenter leur courbe respectives courbe (C_0) et (C_1).

41 Soit f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = \frac{x^2 - mx}{x^2 - 1}$.

Où x est la variable et m est un paramètre réel différent de 1.
Soit (C_m) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Donner le tableau de variation de la fonction f_m suivant les valeurs de m.
(On distinguera les cas où $m = -2$; $m = 2$).
2) Comparer $f_m(x)$ et $f_{-m}(-x)$ puis donner la position relative des courbes (C_m) et (C_{-m}).

3) Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par un même point fixe dont on déterminera les coordonnées..

4) Représenter leur courbe respectives (C_{-2}) et (C_2).

Fonctions auxiliaires.

42 **Partie A :** On considère le polynôme P définie : $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1) Donner le tableau de variation de P.
2) Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ a une solution unique α dans l'intervalle$]1{,}6 \ ; \ 1{,}7[$.
3) Donner le signe de $P(x)$ dans l'intervalle$]-1 \ ; +\infty[$.

Partie B : On considère la fonction $f :]-1 \ ; +\infty[\to \mathbb{R}$ et $x \to \frac{1-x}{1+x^3}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) a) Justifier la dérivabilité de f sur $]-1 \ ; +\infty[$.
b) Calculer $f'(x)$ puis établir que $f'(x) = \frac{P(x)}{(1+x^3)^2}$

2) Donner le tableau de variation de f.

3) Déterminer les équations des asymptotes à la courbe Cf de f.

4) Placer α puis tracer Cf.

5) Soit g la restriction de f à l'intervalle$[2 \ ; +\infty[$.

Montrer que g réalise une bijection de $[2 \ ; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

6) Tracer Cg^{-1} où g^{-1} est la bijection réciproque de la fonction g restriction de f à l'intervalle $[2 \ ; +\infty[$.

43 **Partie A :** On donne la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

Scanned by CamScanner

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $2{,}19 < \alpha < 2{,}20$
3) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

Partie B : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\ ;\ 1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.

1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition Df.
2) Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R} - \{-1\ ;\ 1\}$, on a : $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$
3) Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f puis son tableau de variation de la fonction f.
4) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe Cf. Etudier la position de Cf et (D).
5) Tracer Cf.

Fonction irrationnelle –fonction avec valeur absolue.

44 Soit la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.

1) Donner l'ensemble de définition Df de f.
2) Etudier les variations de f, puis tracer avec soins sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On donne : $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}6$ et $f\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -0{,}3$

45 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 8}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.

1) a) Démontrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $x - \sqrt{x^2 + 8} < 0$
   b) Etudier les limites de f aux bornes de Df. En déduire que la courbe (C) de f admet une asymptote horizontale dont on précisera une équation.

   c) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -2x$ est asymptote à (C) en $-\infty$

2) a) Calculer $f'(x)$. Puis en déduire de 1) a) le sens et le tableau de variation de f.
   b) Tracer (C) et (D) dans un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm)

46 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{|x^2 + x| + 1}{|x| + 1}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.

1) Déterminer le domaine de définition de f et écrire $f(x)$ sans les symboles "valeur absolue"
2) Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 0, puis interpréter géométriquement les résultats
3) Etudier les variations de f
4) Montrer que les droites d'équations $y = -x - 2$ et $y = x$ sont asymptotes à la courbe (C) et f

Scanned by CamScanner

5) Tracer (C)

47 Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Déterminer l'ensemble de définition de f
2) Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue
3) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = -1$ et en $x_0 = 3$ puis interpréter graphiquement vos résultats.
4) Montrer que la courbe (C) de f admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $-\infty$ et une asymptote oblique (D) au voisinage de $+\infty$.
5) Dresser son tableau de variation
6) Tracer dans un repère orthonormé la courbe (C) de f.

48 Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|\sqrt{\frac{x}{x-1}}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Déterminer l'ensemble de définition Df de f
2) a) Etudier la dérivabilité de f au point $x_0 = 0$, en déduire l'ensemble de dérivabilité de f.
   b) Calculer $f'(x)$ pour x élément des intervalles de dérivabilité.

   c) Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de Df et préciser les équations des asymptotes à la courbe (C) de f.

   d) Dresser le tableau de variation de f.

3) Tracer la courbe (C) de f.

49 On considère, dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$), le cercle (Γ) de centre O et de rayon 1.

Soit A le point de coordonnées (1 ; 0) et A' le point de coordonnées (−1 ; 0) .

1) Pour tout point H du segment[AA'], distinct de A et A', on mène la perpendiculaire (Δ) à la droite (AA'). La droite (Δ) coupe le cercle (Γ) en M et M'.
   On pose $\overline{OH} = x$. Calculer en fonction de x l'aire du triangle AMM'.
2) Soit f la fonction définie sur]−1 ; 1 [par $f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$.
   a- Etudier les variations de f.
   b- Montrer que le triangle AMM' d'aire maximale est équilatéral.

Mr DEMBELE
Le Profes
Cha
du Co
Reproduc

Problèmes

50 La fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est donnée par une partie de son tableau de variation.

On sait de plus que la droite d'équation $x = 2$ est axe de symétrie pour la courbe C de f.

Scanned by CamScanner

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$			0	$-$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\searrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\searrow$	3

1) Tracer la courbe C de f
2) Compléter le tableau de variation de f
3) On suppose que $f(x)$ est de la forme $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 + \beta x + \alpha}$

a- Déterminer les réels a ; b ; c ; β et α

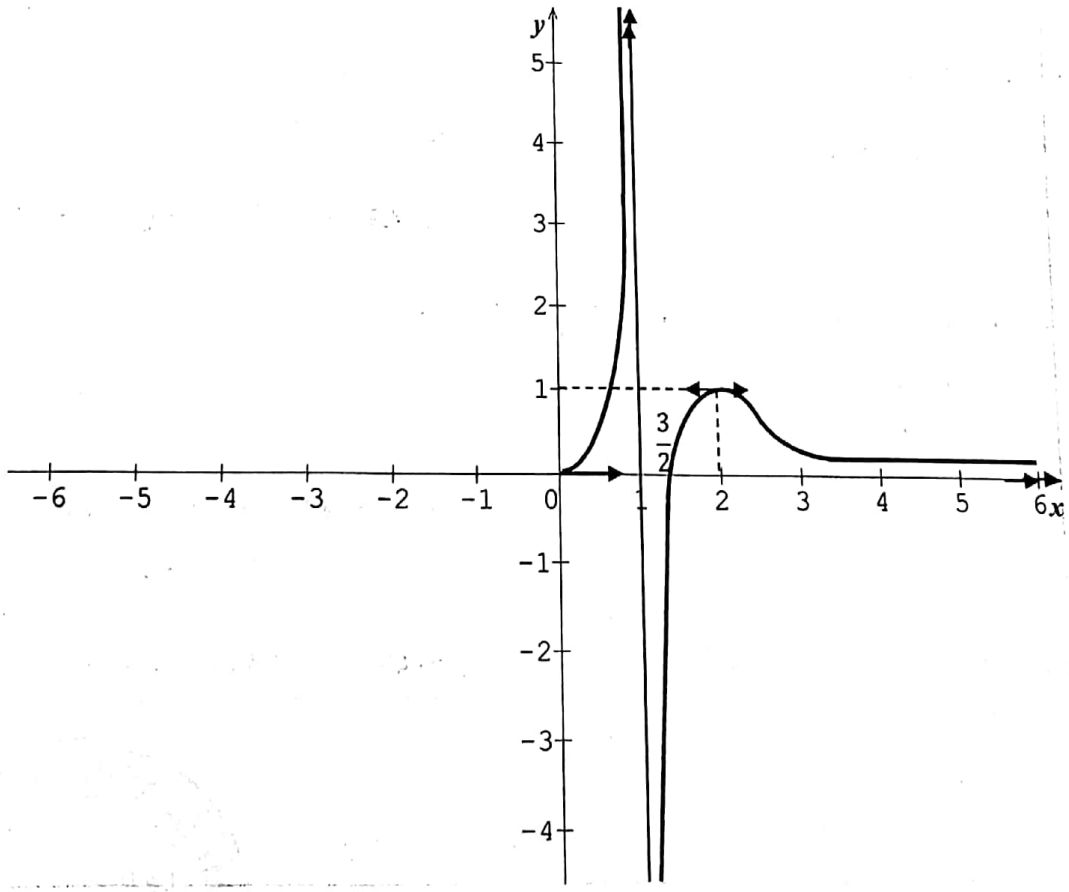
b- Montrer que la restriction g de f à I =] 2 ; 4] réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

c- Donner l'équation de la tangente à la courbe C' de g^{-1} au point d'abscisse 1

d- Tracer C'

e- Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre m, du nombre et des signes des solutions de $l'équation\ (3-m)x^2 - (12-4m)x + 8 = 0$

51 On donne la figure ci-dessous qui représente une partie de la courbe d'une fonction g.



1) Compléter la courbe de la fonction g sachant que g est impaire.

2) Donner les équations des asymptotes à (Cg)
3) Quel est le domaine de définition de g sous forme de réunion d'intervalles
Donner les limites de g aux bornes de Dg.

Scanned by CamScanner

4) Dresser le tableau de variation de g.

52 Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x+d}$ où a ; b ; c et d sont des réels et (Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$

1) Trouver les réels a ; b ; c et d sachant que la droite d'équation $x = 3$ est asymptote et (Cf) passe par les points A(2 ; 3) , B(4 ; 7) et admet au point d'abscisse 2 une tangente horizontale.

2) Dans la suite du problème on prendra $a = 1 ; b = -1 ; c = -5$ et $d = -3$

a- Etudier la fonction f

b- Etudier la position de (Cf) par rapport à son asymptote oblique

c- Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $[\,4\,;+\infty[$ réalise une bijection de $[\,4\,;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3) Montrer que (Cf) admet un centre de symétrie que l'on déterminera

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β

5) a- Montrer que $\forall x \in [4\,;5]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

b- En déduire que $\left|f(x) - \frac{15}{2}\right| \leq \frac{3}{4}|x-5|$

6) Tracer (Cf) dans le repère $(o;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ ainsi que (Cg^{-1}) la courbe de g^{-1}

53 **Partie A** : Soit f la fonction numérique définie sur $Df =]\,1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

1) Montrer que la dérivée de f garde un signe constant sur Df.
2) Etudier les variations de f (limite et sens de variation)
3) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]\,1\,;\,2[$

Partie B: On se propose de résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans $]\,1\,;\,2[$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$, a même ensemble de solution que l'équation $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$.
2) On appelle g la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty[$ par : $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ soit α la solution de l'équation $f(x) = 0$ (On a donc $g(\alpha) = \alpha$ et $1 \leq \alpha \leq 2$)
   a) Montrer que si x est élément de $]\,1\,;\,2[$ alors $g(x)$ est aussi élément de $]\,1\,;\,2[$.
   b) Justifier la dérivabilité de g sur $[\,0\,;+\infty[$Calculer la dérivée de g puis montrer que pour tout x $[1\,;\,2]\in$ on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$
   c) En déduire que pour tout x de $[1\,;\,2]$, on a : $|g(x) - \alpha\,| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

54 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x+1}$ et (C) sa courbe.

1) a- Démontrer que la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty[$est au dessus de sa tangente en tout point.

Scanned by CamScanner

b- En déduire que $\forall\, \alpha \in [\,0\,;\,+\infty[$, on a : $\frac{1}{\alpha+1} \geq 1-\alpha$ (1).

2) Soit la fonction g définie sur $[\,0\,;\,+\infty[$, par $g(x)=\sqrt{x+1}$ et soit k un réel strictement positif.

a- Déterminer la dérivée première et seconde de g sur $[\,0\,;\,+\infty[$

b- Vérifier que : $\forall\, x \in [\,0\,;\,k[$ on a : $\frac{1}{2\sqrt{1+k}} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$

c- En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis à la fonction g sur l'intervalle $[\,0\,;k\,]$, démontrer que : $1+\frac{k}{2\sqrt{1+k}} \leq \sqrt{1+k} \leq 1+\frac{k}{2}$ (2)

d- Déduisez des relations (1) et (2) que : $\forall\, \alpha \in [\,0\,;\,+\infty[$, on a :
$1+\frac{k}{2}-\frac{k^2}{4} \leq \sqrt{1+k} \leq 1+\frac{k}{2}$

e- Etablir alors l'inégalité suivante : $1{,}0475 \leq \sqrt{1{,}1} \leq 1{,}05$

f- En déduisez une valeur approchée de $\sqrt{1{,}1}$ tout en précisant la marge d'incertitude.

Solutions

Limites en un point x_0

1 Calculons les limites suivantes aux points x_0 donnés :

a- $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^3-8}{-x+2} = \frac{2^3-8}{-2+2} = \frac{8-8}{-2+2} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^3-8}{-x+2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{-(x-2)} = \lim_{x \to 2^+} -(x^2+2x+4) = -12$$

b- $\lim\limits_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{\sqrt{9}-3}{9-9} = \frac{3-3}{9-9} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} \times \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \lim_{x \to 9} \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x \to 9} \frac{(\sqrt{x})^2-(3)^2}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \lim_{x \to 9} \frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x \to 9} \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3+3} = = \frac{1}{6}$$

Scanned by CamScanner

c- $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{2x+5}{x^2-x-2} = \frac{2(2)+5}{(2)^2-(2)-2} = \frac{9}{0^-} = -\infty$

d- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \frac{\sqrt{0+1}-1}{0} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \times \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{(x)(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x^2+1})^2-(1)^2}{(x)(\sqrt{x^2+1}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x^2+1})^2-(1)^2}{(x)(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2+1-1}{(x)(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{(x)(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{0}{2} = 0.$$

e- $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-x-6}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \frac{9-3-6}{\sqrt{3}-\sqrt{3}} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-x-6}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} = \lim_{x \to 3} \frac{(x^2-x-6)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+2)(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{3})^2} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x+2)(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{x-3} = \lim_{x \to 3}(x+2)(\sqrt{x}+\sqrt{3}) = 10\sqrt{3}$$

f- $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x^2-5}{-x^2+3x+4} = \frac{1-5}{-1-3+4} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$

2 Calculons les limites suivantes aux points x_0 donnés :

a- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sin2x}{3x} = \frac{Sin0}{0} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$$\lim_{x \to 0} \frac{Sin2x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{Sin2x}{3x} \times \frac{2}{2} = \lim_{x \to 0} \frac{Sin2x}{2x} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad (\text{car } \lim_{x \to 0} \frac{Sinax}{ax} = 1)$$

b- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{Cos2x}{1-Sinx} = \frac{Cos\pi}{1-Sin\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{0} = \infty$

c- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sin5x}{Sin3x} = \frac{Sin0}{Sin0} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

Scanned by CamScanner

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{5x}{5x}\times Sin5x}{\frac{3x}{3x}\times Sin3x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x\times\frac{sin5x}{5x}}{3x\times\frac{sin3x}{3x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{sin5x}{5x}}{\frac{sin3x}{3x}} \times \frac{5x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{sin5x}{5x}}{\frac{sin3x}{3x}} \times \frac{5}{3} = \frac{1}{1}\times\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

d- $\lim_{x\to\pi} \frac{Sinx}{\pi - x} = \frac{Sin\pi}{\pi-\pi} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

Effectuons un changement de variable en posant $X = x - \pi \Rightarrow x = X + \pi$

Si $x \to \pi$ alors $X \to 0$

Donc $\lim_{x\to\pi} \frac{Sinx}{\pi - x} \Leftrightarrow \lim_{X\to 0} \frac{Sin(X+\pi)}{\pi-(X+\pi)} = \lim_{X\to 0} \frac{Sin(X+\pi)}{\pi - X - \pi} = \lim_{X\to 0} \frac{-Sin(X)}{-X} = \lim_{X\to 0} \frac{SinX}{X} = 1$

(car $Sin(\pi + \alpha) = -Sin\alpha$)

e- $\lim_{x\to 0} \frac{Sin4x}{tangx} = \lim_{x\to 0} \frac{Sin4x}{tangx} = \frac{Sin0}{tang0} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{4x}{4x}\times Sin4x}{\frac{x}{x}\times tangx} = \lim_{x\to 0} \frac{4x\times\frac{sin4x}{4x}}{x\times\frac{tangx}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{sin4x}{4x}}{\frac{tangx}{x}} \times \frac{4x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{sin5x}{5x}}{\frac{sin3x}{3x}} \times 4 = \frac{1}{1}\times 4 = 4$$

Limites à l'infinie

3 Calculons les limites suivantes à l'infinie :

a- $\lim_{x\to-\infty} \frac{-8}{x+1-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-8}{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8}{x^2} = \frac{8}{(-\infty)^2} = \frac{8}{+\infty} = 0$

b- $\lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}-1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{\frac{x}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{\frac{1}{x}} = 2\sqrt{\frac{1}{+\infty}} = 2\sqrt{0} = 0$

c- $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+2}{5x^2-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{5x^2} = \frac{2}{5}$

d- $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x} = -1$

e- $\lim_{x\to+\infty} \frac{4x+3}{\sqrt{4x^2+x-5}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{\sqrt{4x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{|2x|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{2x} = 2$

Scanned by CamScanner

f- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{(1)^2-(\sqrt{x})^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{1-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{-x} = \frac{1}{+\infty} = 0.$

g- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x-|x|}{2x-2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x-(-x)}{2x-2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x+x}{2x-2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x}{2x-2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x}{2x} = \frac{4}{2} = 2$

h- $\lim\limits_{x \to +\infty} 1-x+\sqrt{x^2+x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} -x+\sqrt{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} -x+|x| = \lim\limits_{x \to +\infty} -x+x$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} 1-x+\sqrt{x^2+x+1} = -\infty+\infty =$ (Forme indéterminée)

Levons l'indétermination:

$$\lim_{x \to +\infty} 1-x+\sqrt{x^2+x+1} = \lim_{x \to +\infty} \left(1-x+\sqrt{x^2+x+1}\right) \times \frac{1-x-\sqrt{x^2+x+1}}{1-x-\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(1-x+\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(1-x-\sqrt{x^2+x+1}\right)}{1-x-\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(1-x)^2-\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}{1-x-\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(1-x)^2-\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}{1-x-\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2-2x+1)-(x^2+x+1)}{1-x-\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-2x+1-x^2-x-1}{1-x-\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x}{1-x-\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x}{-x-\sqrt{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x}{-x-|x|} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x}{-x-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x}{-2x} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

i- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2+Sinx}{x+1}$ (*théorème des gendarmes*)

On sait que : $-1 \leq Sinx \leq 1$

En ajoutons 2 à chaque membre de l'inégalité, on a :

$1 \leq 2+Sinx \leq 3$

En divisant chaque membre de l'inégalité par $x+1$, on a :

Scanned by CamScanner

$\frac{1}{x+1} \leq \frac{2+\sin x}{x+1} \leq \frac{3}{x+1}$

En appliquant la limite à chaque membre de l'inégalité, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} \leq \lim_{x \to +\infty} \frac{2+\sin x}{x+1} \leq \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x+1}$$

Or $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x+1} = 0 \end{cases}$ Alors d'après le théorème des Gendarmes, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2+\sin x}{x+1} = 0$

Limites et asymptotes

4 Calculons les limites aux bornes de l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci-dessous (on donnera ci-possible les éventuelles asymptotes ou possibilité d'asymptotes)

a- $f(x) = \frac{x^2+5}{-x+2}$ => $D_f = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+5}{-x+2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+5}{-x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \to +\infty} -x = -\infty$$

Après division euclidienne de $\frac{x^2+5}{-x+2}$, on obtient $f(x) = -x - 2 + \frac{9}{-x+2}$

Alors la droite d'équation $y = -x - 2$ est asymptote oblique

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{(2)^2+5}{-(2)+2} = \frac{9}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{(2)^2+5}{-(2)+2} = \frac{9}{0^-} = -\infty$$

Alors la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale

b- $f(x) = \frac{-x^2+5}{x^2+5x-6}$ => $D_f = \mathbb{R} - \{-6 ; 1\} =]-\infty ; -6[\cup]-6 ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2+5}{x^2+5x-6} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2+5}{x^2+5x-6} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

Alors la droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale

Scanned by CamScanner

$\lim_{\substack{x \to -6^- \\ x \to -6^+}} f(x) = \frac{-(-6)^2 + 5}{(-6)^2 + 5(-6) - 6} = \frac{-31}{0^+} = -\infty$

$\lim_{\substack{x \to -6^- \\ x \to -6^+}} f(x) = \frac{-(-6)^2 + 5}{(-6)^2 + 5(-6) - 6} = \frac{-31}{0^-} = +\infty$

Alors la droite d'équation $x = -6$ est asymptote verticale

$\lim_{\substack{x \to 1^- \\ x \to 1^+}} f(x) = \frac{-(1)^2 + 5}{(1)^2 + 5(1) - 6} = \frac{4}{0^-} = -\infty$

$\lim_{\substack{x \to 1^- \\ x \to 1^+}} f(x) = \frac{-(1)^2 + 5}{(1)^2 + 5(1) - 6} = \frac{4}{0^+} = +\infty$

Alors la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale

5 Soit la fonction f dénie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$.

On note (Cf) sa courbe dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Etudions les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ puis en déduisons si la courbe (Cf) admet une asymptote horizontale

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2} - x = \lim_{x \to -\infty} |x| - x = \lim_{x \to -\infty} -x - x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -2x = -2(-\infty) = +\infty$$

Alors la courbe (Cf) n'admet pas une asymptote horizontale en $-\infty$, mais on a une possibilité d'asymptote oblique $-\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2} - x = \lim_{x \to +\infty} |x| - x = \lim_{x \to +\infty} x - x$$

$= +\infty - \infty$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$$\lim_{x \to +\infty} -x + \sqrt{x^2 + x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \left(-x + \sqrt{x^2 + x + 1}\right) \times \frac{-x - \sqrt{x^2+x+1}}{-x - \sqrt{x^2+x+1}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(-x + \sqrt{x^2+x+1}\right)\left(-x - \sqrt{x^2+x+1}\right)}{-x - \sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(-x)^2 - \left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}{-x - \sqrt{x^2+x+1}}$$

Scanned by CamScanner

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(-x)^2 - \left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}{-x-\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-(x^2+x+1)}{-x-\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-x^2-x-1}{-x-\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x-1}{-x-\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x-1}{-x-\sqrt{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x-1}{-x-|x|} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x-1}{-x-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{-2x} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Alors la courbe (Cf) admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = \frac{1}{2}$

2) Démontrons que la droite (Δ) d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à (Cf) en $-\infty$.

La droite (Δ) d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à (Cf) en $-\infty$ si et seulement si :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - y = \lim_{x \to -\infty} \left[\left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right) - \left(-2x - \frac{1}{2}\right)\right] = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x + 2x + \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+1} + x + \frac{1}{2} = \lim_{x \to -\infty} \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right) \times \frac{x+\frac{1}{2}-\sqrt{x^2+x+1}}{x+\frac{1}{2}-\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\sqrt{x^2+x+1}\right)}{x+\frac{1}{2}-\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}{x+\frac{1}{2}-\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+x+\frac{1}{4}-\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}{x+\frac{1}{2}-\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+x+\frac{1}{4}-(x^2+x+1)}{x+\frac{1}{2}-\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+x+\frac{1}{4}-x^2-x-1}{x+\frac{1}{2}-\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\frac{3}{4}}{x+\frac{1}{2}-\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\frac{3}{4}}{x+\frac{1}{2}-|x|} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\frac{3}{4}}{x+\frac{1}{2}+x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-\frac{3}{4}}{2x+\frac{1}{2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{3}{4}}{2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\frac{3}{4}}{2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-3}{8x} = \frac{-3}{8(-\infty)} = \frac{-3}{-\infty} = 0$$

Scanned by CamScanner

D'où la droite (Δ) d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à (Cf) en $-\infty$

Continuités

Continuité en un point x_0

6 Etudions la continuité des fonctions suivantes aux points x_0 donnés :

a- $\begin{cases} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2+x-6} \\ f(2) = 0 \end{cases}$ et $x_0 = 2$

f est continue en $x_0 = 2$ si et seulement si :

$lim\ f(x) = f(2) = 0$

$x \to 2$

$lim\ f(x) = lim \frac{(x-2)^2}{x^2+x-6} = lim \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+3)} = lim \frac{x-2}{x+3} = \frac{2-2}{2+3} = \frac{0}{5} = 0$

$x \to 2 \qquad x \to 2 \qquad x \to 2 \qquad x \to 2$

Puis que $lim\ f(x) = f(2) = 0$. Alors f est continue en $x_0 = 2$

$x \to 2$

b- $\begin{cases} f(x) = \frac{|x-1|+2}{x+3} \\ f(1) = 5 \end{cases}$; $x_0 = 1$

Ecrivons f sans le symbole de la valeur absolue :

Posons $x - 1 = 0 => x = 1$

Puis étudions le signe de tableau de si $x - 1$ dans un tableau.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$
$\|x-1\|$	$-x+1$		$x-1$

$$=> \begin{cases} f(x) = \frac{(-x+1)+2}{x+3} & si\ x \in]-\infty\ ;\ 1] \\ f(x) = \frac{(x-1)+2}{x+3} & si\ x \in]1\ ;\ +\infty[\end{cases}$$

$$=> \begin{cases} f(x) = \frac{-x+3}{x+3} & si\ x \in]-\infty\ ;\ 1] \\ f(x) = \frac{x+1}{x+3} & si\ x \in]1\ ;\ +\infty[\end{cases}$$

Ainsi étudions la continuité de f à gauche et à droite de $x_0 - 1$

Scanned by CamScanner

f est continue en $x_0 = 1$ si $f(1)$ existe et si $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$

Continuité à gauche :

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{-x+3}{x+3} = \frac{1}{2}$

Continuité à droite :

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x+1}{x+3} = \frac{1}{2}$

Puis que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$

Alors f est continue en $x_0 = 1$.

Continuité et condition de faisabilité

7 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} \text{ si } x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ f(2) = a \end{cases}$$

Déterminons la valeur de a pour que f soit continue en $x_0 = 2$

f est continue en $x_0 = 2$ si $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = a$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} = \frac{3-\sqrt{2\times 2+5}}{2-2} = \frac{3-3}{2-2} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée)

Levons l'indétermination:

$$\lim\limits_{x \to 2} \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} \times \frac{3+\sqrt{2x+5}}{3+\sqrt{2x+5}} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(3-\sqrt{2x+5})(3+\sqrt{2x+5})}{(x-2)(3+\sqrt{2x+5})} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(3)^2 - (\sqrt{2x+5})^2}{(x-2)(3+\sqrt{2x+5})}$$

$$= \lim\limits_{x \to 2} \frac{(3)^2 - (\sqrt{2x+5})^2}{(x-2)(3+\sqrt{2x+5})} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{9-2x-5}{(x-2)(3+\sqrt{2x+5})} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{4-2x}{(x-2)(3+\sqrt{2x+5})}$$

Scanned by CamScanner

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-2(x-2)}{(x-2)(3+\sqrt{2x+5})} = \lim_{x \to 2} \frac{-2}{3+\sqrt{2x+5}} = \frac{-2}{3+\sqrt{2\times 2+5}} = \frac{-2}{3+\sqrt{9}} = \frac{-2}{3+3} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

Alors $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = \frac{-1}{3}$

Or $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = a \Leftrightarrow a = \frac{-1}{3}$. D'où $a = \frac{-1}{3}$

8 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + ax \quad si\ x \in]-\infty\ ;\ -1[\\ f(x) = 2x - 1 \quad si\ x \in]-1\ ;\ 1[\\ f(x) = b(x^2-1) \quad si\ x \in]1\ ;\ +\infty[\end{cases}$$

1) Déterminer le réel a pour que f soit continue au point $x_0 = -1$

f est continue en $x_0 = 2$ si $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to -1^-} x^2 + ax = \lim_{x \to -1^+} 2x - 1$

$\Leftrightarrow (-1)^2 + a(-1) = 2(-1) - 1 \Leftrightarrow 1 - a = -2 - 1 \Leftrightarrow 1 - a = -3 \Rightarrow a = 4$

1) Vérifions si l'on peut déterminer la valeur de b pour que f soit continue au point $x_0 = 1$.

f est continue en $x_0 = 1$ si $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to 1^-} 2x - 1 = \lim_{x \to 1^+} b(x^2-1)$

$\Leftrightarrow +2 - 1 = b(1-1) \Leftrightarrow 1 = 0$ absurde

Alors impossible de déterminer la valeur de b pour que f soit continue au point $x_0 = 1$.

Prolongement par continuité

9 Dans chacun des cas suivants, précisons l'ensemble de définition de la fonction f et déterminons (s'il existe) le prolongement par continuité de cette fonction en x_0.

a) $\begin{cases} f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ x_0 = 0 \end{cases}$

- Ensemble de definition:

$Df = \{x / x \in x \geq 0\ et\ x \neq 0\} \Rightarrow Df =]0\ ;\ +\infty[$

- Prolongement par continuité:

Scanned by CamScanner

$x_0 = 0 \notin]0\,;\,+\infty[$. Alors f peut être prolongée par continuité au point $x_0 = 0$

$\lim f(x) = \lim \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$x \to 0 \quad x \to 0$

$\lim \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim \frac{(\sqrt{x}-1)\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim (\sqrt{x}-1) = -1 \in \mathbb{R}$

$x \to 0 \quad x \to 0 \quad x \to 0$

Alors f est peut être prolongée par continuité au point $x_0 = 0$.

Soit g le Prolongement par continuité de f en $x_0 = 0$ tel que:

$\begin{cases} g(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \; si \; x \in]0\,;\,+\infty[\\ g(0) = -1 \quad si \; x = 0 \end{cases}$ ou $g(x) = \sqrt{x} - 1$

b) $\begin{cases} f(x) = \frac{tgx}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$

- Ensemble de definition:

$Df = \{x / \; x \in cosx \neq 0 \; et \; x \neq 0\}$

$cosx \neq 0 \Leftrightarrow cosx \neq cos\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ ou \\ x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$ et $x \neq 0 \Rightarrow$

$Df = \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,;\, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \,;\, 0\right\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

- Prolongement par continuité:

$x_0 = 0 \notin \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,;\, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \,;\, 0\right\}$. Alors f peut être prolongée par continuité au point $x_0 = 0$

$\lim f(x) = \frac{tgx}{x} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$x \to 0 \quad x \to 0$

$\lim \frac{tgx}{x} = lim \frac{\frac{sinx}{cox}}{x} = \lim \frac{sinx}{cox} \times \frac{1}{x} = \lim \frac{sinx}{x} \times \frac{1}{cox} = 1$ (car $\lim \frac{sinx}{x} = 1$ et $\lim \frac{1}{cosx} = 1$)

$x \to 0 \quad x \to 0 \quad x \to 0 \quad x \to 0 \quad x \to 0 \quad x \to 0$

Alors f est peut être prolongée par continuité au point $x_0 = 0$.

Soit g le Prolongement par continuité de f en $x_0 = 0$ tel que:

Scanned by CamScanner

$$\begin{cases} g(x) = \frac{tgx}{x} si\ x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; 0\right\} \\ g(0) = 1 \quad si\ x = 0 \end{cases}$$

10 Soient f et g deux fonctions définies respectivements par :

$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$

a- Déterminons les ensembles de définitions Df et Dg respectivement des fonctions f et g.

D$f = \{x / x \in x+1 \geq 0\ et\ x \neq 0\}$ => D$f = [-1 ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

D$g = \{x / x \in x+1 \geq 0\ et\ 1+\sqrt{x+1} \neq 0\}$ => D$f = [-1 ; +\infty[$

b- Vérifions que la fonction g est le prolongement par continuité de la fonction f en $x_0 = 0$.

$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (1)^2}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}$ =>

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = g(x)$

Alors g est le prolongement par continuité au point $x_0 = 0$ de la fonction f.

11 On considère la fonction g de la variable réelle x définie par $g(x) = \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}$

1) Déterminons son ensemble de définition Dg.

D$g = \{x / x \in 2x \geq 0\ \ et\ \ x-2 \neq 0\}$ => => D$g = [0 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

2) Montrons que g admet en 2 un prolongement par continuité que l'on notera par h.

$x_0 = 2 \notin [0 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$. Alors g peut être prolongée par continuité au point $x_0 = 2$

$lim\ g(x) = lim\ \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$x \to 2$ $\quad$ $x \to 2$

$lim \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2} = lim \frac{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{2x}+2)}{(x-2)(\sqrt{2x}+2)} = lim \frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{2x}+2)} = lim \frac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}$

$x \to 2$ $\quad$ $x \to 2$ $\quad$ $x \to 2$ $\quad$ $x \to 2$

$= lim \frac{2}{\sqrt{2x}+2} = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$

$x \to 2$

Alors g est peut être prolongée par continuité au point $x_0 = 2$.

Soit h le Prolongement par continuité de g en $x_0 = 2$ tel que:

Scanned by CamScanner

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{\sqrt{2x}-2}{x-2} & si\ x \in [0;2[\cup]2;+\infty[\\ h(2) = \dfrac{1}{2} & si\ x = 2 \end{cases}$$

2) Montrons que h est dérivable en 2 puis donnons l'équation de la tangente à la courbe(C) de h au point d'abscisse 2.

- **Dérivabilité au point $x_0 = 2$**

h est dérivable en 2 si et seulement si : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{h(x)-h(2)}{x-2} = h'(2) = l \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{h(x)-h(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\left(\frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{2(\sqrt{2x}-2)-(x-2)}{2(x-2)}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{2(\sqrt{2x}-2)-(x-2)}{2(x-2)^2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2\sqrt{2x}-4-x+2}{2(x-2)^2} = \lim_{x \to 2} \frac{2\sqrt{2x}-x-2}{2(x-2)^2} = \lim_{x \to 2} \frac{2\sqrt{2x}-(x+2)}{2(x-2)^2} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{h(x)-h(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{[2\sqrt{2x}-(x+2)][2\sqrt{2x}+(x+2)]}{2(x-2)^2[2\sqrt{2x}+(x+2)]} = \lim_{x \to 2} \frac{(2\sqrt{2x})^2-(x+2)^2}{2(x-2)^2[2\sqrt{2x}+(x+2)]}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{8x-(x^2+4x+4)}{2(x-2)^2[2\sqrt{2x}+(x+2)]} = \lim_{x \to 2} \frac{8x-x^2-4x-4}{2(x-2)^2[2\sqrt{2x}+(x+2)]} = \lim_{x \to 2} \frac{-x^2+4x-4}{2(x-2)^2[2\sqrt{2x}+(x+2)]}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-(x^2-4x+4)}{2(x-2)^2[2\sqrt{2x}+(x+2)]} = \lim_{x \to 2} \frac{-(x-2)^2}{2(x-2)^2[2\sqrt{2x}+(x+2)]} = \lim_{x \to 2} \frac{-1}{2[2\sqrt{2x}+(x+2)]}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-1}{2[2\sqrt{2x}+(x+2)]} = \frac{-1}{2[2\sqrt{4}+(4)]} = \frac{-1}{16}$$

D'où h est dérivable en 2 et son nombre dérivé est : $h'(2) = \dfrac{-1}{16}$

- **Equation de la tangente au point $x_0 = 2$**

L'équation de la tangente au point $x_0 = 2$ est donnée par la formule :

$y = h'(2)(x-2) + h(2)$ avec $h'(2) = \dfrac{-1}{16}$ et $h(2) = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow y = \frac{-1}{16}(x-2) + \frac{1}{2} = \frac{-1}{16}x + \frac{-2}{16} + \frac{1}{2} = \frac{-1}{16}x + \frac{3}{8} \Rightarrow y = \frac{-1}{16}x + \frac{3}{8}$$

Scanned by CamScanner

Dérivabilité en un point x_0

12 Etudions la dérivabilité des fonctions suivantes aux points x_0 donnés :

a) $\begin{cases} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2+x-6} \\ f(2) = 0 \end{cases}$ et $x_0 = 2$

f est dérivable en 2 si et seulement si : $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = l \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\left[\frac{(x-2)^2}{x^2+x-6}\right]-0}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\left[\frac{(x-2)^2}{(x+3)(x-2)}\right]}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2}{(x+3)(x-2)^2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{(x+3)} = \frac{1}{5} \in \mathbb{R}$$

D'où f est dérivable en 2 et son nombre dérivé est : $f'(2) = \frac{1}{5}$

b) $\begin{cases} f(x) = \frac{|x-1|+2}{x+3} & x_0 = 1 \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Ecrivons f sans le symbole de la valeur absolue :

Posons $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Puis étudions le signe de tableau de si $x - 1$ dans un tableau.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$
$\lvert x-1 \rvert$	$-x+1$		$x-1$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{(-x+1)+2}{x+3} & si\ x \in]-\infty\ ;\ 1] \\ f(x) = \frac{(x-1)+2}{x+3} & si\ x \in]1\ ;\ +\infty[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{-x+3}{x+3} & si\ x \in]-\infty\ ;\ 1] \\ f(x) = \frac{x+1}{x+3} & si\ x \in]1\ ;\ +\infty[\end{cases}$$

Etude de la dérivabilité de f

Scanned by CamScanner

f est dérivable en $x_0 = 1$ si sa dérivabilité à gauche est égale à sa dérivabilité à droite, c'est-à-dire : $\lim \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = l \in \mathbb{R}$

$x \to 1^-$ $\quad$ $x \to 1^+$

Dérivabilité à gauche :

$$\lim \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim \frac{\left(\frac{-x+3}{x+3}\right)-\frac{1}{2}}{x-1} = \lim \frac{\left[\frac{2(-x+3)-(x+3)}{2(x+3)}\right]}{x-1} = \lim \frac{-2x+6-x-3}{2(x+3)(x-1)}$$

$x \to 1^-$ $\quad$ $x \to 1^-$ $\quad$ $x \to 1^-$ $\quad$ $x \to 1^-$

$$= \lim \frac{-3x+3}{2(x+3)(x-1)} = \lim \frac{-3(x-1)}{2(x+3)(x-1)} = \lim \frac{-3}{2(x+3)} = \frac{-3}{2(1+3)} = \frac{-3}{8} \in \mathbb{R}$$

$x \to 1^-$ $\quad$ $x \to 1^-$ $\quad$ $x \to 1^-$

Dérivabilité à droite :

$$\lim \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim \frac{\left(\frac{x+1}{x+3}\right)-\frac{1}{2}}{x-1} = \lim \frac{\left[\frac{2(x+1)-(x+3)}{2(x+3)}\right]}{x-1} = \lim \frac{2x+2-x-3}{2(x+3)(x-1)}$$

$x \to 1^+$ $\quad$ $x \to 1^+$ $\quad$ $x \to 1^+$ $\quad$ $x \to 1^+$

$$= \lim \frac{x-1}{2(x+3)(x-1)} = \lim \frac{1}{2(x+3)} = \frac{1}{2(x+3)} = \frac{1}{8} \in \mathbb{R}$$

$x \to 1^+$ $\quad$ $x \to 1^+$

$$\lim \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$x \to 1^-$ $\quad$ $x \to 1^+$

Alors f n'est pas dérivable à gauche et à droite de $x_0 = 1$, mais elle admet deux demi-tangentes de coefficients directeurs respectives $f'(1) = \frac{-3}{8}$ et $f'(1) = \frac{1}{8}$

Dérivabilité et condition de faisabilité

13 Déterminons les réels a et b pour que f soit continue et dérivable aux points $x_0 = 1$

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 + ax - 3 \; si \; x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2x+b}{x} \; si \; x > 1 \end{cases}$$

- **Continuité** :

f est continue en $x_0 = 1$ si et seulement si : $\lim f(x) = \lim f(x) \Leftrightarrow$

$x \to 1^-$ $\quad$ $x \to 1^+$

Scanned by CamScanner

$\lim\limits_{x \to 1^-} 2x^2 + ax - 3 = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2x+b}{x} \Leftrightarrow a - 1 = 2 + b \Leftrightarrow a - b = 3$ **(1)**

- **Dérivabilité :**

f est dérivable en $x_0 = 1$ si et seulement si : $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{(2x^2+ax-3)-(a-1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\left(\frac{2x+b}{x}\right)-(2+b)}{x-1} \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{(2x^2+ax-3)-(a-1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\left(\frac{2x+b}{x}\right)-(2+b)}{x-1} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{2x^2+ax-3-a+1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{b-bx}{x-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{2x^2-2+ax-a}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{b-bx}{x-1} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{2(x^2-1)+a(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{b-bx}{x-1} \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{2(x-1)(x+1)+a(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{b-bx}{x-1} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{(x-1)[2(x+1)+a]}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{-b(x-1)}{x-1}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} 2(x+1) + a = \lim\limits_{x \to 1^+} -b \Leftrightarrow 4 + a = -b \Leftrightarrow a + b = -4$ **(2)**

Ainsi, formons le système avec les équations **(1)** et **(2)**

$\begin{cases} a - b = 3 & (1) \\ a + b = -4 & (2) \end{cases}$ La résolution de ce système donne : $a = -\frac{1}{2}$ et $b = -\frac{7}{2}$

14 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x(x+1)}{(x+2)^2} & si\ x \geq -1 \\ f(x) = 2x + a & si\ x < -1 \end{cases}$

1) Déterminons la valeur de a pour que la fonction f soit continue au point -1

f est continue en $x_0 = -1$ si et seulement si : $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x(x+1)}{(x+2)^2} = \lim\limits_{x \to -1^+} 2x + a \Leftrightarrow 0 = -2 + a \Leftrightarrow a = 2$

Mr DEMBELE Idrissa ☆ Reproduction Le Professeur Chargé du Cours

2) Pour $a = 2$, étudions la dérivabilité de la fonction f au point -1.

Scanned by CamScanner

f est dérivable en $x_0 = -1$ si et seulement si : $\lim \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$

$x \to -1^-$ $\quad$ $x \to -1^+$

$\lim \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} \Leftrightarrow \lim \frac{\left[\frac{x(x+1)}{(x+2)^2}\right]-(0)}{x+1} = \lim \frac{(2x+2)-(-2+2)}{x+1} \Leftrightarrow$

$x \to -1^-$ $\quad$ $x \to -1^+$ $\quad$ $x \to -1^-$ $\quad$ $x \to -1^+$

$\Leftrightarrow \lim \frac{x(x+1)}{(x+1)(x+2)^2} = \lim \frac{2(x+1)}{x+1} \Leftrightarrow \lim \frac{x}{(x+2)^2} = \lim 2 \Leftrightarrow -1 = 2$ (absurde)

$x \to -1^-$ $\quad$ $x \to -1^+$ $\quad$ $x \to -1^-$ $\quad$ $x \to -1^+$

Alors f n'est pas dérivable en 1.

Application de la dérivée

15 Déterminons une équation de la tangente en $M_0(x_0 ; f(x_0))$ à la courbe (C) de f dans les cas suivants :

L'équation de la tangente à la courbe au (C) de f point x_0 est donnée par la formule suivante :
$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3$ et $x_0 = -2 \Rightarrow y = f'(-2)(x+2) + f(-2) \Rightarrow$

$y = f'(-2)(x+2) + f(-2) \Rightarrow y = -1(x+2) + 13 \Rightarrow y = -x + 11$

b) $f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$ et $x_0 = 1 \Rightarrow y = f'(1)(x-1) + f(1) \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$

c) $f(x) = cos^2 x$ et $x_0 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow y = f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + f\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{9+\pi\sqrt{3}}{12}$

16 Déterminons la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$

b) $f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$. Posons $u = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow u' = 2x + 2$ et $v = x + 1 \Rightarrow v' = 1$

$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

c) $f(x) = (-x^2 + 2x)^3$. Posons $u = -x^2 + 2x \Rightarrow u' = -2x + 2$ et $n = 3$

$f'(x) = n(u')(u)^{n-1} \Rightarrow f'(x) = 3(-2x+2)(-x^2+2x)^2$

d) $f(x) = \sqrt{2x^3 - 4x^2 + 1}$. Posons $u = 2x^3 - 4x^2 + 1 \Rightarrow u' = 6x^2 - 8x$

$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \Rightarrow f'(x) = \frac{6x^2-8x}{2\sqrt{2x^3-4x^2+1}} = \frac{3x^2-4x}{\sqrt{2x^3-4x^2+1}}$

Scanned by CamScanner

e) $f(x) = (1-3x^2)(-x^2+1)$.
Posons $u = 1-3x^2 \Rightarrow u' = -6x$ et $v = -x^2+1 \Rightarrow v' = -2x$

$f'(x) = u'v + v'u \Rightarrow f'(x) = (-6x)(-x^2+1) + (-2x)(1-3x^2) = 12x^3 - 8x$

f) $f(x) = \text{Cos}^3x$. Posons $u = cosx \Rightarrow u' = -sinx$ et $n = 3$

$f'(x) = n(u')(u)^{n-1} \Rightarrow f'(x) = 3(-sinx)(cosx)^2 = -3sinxcos^2x$

g) $f(x) = (x-1)\sqrt{x^3-x^2}$

Posons $u = x-1 \Rightarrow u' = 1$ et $v = \sqrt{x^3-x^2} \Rightarrow v' = \frac{3x^2-2x}{2\sqrt{x^3-x^2}}$

$f'(x) = u'v + v'u \Rightarrow f'(x) = (1)\left(\sqrt{x^3-x^2}\right) + \left(\frac{3x^2-2x}{2\sqrt{x^3-x^2}}\right)(x-1)$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{5x^3-7x^2+2x}{2\sqrt{x^3-x^2}}$

h) $f(x) = \text{Sin}(3x-1)^4$. Posons $u = (3x-1)^4 \Rightarrow u' = 4(3)(3x-1)^3 = 12(3x-1)^3$

$f'(x) = u'cosu \Rightarrow f'(x) = 12(3x-1)^3cos(3x-1)^4$

i) $f(x) = Sin^4(3x-1)$ Posons $u = sin(3x-1) \Rightarrow u' = 3cos(3x-1)$ et $n = 4$

$f'(x) = n(u')(u)^{n-1} \Rightarrow f'(x) = 4[3cos(3x-1)][sin(3x-1)]^3$

$\Rightarrow f'(x) = 12cos(3x-1) \times sin^3(3x-1)$

17 Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$

1) Ecrivons de $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

En posant $x^2 - 2x - 3 = 0$ on obtient comme solution $x_1 = -1$ et $x_1 = 3$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
x^2-2x-3	$+$	0 $-$	$-$ 0	$+$
$\|x^2-2x-3\|$	x^2-2x-3	$-x^2+2x+3$		x^2-2x-3

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = x^2-2x-3 & si\ x \in]-\infty ; -1[\cup]3 ; +\infty[\\ f(x) = -x^2+2x+3 & si\ x \in]-1 ; 3[\end{cases}$$

2) Etudions la continuité et la dérivabilité de f aux points $x_0 = -1$ et $x_0 = 3$.

- **Etude de la continuité en $x_0 = -1$**

f est continue en $x_0 = -1$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} x^2 - 2x - 3 = 0$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} -x^2 + 2x + 3 = 0$

Scanned by CamScanner

Puis que $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = 0$

Alors f est continue en $x_0 = -1$

- **Etude de la dérivabilité en $x_0 = -1$**

f est dérivable en $x_0 = -1$ si et seulement si $\lim_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1}$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 - 2x - 3 - 0}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{(x-3)(x+1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to -1^-} x - 3 = -1 - 3 = -4$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{-x^2 + 2x + 3 - 0}{x+1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{-x^2 + 2x + 3}{x+1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{-(x-3)(x+1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to -1^+} -x + 3 = 4$$

Ainsi on dira que f n'est pas dérivable à gauche et à droite de $x_0 = -1$, mais elle admet deux demi-tangentes respectivement à gauche et à droite de $x_0 = -1$ dont les coefficients directeurs sont : $f'(-1) = -4$ et $f'(-1) = 4$

- **Etude de la continuité en $x_0 = 3$**

f est continue en $x_0 = 3$ si et seulement si $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x)$

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} -x^2 + 2x + 3 = 0$ et $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} x^2 - 2x - 3 = 0$

Puis que $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = 0$

Alors f est continue en $x_0 = 3$

- **Etude de la dérivabilité en $x_0 = 3$**

f est dérivable en $x_0 = 3$ si et seulement si $\lim_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x-3}$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{-x^2 + 2x + 3 - 0}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{-x^2 + 2x + 3}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{-(x-3)(x+1)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3^-} -x - 1 = -3 - 1 = -4$$

Scanned by CamScanner

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2-2x-3-0}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2-2x-3}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{(x-3)(x+1)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3^+} x+1 = 3+1 = 4$$

Ainsi on dira que f n'est pas dérivable à gauche et à droite de $x_0 = 3$, mais elle admet deux demi-tangentes respectivement à gauche et à droite de $x_0 = 3$ dont les coefficients directeurs sont : $f'(3) = -4$ et $f'(3) = 4$

3) Donnons une équation de la tangente à gauche et à droite de $x_0 = -1$ et $x_0 = 3$.

– A gauche de -1, on a : $f(x) = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$ et

$y = f'(-1)(x+1) + f(-1) \Rightarrow y = -4(x+1) + 0 \Rightarrow y = -4x - 4$

– A droite de -1, on a : $f(x) = -x^2 + 2x + 3 \Rightarrow f'(x) = -2x + 2$ et

$y = f'(-1)(x+1) + f(-1) \Rightarrow y = 4(x+1) + 0 \Rightarrow y = 4x + 4$

– A gauche de 3, on a : $f(x) = -x^2 + 2x + 3 \Rightarrow f'(x) = -2x + 2$ et

$y = f'(3)(x-3) + f(3) \Rightarrow y = -4(x-3) + 0 \Rightarrow y = -4x + 12$

– A droite de 3, on a : $f(x) = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$ et

$y = f'(3)(x-3) + f(3) \Rightarrow y = 4(x-3) + 0 \Rightarrow y = 4x - 12$

3) Dressons le tableau de variation de la fonction f.

Pour $x \in]-\infty ; -1[\cup]3 ; +\infty[$, on a : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ et $f'(x) = 2x - 2$

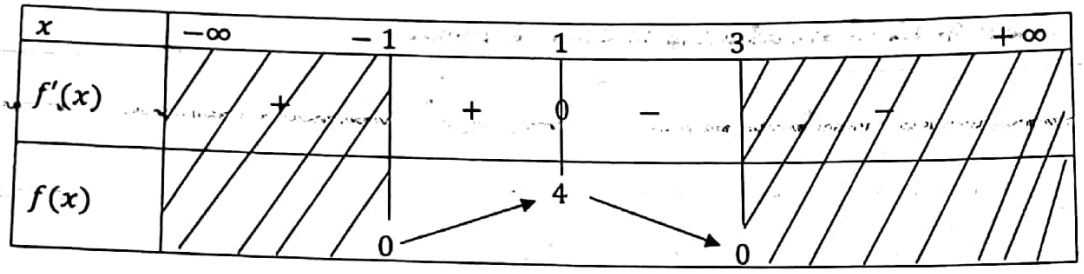
Posons $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0				0	↗	$+\infty$

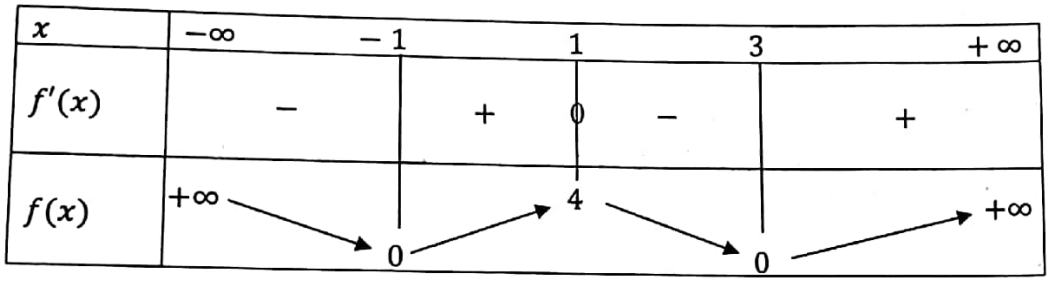
Pour $x \in]-1 ; 3[$, on a : $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ et $f'(x) = -2x + 2$

Posons $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et le tableau de variation est le suivant :

Scanned by CamScanner



Ainsi l'intersection de ces deux tableaux donne celui de $f(x)$ sur l'intervalle $]-\infty ; +\infty[$

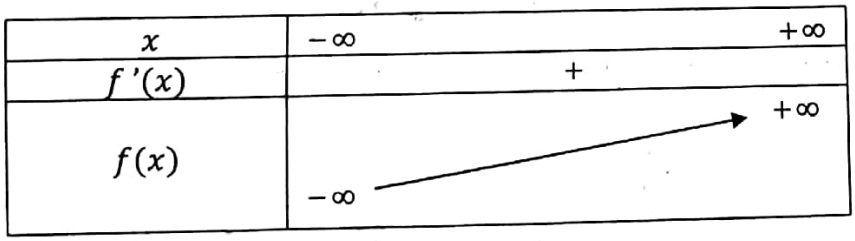


Etudes de fonctions

Analyse et interprétation d'un tableau de variation.

18 Analysons puis interpréter chacun des tableaux de variations suivants afin de préciser :

1) f est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :



De plus :

- La courbe (Cf) admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

- La courbe (Cf) admet l' axe $(y'Oy)$ comme branche parabolique.

a- Domaine de définition.

$Df = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

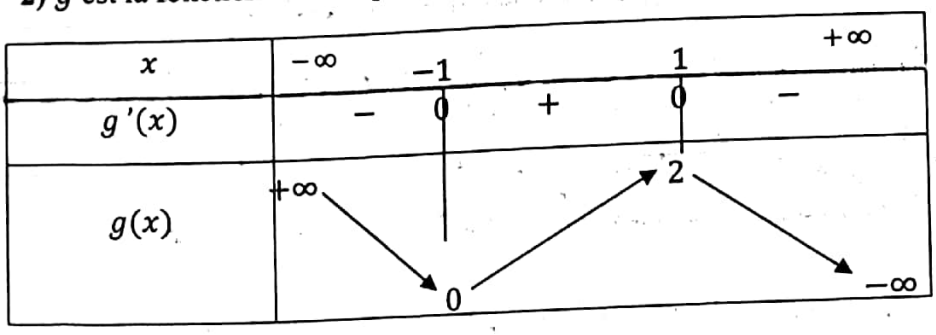
b- Limites aux bornes du domaine de définition tout en mettant en évidence les éventuelles asymptotes ou possibilités d'asymptotes.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

La courbe (Cf) admet l' axe $(y'Oy)$ comme branche parabolique.

Scanned by CamScanner

2) g est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :



a- Domaine de définition.

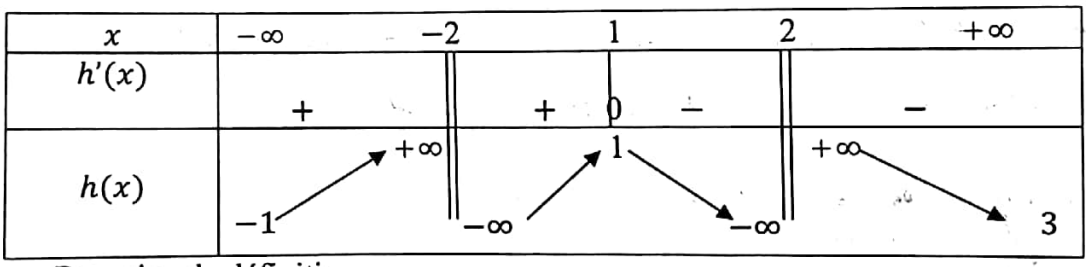
$Dg = \mathbb{R} =]-\infty\,;\,+\infty[$

b- Limites aux bornes du domaine de définition tout en mettant en évidence les éventuelles asymptotes ou possibilités d'asymptotes.

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction (oy)

3) h est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :



a- Domaine de définition.

$Dh = \mathbb{R} - \{-2\ ;\ 2\} =]-\infty\,;\,-2[\cup]-2\,;2[\cup]2\,;\,+\infty[$

b- Limites aux bornes du domaine de définition tout en mettant en évidence les éventuelles asymptotes ou possibilités d'asymptotes.

$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 3$

Alors les droites d'équations $y = -1$ et $y = 3$ sont respectivement asymptotes horizontales en $-\infty$ et $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^-} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -2^+} h(x) = +\infty$. Alors la droite d'équation $x = -2$ est asymptote Verticale

$\lim\limits_{x \to 2^-} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x) = -\infty$. Alors la droite d'équation $x = 2$ est asymptote Verticale

4) p est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

Scanned by CamScanner

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$p'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$p(x)$	2	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	2

a- Domaine de définition.

$Dp = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$

b- Limites aux bornes du domaine de définition tout en mettant en évidence les éventuelles asymptotes ou possibilités d'asymptotes.

$\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = 2$

Alors la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale en $-\infty$ et $+\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} p(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} p(x) = +\infty$. Alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote Verticale

19 Dressons le tableau de variation de la fonction numérique donnée, partant de ses renseignements fournis dans les cas suivants :

1) Pour f :

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que l'équation $f'(x) = 0$ admet les solutions $x = -1$ et $x = \frac{3}{2}$
- f n'est croissante qu'entre les zéros de sa dérivée f' et les points $E_1\left(\frac{3}{2}\ ;4\right)$ et $E_2\left(-1; -\frac{5}{2}\right)$ sont ses extremums
- les droites $y = -2$ et $y = 3$ sont ses asymptotes respectives en $-\infty$ et $+\infty$

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	↘	$-\frac{5}{2}$	↗	4	↘	3

2) Pour g :

- g est définie sur $]-\infty\ ;\ 0] \cup \left[\frac{5}{2}\ ;\ +\infty\right[$ et admet des demi tangentes verticales aux points d'abscisses 0 et $\frac{5}{2}$
- g est strictement décroissante sur son ensemble de dérivabilité.
- la droite $y = -x$ est à la fois asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$

Scanned by CamScanner

- les points de coordonnées $(0\ ;-3)$ et $\left(\frac{5}{2}\ ;\ 1\right)$ sont sur la courbe de g.

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-3	↗	1	↗	$+\infty$

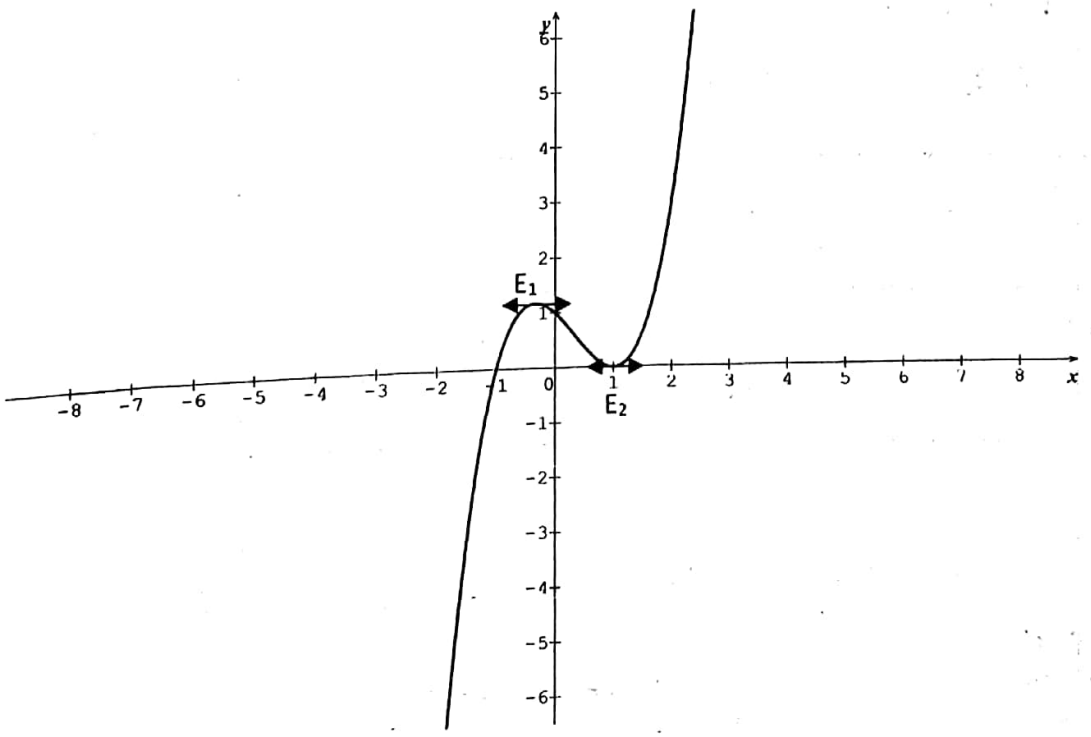
3) Pour h :

- h est dérivable sur $\mathbb{R}-\{0\ ;\ 2\}$ et continue sur $\mathbb{R}$.
- le point de coordonnées $(0{,}3\ ;\ 0{,}4)$ est l'extremum maximum absolue de la courbe (C_h) et h est croissante sur $[0\ ;\ 0{,}3]\cup[2\ ;+\infty[$
- les droites d'équations $y=-1$ *et* $y=-2x+1$ sont asymptotes de (C_h) respectivement en $-\infty$ et $+\infty$

x	$-\infty$		0		$0{,}3$		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$h(x)$	-1	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$0{,}4$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Analyse et interprétation d'un graphique.

1) f est la fonction dont la courbe est donnée ci-dessous par : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$



Scanned by CamScanner

De plus : $E_1\left(\frac{-1}{3}\ ;\ \frac{32}{27}\right)$ et $E_2(1\ ;\ 0)$ sont les sommets de la courbe (Cf)

a-. Analysons chacune des courbes représentatives données dans un repère orthonormé du plan afin d'établir son tableau de variation.

$Df = \mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{32}{27}$	↘	0	↗	$+\infty$

b- Déterminons les réels a ; b ; c et d en utilisant le graphique.

On sait que la formule explicite de f est le suivant : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

D'après le graphique, la courbe (C) passe par les points $E_1\left(\frac{-1}{3}\ ;\ \frac{32}{27}\right)$ et $E_2(1\ ;\ 0)$ $\Leftrightarrow$

$f\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{32}{27}$ et $f(1) = 0$

De même, la courbe (C) admet les points $E_1\left(\frac{-1}{3}\ ;\ \frac{32}{27}\right)$ et $E_2(1\ ;\ 0)$ comme extremum $\Leftrightarrow$

$f'\left(\frac{-1}{3}\right) = 0$ et $f'(1) = 0$

La réunion de ces deux conditions donne le système suivant :

$$\begin{cases} f\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{32}{27} \\ f(1) = 0 \\ f'\left(\frac{-1}{3}\right) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 3b - 9c + 27d = 32 & (1) \\ a + b + c + d = 0 & (2) \\ a - 2b + 3c = 0 & (3) \\ 3a + 2b + c = 0 & (4) \end{cases}$$

L'équation **(2)** donne : $a + b + c + d = 0 \Rightarrow a = -b - c - d$

En remplaçant a par sa valeur dans les équations **(1) ; (3) et (4),** on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} b - 2c + 7d = 8 \\ -3b + 2c - d = 0 \\ -b - 2c - 3d = 0 \end{cases}$$

En utilisant la méthode du Pivot de Gauss, la résolution de ce système donne :

$b = -1$; $c = -1$ et $d = 1$ puis en remplaçant les valeurs de b; c et d dans l'équation **(2),** on obtient $a = 1$.

Scanned by CamScanner

D'où $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

2) La fonction donnée est g telle que : $g(x) = \frac{ax + b}{cx^2 + d}$

a- Analysons chacune des courbes représentatives données dans un repère orthonormé du plan afin d'établir son tableau de variation.

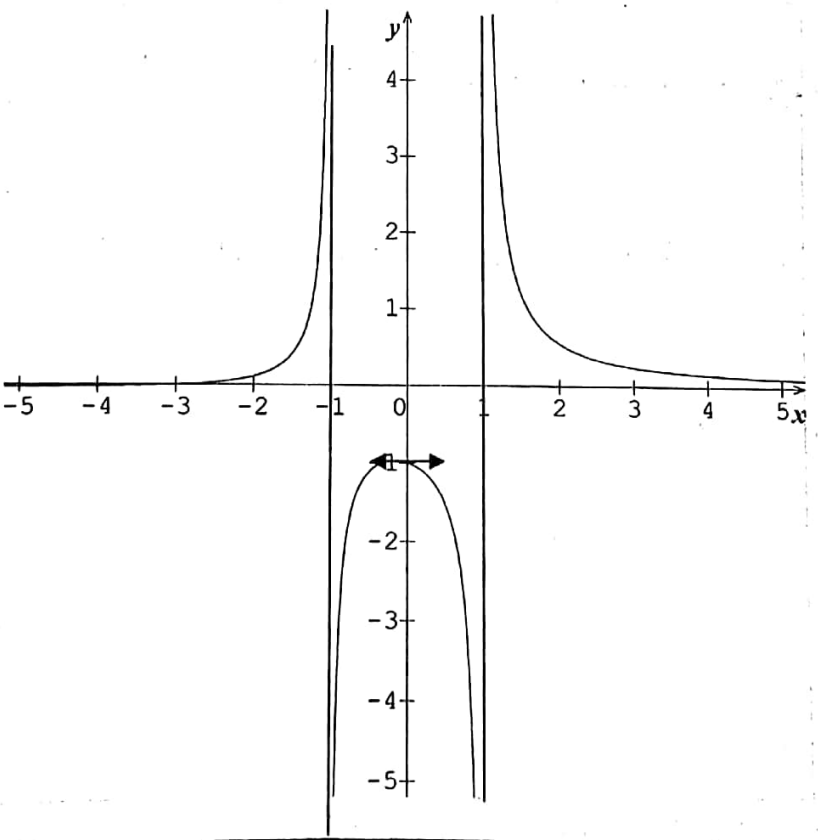
$Dg = \mathbb{R} - \{-1 ; 1\} =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

Alors les droites d'équations $y = 0$ est asymptotes horizontales en $-\infty$ et $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = -\infty$. Alors la droite d'équation $x = -1$ est asymptote Verticale

$\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = +\infty$. Alors la droite d'équation $x = 1$ est asymptote Verticale



x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$	0	$-$		$+$	
$g(x)$	0	↗	$+\infty$	↘	-1	↘	$-\infty$ $+\infty$	↘	0

Scanned by CamScanner

b- Déterminons les réels a ; b ; c et d en utilisant le graphique.

On sait que la formule explicite de g est le suivant : $g(x) = \frac{ax + b}{cx^2 + d}$

Puis que g admet les droites $x = -1$ et $x = 1$ comme asymptote verticale, alors on a :

$cx^2 + d = (x - 1)(x + 1) \Leftrightarrow cx^2 + d = x^2 - 1$ et par identification on a : $c = 1$ et $d = -1$

$\Rightarrow g(x) = \frac{ax + b}{x^2 - 1}$

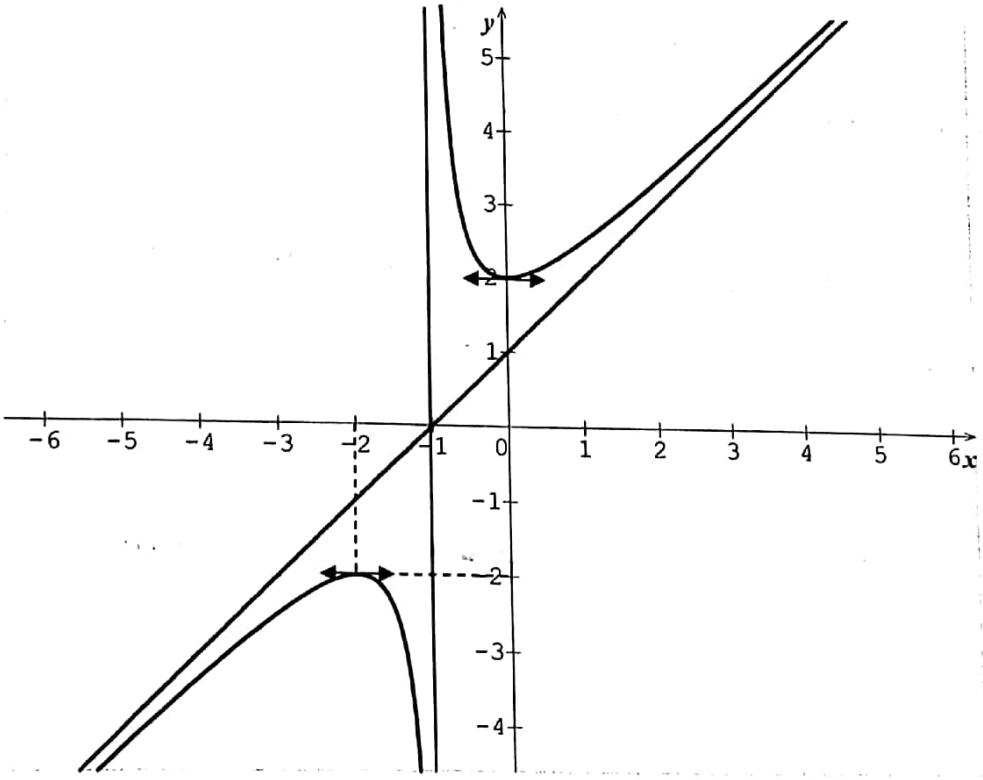
De même la courbe passe par le point $(0 ; -1) \Rightarrow g(0) = -1 \Leftrightarrow \frac{b}{-1} = -1 \Rightarrow b = 1$

$\Rightarrow g(x) = \frac{ax + 1}{x^2 - 1}$

De même la courbe passe par le point $(-3 ; 0) \Rightarrow g(-3) = 0 \Leftrightarrow \frac{-3a + 1}{8} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

D'où $g(x) = \frac{\frac{1}{3}x + 1}{x^2 - 1} \Leftrightarrow g(x) = \frac{x + 3}{3(x^2 - 1)}$

3) La fonction donnée est h telle que : $h(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$



a- Analysons chacune des courbes représentatives données dans un repère orthonormé du plan afin d'établir son tableau de variation.

$Dh = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$

Scanned by CamScanner

$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

Alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe (C).

Cherchons ainsi les réels a et b. La droite passe par deux points $(-1\ ;\ 0)$ et $(0\ ;\ 1)$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ D'où $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe (C).

$\lim\limits_{x \to -1^-} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} h(x) = +\infty$. Alors la droite d'équation $x = -1$ est asymptote Verticale

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$+\infty$ ‖	↘	2	↗	$+\infty$

b- Déterminons les réels $a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d$ et e en utilisant le graphique.

$$h(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$$

Puis que h admet la droite $x = -1$ comme asymptote verticale, alors on a :

$dx + e = x + 1$ et par identification on a : $d = 1$ et $e = 1$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + 1}$$

La courbe (C) passe par les points $(-2\ ;\ -2)$ et $(0\ ;\ 2) \Rightarrow h(-2) = -2$ et $h(0) = 2 \Leftrightarrow$

$\frac{4a - 2b + c}{-1} = -2 \Leftrightarrow 4a - 2b + c = 2$ et $\frac{c}{1} = 2 \Leftrightarrow c = 2$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{ax^2 + bx + 2}{x + 1}$$

De même $(-2\ ;\ -2)$ est un extremum alors $h'(-2) = 0$ avec $h'(x) = \frac{ax^2 + 2ax + b - 2}{(x + 1)^2}$

$h'(-2) = 0 \Leftrightarrow \frac{4a - 4a + b - 2}{(-2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{ax^2 + 2x + 2}{x + 1}$$

la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe (C). Alors $a = 1$ (coefficient directeur de la droite $y = x + 1$). D'où $h(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Scanned by CamScanner

Fonctions d'initialisations.

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Déterminons l'ensemble de définition Df.

$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$

2) Calculons les limites aux bornes de Df.

$lim\ f(x) = lim\ \frac{x^2+2x+2}{x+1} = lim\ \frac{x^2}{x} = lim\ x = -\infty$

$x \to -\infty \quad x \to -\infty \quad x \to -\infty \quad x \to -\infty$

$lim\ f(x) = lim\ \frac{x^2+2x+2}{x+1} = lim\ \frac{x^2}{x} = lim\ x = +\infty$

$x \to +\infty \quad x \to +\infty \quad x \to +\infty \quad x \to +\infty$

$lim\ f(x) = lim\ \frac{x^2+2x+2}{x+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$x \to -1^- \quad x \to -1^-$

$lim\ f(x) = lim\ \frac{x^2+2x+2}{x+1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$x \to -1^+ \quad x \to -1^+$

3) Déterminons les réels a ; b et c tel que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

En effectuant la division Euclidienne $(x^2 + 2x + 2)$ par $(x + 1)$, on obtient :

$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}$ et par identification avec $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$, on a :

$a = 1$; $b = 1$ et $c = 1$

4) a- Montrons que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe Cf .

La droite (D) d'équation $y = ax + b = x + 1$ est asymptote à la courbe Cf si :

$lim\ f(x) - y = 0.$

$x \to \infty$

$lim\ f(x) - y = lim\left(x + 1 + \frac{1}{x+1}\right) - (x + 1) = lim\frac{1}{x+1} = lim\frac{1}{x} = 0$

$x \to \infty \quad x \to \infty \quad x \to \infty \quad x \to \infty$

D'où la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe Cf .

Scanned by CamScanner

b- Déterminons la position de la courbe Cf et de la droite (D).

Pour ce la étudions le signe de $f(x) - y$. Posons $f(x) - y = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = 0$. Le signe de $f(x) - y$ depend du signe de $x + 1$, car $1 > 0$ Posons $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

. D'où le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y$	$-$	0	$+$

D'après le tableau de signe de $f(x) - y$, on a :

$\forall x \in]-\infty ; -1[$, $f(x) - y < 0$. Alors $\forall x \in]-\infty ; -1[$, (C) est en dessous de (D).
$\forall x \in]-1 ; +\infty[$, $f(x) - y > 0$. Alors $\forall x \in]-1 ; +\infty[$, (C) est au dessus de (D).

4) Montrons que le point $I\binom{-1}{0}$ est centre de symétrie pour la courbe Cf.
Le point $I\binom{-1}{0}$ est dit centre de symétrie si $f(2(-1) - x) + f(x) = 2(0)$
$\Leftrightarrow f(-2-x) + f(x) = 0$

$$f(-x-2) = \frac{(-2-x)^2 + 2(-2-x) + 2}{(-2-x)+1} = \frac{4 + 4x + x^2 - 4 - 2x + 2}{-2-x+1} = \frac{x^2+2x}{-x-1}$$

$$\Rightarrow f(-x-2) + f(x) = \frac{x^2+2x+2}{-x-1} + \frac{x^2+2x-2}{x+1} = \frac{-x^2-2x-2}{x+1} + \frac{x^2+2x+2}{x+1} = 0$$

Puisque $f(-x-2) + f(x) = 0$ alors $I\binom{-1}{0}$ est un centre de symétrie pour la courbe (C)

5) Déterminons une équation de la tangente à la courbe Cf au point d'abscisse -2.

$$f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

$$y = f'(-2)(x+2) + f(-2) \Rightarrow y = -2$$

6) Calculons la dérivée f' de la fonction f puis dressons le tableau de variation de f.
Posons $u = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow u' = 2x + 2$ et $v = x + 1 \Rightarrow v' = 1$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u' \times v - v' \times u}{(v)^2} = \frac{(2x+2)(x+1) - (1)(x^2+2x+2)}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

Or $\forall x \in Df, (x+1)^2 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe du Numérateur $x^2 + 2x$.

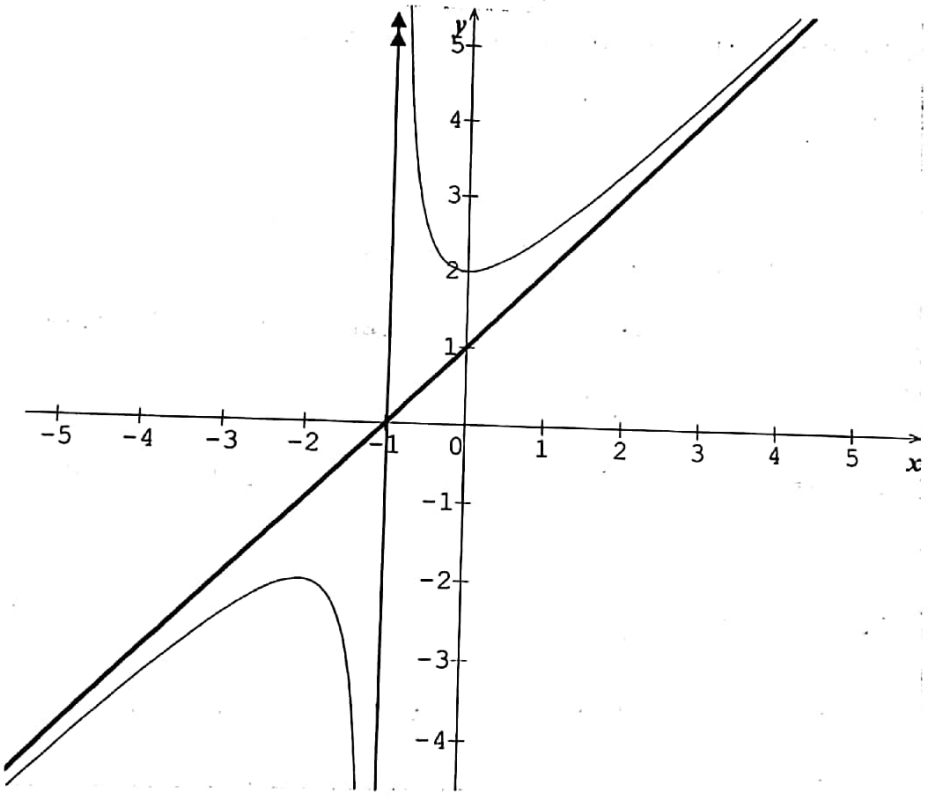
Posons $x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -2$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

Scanned by CamScanner

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

7) Construisons la courbe Cf et la droite (D) dans le même repère.
Ainsi on a la représentation suivante :



22 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Déterminons les réels a ; b ; c et d tel que :

a- La courbe Cf admet comme asymptote les droites $x = 2$ et $x = -1$.

Alors $x^2 + cx + d = (x-2)(x+1) \Leftrightarrow x^2 + cx + d = x^2 - x - 2$

Par identification, on a : $c = -1$ et $d = -2$ => $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2}$

b- La courbe Cf passe par le point A$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, Alors $f(1) = -2 \Leftrightarrow \dfrac{1 + a + b}{-2} = -2 \Leftrightarrow$

$1 + a + b = 4 \Rightarrow a + b = 3$ **(1)**

Scanned by CamScanner

Cf admet au point $A\binom{1}{-2}$ une tangente de coefficient directeur $-5 \Rightarrow f'(1) = -5$ avec

$f'(x) = \frac{x^2(-a-1) + x(-4-2b) + b-2a}{(x^2-x-2)^2}$ alors $f'(1) = -5 \Leftrightarrow \frac{-3a-b-5}{4} = -5 \Leftrightarrow$

$3a + b = 15$ **(2)**

Formons ainsi le système avec les équations **(1)** et **(2)** $\Rightarrow \begin{cases} a+b = 3 \\ 3a+b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} -a-b = -3 \\ 3a+b = 15 \end{cases}$

$2a = 12 \Rightarrow a = 6$ et $b = -3$. D'où $f(x) = \frac{x^2 + 6x - 3}{x^2 - x - 2}$

2) Etudions la fonction f puis représenter sa courbe Cf dans le repère.

$Df = \mathbb{R} - \{-1\ ;\ 2\} =]-\infty\ ;\ -1[\cup]-1\ ;2[\cup]2\ ;\ +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Alors les droites d'équations $y = 1$ est asymptotes horizontales en $-\infty$ et $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$. Alors la droite d'équation $x = -1$ est asymptote Verticale

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$. Alors la droite d'équation $x = 2$ est asymptote Verticale

$f(x) = \frac{x^2 + 6x - 3}{x^2 - x - 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-7x^2 + 2x - 15}{(x^2 - x - 2)^2}$

Or $\forall\ x \in Df, (x^2 - x - 2)^2 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe du numérateur $-7x^2 + 2x - 15$. Posons $-7x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow \Delta = -416 \Rightarrow \Delta < 0$

Alors $\forall\ x \in Df, f'(x)$ à même signe que $a = -7$. Donc $f'(x) < 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$		$-$		
$f(x)$	1	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	
		$-\infty$		$-\infty$			

Mr DEMBELE Le Professeur Chargé du Cours ★ Reproduction

23 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$

Scanned by CamScanner

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$.

Déterminons les réels $a ; b ; c ; m ; n$ et p tel que :

a- La courbe Cf admet comme asymptote les droites $x = 2$ et $x = -1$.

Alors $mx^2 + nx + p = (x-2)(x+1) \Leftrightarrow mx^2 + nx + p = x^2 - x - 2$ par identifications,

on a : $m = 1$; $n = -1$ et $p = -2 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x^2 - x - 2}$

b- La courbe Cf passe par les points $A\binom{1}{-1}$ et $B\binom{0}{3}$, alors $f(0) = 3 \Leftrightarrow \dfrac{c}{-2} = 3 \Rightarrow c = -6$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{x^3 + ax^2 + bx - 6}{x^2 - x - 2}$

La courbe Cf admet au point $A\binom{0}{3}$, une tangente de coefficient -3 alors $f'(0) = -3$ avec

$f'(x) = \dfrac{x^4 - 2x^3 + x^2(-a - b - 6) + x(-4a + 12b) - 2b - 6}{(x^2 - x - 2)^2}$. Alors $f'(0) = -3 \Leftrightarrow$

$\dfrac{-2b - 6}{4} = -3 \Leftrightarrow -2b - 6 = -12 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^3 + ax^2 + 3x - 6}{x^2 - x - 2}$

La courbe Cf admet au point $A\binom{1}{-1}$ Alors $f'(1) = -1 \Leftrightarrow \dfrac{1 + a + 3 - 6}{1 - 1 - 2} = -1 \Leftrightarrow a - 2 = 2$

$\Rightarrow a = 4$

D'où $f(x) = \dfrac{x^3 + 4x^2 + 3x - 6}{x^2 - x - 2}$

24 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 - 9x}{2(x^2 - 1)}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$.

1) Etudions les variations de f puis précisons les asymptotes à la courbe Cf.

$Df = \mathbb{R} - \{-1 ; 1\} =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Alors on a une possibilité d'asymptote oblique.

La recherche de l'asymptote oblique nous conduit à $y = \dfrac{1}{2}x$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$. Alors la droite d'équation $x = -1$ est asymptote Verticale

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$. Alors la droite d'équation $x = 1$ est asymptote Verticale

Scanned by CamScanner

$f(x) = \frac{x^3 - 9x}{2(x^2-1)} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^4 + 6x^2 + 9}{[2(x^2-1)]^2}$

Or $\forall\ x \in Df, [2(x^2-1)]^2 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe du numérateur $x^4 + 6x^2 + 9$. Alors effectuons un changement de variable en posant $X = x^2$.
Alors $x^4 + 6x^2 + 9$ dévient : $X^2 + 6X + 9 = (X+3)^2 > 0$

D'où $\forall\ x \in Df, f'(x) > 0$

Conclusion : $\forall\ x \in Df$, la fonction f est strictement croissante.

2) Soit Δ l'asymptote non parallèle aux axes de coordonnées, c'est-à-dire $y = \frac{1}{2}x$.
Déterminons la position de Cf par rapport à Δ dans l'intervalle $]-1\ ;\ 1[$.
Pour ce la étudions le signe de $f(x) - y$. Posons $f(x) - y = 0 \Leftrightarrow \frac{-4x}{x^2-1} = 0$. Etudions le signe de $-4x$ et $x^2 - 1$. Posons $-4x = 0$ et $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ et $x = -1$ ou $x = 1$

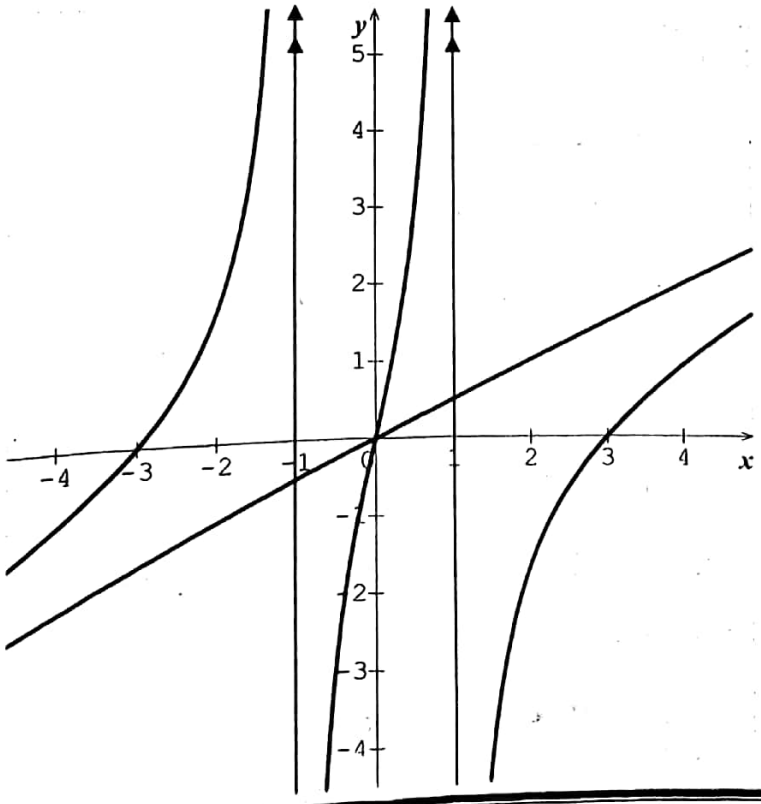
D'où le tableau de signe est le suivant :

x		-1		0		1
$f(x) - y$	0	$-$	0	$+$	0	

D'après le tableau de signe de $f(x) - y$, on a :

$\forall x \in]-1\ ;\ 0[,\ f(x) - y < 0$. Alors $\forall x \in]-1\ ;\ 0[$, (C) est en dessous de (D).
$\forall x \in]0\ ;\ 1[,\ f(x) - y > 0$. Alors $\forall x \in]0\ ;\ 1[$, (C) est au dessus de (D).

2) Construisons Cf.



Scanned by CamScanner

25 Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x}$

Soit $\mathcal{C}f$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$.

1) Etudions et construisons la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$.

1) Déterminons l'ensemble de définition Df.

$D_f = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

$\lim f(x) = \lim \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} = \lim \frac{x^2}{2x} = \lim \frac{1}{2}x = -\infty$

$x \to -\infty \quad x \to -\infty \quad x \to -\infty \quad x \to -\infty$

$\lim f(x) = \lim \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} = \lim \frac{x^2}{2x} = \lim \frac{1}{2}x = +\infty$

$x \to +\infty \quad x \to +\infty \quad x \to +\infty \quad x \to +\infty$

$\lim f(x) = \lim \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} = \frac{4}{0^-} = -\infty$

$x \to 0^- \quad x \to 0^-$

$\lim f(x) = \lim \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} = \frac{4}{0^+} = +\infty$

$x \to 0^+ \quad x \to 0^+$

$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{(2x)^2}$

Or $\forall\ x \in Df, (2x)^2 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe du

Numérateur $2x^2 - 8$. Posons $2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x = -2$ ou $x = 2$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

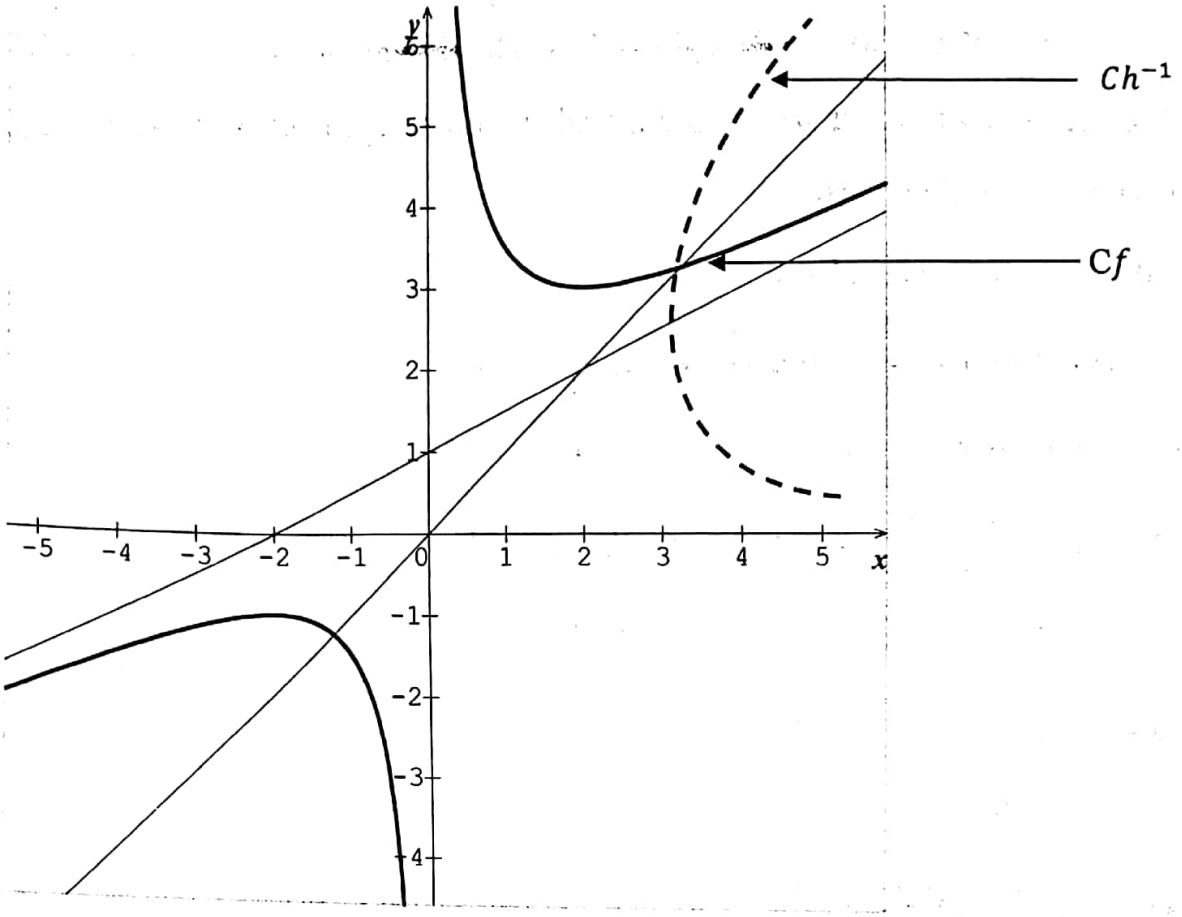
x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

Construisons la courbe (C).

- $x = 0$ est asymptote verticale.

Scanned by CamScanner

- $y = \frac{1}{2}x + 1$ est asymptote oblique.



2) Montrons que le point d'intersection des asymptotes est un centre de symétrie de (Cf)

Cherchons d'abors le point d'intersection des deux asymptotes. Pour cela formons le système avec les deux asymptotes ($x = 0$ asymptote verticale) et ($y = \frac{1}{2}x + 1$ asymptote oblique)

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ .Ainsi le point (0 ; 1) est centre de symétrie pour la courbe (C) de f si et seulement si : $f(2(0) - x) + f(x) = 2(1) \Leftrightarrow f(-x) + f(x) = 2$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 2(-x) + 4}{2(-x)} = \frac{x^2 - 2x + 4}{-2x} = \frac{-x^2 + 2x - 4}{2x}$$

$$=> f(-x) + f(x) = \frac{-x^2 + 2x - 4}{2x} + \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} = \frac{4x}{2x} = 2$$

Puisque $(-x) + f(x) = 2$ alors le point (0 ; 1) est un centre de symétrie pour la courbe (C)

3) Discutons graphiquement suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines de l'équation : $x^2 + 2(1 - m)x + 4 = 0$
Pour cela, exprimons m en fonction de x :

$$x^2 + 2(1 - m)x + 4 = 0 => m = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} = f(x)$$

En faisant glisser une règle du bas vers le haut tout le long du graphique, on remarque :

Scanned by CamScanner

D'où $f_{-m}(-x) = f_m(x)$

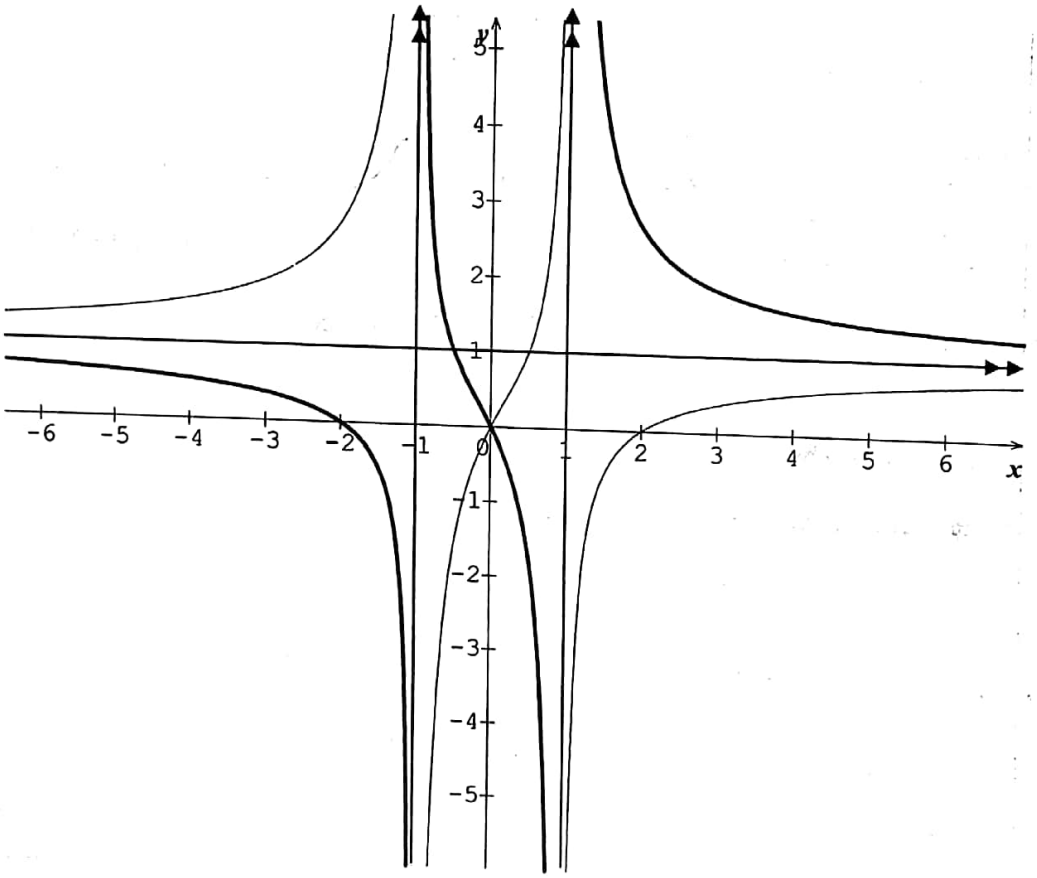
4) Montrons que toutes les courbes (C_m) passent par un même point fixe dont on déterminera les coordonnées.

Toutes les courbes (C_m) passent par un même point fixe si et seulement si $f_0(x) = f_1(x)$

$f_0(x) = f_1(x) \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \Leftrightarrow x^2 = x^2 - x \Leftrightarrow -x = 0 \Rightarrow x = 0$ et $y = f_1(0) \Rightarrow$

$y = \frac{0}{-1} = 0$. Alors toutes les courbes (C_m) passent par le point $A(0\,;0)$, origine du repère.

5) Représentons les courbes (C_{-2}) et (C_2).



NB : la courbe (C_{-2}) est représentée en gras celle de la courbe (C_2) est représentée en fin.

Fonctions auxiliaires.

41 **Partie A :** On considère le polynôme P définie : $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1) Dressons le tableau de variation de P.

$DP = \mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$.

Scanned by CamScanner

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1 \Rightarrow P'(x) = 6x^2 - 6x$. Posons $P'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow$

$6x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$

D'où le tableau de variation de P est le suivant :

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$P'x)$		$+$	0	$-$	0		$+$		
$P(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	0	↗	$+\infty$

2) Démontrons que l'équation $P(x) = 0$ a une solution unique α dans l'intervalle$]1{,}6\ ;\ 1{,}7\ [$.

- D'après le tableau de variation de P, $\forall\, x \in\ ]\,1\ ;\ +\infty[$, P est définie, continue et strictement croissante de $]\,1\ ;\ +\infty[$ vers $]-2\ ;\ +\infty[$. Alors l'équation $P(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $P(\alpha) = 0$
- De plus $P(1{,}6) = -0{,}48$ et $P(1{,}7) = 0{,}15 \Rightarrow P(1{,}6) \times P(1{,}7) < 0$. Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\alpha \in\ ]1{,}6\ ;\ 1{,}7\ [$.
  Conclusion : l'équation $P(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle$]1{,}6\ ;\ 1{,}7\ [$.

3) Donnons le signe de $P(x)$ dans l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty\ [$.

D'après le tableau de variation de P, $\forall\, x \in\ ]-1\ ;\ \alpha[$, $P(x) < 0$.

$$\forall\, x \in\ ]\alpha\ ;\ +\infty[\ , P(x) > 0.$$

Partie B : On considère la fonction $f\ :]-1\ ;\ +\infty\ [\to \mathbb{R}$ et $x \to \dfrac{1-x}{1+x^3}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) a) Justifions la dérivabilité de f sur $]-1\ ;\ +\infty\ [$.

- $1-x$ est définie et dérivable sur $]-1\ ;\ +\infty\ [$.
- $1+x^3$ est définie et dérivable sur $]-1\ ;\ +\infty\ [$.

Alors $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$ est dérivable sur $]-1\ ;\ +\infty\ [$.

b) Calculons $f'(x)$ puis établir que $f'(x) = \dfrac{P(x)}{(1+x^3)^2}$

$f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$. Posons $u = 1-x \Rightarrow u' = -1$ et $v = 1+x^3 \Rightarrow v' = 3x^2$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(-1)(1+x^3) - (3x^2)(1-x)}{(1+x^3)^2} = \frac{-1-x^3-3x^2+3x^3}{(1+x^3)^2} = \frac{2x^3-3x^2-1}{(1+x^3)^2} = \frac{P(x)}{(1+x^3)^2}$$

Scanned by CamScanner

2) Donnons le tableau de variation de f.

$\forall x \in]-1\ ;\ +\infty[\ ,\ (1+x^3)^2 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $P(x)$.

Or d'après la partie A) 3), on a :

$\forall x \in]-1\ ;\ \alpha[\ ,\ P(x) < 0$, alors $\forall x \in]-1\ ;\ \alpha[\ , f'(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha\ ;\ +\infty[\ ,\ P(x) > 0$, alors $\forall x \in]\alpha\ ;\ +\infty[\ , f'(x) > 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

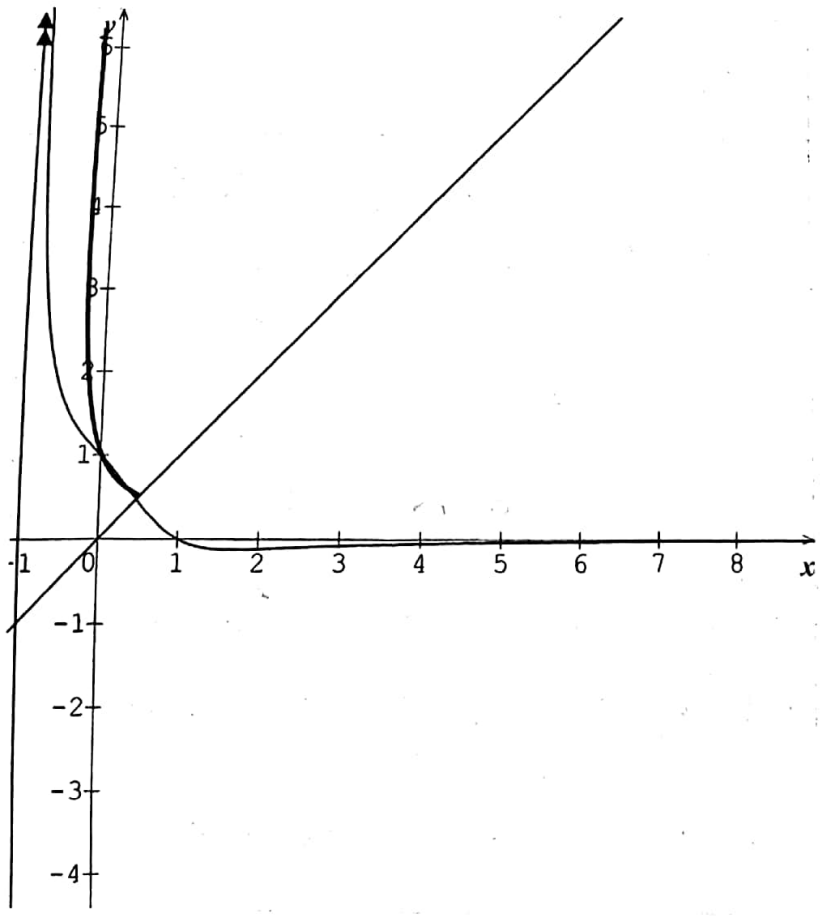
x	-1		α		2		$+\infty$
$f'x)$	‖	$-$	0	$+$	‖		
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$-\frac{1}{9}$	↗	0

3) Déterminons les équations des asymptotes à la courbe Cf de f.

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ Alors la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ Alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale.

4) Plaçons α puis traçons Cf.



Scanned by CamScanner

5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[\,2\,;+\infty\,[$.

Montrons que g réalise une bijection de $[\,2\,;+\infty\,[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

D'après le tableau de variation de f, $\forall x \in [\,2\,;+\infty\,[$, f est définie, continue et strictement croissante de $[\,2\,;+\infty\,[$ vers $\left[-\frac{1}{9}\,;+\infty\right[$. D'où la restriction de g à l'intervalle $[\,2\,;+\infty\,[$ réalise une bijection de $[\,2\,;+\infty\,[$ vers $J=\left[-\frac{1}{9}\,;+\infty\right[$.

6) Traçons Cg^{-1} où g^{-1} est la bijection réciproque de la fonction g restriction de f à l'intervalle $[\,2\,;+\infty\,[$.

NB : la courbe représentative d'une fonction et celle de sa bijection réciproque sont symétrique par rapport à la première bissectrice d'équation $y=x$.

Pour le tracé de Cg^{-1}, (Voir figure en gras ci-dessus)

42 **Partie A :** On donne la fonction g définie par $g(x)=x^3-3x-4$

1) Etudions les variations de g et dresser son tableau de variation.
$Dg=\mathbb{R}=\,]-\infty\,;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

$g(x)=x^3-3x-4 \Rightarrow g'(x)=3x^2-3$. Posons $g'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow$

$x^2=1 \Rightarrow x=-1$ ou $x=1$

D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	$-\infty$		-1		1		α		$+\infty$
$g'x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			
$g(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	-6	↗	0	↗	$+\infty$

2) Montrons que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α et que $2{,}19<\alpha<2{,}20$.

- D'après le tableau de variation de g, $\forall\, x \in\,]\,1\,;+\infty[$, g est définie, continue et strictement croissante de $]\,1\,;+\infty[$ vers $]-6\,;+\infty[$. Alors l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha)=0$
- De plus $g(2{,}19)=-0{,}06$ et $g(2{,}20)=0{,}04 \Rightarrow g(2{,}19)\times g(2{,}20)<0$. Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\alpha \in\,]2{,}19\;;\,2{,}20\,[$.

Conclusion : l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]2{,}19\;;\,2{,}20\,[$.

3) En déduisons le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

Scanned by CamScanner

D'après le tableau de variation de g, $\forall x \in]-\infty\ ;\ \alpha[\ ,\ g(x) < 0$.

$$\forall x \in]\alpha\ ;\ +\infty[\ ,\ g(x) > 0.$$

Partie B : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\ ;\ 1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.

1) Calculons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition Df.

$Df = \mathbb{R} - \{-1\ ;\ 1\} =]-\infty\ ;\ -1[\cup]-1\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

2) Montrons que $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\ ;\ 1\}$, on a : $f'(x) = \dfrac{x \times g(x)}{(x^2 - 1)^2}$

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2 - 4x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x(x^3 - 3x - 4)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x \times g(x)}{(x^2 - 1)^2}$$

3) Etudions le signe de $f'(x)$ et en déduisons les variations de f puis son tableau de variation de la fonction f.

$\forall x \in]-\infty\ ;\ +\infty\ [\ ,\ (x^2 - 1)^2 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $x \times g(x)$.

Or d'après la partie A) 3), on a :

$\forall x \in]-\infty\ ;\ \alpha[\ ,\ g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha\ ;\ +\infty[\ ,\ g(x) > 0$.

D'autre part, $\forall x \in]-\infty\ ;\ 0[,\ x < 0$ et $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[,\ x > 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
x	$-$		$-$		0	$+$	$+$				$+$
$g(x)$	$-$		$-$		$-$		$-$		0		$+$
$f'(x)$	$+$		$+$		$-$		$-$				$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4) Montrons que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe Cf.

La droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe Cf si et seulement si

Scanned by CamScanner

$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - y] = 0$

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} - (x + 2) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} - x - 2$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

D'où la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe Cf

Etudions la position de Cf et (D).

Pour ce la étudions le signe de $f(x) - y$. Posons $f(x) - y = 0 \Leftrightarrow \frac{x + 2}{x^2 - 1} = 0$

Posons $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ et $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$

$x = -1$. D'où le tableau de signe est le suivant :

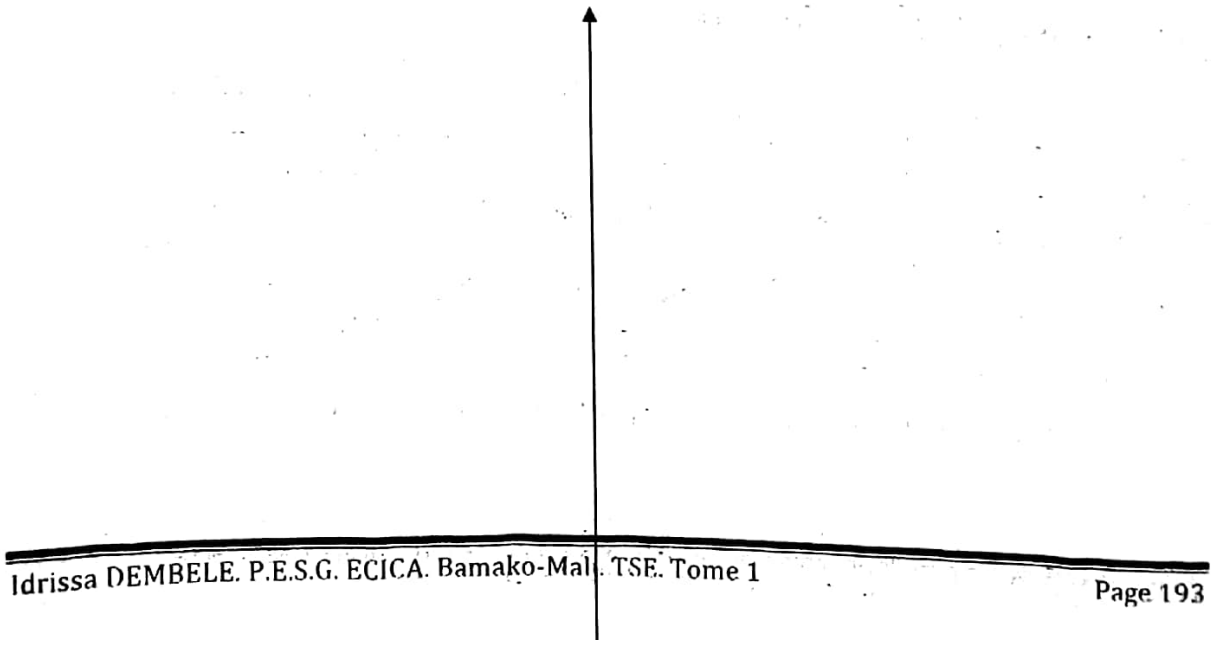
x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$f(x) - y$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

D'après le tableau de signe de $f(x) - y$, on a :

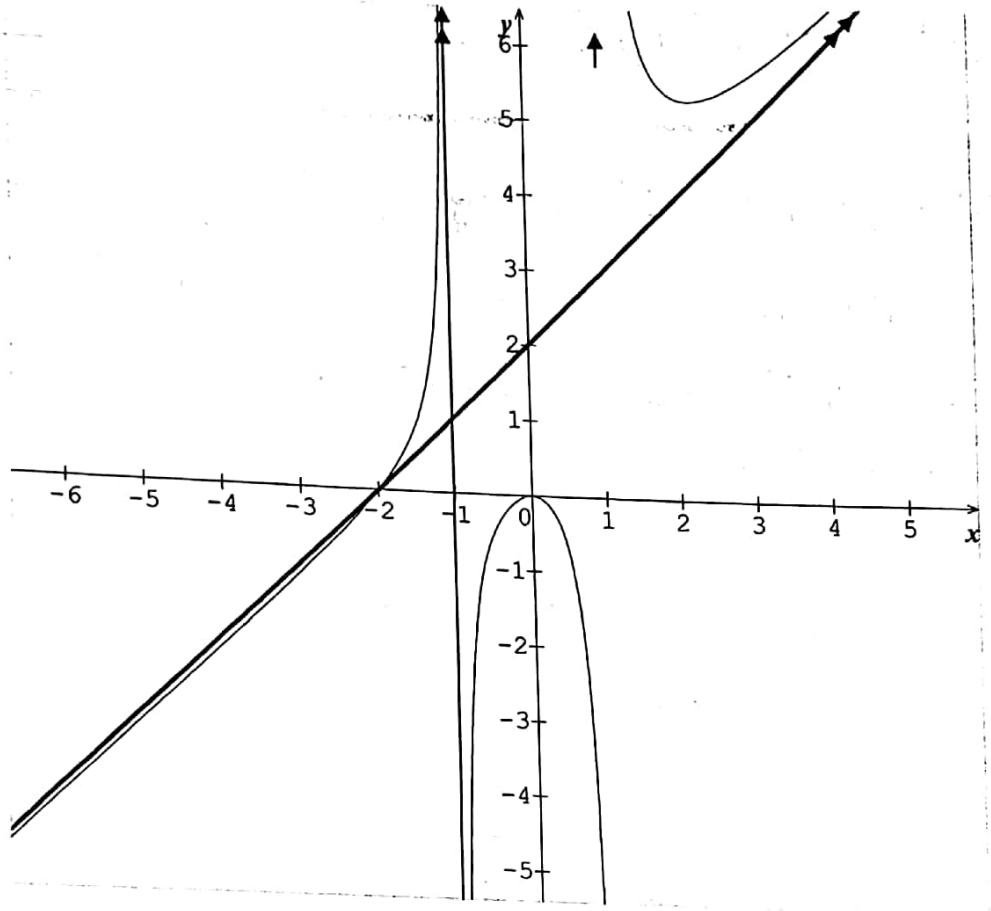
$\forall x \in]-\infty ; -2[\cup]-1 ; 1[$, $f(x) - y < 0$. Alors $\forall x \in]-\infty ; -2[\cup]-1 ; 1[$, , (C) est en dessous de (D).

$\forall x \in]-2 ; -1[\cup]1 ; +\infty[$, $f(x) - y > 0$. Alors $\forall x \in]-2 ; -1[\cup]1 ; +\infty[$, , (C) est au dessus de (D).

5) Traçons Cf.



Scanned by CamScanner



43 1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x - \sqrt{x^2+1}$

a- Etudions les variations de la fonction g.

$Dg = \mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x - \sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} 2x - \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} 2x - |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 2x - (-x)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} 2x + x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} x\left(2+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= (-\infty)(2+1) = (-\infty)(3) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x - \sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} 2x - \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2x - |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} 2x - (x)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} 2x - x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

Scanned by CamScanner

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) = (+\infty)(2-1) = (+\infty)(1) = +\infty$$

$$g(x) = 2x - \sqrt{x^2+1} \Rightarrow g'(x) = 2 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = 2 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\forall x \in Dg, \sqrt{x^2+1} > 0$, alors le signe de $g'(x)$ dépend du signe du numérateur.

Posons $2\sqrt{x^2+1} - x > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+1} > x \Leftrightarrow \left(2\sqrt{x^2+1}\right)^2 > x^2 \Leftrightarrow$

$4(x^2+1) > x^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4 > x^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 4 > 0$ Vraie.

D'où $\forall x \in Dg,\ g'(x) > 0$

Ainsi $\forall x \in Dg$, g est strictement croissante et le tableau de variation suivant:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	0 ↗	$+\infty$

b- Montrons que $g(x) = 0$ admet une solution unique α que l'on déterminera.

D'après le tableau de variation de g, $\forall x \in]-\infty\ ;\ +\infty[$, g est définie, continue et strictement croissante de $]-\infty\ ;\ +\infty[$ vers $]-\infty\ ;\ +\infty[$. Alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha) = 0$
En utilisant la méthode de dichotomie, on obtient $\alpha = 0{,}57$.

c- En déduisons le signe de g sur $\mathbb{R}$

D'après le tableau de variation de g, $\forall x \in]-\infty\ ;\ \alpha[$, $g(x) < 0$.

$\forall x \in]\alpha\ ;\ +\infty[$, $g(x) > 0$.

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} - x$.

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.

On note (D) et (D') les droites d'équations respectives : $y = -3x$ et $y = x$.

a- Etudions les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2\sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x \to -\infty} 2|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x = \lim_{x \to -\infty} -2x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x$$

Scanned by CamScanner

$$= \lim_{x \to -\infty} -x\left(2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right) = -(-\infty)(2+1) = (+\infty)(3) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2\sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x \to +\infty} 2|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x = \lim_{x \to +\infty} 2x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right) = (+\infty)(2-1) = (+\infty)(1) = +\infty$$

b- Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

$$f(x) = 2\sqrt{x^2+1} - x \Rightarrow f'(x) = 2\times\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{2x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$$

c- En déduisons le tableau de variation de f.

$\forall x \in Df, \sqrt{x^2+1} > 0$, alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$

Or d'après 1) c) $\forall x \in]-\infty ; \alpha[, g(x) < 0 \Rightarrow \forall x \in]-\infty ; \alpha[, f'(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha ; +\infty[, g(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in]\alpha ; +\infty[, f'(x) > 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'x)$	$-$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

d- Déterminons la limite en $-\infty$ de $f(x)-(-3x)$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)-(-3x) = \lim_{x \to -\infty} 2\sqrt{x^2+1} - x + 3x = \lim_{x \to -\infty} 2\sqrt{x^2+1} + 2x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{(2\sqrt{x^2+1}+2x)(2\sqrt{x^2+1}-2x)}{2\sqrt{x^2+1}-2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{(2\sqrt{x^2+1})^2-(2x)^2}{2\sqrt{x^2+1}-2x}$$

Scanned by CamScanner

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4(x^2+1)-4x^2}{2\sqrt{x^2+1}-2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2+4-4x^2}{2\sqrt{x^2+1}-2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{2\sqrt{x^2+1}-2x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{2|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{-2x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{-2x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{-x(1+1)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{-2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Conséquence graphique : la droite d'équation $y = -3x$ est asymptote oblique à la courbe (C) de f en $-\infty$ car : $\lim_{x \to -\infty} f(x) - (-3x) = 0$

e- Montrons que la droite (D') est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$

La droite (D') est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$ si et seulement si :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x) = \lim_{x \to +\infty} 2\sqrt{x^2+1} - x - x = \lim_{x \to +\infty} 2\sqrt{x^2+1} - 2x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(2\sqrt{x^2+1}-2x)(2\sqrt{x^2+1}+2x)}{2\sqrt{x^2+1}+2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(2\sqrt{x^2+1})^2-(2x)^2}{2\sqrt{x^2+1}+2x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4(x^2+1)-4x^2}{2\sqrt{x^2+1}+2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2+4-4x^2}{2\sqrt{x^2+1}+2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{2\sqrt{x^2+1}+2x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{2|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{2x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{2x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x(1+1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Conséquence graphique : la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe (C) de f en $+\infty$ car : $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x) = 0$

f- Etudions la position de (C) par rapport aux deux droites (D) et (D').

Scanned by CamScanner

Pour cela, étudions le signe de $(-3x)-(x)$. Posons $(-3x)-(x)=0 \Leftrightarrow -3x+x=0$

$\Leftrightarrow -2x=0 \Rightarrow x=0$ et le tableau de signe de $(-3x)-(x)$ est le suivant :

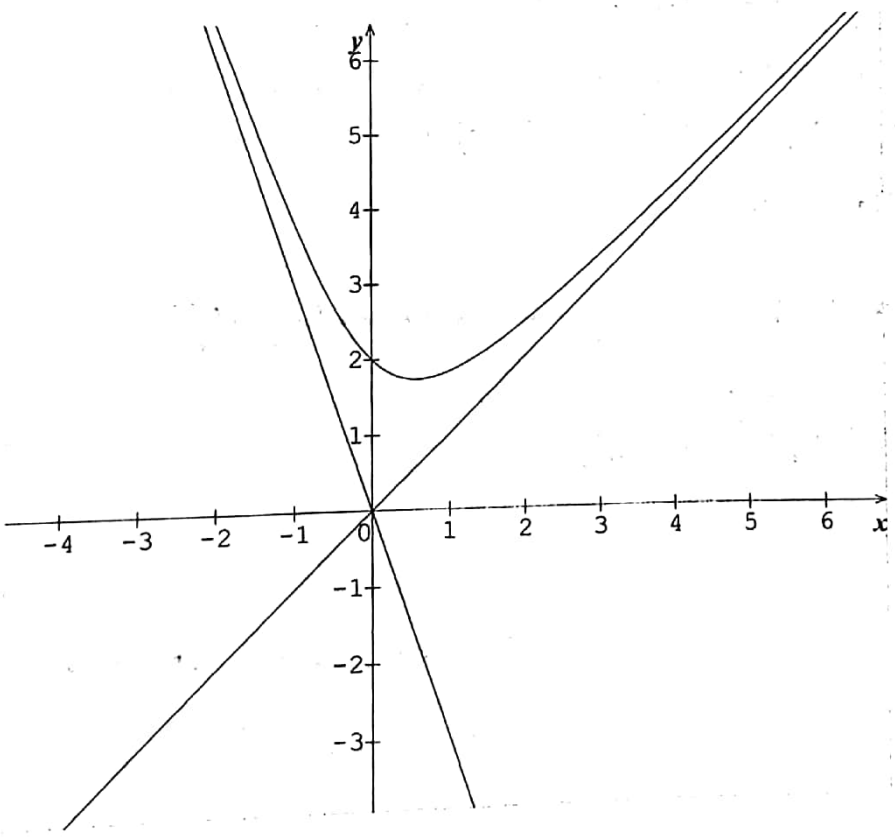
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(-3x)-(x)$		$+$	0	$-$	

D'après le tableau de signe de $(-3x)-(x)$,

$\forall x \in]-\infty;0[$, $(-3x)-(x)>0$. Alors $\forall x \in]-\infty;0[$, (D) est au dessus de (D')

$\forall x \in]0;+\infty[$, $(-3x)-(x)<0$. Alors $\forall x \in]0;+\infty[$, (D) est en dessous de (D')

g- Traçons la courbe (C), les droites (D) et (D').



Fonction irrationnelle –fonction avec valeur absolue.

44 Soit la fonction f définie par $f(x)=x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Donnons l'ensemble de définition Df de f .

Scanned by CamScanner

$Df = \left\{x/x \in \mathbb{R},\ \frac{1+x}{1-x} \geq 0\ et\ 1-x \neq 0\right\}$

(1) $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$: Résolvons l'inéquation $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$ en étudiant le signe de $\frac{1+x}{1-x}$.

Posons $1+x=0 \Rightarrow x=-1$ et $1-x=0 \Rightarrow x=1$.

D'où le tableau de signe de $\frac{1+x}{1-x}$ est le suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{1+x}{1-x}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi l'ensemble solution correspondant à l'inéquation $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$ est $[-1\ ;\ 1]$

D'autre part (2) $1-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

Alors la réunion de ces deux ensembles donne : $Df = [-1\ ;\ 1[$

2) Etudions les variations de f, puis traçons avec soins sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On donne : $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}6$ et $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -0{,}3$

$f(-1)=0$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$

$f(x) = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. $u = x \Rightarrow u' = 1$ et $v = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \Rightarrow v' = \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$\Rightarrow f'(x) = (u')(v) + (v')(u) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{x}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} =$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{(1-x)(-x^2+x+1)}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$

$\forall x \in Df, (1-x)^2\sqrt{1-x^2} > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $-x^2+x+1$

Car $1-x \neq 0$. Posons $-x^2+x+1=0 \Rightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}6$ et $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -0{,}3$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	-1		$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}6$		1
$f'x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-0{,}3$	↗	$+\infty$

Scanned by CamScanner



Scanned by CamScanner