Nouveau programme

Ministère de l'Education
de l'Alphabétisation et de la
Promotion des langues Nationales

République du Mali
****
Un peuple – Un but – Une foi

Mali – Maths

Série : TSE – STI

Tome 3

(Suites numériques – Probabilité – Barycentres – Applications affines – Coniques – Sujets Bac)

- Rappel de cours.
- Exercices et problèmes inédits.
- Corrigés détaillés.
- Sujets de types Bac.

6.000 FCFA

Edition 2014

Conçu et Réalisé par :

Mr DEMBELE Idrissa.(PESG).

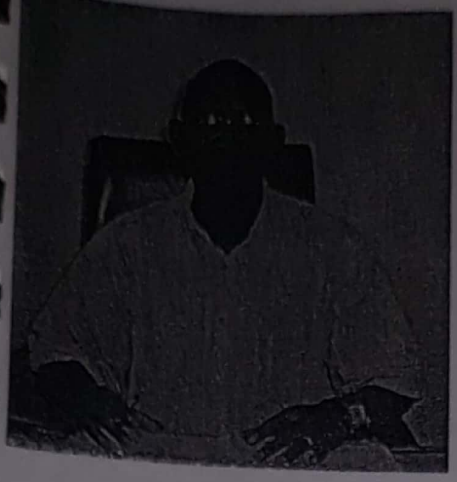
Cel : 79298938 / 65787728

Etablissement

(ECICA – Bamako – Mali)

Email : *idrissa_dembele30@yahoo.fr*

Scanned by CamScanner



Avants - Propos

Conformément au nouveau programme des mathématiques au Mali, ce présent manuel est le résultat d'un travail réalisé avec assiduité. Il a pour objectif d'être un tremplin pour les élèves des classes inférieurs afin d'uniformiser le niveau de ceux des classes supérieures. Outre cet objectif pédagogique, ce manuel est d'un apport inestimable pour l'acquisition des connaissances requises en mathématiques.
Chacun des chapitres recouvrant l'ensemble du programme, est composé de **04** parties :

Le cours :

Rien que **l'essentiel dans un langage clair et simple** soutenu par des **démonstrations.** Chaque définition ou théorème est suivi d'un exemple simple, en parfaite harmonie avec le programme en vigueur.

Les exercices et problèmes :

- **Les exercices :** Inédits et ordonnés suivant **l'évolution des cours**. Ils contribuent à l'acquisition et à l'assimilation correcte des cours.

- **Les problèmes :** Ils viennent en appoint aux exercices tout en restant fidèle au programme en vigueur.

Les corrigés:

Ils sont rédigés avec assiduité et appuyés par des **démonstrations claires et explicites.** Chaque corrigé est suivi d'un commentaire simple afin de faciliter son appréhension au profit de tous les élèves.

Les sujets d'examen

Introduit par des conseilles pratiques, ils sont le fruit d'une longue expérience professionnelle. En outre, ils sont constitués chacun de deux exercices et d'un problème. Cette séquence de sujets permet aux Bacheliers de s'auto-évalués après 9 mois d'acquisition de connaissance.

Je souhaite donc une utilisation rationnelle de ce manuel qui ne saurait se substitue aux cours des professeurs en classe, mais qu'il constitue un support efficace et utile surtout au profit des apprenants pour mieux comprendre les mathématiques dans toute sa diversité. A cet effet, je tien à remercier **Dieu le tout puissant** de m'avoir donné l'occasion de réalisé ce manuel et tous ceux qui de loin ou de près on contribués à l'élaboration de ce modeste travail. Compte tenue du faite que toute œuvre humaine est imparfaite, vos critiques et suggestions seront la bienvenue pour améliorer d'avantage la qualité de ce travail que je publierais dans une future édition.

L'auteur

Scanned by CamScanner

Sommaire TSE – STI. Tome 3

Chapitres	Pages
Suites numériques Généralités. Convergence d'une suite. Suite majorée – Suite minorée – Suite bornée. Relation entre les limites. Suite arithmétiques. Suite géométriques. Suite économiques. **Exercices et corrigés**	1
Probabilités Dénombrements. Probabilité simple. Probabilité conditionnelle et indépendance. Loi probabilité. **Exercices et corrigés**	46
Barycentres Barycentre d'un système de points. Etudes des fonctions scalaires et vectorielles de Leibniz. Triangle et produits scalaires. **Exercices et corrigés**	86
Applications affines Définitions et propriétés d'une application affine. Expressions analytiques d'une application affine. Caractérisation des applications affines (Translations, homothéties, rotations) Classification des isométries. Applications du plan définies par une application complexe : $z \mapsto f(z)$; cas des similitudes. **Exercices et corrigés**	122
Coniques Paraboles. Ellipses. Hyperboles. **Exercices et corrigés**	177
Sujets de types Bac	189

Scanned by CamScanner

Chapitre 8 Suites numériques

COURS

I- Généralité :

1) Définition :

On appelle suite numérique toute fonction définie de $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On note

$U : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \to U(n) = u_n$

2) Mode de définition d'une suite :

- Une suite peut être définie par 1 formule explicite c'est-à-dire u_n en fonction de n $u_n = f(n)$.
-

Exemple : $u_n = n + 3$; $v_n = \frac{2n - 4}{n + 1}$; $w_n = 4n^2 - 3n + 1$

- Une suite peut être définie par son 1er terme et une formule de récurrence, c'est-à-dire u_{n+1} s'exprime en fonction de u_n.
-

Exemple : soit la suite : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + 4 \end{cases}$

3) Sens de variation d'une suite

- Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ alors u_n est croissante
- Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ alors u_n est décroissante
- Si $u_{n+1} - u_n = 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ alors u_n est constante

4) Représentation des termes d'une suite :

Pour représenter les termes d'une suite u_n sur l'axe de abscisses, on trace la 1ère bissectrice (D) d'équation $= x$. Puis on trace la fonction associée à la suite u_n en posant $u_n = x$ et $u_{n+1} = f(x)$. On détermine les termes de la suite sur l'axe des abscisses par projection.

Exemple

Soit (u_n) définie Par : $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{3 + 2U_n}{2 + U_n} \end{cases}$

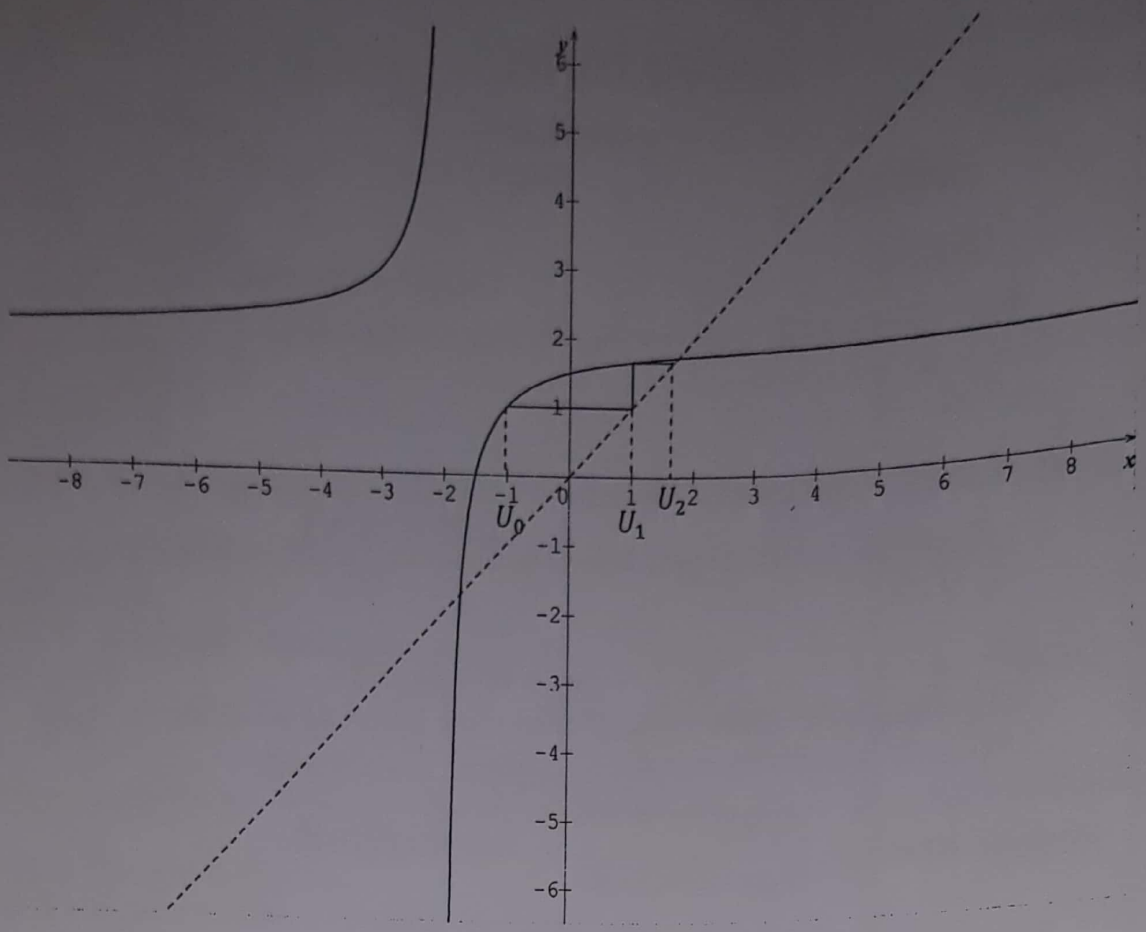
Représenter sur l'axe (ox) les 3 premiers termes de la suite u_n.

Solution

Désignons par f la fonction définie sur $]-2 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3 + 2x}{2 + x}$

En suivant les règles de constructions ci-dessous, on a la représentation suivante :

Scanned by CamScanner



II- Convergence d'une suite

Définition :

Une suite u_n est dite convergente si et seulement si son terme général u_n a une limite finie l. on note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l \quad \text{avec } l \in \mathbb{R}$$

NB : Si $\lim_{n \to -\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Alors u_n est dite divergente.

III- Suite majorée – minorée –bornée :

1) Définitions :

- Une suite u_n est majorée si et seulement $\forall\, a \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N} : U_n \leq a$.
- Une suite u_n est minorée si et seulement $\forall\, a \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N} : U_n \geq b$.
- Une suite u_n est bornée si et seulement $\forall\, a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}$ et que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a : $b \leq u_n \leq a$

Scanned by CamScanner

2) **Théorèmes :**

a) **Théorème 1 :**

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

b) **Théorème 2 :**

Tout sous-ensemble non vide E de nombres réels a une borne supérieure A : c'est-à-dire
$\forall x \in E ; x \leq A$

3) **Propriétés :**

Soient u_n et v_n deux suites tel que :
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l'$

On a les propriétés suivantes :

P₁ : Si $u_n \leq v_n$: alors $l \leq l'$

P₂ : $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = l + l'$

P₃: Si (u_n) est bornée et si (v_n) est divergente, alors :

a) $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n + v_n) = +\infty$ b) $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n \times v_n) = \infty$

IV- Relations entre les limites :

Théorème : **(Théorème des gendarmes).**

Considérons les trois suites u_n ; v_n et w_n $(n > n_o)$
Tel que : $u_n \leq v_n \leq w_n$
u_n et w_n Si converge vers la même limite l ; alors v_n converge vers l.

Preuve :

A partir de la relation donnée entre les suites on a :

$$\lim_{n \to \infty} u_n \leq \lim_{n \to \infty} v_n \leq \lim_{n \to \infty} w_n$$

$\Leftrightarrow$

$$l \leq \lim_{n \to \infty} v_n \leq l$$

Alors $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = l$

Scanned by CamScanner

V- Suites Adjacentes :

Définition :

Une suite (u_n) est adjacente à une autre suite (v_n) si l'une des deux suites est décroissante tandis que l'autre est croissante et si
Alors $\lim_{n \to \infty} (u_n - v_n) = 0$

Théorème 1 :

Si les suites u_n et v_n sont adjacentes ($u_n$croissante et $v_n$décroissante) alors :
$\forall\ n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \leq v_n$.

Preuve :

Supposons que le contraire de la conclusion du théorème soit vrai pour $n = k$, c'est-à-dire : $u_k \geq v_k$.
Pour $n > k$, puisque u_n est décroissante et que v_n est décroissante, on a :
$u_n \geq u_k \geq v_k \geq v_n$

$\Rightarrow (u_n - v_n) \geq (u_k - v_k)$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} (U_n - V_n) \neq 0$

Théorème 2 : si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent à une même limite.

Preuve :

Puis que les suites sont adjacentes et que u_n est croissante et v_n décroissante, le **théorème 1** implique : $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$
On note alors que :

a) u_n est croissante et elle est majorée par v_0, donc elle converge vers l.
b) v_n est décroissante et elle est minorée par u_0 donc elle converge vers l'.

Ainsi
$\lim_{n \to \infty} (U_n - V_n) = l - l'$

$\Rightarrow 0 = l - l' <=> l = l'$
Ce qu'il fallait prouver.

VI- Suites Arithmétiques

1) Définition :

Une suite u_n est dite arithmétique si et seulement si : $\forall n \in N$; $u_{n+1} - u_n = r$.
r est appelé la raison de la suite u_n .

Scanned by CamScanner

2) Expression du terme général :

D'une façon générale si u_p est le 1er terme l'expression du terme générale d'une suite arithmétique est : $u_n = u_p + (n-p)r$

3) Termes équidistants d'une suite :

Soit (u_n) $n \in \mathbb{N}$ une suite arithmétique p un entier naturel tel que $p \leq n$ les termes u_p et u_{n-p} sont des termes équidistants des termes extrêmes u_0 et u_n car il ya p termes avant le terme u_p et p termes après le terme u_{n-p} on a :

4) Somme des termes équidistants d'une suite arithmétique

Soit p un entier naturel tel que $p \leq n$
Les termes u_p et u_{n-p} sont des termes équidistants des termes extrêmes
$u_p + u_{n-p} = (u_0 + pr) + (u_0 + (n-p)r) = u_0 + (u_0 + nr)$ d'où
$u_p + u_{n-p} = u_0 + u_n$ d'où le théorème

Théorème : la somme de deux termes équidistants d'une suite arithmétique est égale à la somme des termes extrêmes

5) Propriétés :

En application du théorème on a :
P_1 : Trois nombres a, b, c forment une progression arithmétique si :
$2b = a + c$.

Preuve : Soit a, b et c trois réels
$b = a + r$
$c = b + r$
$a + c = a + b + r = 2a + 2r = 2(a + r)$. *Alors* : $a + c = 2b$

P_2 : Trois nombres a, b, c forment une progression arithmétique de raison r si :
$b = a + r$ et $c = a + 2r$.

P_3 : Quatre nombres a, b, c, d forment une progression arithmétique de raison r si :
$3b - d = 2d$

P_4 : Soit u_n une suite arithmétique de 1er terme u_0. La somme de deux termes équidistants est toujours à la somme des extrêmes
$u_0, u_1, u_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots u_{n-2}; u_{n-1}; u_n$
$u_1; u_{n-1}$ sont équidistants
$u_0 + u_n = u_p + u_{n-p}$

6) Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit u_n une suite arithmétique de raison r. On a : $u_{n+1} - u_n = r$ d'où :
- Si $r > 0$ alors u_n est croissante
- Si $r < 0$ alors u_n est décroissante
- Si $r = 0$ alors u_n est constante

Scanned by CamScanner

7) Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique :

Soit u_n une suite arithmétique de 1er terme u_p et de raison r.
La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique est :

$$S_n = \frac{(n-p+1)(U_p+U_n)}{2} \quad \text{ou} \quad S_n = \frac{(n-p+1)[2U_p+(n-p)r]}{2}$$

Remarque : une suite arithmétique est toujours divergente

VII- Suites géométriques

1) Définition :

U_n est une suite géométrique si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N} \ \frac{U_n+1}{U_n} = q$ ou $U_{n+1} = qU_n$.

q est un réel fixé appelé la raison de la suite géométrique.

2) Expression du terme générale

D'une façon générale si u_p est le 1er terme et r sa raison, alors l'expression du terme générale d'une suite géométrique est : $u_n = u_p(q)^{n-p}$

3) Produit des termes équidistants des termes extrêmes d'une suite géométrique :

Théorème : Le produit de deux termes équidistants des termes extrêmes est égal au produit des termes extrêmes c'est-à-dire $U_p \times U_{n-p} = U_0 \times U_n$

4) Propriétés :

P_1 : Trois nombres a, b, c forment une progression géométrique si :

$b^2 = ac$. **(en application du théorème précédent)**

P_2 : Trois nombres a, b, c forment une progression géométrique de raison q si :

$b = qa$ et $c = q^2a$.

P_3 : Quatre nombres a, b, c, d forment une progression géométrique de raison q si :

$b = qa$; $c = q^2a$ et $d = q^3a$

5) Sens de variation d'une suite géométrique :

Soit u_n suite géométrique de raison et de 1er terme u_0 :

- **1er cas** $U_0 > 0$: si

- $q > 1 \Rightarrow u_n$ est croissante
- $0 < q < 1 \Rightarrow u_n$ est décroissante

Scanned by CamScanner

- q = 1 alors u_n constante

  - **2è Cas** $U_0 < 0$: si

- q > 1 alors u_n est croissante

- 0 < q < 1 alors u_n est décroissante

- q = 1 alors u_n est constante

6) Convergence d'une suite géométrique :

La limite d'une suite étant la limite de son terme général une géométrique est convergente si $-1 < q \leq 1$

La suite est divergente si $q \in]-\infty; -1] \cup]1; +\infty[$

7) Somme des termes d'une suite géométrique :

D'une manière générale si Up est le 1er terme alors l'expression de la somme est :

$$S_n = \frac{U_p(1-q^{n-p+1})}{1-q} \quad \text{Avec } (q \neq 1)$$

8) Cas d'une suite géométrique :

Soit u_n une suite géométrique de raison q

- Si $|q| < 1$ alors U_n converge vers 0

- Si $|q| > 1$ alors U_n est divergente

- Si $|q| = 1$ alors U_n converge vers U_0

VIII- Suites économiques :

1) Les intérêts :

L'intérêt est la rémunération d'un placement pendant une période donnée,
(c'est-à-dire entre un temps T_1 et un temps T_2).
Ainsi les intérêts sont classés en deux catégories: **(intérêts simples et intérêts composés).**

NB :

- L'intérêt simple est utilisé pour des placements à court et moyen terme.
- L'intérêt composé est utilisé pour des placements à long terme.

Scanned by CamScanner

a- **Intérêts simples :**

Un placement est fait à intérêt simple, lorsque, à des époques fixées d'avance celui qui prête ou place son argent en touche les intérêts de façon que le capital placé reste le même jusqu'à l'époque du remboursement.

Sa formule est :

$$I = \frac{C \cdot t \cdot n}{P} = \frac{(Capital\ placé) \cdot (Taux\ d'intérêt) \cdot (Durée\ du\ placement)}{Période}$$

NB :

- Si : n est en **jours**, alors la **période** $P = 36.000$.
- Si : n est en **mois**, alors la **période** $P = 1.200$.
- Si : n est en **année**, alors la **période** $P = 100$.

b- **Intérêts composés :**

Un placement est fait à intérêt composé, lorsque, à la fin de chaque unité de temps, l'intérêt est ajouté au capital pour produire un intérêt à son tour, pendant l'unité de temps suivante.

Sa formule est :

$$I_n = C_0\left[(1 + i)^n - 1\right] = (Capital\ initial)\left[(1 + taux\ d'intérêt)^{Durée} - 1\right]$$

NB :

- 1 an = 2 semestres = 4 trimestres = 12 mois.
- 1 semestre = 2 trimestres = 6 mois = $\frac{1}{2}$an.
- 1 trimestre = $\frac{1}{2}$semestre = 3 mois = $\frac{1}{4}$an.
- 1 bi - an = 4 semestres = 8 trimestres = 24 mois = 2 ans.

c- **Valeurs acquises :**

$$C_n = C_0(1 + i)^n = (Capital\ initial)(1 + Taux\ d'intérêt)^{Durée}$$

NB :

Le taux d'intérêt s'exprime toujours en pourcentage (%)

2) **Taux de décroissance – Taux d'accroissement d'une population :**

a-**Notion de population et d'individu :**

L'ensemble sur le quel porte une étude statistique est appelé **population** et un élément de cet ensemble est **l'individu**.

Scanned by CamScanner

NB :
Dans une étude statistique, les mots : population et individu peuvent désignés des **êtres**, des **objets animés** ou **inanimés**.

b-Taux de décroissance d'une population :

Définition :
Soit **(en %)** est le taux de décroissance d'une population et U_P la population initiale à l'année n, alors le taux de décroissance de cette population représente une progression géométrique de premier terme U_P et de raison $q = 1 - t$.
Ainsi le taux de décroissance d'une population à l'année n est donné par l'expression :
$U_n = U_P(1-t)^{n-P}$ ou $U_n = U_P(q)^{n-P}$ avec $q = 1 - t$.

NB :
Si la population initiale est U_P à l'année n_1, alors la population à l'année n_2 est :
$U_{n_2-n_1} = U_P(1-t)^{(n_2-n_1)-p}$ ou $U_{n_2-n_1} = U_P(q)^{(n_2-n_1)-p}$ **avec** $q = 1 - t$

c-Taux de d'accroissement d'une population :

Définition 1 :
Soit **(en %)** est le taux d'accroissement d'une population et U_P la population initiale à l'année n, alors le taux d'accroissement de cette population représente une progression géométrique de premier terme U_P et de raison $q = 1 + t$.
Ainsi le taux d'accroissement d'une population à l'année n est donné par l'expression :
$U_n = U_P(1+t)^{n-P}$ **ou** $U_n = U_P(q)^{n-P}$ **avec** $q = 1 + t$.

NB :
Si la population initiale est U_P à l'année n_1, alors la population à l'année n_2 est :

$U_{n_2-n_1} = U_P(1+t)^{(n_2-n_1)-p}$ ou $U_{n_2-n_1} = U_P(q)^{(n_2-n_1)-p}$ **avec** $q = 1 + t$

Définition 2 :
Si r exprimé **(en FCFA)** est la raison d'accroissement d'une population et u_p la population initiale à l'année n, alors la raison d'accroissement de cette population représente une progression arithmétique de premier terme u_p et de raison r.
Ainsi la raison d'accroissement d'une population à l'année n est donnée par l'expression :
$u_{n+1} - u_n = r$

Scanned by CamScanner

EXERCICES

Généralité sur les suites.

1 Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses:
1) Toute suite bornée est convergente.
2) Toute suite décroissante à termes positifs converge vers 0.
3) La somme de deux suites divergentes est toujours une suite divergente.
4) Toute suite à termes positifs, convergente vers 0 est décroissante.
5) Si une suite à termes positifs diverge, alors sa limite est $+\infty$.

2 Etudier la convergence des suites suivantes :
a) $U_{n+1} = n - U_n$ et $U_0 = -5$; **b)** $U_n = \sqrt{n^2 + n} - n$; **c)** $U_n = sin\left(n\pi - \frac{1}{n}\right)$

3 On considère les suites U_n et v_n définies par : $U_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 - \frac{1}{n^2}$
Montrer que les suites U_n et v_n sont adjacentes

4 Soit u_n la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = ln(1 + u_n) \end{cases}$

Tracer la courbe représentation de la fonction $x \mapsto ln\,(1 + x)$ puis en déduire une représentation graphique des 4 premiers termes de la suite u_n

Suites arithmétiques – Suites géométriques.

5 **1)** Calculer dans chacun des cas suivants d'une suite arithmétique.
a- La raison r et la somme S_n si : $U_1 = 397$; $U_n = 64$ et $n = 1000$
b- L'entier n et la raison r si : $U_1 = -4$; $U_n = 6$ et $S_n = 28$
c- Le premier terme U_1 et la somme S_n si : $U_n = 105$; $n = 17$ et $r = -2$

2) Calculer dans chacun des cas suivants d'une suite géométrique.
a- L'expression U_n et la somme S_n si : $U_1 = 2$; $q = 3$ et $n = 5$
b- La raison q et la somme S_n si : $U_1 = 162$; $U_n = 32$ et $n = 5$

6 Soit u_n une suite géométrique décroissante tel que : $\begin{cases} u_0 \times u_3 = 32 \\ u_0 + u_3 = 18 \end{cases}$

1) Calculer u_0 et u_3
2) Déterminer la raison de la suite u_n .
3) Donner l'expression de la suite u_n en fonction de n.
4) On pose $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. Calculer S_n en fonction de n puis en déduire la somme des 20 premiers termes de la suite u_n

Scanned by CamScanner

7 Déterminer une suite arithmétique u_n sachant que la somme de ces n premiers termes est égale à $3n^2 + 4n$ $(avec\ n \in \mathbb{N})$

8 Soit les suites u_n et v_n définie par : $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1-u_n} \end{cases}$ et $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n}$

1) Calculer v_{n+1} en fonction de u_n puis en fonction de v_n.
2) En déduire que v_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme v_1
3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
4) On pose $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$
   a) Exprimer S_n en fonction de n
   b) Calculer la somme de 30 premiers termes de la suite v_n

9 On donne deux suites (u_n) et (v_n) telles que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 3v_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \end{cases}$$

1) Calculer : u_n et v_n pour $n \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$.
2) On définit deux suites (X_n) et (Y_n) par : $X_n = u_n + v_n$ et $Y_n = u_n - v_n$

a) Montrer que (X_n) est une suite géométrique et (Y_n) une suite constante.
b) Exprimer u_n puis v_n en fonction de n.

10 On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par $u_n = 1$;
$u_{n+1} = 2u_n + 1$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$

a) Montrer que v_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

c) Soit la somme $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$

Montrer que pour tout entier naturel n, $S_n = u_n - u_0$

Calculer S_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

11 Soit la suite $S_n = 0,\underbrace{555\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5}_{n \text{ Chiffres } 5}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Prouver que S_n est la somme des n termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 0,5.
2) En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; $S_n = \frac{5}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$

12 1) Soit (u_n), $n \in \mathbb{N}$, une suite de raison r $(r \neq 0)$.
On définie la suite (v_n), $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_n}$.

a- Montrer que (v_n), est une suite géométrique dont on détermineras la raison et le premier terme v_0 (on exprimera v_0 en fonction de u_0).

b- Etudier suivant les valeurs de r la convergence de la suite v_n

2) Soit w_n $n \in \mathbb{N}$, la suite définie par $w_n = \int_0^n \frac{1}{4}e^{-2x}dx$.

Scanned by CamScanner

a- Calculer w_n en fonction de n.
b- Montrer que w_n converge vers un nombre réel l que l'on précisera.
c- On pose $S_n = w_1 + w_2 + \ldots\ldots\ldots + w_n - \frac{n}{8}$.
Calculer S_n en fonction de n puis en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

13 On considère les suites u_n et v_n définies pour tout entier naturel n par définies par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}(U_n)^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = ln\left(\frac{3}{2}U_n\right)$$

1) Calculer v_0.
2) Démontrer que v_n est une suite géométrique de raison 2.
3) Exprimer v_n en fonction de n.
4) Calculer la limite de v_n .
5) Exprimer u_n en fonction de v_n puis en déduire la limite de u_n
6) Pour tout entier naturel n, on pose :
$S_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_{n-1}$ et $T_n = u_0 \times u_1 \times \ldots\ldots \times u_{n-1}$
a- Démontrer que : $S_n = (1 - 2^{n+1})ln2$
b- Justifier que $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$ puis en déduire T_n en fonction de n.

14 On considère la suite numérique u_n définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = e^{2n-1}$
1) a) Calculer $u_0, u_1 ; u_2 ; u_3$ et u_{n+1}
b) Démontrer que la suite u_n est une suite géométrique dont on précisera la raison.
c) Exprimer en fonction de n la somme $S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$
En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$
d) Trouver la valeur minimum de n telle que $S_n \geq 10$

2) Soit la suite v_n définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = ln(u_n)$
a) Exprimer la somme $S'_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_n$ en fonction de n
b) Exprimer le produit $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots\ldots \times u_n$ en fonction de n

15 Soit la suite $u_n;\ n \in \mathbb{N}^*$ à termes positifs tel que : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (u_{n+1})^2 = u_n \times e \end{cases}$

1) Calculer puis exprimer $u_1 ; u_2 ; u_3$ en fonction de e^k où $k \in \mathbb{R}$.
2) On pose $v_n = ln(u_n) - a$ (où $a \in \mathbb{R}^*$ n et $\mathbb{N}^*$).
a) Déterminer le réel a pour que v_n soit une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_1.
b) Calculer la limite de v_n puis celle de u_n en $+\infty$

16 Après les élections présidentielles 2013 au Mali, l'analyse des résultats a montré que le candidat élu avait obtenu v_1 voies, le 2^e avait obtenu v_2 voies, ainsi de suite jusqu'au dernier des n candidats qui avait obtenu v_n voies. De plus on a constaté que le $k^{ième}$ candidat avec

Scanned by CamScanner

$(k \geq 1)$ avait obtenu le double de voies de son successeur immédiat $(k+1)^{ième}$ du classement ; définissant ainsi une suite numérique $(v_n)_{n \geq 1}$

1) Prouver que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q.
2) Le nombre total de votants appelé suffrage exprimé est $v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$.
   Un candidat est élu président dès le 1er tour, lorsque son nombre de voies v_1 dépasse la moitié de S_n où S_n désigne le suffrage exprimé.
   a) Déterminer en fonction de n et v_1 le suffrage exprimé S_n.
   b) Examiner si un deuxième tour à cette élection eut été nécessaire.
3) En effet le nombre total des votants fut 945 et le candidat fut élu par ses 480 voies.
   Déterminer alors le nombre n de candidats qui avaient postulés.

17 Soit la suite u_n définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{4}{4-u_n}$ $(n \in \mathbb{N})$

1) a) Déterminer u_0 pour que u_n soit constante.
   b) Démontrer que si $u_n < 2$ alors $u_n < u_{n+1} < 2$ $(n \in \mathbb{N})$ En déduire que si $u_0 < 2$ alors pour tout entier naturel on a : $u_n < 2$ et que la suite est monotone.

2) On suppose maintenant que $u_0 = -1$
a) Calculer u_1 ; u_2; u_3.

b) Soit la suite v_n définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$. Démontrer que v_n est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.
c) Calculer u_n en fonction de n puis étudier sa limite en $+\infty$.

18
1) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel m, les restes de la division euclidienne par 16 des entiers 5^m et 6^m
2) Soit u_n la suite arithmétique de raison 16 et de premier terme $u_0 = 9$ et v_p la suite géométrique de raison $q = 5$ et de premier terme $V_o = 1$. Démontrer que ces deux suites ont une infinité de termes égaux dont on calculera les deux premiers.
3) Soit u'_n la suite arithmétique de raison 16 et de premier terme $u'_0 = 8$ et v'_p la suite géométrique de raison 6 et de premier terme $v'_0 = 9$. Démontrer que ces deux suites n'ont qu'un seul terme en commun que l'on déterminera.

Progression arithmétiques – Progression géométriques.

19 Trouver 3 nombres consécutifs a ; b et c d'une suite en progression arithmétique sachant que $\begin{cases} a+b+c = 3 \\ 3a-6b+c = 6 \end{cases}$

Trouver 3 nombres consécutifs a ; b et c d'une suite en progression géométrique sachant que $\begin{cases} a \times b \times c = 8 \\ a+b = -1 \\ c-a = 1 \end{cases}$

Scanned by CamScanner

20 Soient a et b deux réels tel que : $(a\,;\ a+4b\,;\ 5a+2b)$ et $(b+3\,;\ 3a+1\,;\ 6a+b)$ soient des termes consécutifs de suite respectivement arithmétique et géométrique. Trouver a et b.

21 Quatre (4) entiers strictement positifs a, b, c, et d forment dans cet ordre une suite géométrique dont la raison est un entier premier avec a.
Trouver ces nombres sachant qu'ils vérifient en outre la relation $10a^2 = d - b$.

22 Soit u_n une suite dans laquelle les dix premiers termes de la suite sont en progression arithmétique de raison r et à partir de u_{10} les termes sont en progression géométrique de raison q.

On donne : $u_1 = 0$; $u_{16} = \frac{-1}{27}$ et $qr = 1$

1) Calculer q ; r ; u_{10} et u_{11}
2) Calculer la somme S_n des n premiers termes de la suite u_n dans les deux cas suivants:
a) $n \leq 10$ b) $n > 10$

23 1) Quatre entiers strictement positifs a ; b ; c et , forment dans cet ordre une suite géométrique dont la raison q est un entier premier avec a. Trouver ces nombres sachant qu'is vérifient en outre la relation $10a^2 = d - b$.
2) soient Z_1 ; Z_2 et Z_3 trois nombres complexes dont le produit est $3i\sqrt{3}$, les arguments respectifs a_1 ; a_2 et a_3 forment une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$ et les modules r_1 ; r_2 et r_3 une suite géométrique de raison 2. Sachant que $0 < a_1 < \frac{2\pi}{3}$.
Déterminer : Z_1 ; Z_2 et Z_3.

Suites économiques.

24 Au 1er Janvier 2012, le prix d'un kilo de sucre est de 550 f CFA.
Le prix du kilo subit une augmentation de 50 f CFA au 1er Janvier de chaque année.
1) Quel serait le prix du kilo de sucre au 1er Janvier 2013 ? Au 1er Janvier 2014 ?
2) On désigne par P_n le prix du kilo du sucre au 1er Janvier $+ n$. Calculer P_n en fonction de n
3) Calculer $P_{n+1} - P_n$ puis en déduire la nature de la suite P_n.

25 Le premier Janvier 1999, la population d'une commune rurale était de 3000 habitants.
On admet que cette population diminue de 4 % chaque année.
Calcule la population de cette commune :
1) Au 1er Janvier 2005
2) Au 1er Janvier 2006
3) Au 1er Janvier 2012

26 Un capital A est placé à intérêts composés aux taux de 3% l'an. On appelle C_0 le capital initial et C_n le capital après n années.
1) Expliquer la relation $C_1 = 1{,}03C_0$ puis écrire le capital C_n en fonction de C_0 et .
2) Au bout de combien d'années le capital est –il doublé ?
3) Au bout de combien d'années le capital est –il triplé ?

Scanned by CamScanner

27 Ali a reçu de son père une somme de 100.000 FCFA.
Après réception, il dépose cette somme dans une caisse d'épargne le 1er Janvier 2009 à intérêt composé au taux annuel de 5 % en vue d'acheter une moto à 300000 FCFA.

1) A partir de quelle année pourra-t-il acheter sa moto sachant qu'il ne dispose que de cette somme ?
2) Quelle serrait la nouvelle valeur acquise par Ali s'il place un capital de 100.000 FCFA au bout de 30 semestres au taux de 2 % par semestre ?

28 1) Chaque année la grand-mère de Salif dépose de l'argent dans une banque afin de constituer une cagnotte pour son petit-fils.
Elle a commencé le 1er janvier 1982 par un dépôt de 500 F. Depuis lors, elle a effectué un dépôt chaque 1er janvier, en augmentant chaque année le montant de ce dépôt de 50 F.
On note :

- u_n le montant exprimé en francs, de la somme déposée dans la caisse d'épargne le 1er janvier 1982+ n. (Ainsi $u_0 = 500$; $u_1 = 550$; …)
- S_n le montant, en francs, de la somme contenue dans la caisse d'épargne après le dépôt de l'année 1982+ n. (Ainsi $S_0 = 500$; $u_1 = 1050$; …)

a- Calculer u_2, puis exprimer u_n en fonction de n.
b- Calculer S_2, puis exprimer S_n en fonction de n.
c- Le 1er janvier 2002, la grand-mère de Salif effectue son dépôt habituel (en franc), puis offre l'argent de la caisse à Salif. Quel est le montant de la somme reçue par Salif ? Exprimer cette somme en franc puis en euros.(Rappel :1€ = 6,55957 franc).

2) Avec le cadeau de sa grand-mère, Salif décide d'ouvrir un compte bancaire et d'y placer la plus grande partie de la somme qu'il a reçue.

Le 1er janvier 2002,il effectue un placement de 3000 €, à intérêts composés, aux taux annuel de 4%.(A la fin de chaque année, les intérêts seront incorporés au capital). De plus, chaque 1er janvier des années suivantes, il décide d'ajouter sur son compte la somme de 200€.
On note :

- C_n le montant exprimé en euros, du capital disponible sur le compte bancaire de Salif après n années de placement. (Ainsi $C_0 = 3000$)
- (u_n) la suite définie par $u_n = C_n + 5000$. (Ainsi $u_0 = 8000$)

a- Justifier que pour tout entier naturel n, on a : $C_{n+1} = 1{,}04C_n + 200$
b- Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
c- Exprimer u_n en fonction de n, puis C_n en fonction de n.
d- Combien d'années, au minimum, Salif devra-t-il attendre pour disposer d'une somme de 6000 euros sur son compte bancaire ?

Scanned by CamScanner

Solutions

Généralité sur les suites.

1 Vérifions si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses:

1) Toute suite bornée est convergente. $(\boldsymbol{Faux})$
Exemple : la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est bornée mais n'est pas convergente.

2) Toute suite décroissante à termes positifs converge vers 0. $(\boldsymbol{Faux})$

Puisque cette suite est à termes positifs, elle est minorée par 0. Cette suite étant décroissante et minorée, elle est convergente. Mais elle ne converge pas nécessairement vers 0.
Exemple : la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ est décroissante, à termes positifs. Elle est bien convergente et sa limite est 1.

3) La somme de deux suites divergentes est toujours une suite divergente. $(\boldsymbol{Faux})$
Exemple : les suites de termes généraux $u_n = (-1)^n$ et $u_n = 1 - (-1)^n$ sont divergentes, mais leur somme est une suite constante, donc convergente.

4) Toute suite à termes positifs, convergente vers 0 est décroissante. $(\boldsymbol{Faux})$

Exemple : la suite de terme général $\begin{cases} u_n = e^{-n} & si\ n\ est\ pair \\ u_n = \frac{10}{n} & si\ n\ est\ pair \end{cases}$
est à termes positifs et converge vers 0 car la limite en $+\infty$ de e^{-n} et $\frac{10}{n}$ est 0 mais n'est pas décroissante. En effet, on a par exemple : $u_1 < u_2$

5) Si une suite à termes positifs diverge, alors sa limite est $+\infty$.$(\boldsymbol{Faux})$
Exemple : les suites de terme général $u_n = 3 + cos(n)$ est divergente mais sa limite n'est pas $+\infty$

2 Etudions la convergence des suites suivantes :

a) $U_{n+1} = n - U_n$ et $U_0 = -5$

Le calcul des premiers termes montre qu'il semble y avoir un écart de 1 entre deux termes de rangs pairs (ou impairs) consécutifs. Montrons- le.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a $U_{n+1} = n - U_n$ alors :

$U_{n+2} = (n+1) - U_{n+1} = (n+1) - (n - U_n) = n + 1 - n + U_n = 1 + U_n$

$\Rightarrow U_{n+2} = 1 + U_n \Leftrightarrow U_{n+2} - U_n = 1$

Ainsi, la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = u_{2n}$ (les termes de rang pairs), est une suite arithmétique de raison 1.

Scanned by CamScanner

Par conséquent, elle est divergente et sa limite est$+\infty$.
Il en est de même pour la suite(w_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $w_n = u_{2n+1}$ (les termes de rang impairs).
On conclut que la suite est (u_n) est divergente et sa limite est$+\infty$.

b) $U_n = \sqrt{n^2+n} - n$

$$U_n = \sqrt{n^2+n} - n = \frac{(\sqrt{n^2+n} - n)(\sqrt{n^2+n} + n)}{(\sqrt{n^2+n} + n)} = \frac{(\sqrt{n^2+n})^2 - n^2}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} + n} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}} + n} = \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}$$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2}$

D'où la suite U_n est convergente et sa limite est $\frac{1}{2}$

c) $U_n = \sin\left(n\pi - \frac{1}{n}\right)$

Si n est pair, $U_n = -\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ et si n est impair, $U_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} -\sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

D'où la suite U_n est convergente et sa limite est 0

3 On considère les suites u_n et v_n définies par : $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 - \frac{1}{n^2}$
Montrons que les suites u_n et v_n sont adjacentes

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n - u_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n^2} - 1 + \frac{1}{n} = -\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - U_n) = 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} - 1 + \frac{1}{n} = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0.$

On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_{n+1} - v_n = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} < 0$

$\Rightarrow v_{n+1} - v_n < 0.$

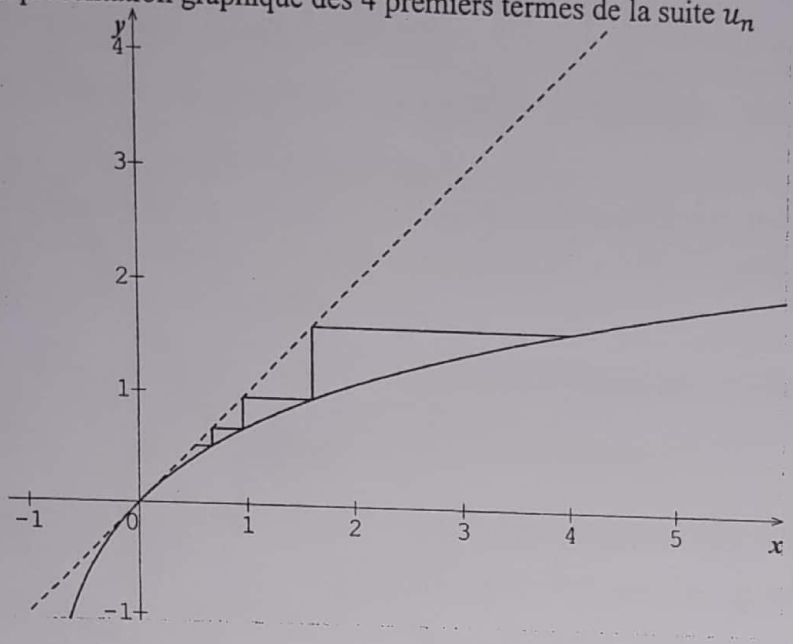
Scanned by CamScanner

On en déduit que la suite (v_n) est décroissante.

Comme la suite (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $(v_n - U_n)$ tend vers 0, on conclut que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4 Soit u_n la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = ln(1 + u_n) \end{cases}$

Traçons la courbe représentation de la fonction $x \mapsto ln(1 + x)$ puis en déduisons une représentation graphique des 4 premiers termes de la suite u_n



Suites arithmétiques – Suites géométriques.

5 1) Calculer dans chacun des cas suivants d'une suite arithmétique.

a- La raison r et la somme S_n si : $U_1 = 397$; $U_n = 64$ et $n = 1000$
L'expression des n premiers d'une suite arithmétique de 1er terme U_1 et de raison r est: $U_n = U_1 + r(n-1)$.

$U_n = U_1 + r(n-1) \Leftrightarrow 64 = 397 + r(1000 - 1) \Leftrightarrow 999r = -333 \Rightarrow r = -\frac{1}{3}$

La somme des n premiers d'une suite arithmétique de 1er terme U_1 est $S_n = \frac{n(U_1 + U_n)}{2}$

$\Rightarrow S_n = \frac{1000(397 + 64)}{2} = 230500$

b- L'entier n et la raison r si : $U_1 = -4$; $U_n = 6$ et $S_n = 28$

La somme des n premiers d'une suite arithmétique de 1er terme U_1 est $S_n = \frac{n(U_1 + U_n)}{2}$

$S_n = \frac{n(U_1 + U_n)}{2} \Leftrightarrow 28 = \frac{n(-4 + 6)}{2} \Leftrightarrow 2n = 56 \Rightarrow n = 28$

Scanned by CamScanner

L'expression des n premiers d'une suite arithmétique de 1er terme U_1 et de raison r est: $U_n = U_1 + r(n-1)$.

$U_n = U_1 + r(n-1) \Leftrightarrow 6 = -4 + r(28-1) \Rightarrow r = \frac{10}{27}$

c- Le premier terme U_1 et la somme S_n si : $U_n = 105$; $n = 17$ et $r = -2$

L'expression des n premiers d'une suite arithmétique de 1er terme U_1 et de raison r est: $U_n = U_1 + r(n-1)$.

$U_n = U_1 + r(n-1) \Leftrightarrow 105 = U_1 + 17(-2-1) \Rightarrow U_1 = 156$

2) Calculer dans chacun des cas suivants d'une suite géométrique.

a- L'expression de U_n et la somme S_n si : $U_1 = 2$; $q = 3$

L'expression des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme U_1 et de raison q est: $U_n = U_1(q)^{n-1}$

$U_n = U_1(q)^{n-1} \Leftrightarrow U_n = 2(3)^{n-1}$

La somme des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme U_1 est $S_n = \frac{U_1(1-q^n)}{1-q}$

$S_n = \frac{U_1(1-q^n)}{1-q} \Leftrightarrow S_n = \frac{2(1-3^n)}{1-3} \Rightarrow S_n = 3^n - 1$

b- La raison q et la somme S_n si : $U_1 = 162$; $U_n = 32$ et $n = 5$

L'expression des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme U_1 et de raison q est:

$U_n = U_1(q)^{n-1}$

$U_n = U_1(q)^{n-1} \Leftrightarrow 32 = 162(q)^{5-1} \Leftrightarrow 32 = 162q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{32}{162} = \frac{16}{81} \Rightarrow q = \sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$

La somme des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme U_1 est $S_n = \frac{U_1(1-q^n)}{1-q}$

$S_n = \frac{U_1(1-q^n)}{1-q} \Leftrightarrow S_n = \frac{162\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^5\right)}{1-\frac{2}{3}} \Rightarrow S_n = 422$

6 Soit u_n une suite géométrique décroissante tel que : $\begin{cases} u_0 \times u_3 = 32 \\ u_0 + u_3 = 18 \end{cases}$

1) Calculons u_0 et u_3

$\begin{cases} u_0 \times u_3 = 32 \\ u_0 + u_3 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 32 \\ S = 18 \end{cases}$

Alors ce système est solution de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ où S et P désignent respectivement la somme et le produit.

Résolvons ainsi l'équation $X^2 - SX + P = 0 \Leftrightarrow X^2 - 18X + 32 = 0$.

Scanned by CamScanner

$\Delta = 196 \Rightarrow X_1 = 2$ et $X_2 = 16$

La suite (u_n) étant décroissante, alors $u_0 = 16$ et $u_3 = 2$

2) Déterminons la raison de la suite u_n .

L'expression des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme U_0 et de raison q est: $U_n = U_0(q)^n$

Ainsi pour $n = 3$, on a : $U_3 = U_0 q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{U_3}{U_0} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$. Alors $q^3 = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

3) Donnons l'expression de la suite u_n en fonction de n.

$U_n = U_0(q)^n \Rightarrow U_n = 16\left(\frac{1}{2}\right)^n = 16 \times \frac{1}{2^n} = 2^4 \times 2^{-n} = 2^{4-n}$

4) On pose $S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$.

Calculons S_n en fonction de n puis en déduisons la somme des 20 premiers termes de la suite u_n

La somme des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme U_0 est $S_n = \frac{U_0(1-q^{n+1})}{1-q}$

$S_n = \frac{U_0(1-q^{n+1})}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{16\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{16\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\frac{1}{2}} = 32\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

$\Rightarrow S_n = 32(1-2^{-n-1}) = 32 - 32 \times 2^{-n-1} = 32 - 2^5 \times 2^{-n-1} = 32 - 2^{5-n-1}$

$= 32 - 2^{4-n} \Rightarrow S_n = 32 - 2^{4-n}$

7 Déterminons une suite arithmétique u_n sachant que la somme de ces n premiers termes est égale à $3n^2 + 4n$ $(avec\ n \in \mathbb{N})$

La somme des n premiers d'une suite arithmétique de 1er terme U_1 est $S_n = \frac{n(U_1+U_n)}{2}$

$S_n = \frac{n(U_1+U_n)}{2}$. Or $U_n = U_1 + r(n-1)$

$\Rightarrow S_n = \frac{n[U_1+U_1+r(n-1)]}{2} \Leftrightarrow S_n = \frac{n[2U_1+r(n-1)]}{2} \Leftrightarrow S_n = \frac{n(2U_1+nr-r)}{2}$

$\Leftrightarrow S_n = \frac{2nU_1+n^2r-nr}{2} \Leftrightarrow S_n = \frac{n^2r+n(2U_1-r)}{2}$. Or $S_n = 3n^2 + 4n$.

Alors par identification on a : $\frac{n^2r+n(2U_1-r)}{2} = 3n^2 + 4n$

$\Leftrightarrow n^2r + n(2U_1 - r) = 3n^2 + 4n \Leftrightarrow \begin{cases} r = 3 \\ 2U_1 - r = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 3 \\ U_1 = \frac{7}{2} \end{cases}$

Scanned by CamScanner

D'où $U_n = U_1 + r(n-1) \Rightarrow U_n = \frac{7}{2} + 3(n-1) = \frac{7}{2} + 3n - 3 = 3n + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow U_n = 3n + \frac{1}{2}$

8 Soit les suites u_n et v_n définie par : $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1-u_n} \end{cases}$ et $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n}$

1) Calculons v_{n+1} en fonction de u_n puis en fonction de v_n.

- Expression de v_{n+1} en fonction de u_n

$v_n = \frac{u_n + 1}{u_n} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1}}$. Or $u_{n+1} = \frac{u_n}{1-u_n}$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{\left(\frac{u_n}{1-u_n}\right) + 1}{\left(\frac{u_n}{1-u_n}\right)} = \frac{\frac{u_n + 1 - u_n}{1-u_n}}{\frac{u_n}{1-u_n}} = \frac{\frac{1}{1-u_n}}{\frac{u_n}{1-u_n}} = \frac{1}{1-u_n} \times \frac{1-u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{u_n}$$

- Expression de v_{n+1} en fonction de v_n

On sait que $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n} \Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n - 1}$. En remplaçant $u_n = \frac{1}{v_n - 1}$ par sa valeur dans la relation $v_{n+1} = \frac{1}{u_n}$, on a :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_n} \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{v_n - 1}} = v_n - 1.$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = v_n - 1.$$

2) En déduisons que v_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme v_1

$v_{n+1} = v_n - 1 \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = -1$

D'où v_n est une suite arithmétique de raison -1 et de premier terme $v_1 = \frac{u_1 + 1}{u_1} = \frac{1}{2}$.

3) Exprimons v_n puis u_n en fonction de n.

- Expression de v_n en fonction de n

v_n est une suite arithmétique de raison -1 et de premier terme $v_1 = \frac{1}{2}$, alors son expression en fonction de n est : $v_n = v_1 + r(n-1)$.

$v_n = v_1 + r(n-1) \Leftrightarrow v_n = \frac{1}{2} - 1(n-1) = \frac{1}{2} - n + 1 = -n + \frac{3}{2}$

$\Rightarrow v_n = -n + \frac{3}{2}$

Scanned by CamScanner

- Expression de u_n en fonction de n

On sait que $u_n = \frac{1}{v_n - 1}$. Or $v_n = -n + \frac{3}{2}$

En remplaçant $v_n = -n + \frac{3}{2}$ par sa valeur dans $u_n = \frac{1}{v_n - 1}$. Alors on a :

$$u_n = \frac{1}{v_n - 1} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{\left(-n + \frac{3}{2}\right) - 1} = \frac{1}{\left(-n + \frac{3}{2}\right) - 1} = \frac{2}{-2n + 1}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{2}{-2n + 1}$$

4) On pose $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$

a-Exprimons S_n en fonction de n

La somme des n premiers d'une suite arithmétique de 1er terme v_1 est $S_n = \frac{n(v_1 + v_n)}{2}$

$S_n = \frac{n(v_1 + v_n)}{2}$. Or $v_1 = \frac{1}{2}$ et $v_n = -n + \frac{3}{2}$

Alors $S_n = \frac{n\left(\frac{1}{2} - n + \frac{3}{2}\right)}{2} = \frac{n\left(\frac{1}{2} - n + \frac{3}{2}\right)}{2} = \frac{2n - n^2}{2}$

b-Calculons la somme de 30 premiers termes de la suite v_n

$S_n = \frac{2n - n^2}{2} \Rightarrow S_{30} = \frac{2(30) - (30)^2}{2} = -420$

9 On donne deux suites (u_n) et (v_n) telles que, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 3v_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \end{cases}$$

1) Calculons : u_n et v_n pour $n \in \{1 ; 2 ; 3\}$.

Pour $n = 0$; on a : $\begin{cases} u_1 = 3u_0 + 2v_0 \\ v_1 = 2u_0 + 3v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 3 + 4 \\ v_1 = 2 + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 7 \\ v_1 = 8 \end{cases}$

Pour $n = 1$; on a : $\begin{cases} u_2 = 3u_1 + 2v_1 \\ v_2 = 2u_1 + 3v_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = 21 + 16 \\ v_2 = 14 + 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = 37 \\ v_2 = 38 \end{cases}$

Pour $n = 2$; on a : $\begin{cases} u_3 = 3u_2 + 2v_2 \\ v_3 = 2u_2 + 3v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_3 = 111 + 76 \\ v_3 = 74 + 114 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = 187 \\ v_2 = 188 \end{cases}$

2) On définit deux suites (X_n) et (Y_n) par : $X_n = u_n + v_n$ et $Y_n = u_n - v_n$

Scanned by CamScanner

a-Montrons que (X_n) est une suite géométrique et (Y_n) une suite constante.

$X_n = u_n + v_n \Rightarrow X_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = (3u_n + 2v_n) + (2u_n + 3v_n) = 5(u_n + v_n)$

$\Rightarrow X_{n+1} = 5(u_n + v_n) \Leftrightarrow X_{n+1} = 5X_n$.

D'où X_n est une suite géométrique de raisons $q = 5$ et de premier terme $X_0 = u_0 + v_0 = 3$
Donc l'expression de X_n est $X_n = X_0(q)^n = 3(5)^n = 3 \times 5^n = 3 \times 5^n$

$Y_n = u_n - v_n \Rightarrow Y_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = (3u_n + 2v_n) - (2u_n + 3v_n) = u_n - v_n$

Alors $Y_{n+1} - Y_n = 0$

D'où Y_n une suite constante de valeur $Y_n = Y_0 = 1 - 2 = -1$

b-Exprimons u_n puis v_n en fonction de n.

On sait que $X_n = u_n + v_n$ et $Y_n = u_n - v_n$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_n = u_n + v_n \\ Y_n = u_n - v_n \end{cases}$$

$\Rightarrow X_n + Y_n = 2u_n \Rightarrow u_n = \frac{X_n + Y_n}{2}$. Or $X_n = 3 \times 5^n$ et $Y_n = u_n - v_n$

$\Rightarrow u_n = \frac{3\times5^n - 1}{2}$

De même $v_n = \frac{X_n - Y_n}{2} \Rightarrow v_n = \frac{3\times5^n + 1}{2}$

10 On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par $u_0 = 1$;

$u_{n+1} = 2u_n + 1$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$

1) Montrons que v_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

v_n est une suite géométrique si et seulement si : $v_{n+1} = qv_n$ ou $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$

$v_n = u_{n+1} - u_n = (2u_n + 1) - u_n = 2u_n + 1 - u_n = u_n + 1$

$\Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = (2u_n + 1) + 1 = 2u_n + 1 + 1 = 2u_n + 2 = 2(u_n + 1)$

$\Rightarrow v_{n+1} = 2v_n$

D'où v_n est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 1 = 2$

2) Exprimons, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

Scanned by CamScanner

L'expression des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme v_0 et de raison q est:

$v_n = v_0(q)^n$

$v_n = v_0(q)^n \Leftrightarrow v_n = 2(2)^n = 2^{n+1}$

3) Soit la somme $S_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_{n-1}$
a-Montrons que pour tout entier naturel n, $S_n = u_n - u_0$

On sait que : $v_n = u_{n+1} - u_n$

$$\Rightarrow v_0 = u_1 - u_0$$
$$v_1 = u_2 - u_1$$
$$v_2 = u_3 - u_2$$
$$\vdots$$
$$v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$$

En ajoutant membre à membre les termes de l'égalité ci-dessus, on a :

$v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_{n-1} = u_n - u_0 \Leftrightarrow S_n = u_n - u_0$

D'où pour tout entier naturel n, $S_n = u_n - u_0$ (Ce qu'il fallait démontrer).

b-Calculons S_n en fonction de n

La somme des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme v_0 et de raison q est :

$$S_n = \frac{v_0(1-q^{n+1})}{1-q}$$

$$S_n = \frac{v_0(1-q^{n+1})}{1-q} \Leftrightarrow S_n = \frac{2(1-2^{n+1})}{1-2} \Rightarrow S_n = -2(1-2^{n+1})$$

En déduisons u_n en fonction de n.

D'après la question a), $S_n = u_n - u_0$ et D'après la question b), $S_n = -2(1-2^{n+1})$

Par identification, $u_n - u_0 = -2(1-2^{n+1}) \Rightarrow u_n = -2(1-2^{n+1}) + u_0$. Or $u_0 = 1$

$\Rightarrow u_n = -2(1-2^{n+1}) + 1 = -2 + 2 \times 2^{n+1} + 1 = -1 + 2^{n+2}$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = -1 + 2^{n+2}$.

Scanned by CamScanner

11 Soit la suite $S_n = \underbrace{0{,}555\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5}_{n \text{ Chiffres } 5}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Prouvons que S_n est la somme des n termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 0,5.

Soit la suite $S_n = \underbrace{0{,}555\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5}_{n \text{ Chiffres } 5}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow S_n = 0{,}5 + 0{,}05 + 0{,}005 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 0{,}00000\ldots\ldots 5$

Donc $u_1 = 0{,}5$; $u_2 = 0{,}05$; $u_3 = 0{,}005$; $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $u_n = 0{,}00000\ldots\ldots 5$

En effectuant les opérations $\frac{u_2}{u_1}$; $\frac{u_3}{u_2}$; $\frac{u_4}{u_3}$, on obtient :

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{0{,}05}{0{,}5} = 0{,}1$; $\frac{u_3}{u_2} = \frac{0{,}005}{0{,}05} = 0{,}1$; $\frac{u_4}{u_3} = \frac{0{,}0005}{0{,}005} = 0{,}1$ et d'une manière générale, on a :

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \ldots\ldots\ldots \frac{u_n}{u_{n-1}} \ldots\ldots \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0{,}1 = q$

D'où S_n est la somme des n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = 0{,}1$ et de premier terme $u_1 = 0{,}5$ et ce ci peut être traduit par :

$S_n = 0{,}5[(0{,}1)^0 + (0{,}1)^1 + (0{,}1)^2 + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots + (0{,}1)^{n+1}]$

2) En déduisons que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; $S_n = \frac{5}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$

La somme des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme u_1 et de raison q est :

$S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}$

$S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{0{,}5(1-0{,}1^n)}{1-0{,}1} = \frac{0{,}5(1-0{,}1^n)}{0{,}9} = \frac{\frac{5}{10}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]}{\frac{9}{10}} = \frac{5\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]}{9}$

$\Rightarrow S_n = \frac{5}{9}\left[1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right] = \frac{5}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$

D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; on a : $S_n = \frac{5}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$

12 1) Soit (u_n), $n \in \mathbb{N}$, une suite de raison r $(r \neq 0)$.

On définie la suite (v_n), $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_n}$.

Scanned by CamScanner

a- Montrons que (v_n), est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0 (on exprimera v_0 en fonction de u_0).

On a : $v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_n}$.

Alors (v_n), est une suite géométrique si et seulement si : $v_{n+1} = qv_n$ ou $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$

$v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_n} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{4}e^{-2U_{n+1}}$.

Alors on a : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{4}e^{-2U_{n+1}}.}{\frac{1}{4}e^{-2U_n}} = \frac{e^{-2U_{n+1}}.}{e^{-2U_n}} = e^{-2U_{n+1}} \times e^{2U_n} = e^{-2U_{n+1}+2U_n}$

$\Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = e^{-2(U_{n+1}-U_n)}$.

Or d'après l'hypothèse, u_n est une suite arithmétique de raison$r$, par conséquent on a :

$U_{n+1} - U_n = r$

D'où $\frac{v_{n+1}}{v_n} = e^{-2(U_{n+1}-U_n)} = e^{-2r}$

Alors (v_n), est une suite géométrique de raison $q = e^{-2r}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{4}e^{-2U_0}$.

b- Etudions suivant les valeurs de r la convergence de la suite v_n

Pour cela, exprimons v_n en fonction de n.

L'expression des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme v_0 et de raison q est:
$v_n = v_0(q)^n$

$v_n = v_0(q)^n \Leftrightarrow v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_0}\left(e^{-2r}\right)^n = \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times e^{-2nr} \Rightarrow v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times e^{-2nr}$

Ainsi pour étudier la convergence suivant les valeurs de , on cacule la limite de v_n en $+\infty$.

- Pour $r > 0$; on a :

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times e^{-2nr} = \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times (0) = 0$

- Pour $r < 0$; on a :

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times e^{-2nr} = \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times (+\infty) = 0$

- Pour $r = 0$; on a :

Scanned by CamScanner

$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4} e^{-2U_0} \times e^{-2nr} = \frac{1}{4} e^{-2U_0}$

2) Soit w_n $n \in \mathbb{N}$, la suite définie par $w_n = \int_0^n \frac{1}{4} e^{-2x} dx$.

a- Calculons w_n en fonction de n.

$w_n = \int_0^n \frac{1}{4} e^{-2x} dx = \frac{1}{4} \int_0^n e^{-2x} dx = -\frac{1}{8} \int_0^n -2e^{-2x} dx$

$\Rightarrow w_n = \left[-\frac{1}{8} e^{-2x}\right]_0^n = -\frac{1}{8} e^{-2n} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-2n} = \frac{1}{8}(1 - e^{-2n})$

D'où $w_n = \frac{1}{8}(1 - e^{-2n})$

b- Montrons que w_n converge vers un nombre réel l que l'on précisera.

Pour cela, on cacule la limite de w_n en $+\infty$.

$\lim_{n \to +\infty} w_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{8}(1 - e^{-2n}) = \frac{1}{8}(1 - 0) = \frac{1}{8}$

D'où w_n converge vers le réel $l = \frac{1}{8}$.

c- On pose $S_n = w_1 + w_2 + \ldots\ldots\ldots + w_n - \frac{n}{8}$.

Calculons S_n en fonction de n puis en déduire $\lim_{n \to +\infty} S_n$

Posons $S'_n = w_1 + w_2 + \ldots\ldots\ldots + w_n$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} S'_n - \frac{n}{8}$.

Ainsi exprimons S'_n en fonction de n.

On sait que : $w_n = \frac{1}{8}(1 - e^{-2n}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-2n}$

$\Rightarrow w_1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-2}$

$w_2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-4}$

$w_3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-6}$

. .

. .

. .

$w_n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-2n}$

Scanned by CamScanner

En effectuant membre à membre la somme des termes de l'égalité ci-dessus, on a :

$w_1 + w_2 + \ldots\ldots\ldots + w_n = n \times \frac{1}{8} - n\frac{1}{8}e^{-2n} \Leftrightarrow S'_n = \frac{n}{8} - \frac{n}{8}e^{-2n}$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} S'_n - \frac{n}{8} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{8} - \frac{n}{8}e^{-2n}\right) - \frac{n}{8} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{8} - \frac{n}{8}e^{-2n} - \frac{n}{8}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} -\frac{n}{8}e^{-2n} = \lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{8} \times \frac{n}{e^{2n}} = -\frac{1}{8} \times (0) = 0$$

13 On considère les suites u_n et v_n définies pour tout entier naturel n par définies par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}(u_n)^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = ln\left(\frac{3}{2}u_n\right)$$

1) Calculons v_0.

$v_n = ln\left(\frac{3}{2}U_n\right) \Rightarrow v_0 = ln\left(\frac{3}{2}U_0\right) = ln\left(\frac{3}{2} \times \frac{1}{3}\right) = ln\left(\frac{1}{2}\right) = -ln2 \Rightarrow v_0 = -ln2$

2) Démontrons que v_n est une suite géométrique de raison 2.

(v_n), est une suite géométrique si et seulement si : $v_{n+1} = qv_n$ ou $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$

$v_n = ln\left(\frac{3}{2}U_n\right) \Rightarrow v_{n+1} = ln\left(\frac{3}{2}U_{n+1}\right) = ln\left(\frac{3}{2} \times \frac{3}{2}(U_n)^2\right) = ln\left(\frac{9}{4}(U_n)^2\right) = ln\left(\frac{3}{2}U_n\right)^2$

$= 2ln\left(\frac{3}{2}U_n\right) = 2v_n$

Alors v_n est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = -ln2$.

3) Exprimons v_n en fonction de n.

L'expression des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme v_0 et de raison q est:

$v_n = v_0(q)^n$

$v_n = v_0(q)^n \Leftrightarrow v_n = -ln2(2)^n = -2^n ln2.$

4) Calculons la limite de v_n .

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} -2^n ln2 = -(+\infty)ln2 = -\infty \times ln2 = -\infty$$

Scanned by CamScanner

5) Exprimons u_n en fonction de v_n puis en déduisons la limite de u_n

$v_n = ln\left(\frac{3}{2}U_n\right) \Leftrightarrow \frac{3}{2}u_n = e^{v_n} \Rightarrow u_n = \frac{2}{3}e^{v_n}$. Ainsi calculons la limite de u_n en $+\infty$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{3}e^{v_n}$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} e^{v_n} = 0$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{3}e^{v_n} = \frac{2}{3}(0) = 0$

6) Pour tout entier naturel n, on pose :

$S_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_{n-1}$ et $T_n = u_0 \times u_1 \times \ldots\ldots \times u_{n-1}$

a- Démontrons que : $S_n = (1 - 2^{n+1})ln2$

La somme des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme v_0 et de raison q est :

$S_n = \frac{v_0(1-q^{n+1})}{1-q}$

$S_n = \frac{v_0(1-q^{n+1})}{1-q} \Leftrightarrow S_n = \frac{-ln2(1-2^{n+1})}{1-2} = \frac{-(1-2^{n+1})ln2}{-1} = (1 - 2^{n+1})ln2$

b- Justifions que $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$ puis en déduisons T_n en fonction de n

On sait que : $u_n = \frac{2}{3}e^{v_n}$

$\Rightarrow u_0 = \frac{2}{3}e^{v_0}$

$u_1 = \frac{2}{3}e^{v_1}$

. .

. .

. .

$u_n = \frac{2}{3}e^{v_n}$

En effectuant membre à membre le produit des termes de l'égalité ci-dessus, on a :

$u_0 \times u_1 \times \ldots\ldots \times u_{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times e^{(v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1})}$.

Or par hypothèse $S_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_{n-1}$ et $T_n = u_0 \times u_1 \times \ldots\ldots \times u_{n-1}$

Scanned by CamScanner

Alors on a : $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$ (Ce qu'il fallait démontrer).

Déduisons T_n en fonction de n avec

On sait que : $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$ et d'après la question : 6)-a, on a : $S_n = (1 - 2^{n+1})ln2$.

Alors $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{(1-2^{n+1})ln2}$

14 On considère la suite numérique u_n définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = e^{2n-1}$

1) a- Calculons u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 et u_{n+1}

$u_0 = e^{-1}$; $u_1 = e$; $u_2 = e^3$; $u_3 = e^5$; $u_n = e^{2n+1}$

b- Démontrons que la suite u_n est une suite géométrique dont on précisera la raison.

u_n est une suite géométrique si et seulement si : $u_{n+1} = qu_n$ ou $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$

$u_n = e^{2n+1}$ => $u_{n+1} = e^{2n+3} = e^{2n+1} \times e^2$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{2n+1} \times e^2}{e^{2n+1}} = e^2$

D'où u_n est une suite géométrique de raison $q = e^2$ et de premier terme $u_0 = e^{-1}$

c- Exprimons en fonction de n la somme $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

La somme des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme u_0 et de raison q est :

$S_n = \frac{u_0(1-q^{n+1})}{1-q}$

$S_n = \frac{u_0(1-q^{n+1})}{1-q} \Leftrightarrow S_n = \frac{\left(1-(e^2)^{n+1}\right)e^{-1}}{1-e^2} = \frac{(1-e^{2n+2})e^{-1}}{1-e^2} = \frac{e^{-1}-e^{2n+1}}{1-e^2}$

En déduisons $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^{-1}-e^{2n+1}}{1-e^2} = -\infty$

d- Trouvons la valeur minimum de n telle que $S_n \geq 10$

$S_n \geq 10 \Leftrightarrow \frac{e^{-1}-e^{2n+1}}{1-e^2} \geq 10 \Leftrightarrow e^{-1} - e^{2n+1} \geq 10(1-e^2) \Leftrightarrow e^{2n+1} \leq 63{,}5$

$\Rightarrow 2n+1 \leq ln(63{,}5) \Rightarrow n \leq 1{,}57$

2) Soit la suite v_n définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = ln(u_n) = ln(e^{2n-1}) = 2n - 1$

Scanned by CamScanner

a-Exprimons la somme $S'_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ en fonction de n

Pour cela cherchons la nature de la suite v_n.

$v_n = ln(u_n) = ln(e^{2n-1}) = 2n - 1 \Rightarrow v_n = 2n - 1$ et $v_{n+1} = 2n + 1$

$v_{n+1} - v_n = (2n + 1) - (2n - 1) = 2n + 1 - 2n + 1 = 2$

Alors v_n est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $v_0 = ln(u_0) = -1$.

Par conséquent l'expression de v_n est : $v_n = 2n - 1$ et la somme des n premiers termes de la suite v_n est donnée par : $S_n = \frac{(n+1)(v_0 + v_n)}{2} = \frac{(n+1)(-1+2n-1)}{2} = \frac{(n+1)(2n-2)}{2}$

$$= \frac{2(n+1)(n-1)}{2} = (n+1)(n-1) = n^2 - 1$$

D'où $S'_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = n^2 - 1$

b-Exprimons le produit $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$ en fonction de n

On sait que : $v_n = ln(u_n)$

$\Rightarrow v_0 = ln(u_0)$

$v_1 = ln(u_1)$

. .
. .
. .

$v_n = ln(u_n)$

En effectuant membre à membre la somme des termes de l'égalité ci-dessus, on a :
$v_0 + v_1 + \ldots\ldots\ldots + v_n = ln(u_0) + ln(u_1) + \ldots . ln(u_n)$

$\Leftrightarrow S'_n = ln(u_0 \times u_1 \times \ldots . \times u_n) \Rightarrow u_0 \times u_1 \times \ldots . \times u_n = e^{S'n} \Leftrightarrow P_n = e^{S'n}$

Or $S'_n = n^2 - 1 \Rightarrow P_n = e^{n^2-1}$

D'où le produit $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots . \times u_n$ en fonction de n est $P_n = e^{n^2-1}$

15 Soit la suite u_n; $n \in \mathbb{N}^*$ à termes positifs tel que : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (u_{n+1})^2 = u_n \times e \end{cases}$

1) Calculons puis exprimer u_1 ; u_2 ; u_3 en fonction de e^k où $k \in \mathbb{R}$.

On sait que $(u_{n+1})^2 = u_n \times e \Rightarrow u_{n+1} = \sqrt{u_n \times e} = \sqrt{u_n} \times \sqrt{e} = (u_n)^{\frac{1}{2}} \times e^{\frac{1}{2}}$

$u_1 = 1 = e^0$

Scanned by CamScanner

$u_2 = (u_1)^{\frac{1}{2}} \times e^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}} \times e^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$

$u_3 = (u_2)^{\frac{1}{2}} \times e^{\frac{1}{2}} = \left(e^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \times e^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{4}} \times e^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{3}{4}}$

2) On pose $v_n = ln(u_n) - a$ (où $a \in \mathbb{R}^*$ n et $\mathbb{N}^*$).
a-Déterminons le réel a pour que v_n soit une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_1.

$v_n = ln(u_n) - a$

$v_1 = ln(u_1) - a = ln(1) - a = -a$

$v_2 = ln(u_2) - a = ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) - a = \frac{1}{2} - a = \frac{1-2a}{2}$

$v_3 = ln(u_3) - a = ln\left(e^{\frac{3}{4}}\right) - a = \frac{3}{4} - a = \frac{3-4a}{4}$

Alors les 3 termes v_1 ; v_2 et v_3 sont en progression géométrique si te seulement si :

$v_1 \times v_3 = (v_2)^2 \Leftrightarrow (-a) \times \left(\frac{3-4a}{4}\right) = \left(\frac{1-2a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{-3a+4a^2}{4} = \frac{1-4a+4a^2}{4} \Leftrightarrow$

$-3a + 4a^2 = 1 - 4a + 4a^2 \Leftrightarrow 4a - 3a = 1 \Rightarrow a = 1$

D'où $v_1 = -1$; $v_2 = -\frac{1}{2}$ et $v_2 = -\frac{1}{4}$ et $v_n = ln(u_n) - 1$

b-Calculons la limite de v_n puis celle de u_n en $+\infty$

v_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{v_2}{v_1} = \frac{-\frac{1}{2}}{-1} = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = -1$.

Alors son expression est $v_n = v_1(q)^{n-1} \Leftrightarrow v_n = -1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -1\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) = -\frac{1}{2^{n-1}}$

$\Rightarrow v_n = -\frac{1}{2^{n-1}}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{2^{n-1}} = 0$

D'autre part $v_n = ln(u_n) - 1 \Leftrightarrow ln(u_n) = v_n + 1 = -\frac{1}{2^{n-1}} + 1 \Rightarrow u_n = e^{\left(-\frac{1}{2^{n-1}} + 1\right)}$

$\Rightarrow u_n = e^{\left(-\frac{1}{2^{n-1}} + 1\right)}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{(0)} = 1$

Scanned by CamScanner

16 Après les élections présidentielles 2013 au Mali, l'analyse des résultats a montré que le candidat élu avait obtenu v_1 voies, le 2^e avait obtenu v_2 voies, ainsi de suite jusqu'au dernier des n candidats qui avait obtenu v_n voies. De plus on a constaté que le $k^{ième}$ candidat avec $(k \geq 1)$ avait obtenu le double de voies de son successeur immédiat $(k+1)^{ième}$ du classement ; définissant ainsi une suite numérique $(v_n)_{n \geq 1}$

1) Prouvons que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q.

D'après les renseignements ci-dessus, on a :

$v_1 = 2v_2$; $v_2 = 2v_3$; $v_3 = 2v_4$ et de manière générale, on a : $v_n = 2v_{n+1} \Leftrightarrow$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2}$

D'où v_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme v_1.

2) Le nombre total de votants appelé suffrage exprimé est : $v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$.
Un candidat est élu président dès le 1er tour, lorsque son nombre de voies v_1 dépasse la moitié de S_n où S_n désigne le suffrage exprimé.

a-Déterminons en fonction de n et v_1 le suffrage exprimé S_n.

Ici, le suffrage exprimé S_n désigne la somme des n premiers termes de la suite géométrique de 1er terme v_1 et de raison $q = \frac{1}{2}$

$S_n = \frac{v_1(1-q^n)}{1-q}$

Alors $S_n = \frac{v_1(1-q^n)}{1-q} \Leftrightarrow S_n = \frac{v_1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{v_1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\frac{1}{2}} = 2v_1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2v_1\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

D'où le suffrage exprimé S_n en fonction de n est : $S_n = 2v_1\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

b-Examinons si un deuxième tour à cette élection eut été nécessaire.

Par hypothèse, candidat est élu président dès le 1er tour, lorsque son nombre de voies v_1 dépasse la moitié de S_n où S_n désigne le suffrage exprimé c'est-à-dire : $v_1 > \frac{1}{2}S_n \Leftrightarrow$
$v_1 - \frac{1}{2}S_n > 0$

Ainsi étudions le signe de $v_1 - \frac{1}{2}S_n$.

$v_1 - \frac{1}{2}S_n = v_1 - \frac{1}{2}\left(2v_1\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right) = v_1 - v_1\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = v_1 - v_1 + \frac{1}{2^n}v_1 = \frac{1}{2^n}v_1$

Or $\forall n \in \mathbb{N}; \frac{1}{2^n} > 0$ et $v_1 > 0$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}; v_1 - \frac{1}{2}S_n > 0 \Rightarrow v_1 > \frac{1}{2}S_n$.

Puisque $v_1 > \frac{1}{2}S_n$, alors le candidat est élu président dès le 1er tour.

3) En effet le nombre total des votants fut 945 et le candidat fut élu par ses 480 voies.

Scanned by CamScanner

Déterminons alors le nombre n de candidats qui avaient postulés.

Par hypothèse : $S_n = 945$ et $v_1 = 480$.

En remplaçant $S_n = 945$ et $v_1 = 480$ par leur valeur dans $S_n = 2v_1\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$, on a :

$945 = 2 \times 480\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \Leftrightarrow 945 = 960\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2^n} = \frac{945}{960} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{945}{960}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = \frac{15}{960} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = \frac{1}{64} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^6} \Rightarrow n = 6$

Alors on en déduit qu'il y-avait $n = 6$ candidats comme postulant.

17 Soit la suite u_n définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{4}{4 - u_n}$ $(n \in \mathbb{N})$

1) a- Déterminons u_0 pour que u_n soit constante.

La suite est constante ou stationnaire si et seulement $u_n = u_0$ c'est-à-dire $u_0 = \frac{4}{4 - u_0} \Leftrightarrow$ $u_0(4 - u_0) = 4 \Leftrightarrow {u_0}^2 + 4u_0 - 4 = 0 \Rightarrow u_0 = 2$

b-Démontrons que si $u_n < 2$ alors $(n \in \mathbb{N})$; $u_n < u_{n+1} < 2$

En déduisons que si $u_0 < 2$ alors pour tout entier naturel on a : $u_n < 2$ et que u_n est monotone.

Supposons que $u_n < 2$ alors : $4 - u_n > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{4 - u_n}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n < 2$ et la suite est croissante (donc monotone).

2) On suppose maintenant que $u_0 = -1$

a) Calculons u_1 ; u_2; u_3.

$u_{n+1} = \frac{4}{4 - u_n}$ et $u_0 = -1$

Alors : $u_1 = \frac{4}{5}$; $u_2 = \frac{5}{4}$; $u_3 = \frac{16}{11}$.

b) Soit la suite v_n définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$.

Démontrons que v_n est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.

v_n est une suite arithmétique si et seulement si : $v_{n+1} - v_n = r$ où $r = cste$ = la raison.

Scanned by CamScanner

$v_n = \frac{1}{u_n - 2} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 2} = \frac{1}{\frac{4}{4 - u_n} - 2} = \frac{1}{\frac{4 - 8 + 2u_n}{4 - u_n}} = \frac{1}{\frac{-4 + 2u_n}{4 - u_n}}$

$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{4 - u_n}{-4 + 2u_n}$

Alors $v_{n+1} - v_n = \frac{4 - u_n}{-4 + 2u_n} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{4 - u_n}{2(u_n - 2)} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{4 - u_n - 2}{2(u_n - 2)}$

$= \frac{2 - u_n}{2(u_n - 2)} = \frac{-(u_n - 2)}{2(u_n - 2)} = \frac{-1}{2}$

D'où v_n est une suite arithmétique de raison $r = \frac{-1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0 - 2} = \frac{-1}{3}$

c) Calculons u_n en fonction de n puis étudier sa limite en $+\infty$.

v_n étant une suite arithmétique de raison $r = \frac{-1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{-1}{3}$, alors son expression est $v_n = v_0 + nr = \frac{-1}{3} + \frac{-1}{2}n = -\frac{2 + 3n}{6}$.

Puisque $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$ alors $u_n = 2 + \frac{1}{v_n}$. Or $v_n = -\frac{2 + 3n}{6}$.

$\Rightarrow u_n = 2 + \frac{1}{\frac{-2 + 3n}{6}} = 2 - \frac{6}{2 + 3n} = \frac{4 + 6n - 6}{2 + 3n} = \frac{6n - 2}{2 + 3n}$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{6n - 2}{2 + 3n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{6n}{3n} = \frac{6}{3} = 2$

18 1) Déterminons suivant les valeurs de l'entier naturel m, les restes de la division euclidienne par 16 des entiers 5^m et 6^m

$5 \equiv 5[16]$; $5^2 \equiv 9[16]$; $5^3 \equiv 13[16]$; $5^4 \equiv 1[16]$; $5^5 \equiv 5[16]$

D'où $\forall m \in \mathbb{N}$; on a : $5^{4k} \equiv 1[16]$; $5^{4k+1} \equiv 5[16]$; $5^{4k+2} \equiv 9[16]$; $5^{4k+3} \equiv 13[16]$

2) Soit u_n la suite arithmétique de raison 16 et de premier terme $u_0 = 9$ et v_p la suite géométrique de raison $q = 5$ et de premier terme $V_o = 1$.

Démontrons que ces deux suites ont une infinité de termes égaux dont on calculera les deux premiers.

Puisque u_n est une suite arithmétique de raison 16 et de premier terme $u_0 = 9$, alors l'expression de son terme général en fonction de n est : $u_n = 16n + 9$

De même v_n est une géométrique de raison $q = 5$ et de premier terme $v_0 = 1$, alors l'expression de son terme général en fonction de n est : $v_n = 5^n$

Donc $u_n = v_p \Leftrightarrow 16n + 9 = 5^p \Leftrightarrow 5^p \equiv 9[16] \Rightarrow p = 4k + 2$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Scanned by CamScanner

Alors il existe une infinité de termes u_n et v_p égaux si $k = 0$.
Ainsi on obtient $p = 2$, alors $16n + 9 = 25 \Leftrightarrow n = 1$. D'où $u_1 = v_2$.
3) Soit u'_n la suite arithmétique de raison 16 et de premier terme $u'_0 = 8$ et v'_p la suite géométrique de raison 6 et de premier terme $v'_0 = 9$.

Démontrons que ces deux suites n'ont qu'un seul terme en commun que l'on déterminera.

$u'_n = 16n + 8$ et $v'_p = 9 \times 6^p$. Alors $u'_n = v'_p \Leftrightarrow 16n + 8 = 9 \times 6^p \Leftrightarrow$

$9 \times 6^p \equiv 8[16] \Leftrightarrow 6^p \equiv 8[16] \Rightarrow p = 3$.

Alors si $p = 3$, on a : $16n + 8 = 9 \times 6^3 \Leftrightarrow 16n + 8 = 1944 \Rightarrow n = 21$.

D'où ces deux suites n'ont qu'un seul terme en commun u'_n et v'_p

Progression arithmétiques – Progression géométriques.

19 1) Trouver 3 nombres consécutifs a ; b et c d'une suite en progression arithmétique sachant que $\begin{cases} a+b+c = 3 \\ 3a-6b+c = 6 \end{cases}$

On sait que pour une progression arithmétique de 3 termes a ; b ; c ; on a : $a + c = 2b$
Ainsi l'équation dévient :

$$\begin{cases} 2b + b = 3 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b = 3 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases}$$

D'autre part a + b + c = 3 => a + 1 + c = 3 => a + c = 2

$$\begin{cases} a + c = 2 \\ 3a - 6 + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 2 \\ 3a + c = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - c = -2 \\ 3a + c = 12 \end{cases}$$

=> 2a = 10 => a = 5 et c = – 3

D'où les nombres a ; b et c sont tels que $a = 5$; $b = 1$ et $c = -3$

2) Trouver 3 nombres consécutifs a ; b et c d'une suite en progression géométrique sachant que $\begin{cases} a \times b \times c = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases}$

On sait que pour une progression géométrique de 3 termes a ; b ; c , on a : $a \times c = b^2$
Ainsi l'équation dévient :

Scanned by CamScanner

$$\begin{cases}(a\bullet c)\bullet b=8\\ a+b=-1\\ c-a=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(b^2)\bullet b=8\\ a+b=-1\\ c-a=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b^3=8\\ a+b=-1\\ c-a=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=3\\ a+b=-1\\ c-a=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=3\\ a=-4\\ c-a=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=3\\ a=-4\\ c=-3\end{cases}$$

20 D'où les nombres a ; b et c sont tels que $a=-4$; $b=3$ et $c=-3$

Soient a et b deux réels tel que : $(a\ ;\ a+4b\ ;\ 5a+2b)$ et $(b+3\ ;\ 3a+1\ ;\ 6a+b)$ soient des termes consécutifs de suite respectivement arithmétique et géométrique. Trouvons a et b.

$a\ ;\ a+4b$ et $5a+2b$ étant dans cet ordre 3 termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors on a : $(a)+(5a+2b)=2(a+4b)\Leftrightarrow 6a+2b=2a+8b\Leftrightarrow$

$2a-3b=0$ **(1)**

De même $b+3$; $3a+1$ et $6a+b$ étant dans cet ordre 3 termes consécutifs d'une suite géométrique, alors on a : $(b+3)(6a+b)=(3a+1)^2\Leftrightarrow$

$b^2+18a+3b+6ab=9a^2+6a+1\Leftrightarrow 9a^2-b^2-12a-3b-6ab+1=0$ **(2)**

Ainsi formons le système avec les équations **(1)** et **(2)**

$$\begin{cases}2a-3b=0 & (1)\\ 9a^2-b^2-12a-3b-6ab+1=0 & (2)\end{cases}$$

(1) : $2a-3b=0\Rightarrow b=\frac{2}{3}a$

En remplaçant ainsi $b=\frac{2}{3}a$ par sa valeur dans l'équation **(2)**, on a :

(2) : $41a^2-126a+9=0$ et $\Delta=14400$

Alors $a_1=\frac{3}{41}$ et $a_2=3$ puis $b_1=\frac{2}{41}$ et $b_2=2$

D'où les réels a et b sont tels que : $S=\left\{(3\ ;2)\ ;\ \left(\frac{3}{41}\ ;\ \frac{2}{41}\right)\right\}$

21 Quatre (4) entiers strictement positifs a, b, c, et d forment dans cet ordre une suite géométrique dont la raison est un entier premier avec a.

Trouvons ces nombres sachant qu'ils vérifient en outre la relation $10a^2=d-b$.

Les 4 entiers a, b, c, et d forment dans cet ordre une suite géométrique si et seulement si :

$b=qa$; $c=q^2a$; $d=q^3a$.

Scanned by CamScanner

Alors $10a^2 = d - b \Leftrightarrow 10a^2 = q^3a - qa \Leftrightarrow 10a^2 = qa(q^2 - 1) \Leftrightarrow 10a = q(q^2 - 1)$

Nous en déduisons que q divise 10 car PGCD$(q\,;a) = 1$. Donc $q \in \{1\,;2\,;5\,;10\}$

- Si $q = 1$, on a une absurdité car pour $q = 1$, $a = 0$ (qui contredit l'hypothèse).
- Si $q = 2$, on obtient $5a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{5} \notin \mathbb{N}$
- Si $q = 5$, on obtient $a = 12$; $b = 60$; $c = 300$ et $d = 1500$
- Si $q = 10$, on obtient $a = 99$; $b = 990$; $c = 9900$ et $d = 99000$

22 Soit u_n une suite dans laquelle les dix premiers termes de la suite sont en progression arithmétique de raison r et à partir de u_{10} les termes sont en progression géométrique de raison q.

On donne : $u_1 = 0$; $u_{16} = \frac{-1}{27}$ et $qr = 1$

1) Calculer q ; r ; u_{10} et u_{11}

D'après les hypothèses, nous avons :

$u_{10} = u_1 + 9r = 9r$; $u_{11} = q \times u_{10} = q(9r) = 9qr = 9 \times 1 = 9$

D'autre part $u_{16} = q^5 \times u_{11} \Leftrightarrow \frac{-1}{27} = q^5 \times u_{11}$. Or $u_{11} = 9$. Alors on a : $\frac{-1}{27} = 9q^5 \Leftrightarrow$

$q^5 = \frac{-1}{243} \Rightarrow q = \sqrt[5]{\frac{-1}{243}} = \frac{-1}{3}$

Cherchons maintenant la valeur de r.

D'après les hypothèses, nous avons : $qr = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{q}$. Or $q = \frac{-1}{3}$.

Alors $r = -3$ et $u_{10} = -9 \times 3 = -27$

2) Calculer la somme S_n des n premiers termes de la suite u_n dans les deux cas suivants :

a) $n \leq 10$

Lors que $n \leq 10$, on a une suite arithmétique u_n et :

$S_n = \frac{n}{2}(u_1 - u_n) = \frac{n}{2}(2u_1 - (n-1)r) = -\frac{3n(n-1)}{2}$

b) Lors que $n > 10$

Lors que $n > 10$, on a une suite géométrique u_n et :

$S_n = \frac{u_{11}(1-q^{n-10})}{2} = \frac{9\left(1-\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-10}\right)}{2} = -135 + \frac{27}{4}\left(1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^{n-10}\right)$

Scanned by CamScanner

23 Soient Z_1 ; Z_2 *et* Z_3 trois nombres complexes.

Déterminons : Z_1 ; Z_2 *et* Z_3 sachant que :

- Le produit des trois complexes Z_1 ; Z_2 *et* Z_3 est $3i\sqrt{3}$. Alors on a :

$$Z_1 \times Z_2 \times Z_3 = 3i\sqrt{3} \Leftrightarrow [r_1 \times r_2 \times r_3 \, ; \, a_1 + a_2 + a_3\,] = \left[3\sqrt{3} \, ; \, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 \times r_2 \times r_3 = 3\sqrt{3} \\ a_1 + a_2 + a_3 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Les arguments a_1 ; a_2 *et* a_3 forment une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$. Alors on a :

$a_2 = a_1 + \frac{\pi}{3}$ et $a_3 = a_1 + 2\frac{\pi}{3}$

- Les modules r_1 ; r_2 *et* r_3 une suite géométrique de raison 2. Alors on a :

$r_2 = 2r_1$ et $r_3 = 4r_1$

Ainsi formons le système avec ces trois conditions énumérées ci-dessus :

$$\begin{cases} 8r_1^3 = 3\sqrt{3} \\ 3a_1 + \pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}}}{2} \\ a_1 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

D'autre part, $0 < a_1 < \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 0 < -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} < \frac{2\pi}{3}$

En simplifiant par π et en multipliant par 6, on obtient :

$$0 < -1 + 4k < 4 \Leftrightarrow 1 < 4k < 5 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < k < \frac{5}{4} \Rightarrow k = 1$$

Donc : $\begin{cases} a_1 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \\ a_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \\ a_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$ et $\begin{cases} r_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ r_2 = \sqrt{3} \\ r_3 = 2\sqrt{3} \end{cases}$

Ainsi connaissant le module et l'argument de Z_1 ; Z_2 *et* Z_3; on a :

$$\begin{cases} Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right) \\ Z_2 = \sqrt{3}\left(cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}\right) \\ Z_3 = 2\sqrt{3}\left(cos\frac{7\pi}{6} + isin\frac{7\pi}{6}\right) \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Suites économiques.

24 Au 1er Janvier 2012, le prix d'un kilo de sucre est de 550 f CFA.
Le prix du kilo subit une augmentation de 50 f CFA au 1er Janvier de chaque année.

1) Déterminons le prix du kilo de sucre au 1er Janvier 2013 et au 1er Janvier 2014

Soit P_0 le prix d'un kilo de sucre au 1er Janvier 2012 tel que $P_0 = 550$.

- Au 1er Janvier 2013 : le prix d'un kilo de sucre serait $P_1 = P_0 + 50 = 550 + 50 = 600$.
- Au 1er Janvier 2014 : le prix d'un kilo de sucre serait $P_2 = P_1 + 50 = 600 + 50 = 650$.

2) On désigne par P_n le prix du kilo du sucre au 1er Janvier + n.

Calculons P_n en fonction de n

Soit P_n le prix d'un kilo de sucre au 1er Janvier + n.
Calculons : P_1 ; P_2 ; P_3 et p_n.

- $P_0 = 550$.
- $P_1 = P_0 + 50 = 550 + 50 = 600$.
- $P_2 = P_1 + 50 = 660 + 50 = 650$.
- $P_3 = P_2 + 50 = 650 + 50 = 700$.
- $p_n = P_0 + 50n = 550 + 50n$.

D'où l'expression de P_n en fonction de n est $p_n = 550 + 50n$

3) Calculer $P_{n+1} - P_n$ puis en déduire la nature de la suite P_n.

Calculons $p_{n+1} - p_n$.

$p_n = 550 + 50n \Rightarrow p_{n+1} = 550 + 50(n + 1) = 550 + 50 + 50n = 600 + 50n$

$\Rightarrow p_{n+1} - p_n = (600 + 50n) - (550 + 50n) = 600 + 50n - 550 - 50n = 50$

Alors p_n est une suite arithmétique de raison $r = 50$.

25 Le premier Janvier 1999, la population d'une commune rurale était de 3000 habitants.
On admet que cette population diminue de 4 % chaque année.

Calculons la population de cette commune :

Soit u_n la population de cette commune au 1er Janvier de l'année n.

Soit $u_1 = 3000$ la population initiale de cette commune.

On a :

Scanned by CamScanner

$u_1 = 3000$.

$u_2 = u_1 - 4\,\%u_1 \Rightarrow u_2 = u_1\,(1 - 4\,\%) = u_1\,(1 - \frac{4}{100}) = u_1\,(0{,}96)$

$u_3 = u_2\,(0{,}96)$

. .

. .

. .

$u_{n+1} = u_n\,(0{,}96)$

$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0{,}96.$

Alors on a : une suite géométrique de raison $q = 0{,}96$.

D'où son expression est : $u_n = u_1(q)^{n-1} = 3000(0{,}96)^{n-1}$

Déterminons ainsi la population :

1) Au 1er Janvier 2005

On sait que : $u_n = 3000(0{,}96)^{n-1}$ et $n = 2005 - 1999 = 6$

D'où la population au 1er Janvier 2005 est : $u_6 = 3000(0{,}96)^{6-1} = 3000(0{,}96)^5$

$\Rightarrow u_6 = 2446{,}11 \approx 2446$

Ainsi la population au 1er Janvier 2005 est : 2244 habitants.

2) Au 1er Janvier 2006

On sait que : $u_n = 3000(0{,}96)^{n-1}$ et $n = 2006 - 1999 = 7$

D'où la population au 1er Janvier 2006 est : $u_7 = 3000(0{,}96)^{7-1} = 3000(0{,}96)^6$

$\Rightarrow u_7 = 2348{,}27 \approx 2348$

Ainsi la population au 1er Janvier 2006 est : 2348 habitants.

3) Au 1er Janvier 2012

On sait que : $u_n = 3000(0{,}96)^{n-1}$ et $n = 2012 - 1999 = 13$

D'où la population au 1er Janvier 2005 est : $u_{13} = 3000(0{,}96)^{13-1} = 3000(0{,}96)^{12}$

$\Rightarrow u_{13} = 1838{,}12 \approx 1838$

Ainsi la population au 1er Janvier 20012 est : 1838 habitants.

26 Un capital A est placé à intérêts composés aux taux de 3% l'an. On appelle C_0 le capital initial et C_n le capital après n années.

1) Expliquer la relation $C_1 = 1{,}03C_0$ puis écrire le capital C_n en fonction de C_0 et .

Le capital A est placé à intérêts composés au taux de 3% l'an.

Scanned by CamScanner

Le capital obtenu au bout d'un an, C_1, est égal à la somme du capital initial C_0 et des intérêts soit $0{,}03C_0$. D'où $C_1 = C_0 + 0{,}03C_0 = 1{,}03C_0$.
Plus généralement, le capital obtenu au bout de $n+1$ années, C_{n+1}, est égal à la somme du capital obtenu au bout de n années C_n et des intérêts soit $0{,}03C_n$.
D'où $C_{n+1} = C_n + 0{,}03C_n = 1{,}03C_n$

Où on en déduit que la suite (C_n) est géométrique de raison 1,03 et de premier terme C_0.
Ainsi l'expression de C_n en fonction de n est le suivant : $C_n = (1{,}03)^n C_0$
2) Au bout de combien d'années le capital est –il doublé ?

Le capital est doublé au bout de n années si et seulement si $C_n \geq 2C_0$ soit $(1{,}03)^n C_0 \geq 2C_0$.
On cherche donc le plus petit entier n tel que $(1{,}03)^n \geq 2$.

A l'aide de la calculatrice, on trouve : $(1{,}03)^{23} < 2 < (1{,}03)^{24}$

Alors le capital est doublé au bout de 24 ans

3) Au bout de combien d'années le capital est –il triplé ?

De même en raisonnant de manière analogue que précédemment, on obtient :

$(1{,}03)^n \geq 3$ puis à l'aide de la calculatrice, on trouve : $(1{,}03)^{37} < 3 < (1{,}03)^{38}$

Alors le capital est doublé au bout de 38 ans

27 Ali a reçu de son père une somme de 100.000 FCFA.
Après réception, il dépose cette somme dans une caisse d'épargne le 1er Janvier 2009 à intérêt composé au taux annuel de 5 % en vue d'acheter une moto à 300000 FCFA.

1) Déterminons le temps au bout du quel Ali pourra acheter sa moto.
Soient :

- C_0 = 100.000 FCFA : le capital initial.
- C_n = 300.000 FCFA : la valeur acquise.
- $i = 5\,\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$: le taux d'intérêt.

Calculons ainsi la durée n pour que Ali puisse acheter sa moto.

On a : $C_n = C_0(1+i)^n \Leftrightarrow (1+i)^n = \frac{C_n}{C_0} \Rightarrow (1+0{,}05)^n = \frac{300000}{100000}$

$\Rightarrow (1{,}05)^n = 3$ (or $a^n = e^{n\ln a}$)
$(1{,}05)^n = 3 \Leftrightarrow e^{n\ln(1{,}05)} = 3$ (or $e^a = b \Leftrightarrow a = \ln b$)

$e^{n\ln(1{,}05)} = 3 \Leftrightarrow n\ln(1{,}05) = \ln 3 \Rightarrow n = \frac{\ln 3}{\ln(1{,}05)} \Rightarrow n = \frac{1{,}09}{0{,}04} \Rightarrow n = 27{,}25 \approx 27.$

Scanned by CamScanner

Donc Ali pourra acheter sa moto au bout de 27 ans.

2) Déterminons la nouvelle valeur acquise par Ali au bout de 30 semestres au taux de 2 %.

$C_n = C_0(1+i)^n \Rightarrow C_{30} = 100.000(1+2\,\%)^{30} \Leftrightarrow C_{30} = 100.000(1+0{,}02)^{30}$

$\Rightarrow C_{30} = 100.000(1{,}02)^{30} = 181.136$ FCFA.

Donc Ali aura une valeur acquise de 181.136 FCFA au bout de 30 semestres.

28 1) Chaque année la grand-mère de Salif dépose de l'argent dans une banque afin de constituer une cagnotte pour son petit-fils.
Elle a commencé le 1er janvier 1982 par un dépôt de 500 F. Depuis lors, elle a effectué un dépôt chaque 1er janvier, en augmentant chaque année le montant de ce dépôt de 50 F.
On note :

- u_n le montant exprimé en francs, de la somme déposée dans la caisse d'épargne le 1er janvier 1982+ n. (Ainsi $u_0 = 500$; $u_1 = 550$; …)
- S_n le montant, en francs, de la somme contenue dans la caisse d'épargne après le dépôt de l'année 1982+ n. (Ainsi $S_0 = 500$; $u_1 = 1050$; …)

a- Calculons u_2, puis exprimer u_n en fonction de n.

Par hypothèse, on a :

$u_0 = 500$
$u_1 = u_0 + 50 = 550$

$u_2 = u_1 + 50 = 600$
. . .
. . .
. . .
$u_{n+1} = u_n + 50$

Alors la suite u_n est donc arithmétique de raison $r = 50$ et de premier terme $u_0 = 500$.

Ainsi son expression en fonction de n est $u_n = u_0 + nr \Rightarrow u_n = 500 + 50n$.

b- Calculons S_2, puis exprimons S_n en fonction de n.

$S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = 500 + 550 + 600 = 1650$

Le montant, en francs, de la somme stocké à la banque le 1er janvier $1982 + n$ est la somme de tous les dépôts effectués entre 1982 et $1982 + n$, c'est-à-dire : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$, qui est donc la somme des $n + 1$ premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Ainsi on a : $S_n = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2} = \frac{(n+1)(500+500+50n)}{2} = (n+1)(25n+500)$

Scanned by CamScanner

c- Le 1er janvier 2002, la grand-mère de Salif effectue son dépôt habituel (en franc), puis offre l'argent de la caisse à Salif.

Déterminons le montant de la somme reçue par Salif

On a : $2002 = 1982 + 20$. Donc $n = 20$. Il s'agit de calculer S_{20}.

$S_n = (n+1)(25n + 500) \Rightarrow S_{20} = (20+1)(25 \times 20 + 500) = 21000$ Franc ou

$S_{20} = \frac{21000}{6{,}55957} = 3201{,}43$ €

2) Avec le cadeau de sa grand-mère, Salif décide d'ouvrir un compte bancaire et d'y placer la plus grande partie de la somme qu'il a reçue.

Le 1er janvier 2002, il effectue un placement de 3000 €, à intérêts composés, aux taux annuel de 4%.(A la fin de chaque année, les intérêts seront incorporés au capital). De plus, chaque 1er janvier des années suivantes, il décide d'ajouter sur son compte la somme de 200€.
On note :

- C_n le montant exprimé en euros, du capital disponible sur le compte bancaire de Salif après n années de placement. (Ainsi $C_0 = 3000$)
- (u_n) la suite définie par $u_n = C_n + 5000$. (Ainsi $u_0 = 8000$)

a- Justifions que pour tout entier naturel n, on a : $C_{n+1} = 1{,}04C_n + 200$

Le 31 décembre de chaque année, le capital C_n augmente de 4%. Il vient donc :
$(1+i)C_n$. Où C_n est le montant exprimé après n années de placement et $i = 4\% = \frac{4}{100}$ le taux d'intérêt annuel.

Alors on a : $(1+i)C_n = \left(1 + \frac{4}{100}\right) C_n = 1{,}04C_n$

De plus, le jour suivant (1er janvier), Salif ajoute 200 € sur son compte.

Le nouveau capital C_{n+1} est donc : $C_{n+1} = 1{,}04C_n + 200$.

b- Démontrons que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

u_n est une suite géométrique si et seulement si : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ où $q = cste =$ raison.

Par hypothèse on a : $u_n = C_n + 500 \Rightarrow u_{n+1} = C_{n+1} + 5000$. Or $C_{n+1} = 1{,}04C_n + 200$.

Alors $u_{n+1} = 1{,}04C_n + 200 + 5000 = 1{,}04C_n + 5200 \Rightarrow u_{n+1} = 1{,}04C_n + 5200$

D'autre part $u_n = C_n + 500 \Leftrightarrow C_n = u_n - 500$

En remplaçant $C_n = u_n - 500$ par sa valeur dans $u_{n+1} = 1{,}04C_n + 5200$, on a :

Scanned by CamScanner

$u_{n+1} = 1{,}04(u_n - 500) + 5200 = 1{,}04u_n - 500 \times 1{,}04 + 5200$

$\Rightarrow u_{n+1} = 1{,}04u_n - 5200 + 5200 \Leftrightarrow u_{n+1} = 1{,}04u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1{,}04$

D'où u_n est une suite géométrique de raison $q = 1{,}04$ et de premier terme $u_0 = C_0 + 5000$

$\Rightarrow u_0 = 3000 + 5000 = 8000$

c- Exprimons u_n en fonction de n, puis C_n en fonction de n.

u_n étant une suite géométrique de raison $q = 1{,}04$ et de premier terme $u_0 = 8000$, alors son expression en fonction de n est $u_n = u_0(q)^n = 8000(1{,}04)^n$.
D'autre part $C_n = u_n - 500 \Rightarrow C_n = 8000(1{,}04)^n - 500$

d- Déterminons le nombre minimum d'années à partir de la quelle Salif devra attendre pour disposer d'une somme de 6000 euros sur son compte bancaire

Il s'agit de déterminer le plus petit entier n tel que : $C_n \geq 600$.

$C_n \geq 600 \Leftrightarrow 8000(1{,}04)^n - 500 \geq 600 \Leftrightarrow 8000(1{,}04)^n \geq 11000 \Leftrightarrow 8(1{,}04)^n \geq 11 \Leftrightarrow$

$(1{,}04)^n \geq \frac{11}{8}$ (En appliquant la formule $a^n = e^{nlna}$), on a :

$(1{,}04)^n \geq \frac{11}{8} \Leftrightarrow e^{nln1{,}04} \geq \frac{11}{8} \Leftrightarrow nln1{,}04 \geq ln\left(\frac{11}{8}\right) \Leftrightarrow n \geq \frac{ln\left(\frac{11}{8}\right)}{ln1{,}04}$
$\Leftrightarrow n \geq 8{,}12$ à 10^{-2} près soit $n \geq 9$ car n est un entier.

D'où Salif devra attendre au moins 9 ans avant de disposer de 6000 € sur son compte.

Scanned by CamScanner

Chapitre 9

Probabilité

COURS

I- Dénombrement :

1) Vocabulaire sur les ensembles finis :

- **Expérience aléatoire** : expérience dont le résultat dépend du hasard.
- **Eventualité** : résultat possible d'une expérience aléatoire.
- **Univers ou CardE $= n$** : ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire.
- **Evénement** : sous-ensemble de l'univers.
- **Evénement élémentaire :** événement réduit à un seul élément.
- **Union de 2 ensembles**: Soit A et B deux ensembles finis. On appelle Union de A et B l'ensemble des éléments de A ou B. On note : $A \cup B = \{x/x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- **Intersection de 2 ensemble :** L'intersection de deux ensembles A et B regroupent les éléments communs aux deux ensembles A et B. On note : $A \cap B = \{x/x \in A \text{ et } x B\}$.
- **Produit cartésien de A par B :** On appelle produit cartésien A×B l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ tel que x appartient à A et y appartient à B. On note : $A \times B = \{(x\,;y)/\, x \in A \text{ et } y \in B\}$.
- **Evènement contraire de A** : On appelle Evènement contraire de A l'ensemble de toutes les issues de l'ensemble E n'appartenant pas à A on la note : $\bar{A}$ tel que : $\bar{A} = C_E^A = \{x/x \in E \text{ et } x \notin A\}$.

2) Propriétés sur les ensembles finis

Soient A et B deux ensembles finis. on admet les propriétés suivantes :

P_1 : $A \cup \emptyset = \emptyset$; $A \cap \emptyset = A$; $A \times B \neq B \times A$ (le produit cartésien n'est pas commutatif)

P_2 : $\text{Card}\emptyset = 0$

P_3 : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}(A \cap B)$ **si** $A \cap B \neq \emptyset$ et

$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B$ **si** $A \cap B = \emptyset$ et

P_4 : $\text{Card}(A \cap B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}(A \cup B)$

P_5 : $\text{Card}(A \times B) = \text{Card } A \times \text{Card } B$

P_6 : $\text{Card}C_E^A = \text{Card E} - \text{Card A}$

P_6 : $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$

Scanned by CamScanner

3) Permutation–Arrangement – combination – P-liste

a) Permutation :

- **Définition** :

On appelle permutation d'un ensemble fini F de cardinal n ; toute bijection de [1 ; n]dans F.
Le nombre de permutation d'un ensemble fini de cardinal n.
On la note : $n!$ **(et se lit Factorielle n).**

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots\times 2\times 1$$

- **Propriétés** :

$P_1 : 1! = 1$; $P_2 : 0! = 1$

b) Arrangement :

- **Définition**:

Soit **E** un ensemble à n éléments, et **P** un ensemble fini tel que : ($n \geq P$). On appelle arrangement de **P** éléments de **E**, toute injection de **P** dans **E**.

On le note : A_n^P et on lit : « **A , n , P** ».

$$A_n^P = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1) \quad \text{ou} \quad A_n^P = \frac{n!}{(n-P)!}$$

- **Propriétés**:

$P_1 : A_n^0 = 1$ $P_3 : A_n^n = n!$

$P_2 : A_n^1 = n$ $P_4 : A_n^{n-1} = n!$

c) Combinaison :

- **Définition** :

Soit **E** un ensemble à n éléments, et **P** un ensemble fini tel que : ($n \geq P$). On appelle combinaison de **p** éléments de **E** tout sous ensemble de **E** ayant **p** éléments.

On le note : C_n^P et on lit : « **C , n , P** ».

$$C_n^P = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{n(n-1)\ldots\ldots 2\times 1.} \text{ ou } C_n^P = \frac{A_n^P}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

- **Propriétés** :

$P_1 : C_n^0 = 1$ $P_3 : C_n^n = 1$

$P_2 : C_n^1 = n$ $P_4 : C_n^{n-1} = n$

Scanned by CamScanner

N.B : Pour calculer le C_n^P, on utilise le triangle de Pascal qui est le suivant :

N \ P	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	1													
1	1	1												
2	1	2	1											
3	1	3	3	1										
4	1	4	6	4	1									
5	1	5	10	10	5	1								
6	1	6	15	20	15	6	1							

d) Nombre d'application d'un ensemble fini dans un ensemble fini (P- liste)

- **Définition** :

Soit **E** et **F** deux ensembles finis ; on appelle application de l'ensemble **E** dans **F**, toute relation qui permet d'associer à tout élément de **E**, un élément unique de **F**. Le nombre d'application distincte d'un ensemble fini de cardinal **p** dans un ensemble fini de **Cardinal n** est noté : $A_n^{\widehat{P}}$ tel que : $A_n^{\widehat{P}} = n^P$

- **Propriétés**:

$P_1 : A_n^{\widehat{0}} = n^0 = 1$;

$P_2 : A_n^{\widehat{1}} = n^1 = n$;

4) Les différents types de tirages

a. Tirages successif et sans remise :

Si l'énoncé contient les mots : **successif et sans remise,** cela signifie que l'ordre dans le quel on considère les éléments a de l'importance mais que tous les éléments considérés sont distincts (ou **qu'il n'y a pas de répétition d'éléments**).
Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **l'arrangement.**

$A_n^P = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$ ou $A_n^P = \frac{n!}{(n-P)!}$

Propriétés

$A_n^0 = 0$; $A_n^1 = n$; $A_n^n = n!$; $A_n^{n-1} = n!$

b. Tirages successif et avec remise :

Si l'énoncé contient les mots : **successif et avec remise,** cela signifie que l'ordre dans le quel on considère les éléments a de l'importance et qu'un élément peut éventuellement être répété.
Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **la P-liste.** $A_n^{\widehat{P}} = n^P$

Scanned by CamScanner

Propriétés

$A_n^{\widehat{0}} = 1 \quad ; \quad A_n^{\widehat{1}} = n$

c. Tirage simultané :

Si l'énoncé contient le mot : simultanément, cela signifie que l'ordre dans le quel on considère les éléments n'a pas d'importance.
Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **la combinaison.**

$$C_n^P = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-p+1)}{n(n-1)(n-2)...\bullet 2\bullet 1} \text{ ou } C_n^P = \frac{A_n^P}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Propriétés

$C_n^0 = 0 \quad ; \quad C_n^1 = n \quad ; \quad C_n^n = 1 \quad ; \quad C_n^{n-1} = n$

d. Tirage successif :

Si l'énoncé contient le mot : **successif,** il faut en tenir compte de tous les ordres dans les quels on peut obtenir un événement donné.
On doit souvent multiplier par le nombre d'ordres possibles le résultat trouvé pour un ordre déterminé.

Attention :

Il ne s'agit que d'indications, elles admettent des exceptions.

II- Probabilité simple :

1) Définition :

Dans une épreuve où tous les évènements élémentaires d'un univers Ω sont équiprobables, la probabilité d'un évènement A est le nombre réel défini par le rapport entre le Nombre de Cas Favorable à l'évènement A et le Nombre de Cas Possible. On note P_A ou P(A).

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{NombredeCasFavorables \text{ à } laréalisationdeA}{NombreTotaldeCasPossibles \text{ à } laréealisationdeA}$$

2) Propriétés :

Soit Ω l'univers ou l'évènement certain et A et B deux évènement élémentaires de Ω .
On a :

- $P(\Omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- Si $A \cap B \neq \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Scanned by CamScanner

3) Equiprobabilité:

On parle d'équiprobabilité si la probabilité de réalisation de chaque évènement élémentaire est le même.
Le lancé du dé est un évènement d'équiprobable car la probabilité d'apparition de chaque face est $\frac{1}{6}$

III- Probabilités conditionnelles et Indépendance

1) Définition :

Soient A et B deux évènements de probabilité non nulles tels que $A \cap B \neq \emptyset$.
La probabilité de réalisation de A quand B est réalisé s'appelle probabilité conditionnelle de A par rapport à B ou probabilité de A sachant B. $P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

2) Indépendance :

Deux évènements A et B sont indépendants si la réalisation de l'un ne modifie pas la réalisation de l'autre. On a alors :

- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

IV- Loi de probabilité

1) Variable aléatoire :

On appelle variable aléatoire réelle, toute application x de Ω dans $\mathbb{R}$, L'ensemble des valeurs prises par x, noté $x(\Omega)$ et s'appelle l'univers image de Ω par x.

2) Loi de probabilité d'une variable aléatoire X

On appelle loi de probabilité d'une variable aléatoire x la fonction :
P : $x \mapsto P(X = x)$ qui a toute valeur image si associe la probabilité Pi = $P(X = x_i)$.

N.B : Une loi de probabilité se présente sous forme d'un tableau de valeurs

x_i	x_1	x_2	x_3	.....	x_n
$p(X= x_i)$	p_1	p_2	p_3	.....	p_n

NB :

La somme de toutes les lois de probabilités est toujours égale à 1 c'est-à-dire :
$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots\ldots + p_n = 1$

Scanned by CamScanner

3) Valeurs caractéristiques d'une variable aléatoire :

a) Espérance mathématique X

On appelle espérance mathématique X, le nombre noté : $\overline{X}$ = E(x) tel que :

$$\overline{X} = E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i = x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 + \ldots . x_n P_n$$

N.B :
C'est la moyenne pondérée des valeurs images x_i pondérées par les probabilités P_i
Car : $P_1 + P_2 + P_3 + \ldots . P_n = 1$

Propriétés :

P₁ : E(x – E(x)) = 0 ; **P₃ :** E(x + k) = E(x) + k
P₂ : E(k) = k **P₄ :** E(kx) = k E(x).
;

b) Variance :

On appelle variance d'une variable aléatoire x, le nombre réel noté V(X) telle que :

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P_i - E(X) = x_1^2 P_1 + x_2^2 P_2 + x_3^2 P_3 + \ldots . x_n^2 P_n - E(X)$$

Propriétés :

P₁ : V(k) = 0 ; **P₂ :** V(X+k) = V(x) ; **P₃ :** V(kx) = k^2V(x)

c) Ecart – type :

On appelle écart-type la racine carré de la variance. On la note $\delta(x)$ tel que : $\delta(\mathbf{x}) = \sqrt{v(x)}$.

Propriété:

δ(kx) = k δ(x)

4) Partie associée à une valeur image :

Etant donnée une valeur image x_i, on désigne par " $X = x_i$", l'évènement constitué par l'ensemble des éventualités $e_k$de Ω ayant pour image x_i par X on note "$X(e_k) = x_i$" ou " $X = x_i$".

N.B : L'ensemble des évènements " $X = x_i$",constitue une partition de Ω et forme un système complet d'évènements.
On définit également les notations : X >a ; X ≥ a; .....
C'est l'ensemble des éventualités de Ω dont l'image est strictement supérieure à a, supérieure ou égale à a,.....

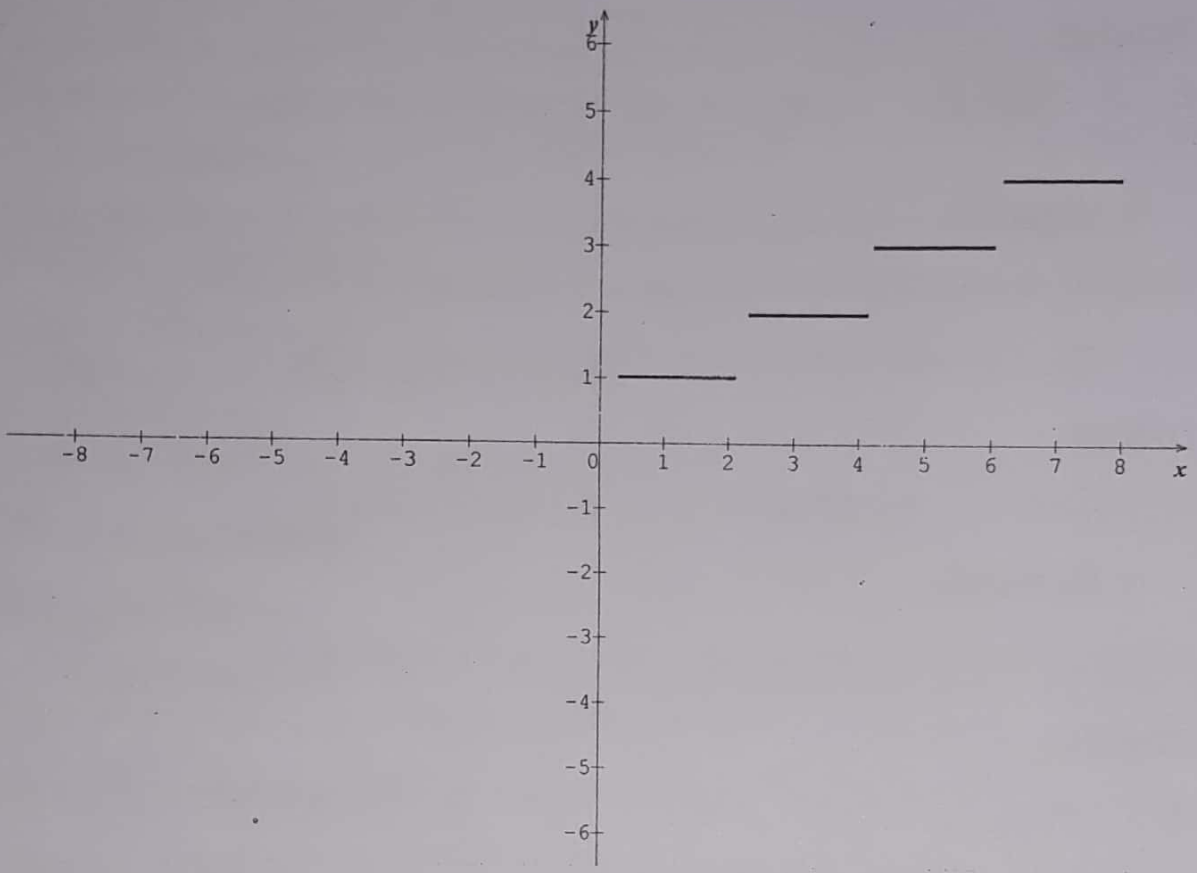
Scanned by CamScanner

5) Fonction de répartition d'une variable aléatoire X

On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire x, la fonction F définie sur R par :
$F : x \mapsto p(X \leq x)$
N.B :

Si $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, alors $F(x) = P_1 + P_2 + \ldots\ldots\ldots + P_i$

En particulier : $F(x) = 0$ pour $x < x_1$: $F(x) = 1$ pour $x > x_n$
La fonction F est une fonction en escalier, croissante de 0 à 1



6) Epreuve de Bernoulli – Loi Binomiale

a- Epreuve de Bernoulli

On appelle épreuve de Bernoulli toute épreuve ne conduisant qu'à deux éventualités. L'une de ces deux éventualités est appelée succès avec pour probabilité p et l'autre échec avec pour probabilité $q = 1 - p$.

b- Loi binomiale :

Soit une suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
Soit P la probabilité du succès et $q = 1 - p$ celle de l'échec.
Soit x la variable aléatoire désignant le nombre de succès.
La probabilité d'avoir exactement k succès est : $p(x = k) = C_n^k \, p^k \, q^{n-k}$

Scanned by CamScanner

EXERCICES

Dénombrements.

1 1) Calculer :

$A = 5! + 3(4!)$; $B = \frac{8!}{3!}$ $C = \frac{12!}{10!\,3!}$; $D = \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$; $E = \frac{n \times n!}{(n-1)!}$; $F = \frac{(2n+1)!}{(2n)!}$

$G = A_8^5 + A_{13}^2 + 3A_{100}^0$; $H = C_7^4 + C_{15}^{15} + 8C_{100}^{99}$; $I = \frac{A_{13}^8}{A_6^4} + \frac{C_{10}^5}{C_9^7}$

2) Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes :

a) $A_n^2 = n(2n+5)$; b) $C_n^2 = 5n$; c) $A_n^2 = C_n^3$; d) $C_n^2 = 45$; e) $n^2 + 3C_n^2 = 1$

2 Soient A et B deux ensembles finis tels que : $A = \{1 ; a ; c\}$ et $B = \{b ; 1 ; c ; 2\}$

1) Déterminer : $A \cap B$; $A \cup B$; $A \times B$.
2) Déterminer : Card(A) ; Card(B) ; Card($A \cap B$) ; Card($A \cup B$) ; Card($A \times B$) .

3 Dans une classe de 40 élèves, 25 aiment la mathématique ; 30 aiment le français et 17 aiment la mathématique et le français.
1) Calculer le nombre d'élève qui aiment :
a- Uniquement le français.
b- Uniquement la mathématique.
c- La mathématique ou le français.
2) En déduire le nombre d'élèves qui n'aiment aucune des deux matières

4 Trouver le nombre d'anagrammes des mots suivants : MALI ; PLAGE ; RECHERCHER.
(On rappelle qu'une anagramme d'un mot est un mot qui contient les mêmes lettres éventuellement répétées le même nombre de fois).

5 Un sac contient 25 boules dont 9 rouges, 6 vertes et 10 jaunes. On tire 5 boules du sac.

I) Dénombrer les cas possible à cette épreuve si :
1) le tirage est simultané
2) le tirage est successif sans remise
3) le tirage est successif avec remise.

II) Dénombrer les cas favorables dans chaque cas si :
1) le tirage est successif sans remise et le résultat contient au plus 3 jaunes
2) le tirage est simultané et le résultat contient 2 rouges, 2 vertes et 1 jaune.
3) Le tirage est successif avec remise et le résultat contient au moins 7 rouges.
4) Le tirage est simultané et le résultat contient au plus 1 verte
5) Le tirage est successif sans remise et le résultat est unicolore.

Scanned by CamScanner

Probabilités simples – Probabilités conditionnelles.

6 Soit une expérience E et P la probabilité modélisant E.
Soit A et B deux évènements tels que $P(A)=\frac{1}{3}$; $P(B)=\frac{1}{4}$ et $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$
Calculer : $P(A\cup B)$; $P(A\cup \bar{B})$; $P(\bar{A}\cup B)$ et $P(\bar{A}\cup \bar{B})$

7 Peut-on trouver une probabilité P sur l'univers $\Omega=\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$ telle que :
$P(\{1\ ;2\})=\frac{1}{4}$; $P(\{1\ ;3\})=\frac{1}{4}$ et $P(\{2\ ;3\})=\frac{1}{2}$?

8 Dans une classe de terminale 88% des élèves ont déclarés aimer les mathématiques ; 20% ont déclarés aimer la chimie et 15% ont déclarés aimer les mathématiques et la chimie.
On choisit un élève au hasard.
1) Quelle est la probabilité que cet élève aime les mathématiques et pas la chimie ?
2) Quelle est la probabilité que cet élève aime la chimie et pas les mathématiques ?
3) Quelle est la probabilité que cet élève n'aime ni les mathématiques ni la chimie ?

9 Dans un village, on choisit une personne au hasard (tous les choix sont équiprobables).
On désigne par :

- H l'évènement : ≪ Cette personne est un homme≫.
- B l'évènement : ≪ Cette personne a les yeux bleus≫.
- M l'évènement : ≪ Cette personne a les yeux marrons ≫.
- V l'évènement : ≪ Cette personne a les yeux verts≫.

1) Exprimer par une phrase chacun des évènements suivants :

$H\cap B$; $H\cap M$; $H\cap V$; $\bar{H}\cap B$; $\bar{H}\cap M$; $\bar{H}\cap V$; $\bar{H}\cap \bar{B}$.

2) On donne : $P(H)=\frac{1}{2}$; $P(B)=\frac{4}{3}$; $P(M)=\frac{2}{7}$; $P(V)=\frac{1}{5}$

Calculer : $P(H\cap B)$; $P(H\cap M)$; $P(H\cap V)$; $P(\bar{H}\cap B)$; $P(\bar{H}\cap M)$; $P(\bar{H}\cap \bar{B})$

10 Deux tireurs A et B font feu simultanément sur une cible. La probabilité que A touche la cible est estimé à $\frac{4}{5}$; et pour celui de B est $\frac{3}{4}$.

Calculer la probabilité des évènements suivants :
1) Les deux tireurs touchent tous deux la cible.
2) Les deux tireurs manquent la cible.
3) La cible est atteinte par le tireur A seulement.
4) La cible est atteinte par un tireur seulement.
5) La cible est atteint.
6) La cible soit manquée

Scanned by CamScanner

11 Une population animale comporte $\frac{1}{3}$ de mâles et $\frac{2}{3}$ de femelles. L'albinisme frappe 6% de mâles et 0,36% de femelles.
Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard (dont on ignore le sexe) soit albinos ?

12 Dans un village, 1 habitant sur 10 est atteint d'une maladie génétique A.
On fait un teste de dépistage puis on note par (T) si le teste est positif et par $(\bar{T})$ si le teste est négatif. On donne $P(T/A) = 0,8$ et $P(\bar{T}/\bar{A}) = 0,9$
On soumet un patient au test, celui-ci est positif.
Quelle est la probabilité que ce patient soit atteint par la maladie A ?

13 Dans une population, 30% de personnes sont atteintes d'une affection des voies respiratoires supérieures. Il ya 60% de fumeurs parmi les malades et 10% de fumeurs parmi les personnes non atteintes par cette affection. Calculer la probabilité qu`un fumeur soit atteint de l'affection.

14 On lance un dé deux fois.
1) Calculer la probabilité que le total des points présentés par la face supérieur du dé soit égale à 6.
2) Calculer la probabilité que le total des points présentés par la face supérieur du dé soit un nombre pair.

15 On dispose d'un jeu de 32 cartes ordinaires
1) Combien de "mains" différentes de 8 cartes peut – on constituer ?
2) Combien de "mains" différentes de 8 cartes comprenant 2as peut – on constituer ?
3) Combien de "mains" de 8 cartes ayant au moins 2 cœurs peut – on constituer ?

16 On jette successivement un dé cubique deux fois puis on désigne par :
- A l'évènement : « le 1er jet donne un nombre pair».
- B l'évènement : « le 2^{ième} jet donne un nombre pair».
- C l'évènement : « la somme de deux numéros obtenu est paire».

Les évènements A ; B et C sont-ils deux à deux indépendant ? Mutuellement indépendant ?

17 Dans le cadre de la prévention des angines hivernales au Mali, une étude a été menée pour tester l'efficacité réelle d'un médicament constitué d'un cocktail de vitamines. Dans ce but, on a sélectionné un échantillon de 600 personnes réparties de manière aléatoire en trois groupes : 240 personnes dans le groupe **A**, 35% de l'échantillon dans le groupe **B**, et le reste dans le groupe **C**.

On a administré aux personnes du groupe **A** durant la période hivernale une dose journalière de ce médicament en le leur disant.

On a administré aux personnes du groupe **B** un placebo (c'est-à-dire un comprimé neutre, ne contenant aucun élément médicinal actif), tout en leur disant qu'il s'agissait du médicament.

On a administré aux personnes du groupe **C** le médicament en leur disant qu'il s'agissait d'un placebo.

Scanned by CamScanner

Les résultats de l'étude sont recensés sur 600 fiches individuelles.

a-/ 28% des fiches signalent un traitement efficace. Parmi celles-ci 72 fiches correspondent à des personnes du groupe B

b-/ 75% des fiches correspondant aux personnes du groupe **A** ne signalent aucune amélioration significative.

1-/ Reproduire et compléter le tableau suivant :

	Groupe A	Groupe B	Groupe C	Total
Nombre de fiches signalant un traitement efficace				
Nombre de fiches ne signalant aucune amélioration significative				
Total	**240**			**600**

2-/ a-/ On choisit une fiche au hasard parmi les 600.

On considère les évènements suivants :

E_1 : «Il s'agit d'une fiche du groupe A.»,

E_2 : «Il s'agit d'une fiche signalant un traitement efficace.»,

$E_3 = E_1 \cap E_2$

$E_4 = E_1 \cup E_2$

Calculer les probabilités de ces quatre évènements.

b-/ On choisit au hasard une fiche du groupe **B**. On considère l'évènement E_5: «Il s'agit d'une fiche signalant un traitement efficace.».

Calculer la probabilité de l'évènement E_5. *Le résultat sera arrondi à* 10^{-2}.

3-/ Pour chacun des groupes, donner les fréquences en pourcentage des fiches signalant un traitement efficace.

Loi de probabilité

18 Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donné par le tableau suivant :

x_i	5	10	15	30
$P(X = x_i)$	0,1	a	$2a$	0,3

1) Calculer a.
2) En déduire les valeurs de :
   a- L'espérance mathématique $E(X)$.
   b- La variance $V(X)$.
   c- L'écart-type $\delta(X)$

19 Un sac contient 5 boules rouges et 3 boules blanches, on tire simultanément et au hasard 3 boules.

1) calculer la probabilité de chacune des évènements suivants :
a) aucune boule rouge n'est tirée
b) une boule rouge et une seule est tirée
c) deux boules rouges et deux seulement sont tirées
d) une boule rouge au moins est tirée
e) deux boules blanches au plus sont tirées

Scanned by CamScanner

2) soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de boules rouges qui se trouvent parmi les 3 boules tirées.
a) Donner la loi de probabilité de X
b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X
c) Calculer la probabilité de l'évènement $1 \leq X \leq 2$

20 Lors de la coupe du Mali de football 2012, on a donné dans le tableau ci-dessous les résultats des 8 matchs joués le premier jour du tournoi.

Matchs	Première Equipe	Deuxième équipe
1er Match	2 buts	1 but
2ème Match	2 buts	0 but
3ème Match	3 buts	3 buts
4ème Match	1 but	3 buts
5ème Match	0 but	1 but
6ème Match	0 but	0 but
7ème Match	1 but	4 buts
8ème Match	3 buts	2 buts

On choisit un match au hasard parmi les huit matchs du premier jour du tournoi ; tous les matchs ont la même probabilité d'être choisi.

1- a) Montrer que la probabilité P_1 qu'aucun but n'ait été marqué au cours de ce match est égale à $\frac{1}{8}$

b) Quelle est la probabilité P_2 que le match soit nul (c'est-à-dire que chaque équipe ait marqué le même nombre de buts) ?

2- Pour chaque match, on calcule la différence entre les nombres de buts marqués par les équipes, de façon à trouver un nombre positif ou nul.
On définit ainsi une variable aléatoire X. Par exemple pour le 5ème match, la valeur de X est égale à 1 et pour le 8ème match, elle est aussi égale à 1.
a) Donner les valeurs possibles de X.
b) Déterminer la loi de probabilité de X .
c) Calculer l'espérance mathématique de X.

21 Un récepteur radio possède cinq (05) transistors dont deux (02) défectueux. On effectue simultanément un contrôle sur deux (02)
1) Combien y-a-t-il de contrôles possibles ?
2) Soit x la variable aléatoire égale au nombre de transistor défectueux décelés lors des contrôlés.
a- Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
b- Déterminer la loi de probabilité de X.
c- Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

22 Une urne contient un jeton marqué 1 ; deux jetons marqués 2 et x jetons marqués 3 ($x \geq 2$). On tire simultanément 2 jetons de l'urne. On suppose que le tirage est équiprobable et on désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des points marqués sur les 2 jetons extraits de l'urne.
1) a- Exprimer en fonction de x les valeurs prises par X.

Scanned by CamScanner

b- Déterminer la loi de probabilité de X.

2) a- Démontrer que l'espérance mathématique $E(X) = \frac{6x^2 + 22x + 20}{x^2 + 5x + 6}$

b- Déterminer la valeur de x pour que E(X) soit égale 5

23 Soit le tableau ci – dessous donnant la loi de probabilité de fabrication de voiture d'une société

X	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

1) Calculer l'espérance mathématique
2) Calculer la variance puis en déduire l'écart – type
3) Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire X de cette loi de probabilité puis faite sa représentation la graphique.

24 Une étude statistique faite an le nombre de vente de voiture en une journée par un de ses représentants a conduit à la loi de probabilité suivante pour la variable aléatoire x prenant pour valeurs le nombre de ces ventes.

X	0	1	2	3	4	5 et plus
$P(X = x_i)$	0,15	0,40	0,30	0,10	0,05	0

1) Dresser le tableau de la fonction de répartition F de la variable aléatoire X et représenter cette fonction dans le plus rapporté à un repère orthogonal convenable
2) Calculer l'espérance mathématique E(X) et la variance V(X) de la variable X.

Epreuve de Bernoulli – Loi Binomiale

25 On suppose que la probabilité de faire un garçon est $\frac{1}{4}$. Une famille a 5 enfants.
Calculer la probabilité pour qu'il y ait exactement 3 garçons.

26 L'objectif de cet exercice est de déterminer les quels des avions à 2 ou 4 moteurs sont les plus sûrs.
Un avion ne s'écrase pas tant que la moitié au moins de ses moteurs fonctionne. Les moteurs d'un avion tombent en panne de manière indépendante.

Partie A :

Dans cette partie on prend $p = 0,1$

1) Calculons la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.
2) Calculons la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne.
3) Calculons la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne
4) En déduire la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'crase.

Scanned by CamScanner

Partie B :

On revient au cas général

1) Soit $f(p)$ la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'crase.
Démontrer que $f(p) = p^2$
2) Soit g(p) la probabilité pour qu'un avion à 4 moteur s'écrase. Démontrer que $g(p) = p^2\ (-3p^2\ +4p)$
3) On pose $h(p) = f(p) - g(p)$.

a-Etudier le signe de h(p) en fonction de p.
b-En déduire, suivant les valeurs de p dans quels avions il vaut mieux monter.

Solutions

Dénombrements.

1 1) Calculons :

$A = 5\,! + 3(4\,!) = (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) + 3(4 \times 3 \times 2 \times 1) = 192$

$B = \frac{8\,!}{3\,!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\,!}{3\,!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$

$C = \frac{12\,!}{10!\times 3\,!} = \frac{12\times11\times10\,!}{10!\times 3\,!} = \frac{12\times11}{3\,!} = \frac{12\times11}{3\times2\times1} = 2 \times 11 = 22$

$D = \frac{(n+1)\,!}{(n-1)\,!} = \frac{(n+1)\times(n+1-1)\times(n-1)\,!}{(n-1)\,!} = \frac{(n+1)\times n\times(n-1)\,!}{(n-1)\,!} = n(n+1)$

$E = \frac{n\times n\,!}{(n-1)\,!} = \frac{n\times n(n-1)\,!}{(n-1)\,!} = n \times n = n^2$

$F = \frac{(2n+1)\,!}{(2n)\,!} = \frac{(2n+1)\times(2n+1-1)!}{(2n)\,!} = \frac{(2n+1)\times(2n)\,!}{(2n)\,!} = 2n + 1$

$G = A_8^5 + A_{13}^2 + 3A_{100}^0 = (8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4) + (13 \times 12) + 3(1) = 6879$

$H = C_7^4 + C_{15}^{15} + 8C_{100}^{99} = \left(\frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}\right) + (1) + 8(100) = 7 \times 5 + 1 + 800 = 836$

$I = \frac{A_{13}^8}{A_6^4} + \frac{C_{10}^5}{C_9^7} = \left(\frac{13\times12\times11\times10\times9\times8\times7\times6}{6\times5\times4\times3}\right) + \left(\frac{\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}}{\frac{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}}\right) = (144144) + (7)$

$\Rightarrow I = 144151$

Scanned by CamScanner

2) Résolvons dans ℕ les équations suivantes :

NB : Dans tout l'exercice, D_v désigne le domaine de validité des équations proposées et il est obtenu en posant $x \geq p$; où p est l'entier dans les expressions C_n^p ou A_n^p

a) $A_n^2 = n(2n + 5)$

$D_v = \{x/x \in \mathbb{N}; x \geq 2\}$. Alors $x \geq 2 \Rightarrow D_v = [2 ; +\infty[$

Résolvons ainsi l'équation $A_n^2 = n(2n + 5)$.

$A_n^2 = n(2n + 5) \Leftrightarrow n(n-1) = n(2n + 5) \Leftrightarrow n - 1 = 2n + 5 \Leftrightarrow n = -6 \notin D_v$

Alors $S = \emptyset$

b) $C_n^2 = 5n$

$D_v = \{x/x \in \mathbb{N}; x \geq 2\}$. Alors $x \geq 2 \Rightarrow D_v = [2 ; +\infty[$

Résolvons ainsi l'équation $C_n^2 = 5n$

$C_n^2 = 5n \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 5n \Leftrightarrow n(n-1) = 10n \Leftrightarrow n - 1 = 10 \Rightarrow n = 11 \in D_v$

Alors $S = \{11\}$

c) $A_n^2 = C_n^3$

$D_v = \{x/x \in \mathbb{N}; x \geq 2 \text{ et } x \geq 3\}$. Alors $x \geq 2$ et $x \geq 3 \Rightarrow D_v = [3 ; +\infty[$

$A_n^2 = C_n^3 \Leftrightarrow n(n-1) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \Leftrightarrow 6n(n-1) = n(n-1)(n-2) \Leftrightarrow n - 2 = 6$

$\Rightarrow n = 8 \in D_v$. Alors $S = \{8\}$

d) $C_n^2 = 45$

$D_v = \{x/x \in \mathbb{N}; x \geq 2\}$. Alors $x \geq 2 \Rightarrow D_v = [2 ; +\infty[$

Résolvons ainsi l'équation $C_n^2 = 45$

$C_n^2 = 45 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 45 \Leftrightarrow n(n-1) = 90 \Leftrightarrow n^2 - n = 90 \Leftrightarrow n^2 - n - 90 = 0$ et $\Delta = 361$

$\Rightarrow n = -9 \notin D_v$ ou $n = 10 \in D_v$. Alors $S = \{10\}$

e) $n^2 + 3C_n^2 = 1$

$D_v = \{x/x \in \mathbb{N}; x \geq 2\}$. Alors $x \geq 2 \Rightarrow D_v = [2 ; +\infty[$

Scanned by CamScanner

Résolvons ainsi l'équation $n^2 + 3C_n^2 = 1$

$n^2 + 3C_n^2 = 1 \Leftrightarrow n^2 + 3\frac{n(n-1)}{2} = 1 \Leftrightarrow 2n^2 + 3n(n-1) = 2 \Leftrightarrow 2n^2 + 3n^2 - 3n = 2 \Leftrightarrow$

$5n^2 - 3n - 2 = 0$ et $\Delta = 49$

$\Rightarrow n = \frac{2}{5} \notin \mathbb{N}$ ou $n = 1 \notin D_v$. Alors $S = \emptyset$

2 Soient A et B deux ensembles finis tels que : A = { 1 ; a ; c } et B = { b ; 1 ; c ; 2}

1) Déterminons : A∩B ; A∪B ; A×B.

A∩B : (C'est l'ensemble des éléments commun de à A et B)

=> A∩B = {1 ; c}

A∪B : (C'est l'ensemble des réunis de à A et B

=> A∪B = {1; 2 ; a ; b ; c ; }

A×B : (C'est l'ensemble des couples (x ; y) tel que x appartient à A et y appartient à B)

=> A×B =

{(1 ; b) ; (1 ; 1) ; (1 ; c) ; (1 ; 2) ; (a ; b) ; (a ; 1) ; (a ; c) ; (a ; 2); (c ; b) ; (c ; 1) ; (c ; c) ; (c ; 2)}

2) Déterminons : Card(A) ; Card(B) ; Card(A∩B) ; Card(A∪B) ; Card(A×B).

Card(A) = 3 ; Card(B) = 4 ; Card(A∩B) = 2 ; Card(A∪B) = 5 ; Card(A×B) = 12

3 Dans une classe de 40 élèves, 25 aiment la mathématique ; 30 aiment le français et 17 aiment la mathématique et le français.

NB : Tout d'abors, faisons une traduction mathématique des affirmations ci-dessus :

- Une classe comporte 40 élèves alors Card (E) = 40
- 25 aiment la mathématique alors Card (Maths) = 25
- 30 aiment le français alors Card (Franc) = 30
- 17 aiment les maths et le Français alors Card (Maths ∩Franc) = 17

1) Calculons le nombre d'élève qui aiment :

a) Uniquement le français

Soit Card (A) cet ensemble tel que :

Card (A) = Card (franc) – card (Maths∩ franc) => Card (A) = 30 – 17 = 13

Scanned by CamScanner

b) Uniquement les mathématiques

Soit Card (B) cet ensemble tel que :
Card (B) = Card (maths) – Card (maths ∩ franc) => Card (B) = 25 – 17 = 8

c) Les mathématiques ou le Français.

Soit Card (C) cet ensemble tel que :

Card (C) = Card(maths) + Card(franc) – Card(Maths ∩ français) =>

Card (C) = 25 + 30 – 17 = 38

2) N'aiment aucune des deux matières :

Soit Card (D) cet ensemble tel que :

Card (D) = Card$\left(C_E^{Maths \cup Franc}\right)$ = Card (E) – Card (maths ∪ français) =>

Card (D) = 40 – 38 = 2

4 Trouvons le nombre d'anagrammes des mots suivants : MALI ; CHERE ; RECHERCHER.

NB : On rappelle qu'une anagramme d'un mot est un mot qui contient les mêmes lettres éventuellement répétées le même nombre de fois.

- MALI contient 4 lettres tous distinctes.

Le nombre d'anagrammes de MALI est donc : $4! = 24$

- CHERE contient 5 lettres mais il ya 2E. Notons les E_1 et E_2 pour commencer.

Les classements CH E_1RE_2 et CHE_2RE_1 donnent le même mot. D'une manière générale, toute anagramme est obtenue deux fois : une fois avec E_1 en premier et une fois avec E_2 en premier. Par conséquent le nombre d'anagrammes est donc égal au nombre de classement des cinq lettres, divisé par le nombre de classements des deux E.

Le nombre d'anagrammes de CHERE est donc : $\frac{5!}{2!} = 60$

- RECHERCHER contient 10 lettres dont 3R ; 3E ; 2C et 2H.

Le nombre d'anagrammes de RECHERCHER est donc : $\frac{10!}{3!\times3!\times2!\times2!} = 25\,200$

5 Un sac contient 25 boules dont 9 rouges, 6 vertes et 10 jaunes. On tire 5 boules du sac.

NB : Tout d'abors, faisons une traduction mathématique des affirmations ci-dessus :

- Un sac contient 25 boules alors $n = 25$

Scanned by CamScanner

- On tire 5 boules du sac alors $p = 5$

I) Ainsi Dénombrons les nombres de cas possibles à cette épreuve si :

1) Le tirage est simultané

Si l'énoncé contient le mot : simultanément, cela signifie que l'ordre dans le quel on considère les éléments n'a pas d'importance.

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **la combinaison:** $C_n^p = C_{25}^5 = 53130$
Attention :

Il ne s'agit que d'indications, elles admettent des exceptions.

D'où le nombre de cas possible à cette épreuve est : 53130.

2) Le tirage est successif sans remise

Si l'énoncé contient les mots : successif et sans remise, cela signifie que l'ordre dans le quel on considère les éléments a de l'importance mais que tous les éléments considérés sont distincts (ou qu'il n'y a pas de répétition d'éléments).
Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **l'arrangement:** $A_n^p = A_{25}^5 = 6375600$
Attention :

Il ne s'agit que d'indications, elles admettent des exceptions.

D'où le nombre de cas possible à cette épreuve est : 6375600.

3) Le tirage est successif avec remise

Si l'énoncé contient les mots : successif et avec remise, cela signifie que l'ordre dans le quel on considère les éléments a de l'importance et qu'un élément peut éventuellement être répété.
Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **la P-liste :** $A_n^{\bar{P}} = n^P = 25^5 = 9765625$
Attention :

Il ne s'agit que d'indications, elles admettent des exceptions.
D'où le nombre de cas possible à cette épreuve est : 9765625.

II) Dénombrons les cas favorables dans chaque cas si :

NB : Tout d'abors, faisons une traduction mathématique des assertions « ***et*** » et « ***ou*** »
En probabilité :

- La conjonction de coordination « ***et*** » est équivalente au signe « × »
- La conjonction de coordination « ***ou*** » est équivalente au signe « + »

Scanned by CamScanner

D'autre part :

- La phrase : « ***tirer au plus*** », revient à faire un rajout cumulatif de p de la gauche vers la droite.

- La phrase : « ***tirer au moins*** », revient à faire un rajout cumulatif de p de la droite vers la gauche.

1) Le tirage est successif sans remise et le résultat contient au plus 3 jaunes.

Alors le nombre de cas favorable à cette épreuve est :

$A_{10}^3 \times A_{10}^2 + A_{10}^2 \times A_{10}^3 + A_{10}^1 \times A_{10}^4 + A_{10}^0 \times A_{10}^5 = 210240$

2) Le tirage est simultané et le résultat contient : 2 rouges, 2 vertes et 1 jeune.

Alors le nombre de cas favorable à cette épreuve est :

$C_9^2 \times C_6^2 \times C_{10}^1 = 5400$

3) Le tirage est successif avec remise et le résultat contient au moins 7 rouges.
Tirage « impossible ». Car le nombre de boule rouge est au maximum 9.

4) le tirage est simultané et le résultat contient au plus 1 verte.

Alors le nombre de cas favorable à cette épreuve est :

$C_6^1 \times C_{19}^4 + C_6^0 \times C_{19}^5 = 34884$

5) Le tirage est successif sans remise et le résultat est unicolore.

$A_9^5 + A_6^5 + A_{10}^5 = 46080$

Probabilités simples – Probabilités conditionnelles.

6 Soit une expérience E et P la probabilité modélisant E.
Soit A et B deux évènements tels que $P(A) = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{1}{4}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$
Calculons : $P(A \cup B)$; $P(A \cup \bar{B})$; $P(\bar{A} \cup B)$ et $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

Effectuons un calcul préliminaire de : $P(\bar{A})$ et $P(\bar{B})$
$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$

$P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A) \times P(\bar{B}) = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{6}$

Scanned by CamScanner

$P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A}) \times P(B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$

7 Vérifions si l'on peut trouver une probabilité P sur l'univers $\Omega = \{1 ; 2 ; 3\}$ telle que :

$P(\{1 ; 2\}) = \frac{1}{4}$; $P(\{1 ; 3\}) = \frac{1}{4}$ et $P(\{2 ; 3\}) = \frac{1}{2}$

La probabilité P sur l'univers $\Omega = \{1 ; 2 ; 3\}$ existe si et seulement si la somme des probabilités est égale 1 c'est-à-dire : $P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) = 1$

$P(\{1 ; 2\}) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(\{1\}) + P(\{2\}) = \frac{1}{4}$ **(1)**

$P(\{1 ; 3\}) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(\{1\}) + P(\{3\}) = \frac{1}{4}$ **(2)**

$P(\{2 ; 3\}) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(\{2\}) + P(\{3\}) = \frac{1}{2}$ **(3)**

Formons ainsi le système avec les équations **(1) ; (2)** et **(3).**

$$\begin{cases} P(\{1\}) + P(\{2\}) = \frac{1}{4} & (1) \\ P(\{1\}) + P(\{3\}) = \frac{1}{4} & (2) \\ P(\{2\}) + P(\{3\}) = \frac{1}{2} & (3) \end{cases}$$

En effectuant la différence des équations **(1)** et **(2)**, on a :

(1) − (2) : $P(\{2\}) - P(\{3\}) = 0 \Rightarrow P(\{2\}) = P(\{3\})$

Remplaçons ainsi $P(\{2\}) = P(\{3\})$ par valeur dans l'équation **(3).** Ainsi on a :

$P(\{3\}) + P(\{3\}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2P(\{3\}) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(\{3\}) = \frac{1}{4}$ et $P(\{2\}) = \frac{1}{4}$

Remplaçons de même $P(\{2\}) = \frac{1}{4}$ par valeur dans l'équation **(1).** Ainsi on a :

$P(\{1\}) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(\{1\}) = 0$

$P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) = 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \neq 1$

Alors il n'existe pas de probabilité P sur l'univers $\Omega = \{1 ; 2 ; 3\}$ telle que :

$P(\{1 ; 2\}) = \frac{1}{4}$; $P(\{1 ; 3\}) = \frac{1}{4}$ et $P(\{2 ; 3\}) = \frac{1}{2}$

Scanned by CamScanner

8 Dans une classe de terminale 88% des élèves ont déclarés aimer les mathématiques ; 20% ont déclarés aimer la chimie et 15% ont déclarés aimer les mathématiques et la chimie.
On choisit un élève au hasard.

NB : Tout d'abors, faisons une traduction mathématique des affirmations ci-dessus :

- Soit $P(M) = 88\% = \frac{88}{100} = 0{,}88$: la probabilité sur le pourcentage des élèves qui déclarent aimer les mathématiques.

- Soit $P(C) = 20\% = \frac{20}{100} = 0{,}2$: la probabilité sur le pourcentage des élèves qui déclarent aimer la chimie.

- Soit $P(M \cap C) = 15\% = \frac{15}{100} = 0{,}15$: la probabilité sur le pourcentage des élèves qui déclarent aimer les mathématiques et la chimie.

- Soit $P(\bar{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0{,}88 = 0{,}12$: la probabilité de l'évènement contraire de $P(M)$, c'est-à-dire le pourcentage des élèves qui n'aiment pas les mathématiques.

- Soit $P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$: la probabilité de l'évènement contraire de $P(C)$, c'est-à-dire le pourcentage des élèves qui n'aiment pas la chimie.

1) Déterminons la probabilité pour que l'élève aime les mathématiques et pas la chimie

Soit $P(M \cap \bar{C})$ cette probabilité telle que : $P(M \cap \bar{C}) = P(M) \times P(\bar{C}) = 0{,}88 \times 0{,}8 = 0{,}704$

2) Déterminons la probabilité pour que l'élève aime la chimie et pas les mathématiques

Soit $P(C \cap \bar{M})$ cette probabilité telle que : $P(C \cap \bar{M}) = P(C) \times P(\bar{M}) = 0{,}2 \times 0{,}12 = 0{,}024$

3) Déterminons la probabilité pour que l'élève n'aime ni les mathématiques ni la chimie
Soit $P(\bar{M} \cap \bar{C})$ cette probabilité telle que : $P(\bar{M} \cap \bar{C}) = P(\bar{M}) \times P(\bar{C}) = 0{,}12 \times 0{,}8 = 0{,}096$

9 Dans un village, on choisit une personne au hasard (tous les choix sont équiprobables).
On désigne par :

- H l'évènement : « Cette personne est un homme».
- B l'évènement : « Cette personne a les yeux bleus».
- M l'évènement : « Cette personne a les yeux marrons ».
- V l'évènement : « Cette personne a les yeux verts».

1) Exprimons par une phrase chacun des évènements suivants :

$H \cap B$ est l'évènement : « Cette personne est un homme *et a les yeux bleus* ».

$H \cap M$ est l'évènement : « Cette personne est un homme *et a les yeux* marrons ».

$H \cap V$ est l'évènement : « Cette personne est un homme *et a les yeux* verts ».

Scanned by CamScanner

$\bar{H} \cap B$ est l'évènement : « Cette personne est une femme *et a les yeux bleues* ».

$\bar{H} \cap M$ est l'évènement : « Cette personne est une femme *et a les yeux* marrons ».

$\bar{H} \cap V$ est l'évènement : « Cette personne est une femme *et a les yeux* verts ».

$\bar{H} \cap \bar{B}$ est l'évènement : « Cette personne est une femme *et n'a pasles yeux bleues* ».

2) On donne : $P(H) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{3}{4}$; $P(M) = \frac{2}{7}$; $P(V) = \frac{1}{5}$

Calculons : $P(H \cap B)$; $P(H \cap M)$; $P(H \cap V)$; $P(\bar{H} \cap B)$; $P(\bar{H} \cap M)$; $P(\bar{H} \cap \bar{B})$

$P(H \cap B) = P(H) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

$P(H \cap M) = P(H) \times P(M) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$

$P(H \cap V) = P(H) \times P(V) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$

$P(\bar{H} \cap B) = P(\bar{H}) \times P(B) = \left(1 - P(H)\right) \times P(B) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

$P(\bar{H} \cap M) = P(\bar{H}) \times P(M) = \left(1 - P(H)\right) \times P(M) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{2}{7} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$

$P(\bar{H} \cap \bar{B}) = P(\bar{H}) \times P(\bar{B}) = \left(1 - P(H)\right) \times \left(1 - P(B)\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

10 Deux tireurs A et B font feu simultanément sur une cible.

- Soit $p(A) = \frac{4}{5}$; la probabilité que A touche la cible
- Soit $p(B) = \frac{3}{4}$; la probabilité que A touche la cible

Calculons la probabilité des évènements suivants :

1) Les deux tireurs touchent tous deux la cible.

$p(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

2) Les deux tireurs manquent la cible.

$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = \left(1 - P(A)\right) \times \left(1 - P(B)\right) = \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{20} = 0{,}05$

3) La cible est atteinte par le tireur A seulement.

$p(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P(\bar{B}) = P(A) \times \left(1 - P(B)\right) = \frac{4}{5} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{5} = 0{,}2$

4) La cible est atteinte par un tireur seulement.

Scanned by CamScanner

$p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B) = p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A}) \times p(B) = \frac{1}{5} + \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{7}{20} = 0{,}35$

5) La cible est atteint (C'est –à-dire par un tireur ou par deux tireurs).

$p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B) = \frac{3}{5} + \frac{7}{20} = \frac{19}{20} = 0{,}95$

6) La cible soit manquée (C'est-à-dire par les deux tireurs).

$p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = 0{,}28$

11 Une population animale comporte $\frac{1}{3}$ de mâles et $\frac{2}{3}$ de femelles. L'albinisme frappe 6% de mâles et 0,36% de femelles.

- Soit $p(M) = \frac{1}{3}$; la probabilité sur le nombre de mâles.
- Soit $p(F) = \frac{2}{3}$; la probabilité sur le nombre de femelles.
- Soit A; l'évènement : « $\hat{e}tre\ albinos$ »
- Soit $p(A)$; la probabilité qu'un individu soit albinos
- $p(A/M) = 6\% = \frac{6}{100} = 0{,}06$ et $p(A/F) = 0{,}36\% = \frac{0{,}36}{100} = 0{,}0036$

Déterminons la probabilité pour qu'un individu pris au hasard (dont on ignore le sexe) soit albinos

$M \cup F = \Omega$ et $M \cup F = \emptyset$

Alors $\{M\ ;\ F\}$ forme un système complet d'évènement tel que :

$$A = A \cap \Omega = A \cap (M \cup F) = (A \cap M) \cup (A \cap F)$$

$\Rightarrow p(A) = p(A \cap M) + p(A \cap F)$

$= p(A/M) \times p(M) + p(A/F) \times p(F)$

$= (0{,}06) \times \frac{1}{8} + 0{,}0036 \times \frac{2}{3} = 0{,}02$

$\Rightarrow p(A) = 0{,}02$

12 Dans un village, 1 habitant sur 10 est atteint d'une maladie génétique A.
On fait un teste de dépistage puis on note par (T) si le teste est positif et par $(\bar{T})$ si le teste est négatif. On donne $P(T/A) = 0{,}8$ et $P(\bar{T}/\bar{A}) = 0{,}9$
On soumet un patient au test, celui-ci est positif.
Déterminons la probabilité pour que ce patient soit atteint par la maladie A

Scanned by CamScanner

On donne $P(T/A) = 0,8$ et $P(\bar{T}/\bar{A}) = 0,9$

Soit A : l'évènement « *être atteint de la maladie* »

Alors $P(A) = \frac{1}{100} = 0,01$ et $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} = 0,99$

$$\Rightarrow P(A/T) = \frac{P(A) \times P(T/A)}{P(A) \times P(T/A) + P(\bar{A}) \times P(T/\bar{A})} \text{ avec } P(T/\bar{A}) = 1 - P(\bar{T}/\bar{A}) = 1 - 0,9 = 0,1$$

$$\Rightarrow P(A/T) = \frac{0,01 \times 0,8}{0,01 \times 0,08 + 0,99 \times 0,1} = 0,07$$

$$\Rightarrow P(A/T) = 0,07$$

13 Dans une population, 30% de personnes sont atteintes d'une affection des voies respiratoires supérieures. Il ya 60% de fumeurs parmi les malades et 10% de fumeurs parmi les personnes non atteintes par cette affection.

- Soit $P(M) = 30\% = \frac{30}{100} = 0,3$ la probabilité de l'évènement« *être affectés* ».
- Soit $P(F/M) = 60\% = \frac{60}{100} = 0,6$ la probabilité de l'évènement« *être fumeur* ».
- Soit $P(F/\bar{M}) = 10\% = \frac{10}{100} = 0,1$ la probabilité de l'évènement« *non affectés* ».

Calculons la probabilité qu'un fumeur soit atteint de l'affection.

Soit $P(M/F)$ la probabilité de l'évènement« *un fumeur soit atteint de la maladie* »

telque : $P(M/F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{P(M) \times P(F/M)}{P(M) \times P(F/M) + P(\bar{M}) \times P(F/\bar{M})}$

avec $P(\bar{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0,3 = 0,7$

$$\Rightarrow P(M/F) = \frac{0,3 \times 0,6}{0,3 \times 0,6 + 0,7 \times 0,1} = 0,72$$

$$\Rightarrow P(M/F) = 0,72$$

Scanned by CamScanner

14 On lance un dé deux fois.

Faisons d'abors une illustration tabulaire des deux lancées du dé.

1er dé → / 2ième dé ↓	1	2	3	4	5	6
1	2 Nombre paire	3	4 Nombre paire	5	**6** **5 fois** Nombre paire	7
2	3	4 Nombre paire	5	**6** **4 fois** Nombre paire	7	8 Nombre paire
3	4 Nombre paire	5	**6** **3 fois** Nombre paire	7	8 Nombre paire	9
4	5	**6** **2 fois** Nombre paire	7	8 Nombre paire	9	10 Nombre paire
5	**6** **1 fois** Nombre paire	7	8 Nombre paire	9	10 Nombre paire	11
6	7	8 Nombre paire	9	10 Nombre paire	11	12 Nombre paire

D'après le tableau ci-dessus, on a : $\text{Card}(\Omega) = 36$ **(Nombre de couple possible)**

1) Calculons la probabilité que le total des points présentés par la face supérieur du dé soit égale à 6.
En observant le tableau, le total des points est égal à 6.

Ainsi en désignant par $P(A)$ cette probabilité, on a $P(A) = \frac{5}{36}$

2) Calculons la probabilité que le total des points présentés par la face supérieur du dé soit un nombre pair.

En observant le tableau, le total des points est égal à 6.

Ainsi en désignant par $P(B)$ cette probabilité, on a $P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

Scanned by CamScanner

15 On dispose d'un jeu de 32 cartes ordinaires

Le nombre total de carte est 32 alors $n = 32$

Le nombre de carte tirée est 8 alors $p = 8$

L'ordre dans le quel on considère les éléments n'a pas d'importance, alors le modèle mathématique utilisé est : **la combinaison:** C_n^p

1) Le nombre de "mains" différentes de 8 cartes que l'on peut constituer est :

$C_{32}^8 = 10418300$

2) Le nombre possible de "mains" différentes de 8 cartes comprenant 2 as que l'on peut constituer est $C_4^2 \times C_{28}^6 = 2260440$ (car on a 4 as).

3) Le nombre possible de "mains" de 8 cartes ayant au moins 2 cœurs que l'on peut constituer est : $C_8^2 \times C_{24}^6 + C_8^3 \times C_{24}^5 + C_8^4 \times C_{24}^4 + C_8^5 \times C_{24}^3 + C_8^6 \times C_{24}^2 + C_8^7 \times C_{24}^1 + C_8^8 \times C_{24}^0$

$= 7013997$

16 On jette successivement un dé cubique deux fois puis on désigne par :

- A l'évènement : « le 1er jet donne un nombre pair».
- B l'évènement : « le 2ième jet donne un nombre pair».
- C l'évènement : « la somme de deux numéros obtenu est paire».

Vérifions si les évènements A ; B et C sont-ils deux à deux indépendant ou Mutuellement indépendant.

Pour cela, faisons d'abors une illustration tabulaire des deux jets successifs du dé cubique.

2 \ 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

D'après le tableau ci-dessus, on a : $\text{Card}(\Omega) = 36$ **(Nombre de couple possible)**

Ainsi $P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$; $P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

1er cas : Vérification de l'indépendance de A et B.

Pour que deux évènements soient indépendants, il faut que :

$P(A \cap C) = P(A) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Scanned by CamScanner

Puisque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, alors A et C sont indépendants.

2ième cas : Vérification de l'indépendance de A et C.
Pour que deux évènements soient indépendants, il faut que :

$$P(A \cap C) = P(A) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Puisque $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$, alors A et C sont indépendants.

3ième cas : Vérification de l'indépendance de B et C.

Pour que deux évènements soient indépendants, il faut que :

$$P(B \cap C) = P(B) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Puisque $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$, alors B et C sont indépendants.

Donc A ; B ; C sont mutuellement indépendant si et seulement si :

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$ avec C paire car il est la somme des nombres paires A et B.

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \times P(B) \times P(C)$.

Donc A ; B ; C ne sont pas mutuellement indépendant.

17 1) Complétons le tableau suivant :

	Groupe A	Groupe B	Groupe C	Total
Nombre de fiches signalant un traitement efficace	60	72	36	168
Nombre de fiches ne signalant aucune amélioration significative	180	138	114	432
Total	240	210	150	600

2) On choisit une fiche au hasard parmi les 600.

Calculons les probabilités des 4 événements :

Soit Ω l'univers des éventualités, $Card\Omega = 600$

$$P(E_1) = \frac{CardE_1}{Card\Omega} = \frac{240}{600} = 0{,}4$$

$$P(E_2) = \frac{CardE_2}{Card\Omega} = \frac{168}{600} = 0{,}28$$

Scanned by CamScanner

$P(E_3) = \frac{CardE_3}{Card\Omega} = \frac{60}{600} = 0,1$

$P(E_4) = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 0,4 + 0,28 - 0,1 = 0,58$

D'où : $P(E_1) = 0,4$; $P(E_2) = 0,28$; $P(E_3) = 0,1$; $P(E_4) = 0,58$

b) On choisit au hasard une fiche du groupe B

Calculons la probabilité de l'évènement E_5

$P(E_5) = \frac{72}{210} = 0,34$

3) Pour chacun des groupes, donnons les fréquences en pourcentage des fiches signalant un traitement efficace.

	Groupe A	Groupe B	Groupe C
Nombre de fiches signalant un traitement efficace	60	72	36
Fréquence en pourcentage	35 ,71	42,86	21,43

Loi de probabilité

18 Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	5	10	15	30
$P(X = x_i)$	0,1	a	$2a$	0,3

1) Calculons a.

Puisque $\sum P_i = 1$ c'est-à-dire la somme des lois de probabilité est toujours égale à 1 alors on

a : $0,1 + a + 2a + 0,3 = 1 \Leftrightarrow 3a = 1 - 0,4 \Rightarrow a = 0,2$.

D'où le tableau est le suivant :

x_i	5	10	15	30
$P(X = x_i)$	0,1	0,2	0,4	0,3

2) En déduisons les valeurs de :

a- L'espérance mathématique $E(X)$.

$E(X) = \sum x_i \times P_i = 5 \times 0,1 + 10 \times 0,2 + 15 \times 0,4 + 30 \times 0,3 = 17,5$

$\Rightarrow E(X) = 17,5$

Scanned by CamScanner

b- La variance V(X).

$V(X)= \sum x_i^2 \times P_i - E^2(X) = 5^2 \times 0{,}1 + 10^2 \times 0{,}2 + 15^2 \times 0{,}4 + 30^2 \times 0{,}3 - 17{,}5^2$

$= 76{,}25$

$\Rightarrow V(X) = 76{,}25$

c- L'écart-type $\delta(X)$

$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{76{,}25} = 8{,}73$

19 Un sac contient 5 boules rouges et 3 boules blanches, on tire simultanément et au hasard 3 boules.

- Un sac contient 5 boules rouges et 3 boules blanches : $\Rightarrow n = 5 + 3 = 8$.
- On tire simultanément et au hasard 3 boules: $\Rightarrow p = 3$.
- Puisque le tirage est simultanément alors le modèle mathématique utilisé est le C_n^p.
- Le nombre de cas possible est donc $\text{Card}(\Omega) = C_8^3 = 56$

1) Calculons la probabilité de chacune des évènements suivants :

a-Aucune boule rouge n'est tirée

Soit $P(A)$ cette probabilité telle que : $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$ avec $\begin{cases} Card(A) = C_5^0 \times C_3^3 = 1 \\ Card(\Omega) = C_8^3 = 56 \end{cases}$

$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{56} = 0{,}018$

b-Une boule rouge et une seule est tirée

Soit $P(B)$ cette probabilité telle que : $P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)}$ avec $\begin{cases} Card(B) = C_5^1 \times C_3^2 = 15 \\ Card(\Omega) = C_8^3 = 56 \end{cases}$

$\Rightarrow P(B) = \frac{15}{56} = 0{,}268$

c-Deux boules rouges et deux seulement sont tirées

Soit $P(C)$ cette probabilité telle que : $P(C) = \frac{Card(C)}{Card(\Omega)}$ avec $\begin{cases} Card(C) = C_5^2 \times C_3^1 = 30 \\ Card(\Omega) = C_8^3 = 56 \end{cases}$

$\Rightarrow P(C) = \frac{30}{56} = 0{,}536$

d-Une boule rouge au moins est tirée

Soit $P(D)$ cette probabilité telle que : $P(D) = \frac{Card(D)}{Card(\Omega)}$

avec $\begin{cases} Card(D) = C_5^1 \times C_3^2 + C_5^2 \times C_3^1 + C_5^3 \times C_3^0 = 55 \\ Card(\Omega) = C_8^3 = 56 \end{cases}$

Scanned by CamScanner

$\Rightarrow P(D) = \frac{55}{56} = 0{,}982$

e-deux boules blanches au plus sont tirées

Soit $P(E)$ cette probabilité telle que : $P(E) = \frac{Card(E)}{Card(\Omega)}$

avec $\begin{cases} Card(E) = C_3^2 \times C_5^1 + C_3^1 \times C_5^2 + C_3^0 \times C_5^3 = 55 \\ Card(\Omega) = C_8^3 = 56 \end{cases}$

$\Rightarrow P(D) = \frac{55}{56} = 0{,}982$

2) Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de boules rouges qui se trouvent parmi les 3 boules tirées.

a-Donnons la loi de probabilité de X

Si l'on effectue un tirage simultané de 3 boules rouges parmi les 5 boules rouges, on obtient :

Soit 0 boule rouge ; soit 1 boule rouge ; soit 2 boules rouges 3 boules rouges.

D'où $X = \{0\,;1\,;2\,;3\}$.

Alors calculons : $P(X=0)\,;\ P(X=1)\,;\ P(X=2)\,;\ P(X=3)$

$P(X=0) = \frac{C_5^0 \times C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}$; $P(X=1) = \frac{C_5^1 \times C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56}$

$P(X=2) = \frac{C_5^2 \times C_3^1}{C_8^3} = \frac{30}{56}$; $P(X=3) = \frac{C_5^3 \times C_3^0}{C_8^3} = \frac{10}{56}$

D'où le tableau de la loi de probabilité est le suivant :

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

NB : Pour une éventuelle vérification, on remarque : $\frac{1}{56} + \frac{15}{56} + \frac{30}{56} + \frac{10}{56} = \frac{56}{56} = 1$

Car la somme des lois de probabilités est toujours égale à 1

b-Calculons l'espérance mathématique et la variance de X

- L'espérance mathématique $E(X)$.

$E(X) = \sum x_i \times P_i = 0 \times \frac{1}{56} + 1 \times \frac{15}{56} + 2 \times \frac{30}{56} + 3 \times \frac{10}{56} = \frac{105}{56} = 1{,}875$

$\Rightarrow E(X) = 1{,}875$

- La variance $V(X)$.

$V(X) = \sum x_i^2 \times P_i - E^2(X) = 0^2 \times \frac{1}{56} + 1^2 \times \frac{15}{56} + 2^2 \times \frac{30}{56} + 3^2 \times \frac{10}{56} - 1{,}875^2 = 277{,}48$

Scanned by CamScanner

$\Rightarrow V(X) = 277{,}48$

c-Calculons la probabilité de l'évènement $1 \leq X \leq 2$

$$P(1 \leq X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{15}{56} + \frac{30}{56} = \frac{45}{56} = 0{,}803$$

20 Lors de la coupe du Mali de football 2012, on a donné dans le tableau ci-dessous les résultats des 8 matchs joués le premier jour du tournoi.

Matchs	Première Equipe	Deuxième équipe
1er Match	2 buts	1 but
2ème Match	2 buts	0 but
3ème Match	3 buts	3 buts
4ème Match	1 but	3 buts
5ème Match	0 but	1 but
6ème Match	0 but	0 but
7ème Match	1 but	4 buts
8ème Match	3 buts	2 buts

On choisit un match au hasard parmi les huit matchs du premier jour du tournoi ; tous les matchs ont la même probabilité d'être choisi.

1) a- Montrons que la probabilité P_1 qu'aucun but n'ait été marqué au cours de ce match est égale à $\frac{1}{8}$

En observant le tableau ci-dessus, on remarque q' il n'ya qu'un seul match parmi les 8 où aucun but n'a été marqué (le 6ième Match). Ce qui explique bien $P_1 = \frac{1}{8}$

b) Déterminons la probabilité P_2 que le match soit nul (c'est-à-dire que chaque équipe ait marqué le même nombre de buts)

En observant le tableau ci-dessus, on remarque q' il n'ya qu'un seul match parmi les 8 où chaque équipe a marqué le même nombre de buts (le 3ième Match).

Alors $P_2 = \frac{1}{8}$

2) Pour chaque match, on calcule la différence entre les nombres de buts marqués par les équipes, de façon à trouver un nombre positif ou nul.

On définit ainsi une variable aléatoire X. Par exemple pour le 5ème match, la valeur de X est égale à 1 et pour le 8ème match, elle est aussi égale à 1.

a-Donnons les valeurs possibles de X.

Si l'on calcule la différence entre les nombres de buts marqués par les équipes, de façon à trouver un nombre positif ou nul, on obtient le tableau suivant :

Scanned by CamScanner

Matchs	Première Equipe	Deuxième équipe	Différence des buts
1er Match	2 buts	1 but	$2-1=1$
2ème Match	2 buts	0 but	$2-0=2$
3ème Match	3 buts	3 buts	$3-3=0$
4ème Match	1 but	3 buts	$3-1=2$
5ème Match	0 but	1 but	$1-0=1$
6ème Match	0 but	0 but	$0-0=0$
7ème Match	1 but	4 buts	$4-1=3$
8ème Match	3 buts	2 buts	$3-2=1$

Ainsi la différence entre les nombres de buts marqués par les équipes donne :

$X = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$.

b-Déterminons la loi de probabilité de X

Alors calculons : $P(X=0)$; $P(X=1)$; $P(X=2)$; $P(X=3)$

- Pour $P(X=0)$, il ya **2** Matchs parmi les 8 où la différence de but est 0 ($3^{ième}$ et $6^{ième}$).

Alors $P(X=0)=\frac{2}{8}$.

- Pour $P(X=1)$, il ya **3** Matchs parmi les 8 où la différence de but est 1 (1^{er} ; $5^{ième}$; $8^{ième}$).

Alors $P(X=1)=\frac{3}{8}$.

- Pour $P(X=2)$, il **2** ya Matchs parmi les 8 où la différence de but est 2 ($2^{ième}$ et $4^{ième}$)

Alors $P(X=2)=\frac{2}{8}$.

- Pour $P(X=3)$, il n' ya qu'un seule Match parmi les 8 où la différence de but est 3 ($7^{ième}$)

Alors $P(X=3)=\frac{1}{8}$.

D'où le tableau de la loi de probabilité est le suivant :

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

c-Calculons l'espérance mathématique de X.

$$E(X)= \sum x_i \times P_i = 0\times\frac{2}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{2}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{10}{8}=1{,}25$$

$\Rightarrow E(X)=1{,}25$

Scanned by CamScanner

21 Un récepteur radio possède cinq (05) transistors dont deux (02) défectueux. On effectue simultanément un contrôle sur deux (02)

- Un récepteur radio possède 5 transistors $\Rightarrow n = 5$.
- On effectue simultanément un contrôle sur 2 $\Rightarrow p = 2$.
- Le tirage est simultané alors le modèle mathématique utilisé est le C_n^p

1) Déterminons le nombre de contrôles possibles

Le nombre de contrôles possibles est $\text{Card}(\Omega) = C_5^2 = 10$

2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de transistor défectueux décelés lors des contrôlés.

a- Déterminons l'ensemble des valeurs prises par X.

Le contrôle consiste à chercher 2 transistors défectueux sur les 5.

Puisque le tirage est simultané, alors le tirage peut être donc porté soit sur **0** transistors, soit sur **1** transistors , soit sur **2** transistors.

D'où l'ensemble des valeurs prises par X est : $X = \{0 ; 1 ; 2\}$.

b-Déterminons la loi de probabilité de X.

Alors calculons : $P(X = 0)$; $P(X = 1)$; $P(X = 2)$

$P(X = 0) = \frac{C_2^0 \times C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$; $P(X = 1) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{10}$; $P(X = 2) = \frac{C_2^2 \times C_3^0}{C_5^2} = \frac{1}{10}$

D'où le tableau de la loi de probabilité est le suivant :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

c-Calculons l'espérance mathématique, la variance de X.

$E(X) = \sum x_i \times P_i = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = 0{,}8$

$\Rightarrow E(X) = 0{,}8$

L'écart-type de X est $\delta(X) = \sqrt{V(X)}$

Or $V(X) = \sum x_i^2 \times P_i - E^2(X) = 0^2 \times \frac{3}{10} + 1^2 \times \frac{6}{10} + 2^2 \times \frac{1}{10} - 0{,}8^2 = 0{,}36$

Alor $\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$

Scanned by CamScanner

22 Une urne contient un jeton marqué 1 ; deux jetons marqués 2 et x jetons marqués 3 ($x \geq 2$). On tire simultanément 2 jetons de l'urne. On suppose que le tirage est équiprobable et on désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des points marqués sur les 2 jetons extraits de l'urne.

- Une urne contient un jeton marqué 1 ; deux jetons marqués 2 et x jetons marqués 3 $\Rightarrow n = 1 + 2 + x = x + 3$.

- On tire simultanément 2 jetons de l'urne $\Rightarrow p = 2$.

- Le tirage est simultané alors le modèle mathématique utilisé est le C_n^p

1) a- Exprimons en fonction de x les valeurs prises par X.

Si X désigne la somme des points marqués sur les 2 jetons extraits de l'urne alors on a :

$1 + 2 = 3$ ou $2 + 2 = 4$ ou $1 + 3 = 4$ ou $3 + 2 = 5$ ou encore $3 + 3 = 6$

D'où X= {3 ; 4 ; 5 ; 6}

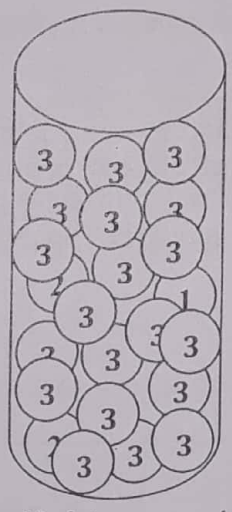
b- Déterminons la loi de probabilité de X.

Le nombre de tirage possibles est $\text{Card}(\Omega) = C_{x+3}^2 = \frac{(x+3)(x+3-1)}{2} = \frac{(x+3)(x+2)}{2}$

Alors calculons : $P(X = 3)$; $P(X = 4)$; $P(X = 5)$; $P(X = 6)$

Pour cela, faisons une illustration schématique pour facilité l'obtention des probabilités :

$P(X = 3)$; $P(X = 4)$; $P(X = 5)$; $P(X = 6)$



D'après la figure, on a : Un jeton marqué 1 ; Deux jetons marqués 2 et x jetons marqués 3

$$P(X = 3) = \frac{Card(X=3)}{Card(\Omega)} \text{ avec } \begin{cases} Card(X = 3) = C_1^1 \times C_2^1 = 2 \\ Card(\Omega) = C_{x+3}^2 = \frac{(x+3)(x+2)}{2} \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow P(X=3) = \frac{2}{\frac{(x+3)(x+2)}{2}} = \frac{4}{(x+3)(x+2)} = \frac{4}{x^2+5x+6}$$

$$P(X=4) = \frac{Card(X=4)}{Card(\Omega)} \text{ avec } \begin{cases} Card(X=4) = C_1^1 \times C_x^1 + C_2^2 = x+1 \\ Card(\Omega) = C_{x+3}^2 = \frac{(x+3)(x+2)}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(X=4) = \frac{x+1}{\frac{(x+3)(x+2)}{2}} = \frac{2x+2}{(x+3)(x+2)} = \frac{2x+2}{x^2+5x+6}$$

$$P(X=5) = \frac{Card(X=5)}{Card(\Omega)} \text{ avec } \begin{cases} Card(X=5) = C_x^1 \times C_2^1 = 2x \\ Card(\Omega) = C_{x+3}^2 = \frac{(x+3)(x+2)}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(X=5) = \frac{2x}{\frac{(x+3)(x+2)}{2}} = \frac{4x}{(x+3)(x+2)} = \frac{4x}{x^2+5x+6}$$

$$P(X=6) = \frac{Card(X=6)}{Card(\Omega)} \text{ avec } \begin{cases} Card(X=6) = C_x^2 = \frac{x^2-x}{2} \\ Card(\Omega) = C_{x+3}^2 = \frac{(x+3)(x+2)}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(X=6) = \frac{\frac{x^2-x}{2}}{\frac{(x+3)(x+2)}{2}} = \frac{x^2-x}{(x+3)(x+2)} = \frac{x^2-x}{x^2+5x+6}$$

NB : Chercher par exemple $Card(X=3)$, revient à chercher la somme des numéros possible porté par deux jetons affin d'obtenir le chiffre 3.

Ainsi pour obtenir le chiffre 3, il suffit de faire la somme de : « un jeton numéroté 1 » parmi le seule jeton numéroté 1 et de « un jeton numéroté 2 » parmi les deux jetons numéroté 2.
Et ceci se traduit par $C_1^1 \times C_2^1$ en sachant bien sûr que le « *et* » signifie « × » et le

« *ou* » signifie « + »

D'où le tableau de la loi de probabilité est le suivant :

x_i	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{x^2+5x+6}$	$\frac{2x+2}{x^2+5x+6}$	$\frac{4x}{x^2+5x+6}$	$\frac{x^2-x}{x^2+5x+6}$

2) a- Démontrons que l'espérance mathématique $E(X) = \frac{6x^2+22x+20}{x^2+5x+6}$

Scanned by CamScanner

$$E(X)= \sum x_i \times P_i = 3 \times \frac{4}{x^2+5x+6} + 4 \times \frac{2x+2}{x^2+5x+6} + 5 \times \frac{4x}{x^2+5x+6} + 6 \times \frac{x^2-x}{x^2+5x+6}$$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{12+8x+8+20x+6x^2-6x}{x^2+5x+6} = \frac{6x^2+22x+20}{x^2+5x+6}$$

D'où $E(X) = \frac{6x^2+22x+20}{x^2+5x+6}$ (Ce qu'il fallait démontrer).

b- Déterminons la valeur de x pour que E(X) soit égale 5

$$E(X) = 5 \Leftrightarrow \frac{6x^2+22x+20}{x^2+5x+6} = 5 \Leftrightarrow 6x^2+22x+20 = 5(x^2+5x+6) \Leftrightarrow$$

$x^2-3x-10=0$ et $\Delta = 49 \Rightarrow x_1 = -2$ (à *rejeté*) et $x_2 = 5$ (à *reténir*) (Car $x \geq 2$)

23 Soit le tableau ci – dessous donnant la loi de probabilité de fabrication de voiture d'une société

X	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

1) Calculons l'espérance mathématique

$$E(X)= \sum x_i \times P_i = 0 \times \frac{2}{7} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{1}{7} = \frac{6}{7} = 0{,}857$$

$\Rightarrow E(X) = 0{,}857$

2) Calculons la variance puis en déduire l'écart – type

Variance : $V(X)= \sum x_i^2 \times P_i - E^2(X) = 0^2 \times \frac{2}{7} + 1^2 \times \frac{4}{7} + 2^2 \times \frac{1}{7} - 0{,}847^2 = 0{,}407$

L'écart – type : $\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}407} = 0{,}637$

3) Donnons la fonction de répartition de la variable aléatoire X de cette loi de probabilité puis faite sa représentation la graphique.

$P(x<0) = 0$

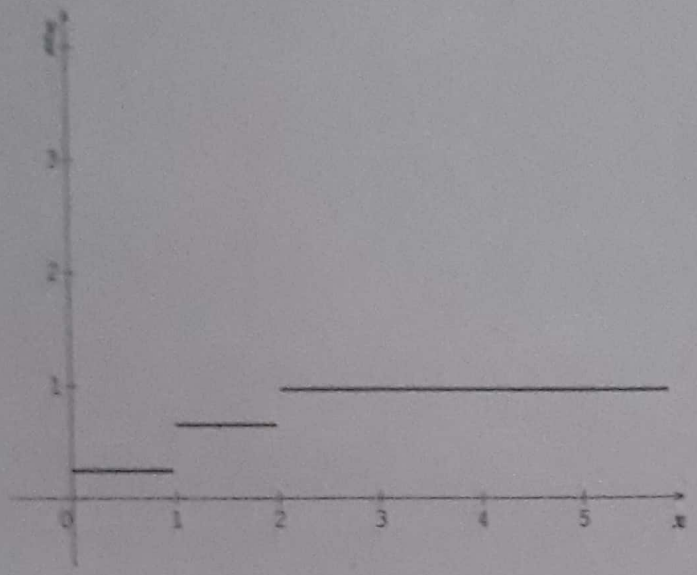
$P(x \leq 1) = P(x=0) + P(x=1) = \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{6}{7}$

$P(x \leq 0) = \frac{2}{7}$

D'où $F(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x < 0 \\ \frac{2}{7} \; si \; x \in [0;1] \\ \frac{6}{7} \; si \; x \in [1;2] \\ 1 \; si \; x \geq 2 \end{cases}$

Scanned by CamScanner

La présentation graphique est définie par la figure suivante :

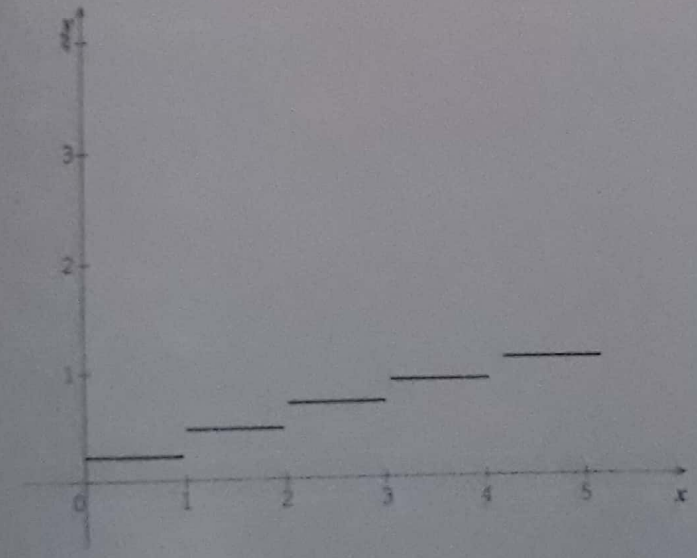


20 Une étude statistique faite an le nombre de vente de voiture en une journée par un de ses représentants a conduit à la loi de probabilité suivante pour la variable aléatoire X prenant pour valeurs le nombre de ces ventes.

X	0	1	2	3	4	5 et plus
$P(X=x_i)$	0,15	0,40	0,30	0,10	0,05	0

1) Dressons le tableau de la fonction de répartition F de la variable aléatoire X et représenter cette fonction dans le plus rapporté à un repère orthogonal convenable

X		0	1	2	3	4	5
F(X)	0	[0,15	[0,55	[0,85	[0,90	[1	1



Scanned by CamScanner

2) Calculons l'espérance mathématique

$E(X) = \sum x_i \times P_i = 0 \times 0{,}15 + 1 \times 0{,}40 + 2 \times 0{,}30 + 3 \times 0{,}10 + 4 \times 0{,}05 = 1{,}5$

$\Rightarrow E(X) = 1{,}5$

Calculons la variance

$V(X) = \sum x_i^2 \times P_i - E^2(X)$

$= 0^2 \times 0{,}15 + 1^2 \times 0{,}40 + 2^2 \times 0{,}30 + 3^2 \times 0{,}10 + 4^2 \times 0{,}05 - 1{,}5^2 = 1{,}05$

Epreuve de Bernoulli – Loi Binomiale

25 On suppose que la probabilité de faire un garçon est $\frac{1}{4}$. Une famille a 5 enfants.
Calculons la probabilité pour qu'il y ait exactement 3 garçons.

Avoir une naissance simple conduit à 2 éventualités : soit on a un garçon, soit on a une fille. C'est donc une épreuve de Bernoulli. On pourrait considérer l'épreuve « avoir un garçon » comme le succès de probabilité $p = \frac{1}{4}$ et l'épreuve « avoir une fille » comme l'échec de probabilité $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Cinq naissances successives constituent une succession de 5 épreuves de Bernoulli. Pour Calculer la probabilité d'avoir exactement 3 garçons, on utilise alors la loi binomiale de paramètre 5 et $\frac{3}{4}$ tel que

$p(x = 3) = C_5^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 10 \times \frac{1}{64} \times \frac{9}{16} = \frac{90}{1024} \Rightarrow p(x = 3) = \frac{45}{512} = 0{,}088$

$=> p(x = 3) = 0{,}088$

Alors la probabilité d'avoir exactement 3 garçons est $p(x = 3) = 0{,}088$.

26 L'objectif de cet exercice est de déterminer les quels des avions à 2 ou 4 moteurs sont les plus sûrs.
Un avion ne s'écrase pas tant que la moitié au moins de ses moteurs fonctionne. Les moteurs d'un avion tombent en panne de manière indépendante.

Soit p la probabilité pour qu'un moteur tombe en panne

Partie A :

On donne $p = 0{,}1$

1) Calculons la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.

Un avion à deux moteurs s'écrase si ses deux moteurs sont en panne.
Alors $p_1 = p \times p = p^2 = 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01$

Scanned by CamScanner

2) Calculons la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne.

La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne est :

$p_2 = p \times p \times p \times p = p^4 = 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}0001$

3) Calculons la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne

L'état de fonctionnement d'un moteur conduit à 2 éventualités : soit il est en panne soit il ne l'est pas. Avoir un moteur en panne est donc une épreuve de Bernoulli.
La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne se détermine par la loi binomiale de paramètre p = 0,1 et $k = 3$

$p_3 = p(x=3) = C_4^3 (0{,}1)^3 (0{,}9)^1 = 4 \times (0{,}001) \times (0{,}9) = 0{,}0036$

4) En déduire la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'crase.

Un avion à 4 moteurs s'écrase si ses 4 moteurs sont en panne ou s'il a 3 moteurs en panne.

Alors $p_4 = p_2 + p_3 = 0{,}0001 + 0{,}0036 = 0{,}0037$

Partie B :

On revient au cas général

1) Soit $f(p)$ la probabilité pour qu'n avion à 2 moteurs s'écrase.
Démontrons que $f(p) = p^2$
Un avions à 2 moteurs s'crase si ses deux moteurs sont en panne.
$f(p) = p \times p = p^2$

2) $g(p)$est la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase.
Démontrons que $g(p) = p^2(-3p^2 + 4p)$
Un avion à 4 moteurs s'écrase si ses 4 moteurs sont en panne ou s'il a trois moteurs en panne.

$g(p) = p^4 + p(X = 3) = p^4 + C_4^3 p^3(1-p) = p^4 + 4p^3(1-p)$

$\Rightarrow g(p) = p^4 + 4p^3 - 4p^4 = -3p^4 + 4p^3 = p^2(-3p^2 + 4p).$

$\Rightarrow g(p) = p^2(-3p^2 + 4p).$

3) a- On pose $h(p) = f(p) - g(p)$

$h(p) = f(p) - g(p) = p^2 - p^2(-3p^2 + 4p) = p^2(1 + 3p^2 - 4p).$

$\Rightarrow h(p) = p^2(1 + 3p^2 - 4p).$

Si $p^2 > 0$ alors le signe de $h(p)$ dépend du signe $1 + 3p^2 - 4p$
Or $1 + 3p^2 - 4p = 3(p - 1)(p - \frac{1}{3})$

Scanned by CamScanner

$\Rightarrow h(p) > 0 \; si \; p \in \left]0 ; \frac{1}{3}\right[; \; h(p) < 0 \; si \; p \in \left]0 ; \frac{1}{3}\right[; \; h(p) = 0 \; si \; p \in \left\{\frac{1}{3} ; 1\right\}$

b-En déduisons, suivant les valeurs de p, dans quels avions il vaut mieux monter.

- Si $p \in \left]0 ; \frac{1}{3}\right[$; alors $h(p) > 0 \Rightarrow f(p) > g(p)$. Un avion à 4 moteurs est plus sûr.
- Si $p \in \left]0 ; \frac{1}{3}\right[$; $alors \; h(p) < 0 \Rightarrow f(p) < g(p)$: Un avion à deux (2) moteurs est plus sûr.
- Si $p \in \left\{\frac{1}{3} ; 1\right\}$; alors $h(p) = 0 \Leftrightarrow f(p) = g(p)$: le risque est le même.

Scanned by CamScanner

Chapitre 10 Barycentre

COURS

I- Barycentre d'un système de points :

1) Système de points pondérés :

On appelle système de point pondérés tout ensemble du type :
$\{(A_1, \alpha_1), (A_1 ; \alpha_2); \ldots; (A_n; \alpha_n)\}$ où les A_i sont les points d'un espace affine et les α_i sont des nombres réels appelés coefficients de pondération. Chaque α_i est appelé coefficient de pondération.

2) Barycentre de deux points pondérés

On appelle barycentre du système de points pondérés$\{(A ; \alpha_1) ; (B ; \alpha_2)\}$, l'unique point **G** s'il existe tel que : $\alpha_1\overrightarrow{GA} + \alpha_2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
En fixant A on a : $\alpha_1\overrightarrow{GA} + \alpha_2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha_1 + \alpha_2)\overrightarrow{GA} = -\beta\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$
$\overrightarrow{AG} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\overrightarrow{AB}$

Ainsi si G est le barycentre de $\{(A ; \alpha_1) ; (B ; \alpha_2)\}$; Alors A, B et G sont alignés, et G a pour abscisse $\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$ dans la graduation de repère (A ; B).

3) Barycentre de trois points pondérés

On appelle barycentre de trois points pondérés affectés au système
: $\{(A ; \alpha_1) ; (B ; \alpha_2) ; (B ; \alpha_3)\}$ l'unique point (s'il existe) G tel que :
$\alpha_1\overrightarrow{GA} + \alpha_2\overrightarrow{GB} + \alpha_3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

En fixant A on a : $\alpha_1(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA}) + \alpha_2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + \alpha_3(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}\overrightarrow{AB} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}\overrightarrow{AC}$ avec $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \neq 0)$

4) Coordonnées du barycentre de 3 points pondérés :

Dans l'espace affine, le repère $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ considérons le système
$\{(A ; \alpha_1) ; (B ; \alpha_2) ; (B ; \alpha_3)\}$ tel que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \neq 0$ alors les coordonnées de G sont :

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha_1 x_A + \alpha_2 x_B + \alpha_3 x_C}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ et \\ y_G = \frac{\alpha_1 y_A + \alpha_2 y_B + \alpha_3 y_C}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \end{cases}$$

D'une manière générale si A ; B et C sont 3 points affectés aux complexes Z_A ; Z_B et Z_C et soit G le barycentre affecté au complexe Z_G tel que Z_G = bary$\{(A ; \alpha_1) ; (B ; \alpha_2) ; (B ; \alpha_3)\}$
On a : $Z_G = \frac{\alpha_1 Z_A + \alpha_2 Z_B + \alpha_3 Z_C}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$

Scanned by CamScanner

5) Propriétés du barycentre de trois points pondérés :

Propriété 1 : Le barycentre G d'un système ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont choisis ces points pondérés.

Exemple: $G = \text{bary}\{(A\ ;\ \alpha_1)\ ;\ (B\ ;\ \alpha_2)\ ;\ (C\ ;\ \alpha_3)\}$

$G = \text{bary}\{(A\ ;\ \alpha_2)\ ;\ (B\ ;\ \alpha_1)\ ;\ (C\ ;\ \alpha_3)\}$

$G = \text{bary}\{(C\ ;\ \alpha_3)\ ;\ (B\ ;\ \alpha_2)\ ;\ (A\ ;\ \alpha_1)\}$

Propriété 2 : Le barycentre G d'un système ne change pas en multipliant ou en divisant chaque coefficient de pondération par une même constante non nulle.

Exemple: $\forall\ k \in \mathbb{R}^*$ on a $G = \text{bary}\{(A\ ;\ k\alpha_1)\ ;\ (B\ ;k\alpha_2)\ ;\ (B\ ;\ k\alpha_3)\}$ ou

$$G = \left\{\left(A\ ;\ \frac{\alpha_1}{k}\right)\ ;\ \left(B\ ;\ \frac{\alpha_2}{k}\right)\ ;\ \left(C\ ;\ \frac{\alpha_3}{k}\right)\right\}$$

Propriété 3 : Le barycentre G d'un système ne change pas lorsqu'on remplace dans le système un certain nombre de points pondérés par leur barycentre partiel G' à condition que ce dernier soit affecté de la somme partielle des coefficients de pondération partielle considérée.

Exemple : $\text{bary}\{(A\ ;\ \alpha_1)\ ;\ (G'\ ;\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)\}$

6) Isobarycentre

Le barycentre G (**Centre de gravité du triangle ABC**) d'un système du type : $\{(A\ ;\ \alpha)\ ;\ (B\ ;\ \alpha)\ ;\ (C\ ;\alpha)\}$ avec $\alpha \neq 0$ est appelé **isobarycentre.**

III-Fonction vectorielle et scalaire de Leibniz

1) Fonction vectorielle de Leibniz

On appelle fonction vectorielle de Leibniz, toute fonction f définie de E vers V par :

$f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + \alpha_3\overrightarrow{MA_3} + \ldots\ldots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n}$

NB : Pour tout point $M \in E$ et G $\text{bary}\{(A_1;\ \alpha_1);\ (A_2\ ;\ \alpha_2)\ ;\ (A_3\ ;\ \alpha_3);\ \ldots..(A_n\ ;\ \alpha_n)\}$ on a :

$f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\left(\overrightarrow{MG}\right) + f(G) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_n)\overrightarrow{MG} + f(G)$ avec

$f(G) = \alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + \alpha_3\overrightarrow{GA_3} + \ldots\ldots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n}$

2) Fonction scalaire ou numérique de Leibniz

On appelle fonction vectorielle de Leibniz, toute fonction f définie de E vers V par :

$f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \alpha_3 MA_3^2 + \ldots\ldots + \alpha_n MA_n^2$

NB : Pour tout point $M \in E$ et G $\text{bary}\{(A_1;\ \alpha_1);\ (A_2\ ;\ \alpha_2)\ ;\ (A_3\ ;\ \alpha_3);\ \ldots..(A_n\ ;\ \alpha_n)\}$ on a :

$f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MG^2 + f(G) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_n)MG^2 + f(G)$ avec

$$f(G) = \frac{(\alpha_1\ \alpha_2)AB^2 + (\alpha_1\ \alpha_3)AC^2 + (\alpha_2\ \alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

Scanned by CamScanner

IV-Ensemble des points

1) Cercle de centre G et de rayon k

Pour un cercle de centre G et de rayon AB, on a : $\mathbf{MG} = k$ (avec $k \in \mathbb{R}_+^*$)

NB :

- Si $k < 0$, alors l'ensemble cherché est vide.
- Si $k = 0$, alors l'ensemble cherché est le singleton G.

2) Cercle de diamètre $[AB]$

Pour un cercle de diamètre $[AB]$, on a : $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = 0$

3) Médiatrice du segment $[AB]$

Pour la médiatrice du segment $[AB]$, on a : $\mathbf{MA = MB}$

4) Parallélisme à la droite (AB) et passant par un point C.

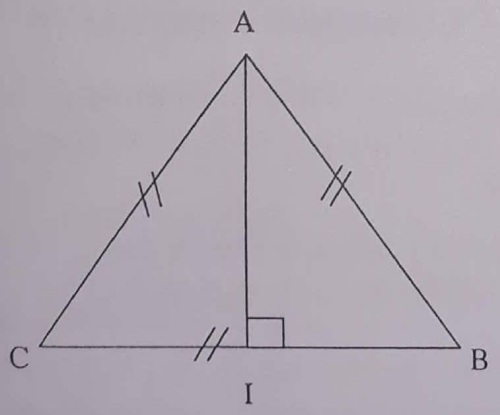
Pour la parallèle à la droite (AB) passant par le point C, on a : $\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{AB}$

5) Perpendicularité à la droite (AB) et passant par un point C.

Pour la perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point C, on a : $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} = k$
(avec $k \in \mathbb{R}_+^*$)

V- Produit scalaire et médiane d'un triangle :

1) Triangle équilatéral



AB = AC = BC et $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60°$

I Milieu de $[BC]$

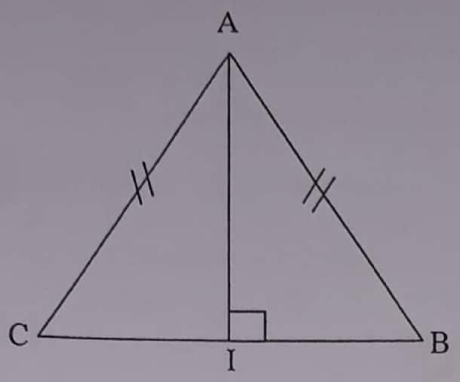
AI Médiane de $[BC]$

On a : $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 2AI$ et $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Scanned by CamScanner

2) Triangle isocèle en A

AB = AC et $\hat{B} = \hat{C}$



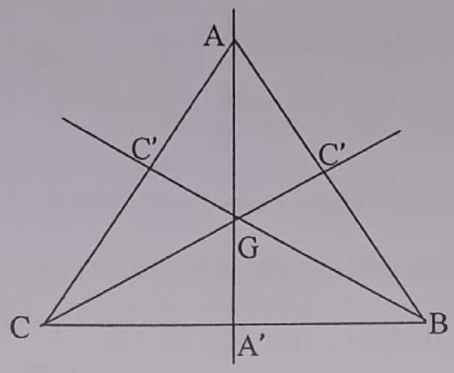
I Milieu de $[BC]$

AI Médiatrice de $[BC]$

On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2AI$ et $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$$

3) Médiane d'un triangle quelconque



A' Milieu de $[BC]$
B' Milieu de $[AC]$
C' Milieu de $[AB]$

G centre de gravité du triangle ABC

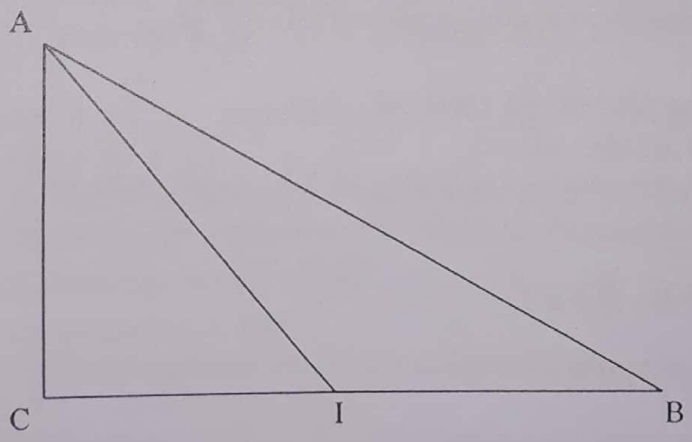
On a :

$AG = \frac{2}{3}AA'$; $BG = \frac{2}{3}BB'$; $CG = \frac{2}{3}CC'$

NB : Pour un triangle isocèle, on a $AG = \frac{3}{4}AA'$

4) Théorème de la médiane

Soit ABC un triangle quelconque et I milieu de $[BC]$



Scanned by CamScanner

a- Première énoncée de la médiane

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

b- Deuxième énoncée de la médiane

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

c- Troisième énoncée de la médiane

$$MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB}$$

EXERCICES

Construction de barycentre de 2 et 3 points pondérés

1 1) Détermine puis Construire le barycentre G (s'il existe) dans chacun des cas suivants :

a- $G_1 = bary\{(A;5)\ ;\ (B;2)\}$; **b-** $G_2 = bary\{(A;3)\ ;\ (B;-8)\}$

2) Détermine puis Construire le barycentre G (s'il existe) dans chacun des cas suivants :

a- $G_1 = bary\{(A;-3)\ ;\ (B;-2);\ (C;3)\}$; **b-** $G_2 = bary\{(A;1)\ ;\ (B;-2);\ (C;1)\}$

Application des fonctions numériques et scalaire de Leibniz

2 Dans le plan affine euclidien ; on considère un triangle équilatérale A ; B ; C dont le côté mesure a.

1) Construire le barycentre G du système {(A ; 4) ; (B ; 1) ; (C ; −1)}.
2) Soit f : E → ℝ tel que : $f(M) = 4MA^2 + MB^2 - MC^2$

Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan tel que $f(M) = \frac{63a^2}{4}$

3 Soit A, B, C trois points du plan P tel que $AB = AC = 5\ cm$ et BC = 6 cm.

1) Construire le triangle ABC puis calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2) Soit G le barycentre des points pondérés {(A, 2) ; (B, 3) ; (C, 3)}. Construire G puis calculer AG.
3) Soit f : P → ℝ
   $M \to 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

   a) Exprimer $f(M)$ en fonction de $f(G)$ et MG

   b) Calculer la valeur de $f(A)$ puis en déduire celle de $f(G)$.

4) Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan tels que : $f(M) = f(A)$.

Scanned by CamScanner

4 Soit E un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A\ ;\ B\ ;\ C$ de coordonnées respectives : $A(3\ ;1)\ ;\ B(-2\ ;3)\ ;\ C(1\ ;0)$
Soit G le barycentre des points $A\ ;\ B\ ;\ C$ affectés des points : $2\ ;\ 1\ ;\ -1$

1) Trouver les coordonnées de G
2) Trouver suivant les valeurs du nombre réel k l'ensemble des points M tel que : $2MA^2 + MB^2 - MC^2 = k$
3) Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan si $k = -35$

5 Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : $AB = 4\ ;\ AC = 6$.
Soit I le milieu du segment $[AB]$.

1) a- Construire le barycentre $G = \{(A,5)\ ;\ (B,-3)\ ;\ (C,2)\}$.
   b- Calculer $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$.
2) Déterminer l'ensemble E_1 des points M du plan tel que :

$\left\| 5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = 2\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \right\|$.

3) Déterminer l'ensemble E_2 des points M du plan tel que :

$\left\| 5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \right\|$.

4) Déterminer l'ensemble E_3 des points M du plan tel que :

$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 24$.

5) Déterminer l'ensemble E_4 des points M du plan tel que :

$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = k$ (on discuteras suivant les valeurs de k).

6) Déterminer l'ensemble E_5 des points M du plan tel que :

$5MA^2 - 3MB^2 - 2MC^2 = -72$.

6 Le plan P est muni d'un repère orthonormé$(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.
On considère les 4 points $A\ ;\ B\ ;\ C$ et D tel que : $A\binom{0}{3}\ ;\ B\binom{-1}{0}\ ;\ C\binom{3}{0}$ et $D\binom{x}{y}$

1) Déterminer les coordonnées x et y de D sachant que : $\left\|\overrightarrow{DA}\right\| = \left\|\overrightarrow{DB}\right\| = \left\|\overrightarrow{DC}\right\|$
2) Déterminer les réels m et n tels que D soit barycentre des points $(A,1);(B,m)\ ;\ (C,n)$
3) Trouver l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $4\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2 + 3\left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2 + 5\left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2 = k$
4) Déterminer le réel k $(k > 60)$tel que $A\binom{0}{3}$ soit élément de (E).

7 Soit A,B,C un triangle équilatéral de côté 3 ; B' le milieu de $[AC]$et un point D tel que : $4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$

1) Démontrer que D est le barycentre des points pondérés $(A,3)\ ;\ (B,-2)\ ;\ (C,3)$.
En déduire que D appartient à la médiatrice du segment $[AC]$
2) Démontrer que $\overrightarrow{BB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$
3) Calculer DA^2 et DB^2
4) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant la relation : $3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12$
5) Vérifier que l'isobarycentre du triangle A,B,C appartient à l'ensemble (E) puis tracer (E).
(On fera une figure)

Scanned by CamScanner

8 Dans l'espace E, on note la distance de deux points M et N par MN

1) Soit trois points A; B; C non alignés et I le point défini par : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

De quel coefficients a ; b ; c faut – il affecter respectivement les points A ; B ; C pour que I soit leur barycentre ?

2) On suppose maintenant que le triangle ABC est rectangle en A tel que $AB = 2$; $AC = 1$ et l'ensemble S tel que $S = \{ M \in E / MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -3\}$

Démontrer que S est une sphère de centre I et de rayons r à préciser.

9 Soit ABC un trapèze tel que (AB) parallèle à (CD) .

Soient I ; J et O les milieux respectifs des segments $[AB]$; $[CD]$ et $[IJ]$.

1) Déterminer puis construire l'ensemble E_1 des points M du plan tel que :

$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$.

2) Les médiatrices des côtés $[AD]$; $[BC]$ se coupent en G. Démontrer que $GA^2 + GB^2 = GC^2 + GD^2$.

3) a- Démontrer que l'ensemble E_2 : $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$ est non vide.

b- Démontrer que $M \in E_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{JC^2 - IA^2}{2}$

c- En déduire que $M \in E_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{GM} = 0$

d- Déterminer puis construire E_2

10 On donne trois points A ; B et C distinctes non alignés du plan et on note a ; b et c les longueurs des côtés du triangle ABC tel que $BC = a$; $AC = b$ et $AB = c$.

On se propose d'étudier l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

1) Soit G le centre de gravité du triangle ABC et soit I le milieu du segment$[BC]$.

a- Calculer $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis en déduire que $AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.

On calculera de même les expressions de BG^2 et de CG^2

b- Montrer que $AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.

2) a- Reconnaître le nature de (E).

b- On donne $a = 5$; $b = 4$ et $c = 3$. Tracer le triangle ABC puis dessiné (E) dans ce cas particulier.

11 Soit ABC un triangle du plan ; I le milieu du segment$[BC]$ et D le barycentre de

$\{(A, -1)$; $(B, 2)$; $(C, 2)\}$ (On fera une figure qui sera compléter au fur et à mesure).

1) Exprimer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.

2) Déterminer la nature de l'ensemble (E) des points du plan vérifiant :

$\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.

3) Justifier que (E) contient I et en déduire sa construction.

Scanned by CamScanner

12 Dans le plan affine P rapporté à un repère orthonormé$(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$, on donne les points $A\binom{1}{0}$ et $B\binom{0}{1}$.

1) Déterminer puis tracer l'ensemble (Γ) des points $M\binom{x}{y}$ du plan tels que le barycentre du système $\{(A,x)\ ;\ (B,y)\ ;\ (C,xy)\}$ n'existe pas.

2) Soit C le point du plan P tel que ABC soit un triangle équilatéral de côté a ($a \in \mathbb{R}^*$)

a- Déterminer puis construire le barycentre G des points A ; B et C affectés respectivement des coefficients 2 ; 1 et 1

b- Quel est l'ensemble (δ) des points M du plan tel que :

$2\overrightarrow{MA^2} + \overrightarrow{MB^2} + \overrightarrow{MG^2} = ka^2$ avec $k \in \mathbb{R}$ (On discutera suivant les valeurs du paramètre k)

c- Construire cet ensemble si $k = 2$

13 1) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct$(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. On désigne par

A ; B ; C et G les points du plan d'affixes respectives : $Z_A = -1$; $Z_B = 2 + i\sqrt{3}$; $Z_C = 2 - i\sqrt{3}$ et $Z_G = 3$.

a- Réaliser une figure et placer les points A ; B ; C et G.

b- Calculer les distances AB ; BC et AC puis en déduire la nature du triangle ABC.

c- Calculer un argument du complexe $\frac{Z_A - Z_C}{Z_G - Z_C}$ puis en déduire la nature du triangle GAC.

2) Soit (D) l'ensemble des points tels que : $\left(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right)\overrightarrow{CG} = 12$ **(1)**

a- Montrer que G est le barycentre du système des points pondérés :

$\{(A,-1)\ ;\ (B,2)\ ;\ (C,2)\}$

b- Montrer que la relation **(1)** est équivalente à la relation : $\overrightarrow{GM} \bullet \overrightarrow{CG} = -4$ **(2)**

c- Vérifier que le point A appartient à l'ensemble (D).

d- Montrer que la relation **(2)** est équivalente à la relation : $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{CG} = 0$

e- En déduire l'ensemble (D) puis le tracer.

Scanned by CamScanner

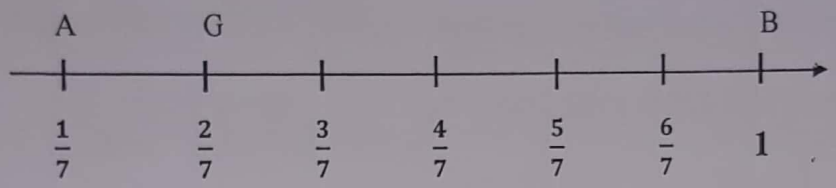
Solutions

Construction de barycentre de 2 et 3 points pondérés

1 1) Déterminons puis Construire le barycentre G (s'il existe) dans chacun des cas suivants :

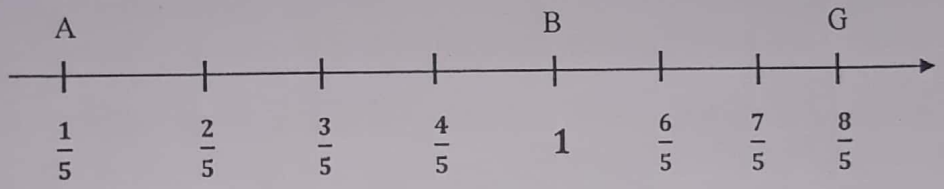
a- $G_1 = bary\{(A;5)\ ;\ (B;2)\}$

$5 + 2 = 7 \neq 0$ alors G existe et $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$



b- $G_2 = bary\{(A;3)\ ;\ (B;-8)\}$

$3 - 8 = -5 \neq 0$ donc il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{8}{5}\overrightarrow{AB}$



2) Déterminons puis Construire le barycentre G (s'il existe) dans chacun des cas suivants :

a- $G_1 = bary\{(A;-3)\ ;\ (B;-2);\ (C;3)\}$

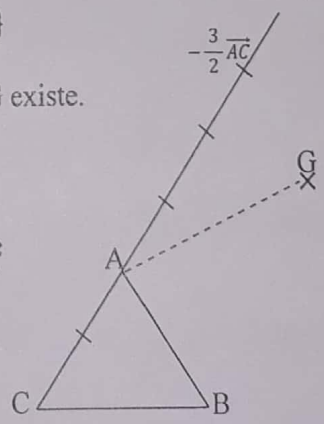
$(-3) + (-2) + (3) = -2 \neq 0$, alors G existe.

On a : $-3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{-2}{-3-2+3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{-3-2+3}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{-2}{-2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{-2}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$



b- $G_2 = bary\{(A;1)\ ;\ (B;-2);\ (C;1)\}$

$(1) + (-2) + (1) = 0$, alors G n'existe pas.

Scanned by CamScanner

Application des fonctions numériques et scalaire de Leibniz

2 Dans le plan affine euclidien ; on considère un triangle équilatérale A, B, C dont le côté mesure a.

1) Construisons le barycentre G du système $\{(A,4)\ ;\ (B,1)\ ;\ (C,-1)\}$.

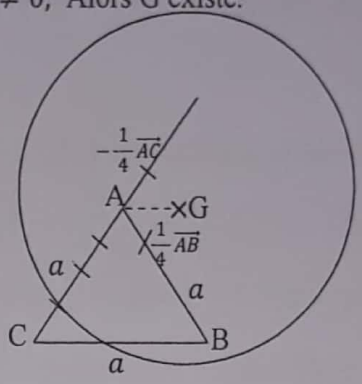
$G = bary\{(A;4)\ ;\ (B;1);\ (C;-1)\}$. On a : $\alpha_1 = 4\ ;\ \alpha_2 = 1$ et $\alpha_3 = -1$

Puis que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 4 + 1 - 1 = 4 \neq 0$; Alors G existe.

On a: $4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$=>\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4+1-1}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4+1-1}\overrightarrow{AC}$

$=>\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$



2) Soit f : E $\rightarrow \mathbb{R}$ tel que : $f(M) = 4MA^2 + MB^2 - MC^2$

Déterminons puis construisons l'ensemble des points M du plan tel que $f(M) = \frac{63a^2}{4}$

$f(M) = 4MA^2 + MB^2 - MC^2$(les points de pondérations sont égaux à celui du barycentre G).

Alors on a : $f(M) = \sum \alpha_i\, MG^2 + f(G)$

Or $\sum \alpha_i\, MG^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MG^2 = (4 + 1 - 1)MG^2 = 4MG^2$

Et $f(G) = \frac{(\alpha_1\ \alpha_2)AB^2 + (\alpha_1\ \alpha_3)AC^2 + (\alpha_2\ \alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{4AB^2 - 4AC^2 - BC^2}{4}$

On a : $AB = AC = BC = a \Rightarrow f(G) = \frac{4a^2 - 4a^2 - a^2}{4} = \frac{-a^2}{4}$

D'où $f(M) = 4MG^2 + \frac{-a^2}{4} = 4MG^2 - \frac{a^2}{4}$

Par hypothèse on a : $f(M) = \frac{63a^2}{4} \Leftrightarrow 4MG^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{63a^2}{4} \Leftrightarrow 4MG^2 = \frac{63a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$

$\Leftrightarrow 4MG^2 = \frac{64a^2}{4} \Leftrightarrow MG^2 = \frac{64a^2}{16} \Leftrightarrow MG^2 = 4a^2 \Rightarrow MG = 2a$

Alors l'ensemble des points M du plan cherché est le cercle de centre G et de rayon $r = 2a$.

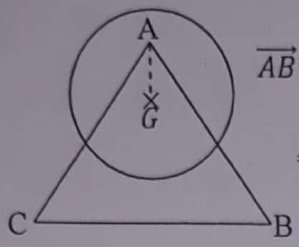
Construction : voir figure ci-dessus

Scanned by CamScanner

3 Soit A, B, C trois points du plan P tel que $AB = AC = 5\ cm$ et BC = 6 cm.

1) Construisons le triangle ABC puis calculons $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Puisque : $AB = AC = 5\ cm$ et BC = 6 cm alors ABC est un triangle isocèle.



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \frac{(5)^2 + (5)^2 - (6)^2}{2} = \frac{50 - 36}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 7$$

2) Soit G le barycentre des points pondérés $\{(A,2)\ ;\ (B,3)\ ;\ (C,3)\}$.

Construisons G

Puis que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2 + 3 + 3 = 8 \neq 0$; Alors G existe.

On a: $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{3}{2+3+3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2+3+3}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$$ (Pour la construction du point G, voir figure)

Calculons AG.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AG}\right)^2 = \left(\frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}\right)^2 \Leftrightarrow AG^2 = \frac{9}{64}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow AG^2 = \frac{9}{64}\left(AB^2 + 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} + AC^2\right) = \frac{9}{64}(5^2 + 2\times 7 + 5^2) = 9 \Rightarrow AG = 3$$

3) Soit $f : \mathrm{P} \to \mathbb{R}$

$$M \to 2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$$

a-Exprimons $f(M)$ en fonction de $f(G)$ et MG

$$f(M) = 2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$$

On sait que $f(M) = \sum \alpha_i\, MG^2 + f(G)$ avec $\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = 1$ et $\alpha_3 = 1$

Or $\sum \alpha_i\, MG^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MG^2 = (2 + 1 + 1)MG^2 = 4MG^2$

D'où $f(M) = 4MG^2 + f(G)$

b-Calculons la valeur de $f(A)$ puis en déduisons celle de $f(G)$.

$$f(M) = 2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$$

Scanned by CamScanner

Calculons la valeur de $f(A)$

$\Rightarrow f(A) = 2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} \bullet \overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow f(A) = 2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$ Avec $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{AA} \bullet \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow f(A) = 2 \times 7 = 14.$

D'où $f(A) = 14.$

Calculons la valeur de $f(G)$

On sait que $f(M) = 4MG^2 + f(G)$

$\Rightarrow f(A) = 4AG^2 + f(G)$. Or $AG = 3$ et $f(A) = 14$

$\Rightarrow 14 = 4(3)^2 + f(G) \Leftrightarrow 14 = 36 + f(G) \Rightarrow f(G) = 14 - 36 = -22$

D'où $f(G) = -22.$

4) Déterminons puis construisons l'ensemble des points M du plan tels que : $f(M) = f(A)$.

$f(M) = f(A) \Leftrightarrow 4MG^2 + f(G) = 14$. Or $f(G) = -22$

$\Rightarrow 4MG^2 - 22 = 14 \Leftrightarrow 4MG^2 = 14 + 22 \Leftrightarrow 4MG^2 = 36 \Leftrightarrow MG^2 = 9 \Rightarrow MG = 3$

Alors l'ensemble cherché est le cercle de centre G et de rayon $r = AG = 3$

(Pour la construction du cercle, voir figure)

4 Soit E un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé. On considère les points A, B, C de coordonnées respectives : $A(3,1)$; $B(-2,3)$; $C(1,0)$

Soit G le barycentre des points A, B, C affectés des points 2 ; 1 ; -1

1) Trouvons les coordonnées de G

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha_1 x_A + \alpha_2 x_B + \alpha_3 x_C}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ et \\ y_G = \dfrac{\alpha_1 y_A + \alpha_2 y_B + \alpha_3 y_C}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{(2)(3) + (1)(-2) + (-1)(1)}{2 + 1 - 1} = \dfrac{3}{2} \\ et \\ y_G = \dfrac{(2)(3) + (1)(-2) + (-1)(1)}{2 + 1 - 1} = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{3}{2} ; \frac{5}{2}\right)$$

2) Trouvons suivant les valeurs du nombre réel k l'ensemble des points M tel que :

$2MA^2 + MB^2 - MC^2 = k$

Posons $f(M) = 2MA^2 + MB^2 - MC^2 = k$

On sait que $f(M) = \sum \alpha_i MG^2 + f(G)$ avec $\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = 1$ et $\alpha_3 = -1$

Scanned by CamScanner

Or $\sum \alpha_i MG^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MG^2 = (2 + 1 - 1)MG^2 = 2MG^2$

D'où $f(M) = 2MG^2 + f(G)$

D'autre part $f(G) = \frac{(\alpha_1\ \alpha_2)AB^2 + (\alpha_1\ \alpha_3)AC^2 + (\alpha_2\ \alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{2AB^2 - 2AC^2 - BC^2}{2}$

De même $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (-2 - 3)^2 + (3 - 1)^2 = 25 + 4 = 29$

$$AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (1 - 3)^2 + (0 - 1)^2 = 4 + 1 = 5$$

$$BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (1 + 2)^2 + (0 - 3)^2 = 9 + 9 = 18$$

$\Rightarrow f(G) = \frac{2\times 29 - 2\times 5 - 18}{2} = \frac{30}{2} = 15$

Alors $f(M) = k \Leftrightarrow 2MG^2 + f(G) = k \Leftrightarrow 2MG^2 + 15 = k \Leftrightarrow MG^2 = \frac{15-k}{2}$

$\Rightarrow MG = \sqrt{\frac{15-k}{2}}$

- si $k > 15$; alors l'ensemble des points M cherchés est vide.
- si $k = 15$ alors $MG = 0$. Ainsi l'ensemble des points M cherchés est le point G.
- si $k < 15$; alors l'ensemble des points M cherchés est le cercle de centre Get de rayon $r = \sqrt{\frac{15-k}{2}}$

3) Déterminons puis construisons l'ensemble des points M du plan si $k = -35$

Puisque $k = -35 < 15$; alors l'ensemble des points M cherchés est le cercle de centre Get de rayon $r = \sqrt{\frac{15-k}{2}} = \sqrt{\frac{15+35}{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5$

5 Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : $AB = 4$; $AC = 6$.

Soit I le milieu du segment $[AB]$.

1) a- Construisons le barycentre G = $\{(A, 5)\ ;\ (B, -3)\ ;\ (C, 2)\}$.

$G = bary\{(A; 5)\ ;\ (B; -3);\ (C; 2)\}$. On a : $\alpha_1 = 5$; $\alpha_2 = -3$ et $\alpha_3 = 2$

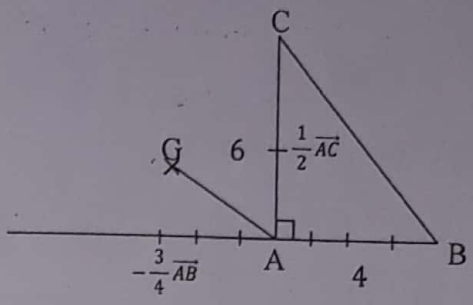
Puis que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 5 - 3 + 2 = 4 \neq 0$; Alors G existe.

Scanned by CamScanner

On a: $5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$=>\overrightarrow{AG} = \frac{-3}{5-3+2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5-3+2}\overrightarrow{AC}$

$=>\overrightarrow{AG} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{4}\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$



b- Calculons $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$.

ABC est un triangle rectangle en A, alors on a : $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$ ($\overrightarrow{AB}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{AC}$)

2) Déterminons l'ensemble E_1 des points M du plan tel que :

$\| 5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \| = 2\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$.

$\| \underbrace{5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}} \| = 2\|\underbrace{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}}\|$.

Introduisons le barycentre G Introduisons le point I

$=> \| 5(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) - 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \| = 2\|(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})\|$

$\Leftrightarrow \| 4\overrightarrow{MG} + 5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} \| = 2\|2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\|$.

Or par hypothèse on a :

$5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (Car $G = bary\{(A;5)\ ;\ (B;-3);\ (C;2)\}$)

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ (Car I est milieu du segment $[AB]$)

Alors on a : $\| 4\overrightarrow{MG} \| = 2\|2\overrightarrow{MI}\| \Leftrightarrow 4\| \overrightarrow{MG} \| = 4\|\overrightarrow{MI}\| \Leftrightarrow \| \overrightarrow{MG} \| = \|\overrightarrow{MI}\| \Leftrightarrow MG = MI$

Donc l'ensemble E_1 des points M du plan cherché est la médiatrice du segment $[GI]$

3) Déterminons l'ensemble E_2 des points M du plan tel que :

$\| 5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$.

$\| \underbrace{5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}} \| = \|\underbrace{\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}}\|$.

Introduisons le barycentre G Introduisons le point I

$=> \| 5(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) - 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \| = \|(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})\|$

$\Leftrightarrow \| 4\overrightarrow{MG} + 5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} \| = \|\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}\|$.

$\Leftrightarrow \| 4\overrightarrow{MG} + 5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} \| = \|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BI}\|$.

Scanned by CamScanner

$\Leftrightarrow \| 4\overrightarrow{MG} + 5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC}\| = \| \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IA}\|$.

Or par hypothèse on a :

$5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (Car $G = bary\{(A;5)\ ;\ (B;-3);\ (C;2)\}$)

$\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BA}$ (D'aprèsla relation de Chasles)

Alors on a : $\| 4\overrightarrow{MG}\| = \| \overrightarrow{BA}\| \Leftrightarrow 4\| \overrightarrow{MG}\| = \| \overrightarrow{BA}\| \Leftrightarrow 4MG = BA \Leftrightarrow MG = \frac{1}{4}BA$

Donc l'ensemble E_2 des points M du plan cherché est le cercle de centre Get de rayon $r = \frac{1}{4}BA$

4) Déterminons l'ensemble E_3 des points M du plan tel que :

$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 24$.

Posons $f(M) = 5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2$

Alors $5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 24 \Leftrightarrow f(M) = 24$

Exprimons ainsi $f(M)$ en fonction de MG et de $f(G)$

On sait que $f(M) = \sum \alpha_i\, MG^2 + f(G)$ avec $\alpha_1 = 5$; $\alpha_2 = -3$ et $\alpha_3 = 2$

Or $\sum \alpha_i\, MG^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MG^2 = (5 - 3 + 2)MG^2 = 4MG^2 \Rightarrow f(M) = 4MG^2 + f(G)$

D'autre part $f(G) = \frac{(\alpha_1\, \alpha_2)AB^2 + (\alpha_1\, \alpha_3)AC^2 + (\alpha_2\, \alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{-15AB^2 + 10AC^2 - 6BC^2}{4}$

Avec $AB^2 = 16$; $AC^2 = 36$ et $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 16 + 36 = 52$ (Théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A)

$\Rightarrow f(G) = \frac{-15(16) + 10(36) - 6(52)}{4} = \frac{-240 + 360 - 312}{4} = \frac{-192}{4} = -48$

D'où $f(M) = 4MG^2 - 48$

D'autre part, on a : $f(M) = 24$

Alors par identification on a : $4MG^2 - 48 = 24 \Leftrightarrow 4MG^2 = 48 + 24 \Leftrightarrow 4MG^2 = 72$

$\Leftrightarrow MG^2 = 18 \Rightarrow MG = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Donc l'ensemble E_3 des points M du plan cherché est le cercle de centre Get de rayon $r - 3\sqrt{2}$

Scanned by CamScanner

5) Déterminons l'ensemble E_4 des points M du plan tel que :

$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = k$ (on discuteras suivant les valeurs de k).

Posons $f(M) = 5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2$

Alors $f(M) = k \Leftrightarrow 4MG^2 + f(G) = k \Leftrightarrow 4MG^2 - 48 = k \Leftrightarrow MG^2 = \frac{k+48}{4}$

$\Rightarrow MG = \sqrt{\frac{k+48}{4}} = \frac{\sqrt{k+48}}{2}$

- si $k < -48$; alors l'ensemble des points M cherchés est vide.
- si $k = -48$ alors $MG = 0$. Ainsi l'ensemble E_4 des points M cherchés est le point G.
- si $k > -48$; alors l'ensemble E_4 des points M cherchés est le cercle de centre Get de rayon $r = \frac{\sqrt{k+48}}{2}$

6) Déterminons l'ensemble E_5 des points M du plan tel que :

$5MA^2 - 3MB^2 - 2MC^2 = -72$.

Ici $\sum \alpha_i = 0$ avec $\alpha_1 = 5$; $\alpha_2 = -3$ et $\alpha_3 = -2$; alors on introduit l'origine A des points de pondération.

Donc on a : $5\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA}\right)^2 - 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right)^2 - 2\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = -72$.

$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{MA}\left(3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right) - 3AB^2 - 2AC^2 = -72$

$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{MA}\left(3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right) - 3(16) - 2(36) = -72 \Leftrightarrow -2\overrightarrow{MA}\left(3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right) = 48$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \frac{48}{2\left(3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA}\right)^2 = \left[\frac{48}{2\left(3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)}\right]^2 \Leftrightarrow MA^2 = \frac{2304}{2\left(9AB^2+12\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+4AC^2\right)}$

$\Leftrightarrow MA^2 = \frac{2304}{2(9\times16+12\times0+4\times36)} = \frac{2304}{576} = 4$

$\Rightarrow MA = 2$

Donc l'ensemble E_5 des points M du plan cherché est le cercle de centre A et de rayon $r = 2$.

6 Le plan P est muni d'un repère orthonormé(O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
On considère les 4 points A ; B ; C et D tel que : $A\binom{0}{3}$; $B\binom{-1}{0}$; $C\binom{3}{0}$ et $D\binom{x}{y}$

1) Déterminons les coordonnées x et y de D sachant que : $\|\overrightarrow{DA}\| = \|\overrightarrow{DB}\| = \|\overrightarrow{DC}\|$

Scanned by CamScanner

De même $\left(\|\overrightarrow{DA}\|\right)^2 = (x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2 = (0-x)^2 + (3-y)^2 = x^2 + (3-y)^2$

$\left(\|\overrightarrow{DB}\|\right)^2 = (x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2 = (-1-x)^2 + (0-y)^2 = (1+x)^2 + y^2$

$\left(\|\overrightarrow{DC}\|\right)^2 = (x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 = (3-x)^2 + (0-y)^2 = (3-x)^2 + y^2$

Alors $\|\overrightarrow{DA}\| = \|\overrightarrow{DB}\| \Leftrightarrow \left(\|\overrightarrow{DA}\|\right)^2 = \left(\|\overrightarrow{DB}\|\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + (3-y)^2 = (1+x)^2 + y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 9 - 6y + y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 \Leftrightarrow 2x + 1 - 9 + 6y = 0 \Leftrightarrow 2x + 6y - 8 = 0$

$\Leftrightarrow x + 3y - 4 = 0$ **(1)**

De même $\|\overrightarrow{DB}\| = \|\overrightarrow{DC}\| \Leftrightarrow \left(\|\overrightarrow{DB}\|\right)^2 = \left(\|\overrightarrow{DC}\|\right)^2 \Leftrightarrow x = 1$ **(2)**

Ainsi des équations **(1) et (2),** on en déduit que $y = 1$

D'où $D\binom{1}{1}$

2) Déterminons les réels m et n tels que D soit barycentre des points $(A,1)$; (B,m) ; (C,n)

Si D est le barycentre des points $(A,1)$; (B,m) ; (C,n); alors les coordonnées de D sont telles que :

$$\begin{cases} x_D = \dfrac{\alpha_1 x_A + \alpha_2 x_B + \alpha_3 x_C}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ et \\ y_D = \dfrac{\alpha_1 y_A + \alpha_2 y_B + \alpha_3 y_C}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{(1)(0) + (m)(-1) + (n)(3)}{1 + m + n} = \dfrac{-m + 3n}{m + n + 1} \\ et \\ 1 = \dfrac{(1)(3) + (m)(0) + (n)(0)}{1 + m + n} = \dfrac{3}{m + n + 1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{-m + 3n}{m + n + 1} = 1 \\ \dfrac{3}{m + n + 1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 3n = m + n + 1 \\ 3 = m + n + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m + 2n = 1 \\ m + n = 2 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $m = \frac{3}{4}$ et $n = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow D = \text{bary}\left\{(A,1); (B,\frac{3}{4}); (C,\frac{5}{4})\right\}$

NB : Le barycentre d'un système ne change pas en multipliant ou en divisant chaque coefficient de pondération par une même constante non nulle.

D'où $D = \text{bary}\left\{(A,1); (B,\frac{3}{4}); (C,\frac{5}{4})\right\}$ ou $D = \text{bary}\{(A,4); (B,3); (C,5)\}$

3) Trouvons l'ensemble (E) tel que : $4\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2 + 3\left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2 + 5\left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2 = k$

$4\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2 + 3\left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2 + 5\left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2 = k \Leftrightarrow 4MA^2 + 3MB^2 + 5MC^2 = k$

Scanned by CamScanner

Posons $f(M) = 4MA^2 + 3MB^2 + 5MC^2$

(Les points de pondérations sont égaux à celui du barycentre D).

Alors on a : $f(M) = \sum \alpha_i MD^2 + f(D)$
Or $\sum \alpha_i MD^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MD^2 = (4+3+5)MG^2 = 12MD^2$

Et $f(D) = \frac{(\alpha_1\ \alpha_2)AB^2 + (\alpha_1\ \alpha_3)AC^2 + (\alpha_2\ \alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{12AB^2 + 20AC^2 + 15BC^2}{12}$

Avec $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (-1-0)^2 + (0-3)^2 = 10$

$AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (3-0)^2 + (0-3)^2 = 18$

$BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (3+1)^2 + (0-0)^2 = 16$

$A\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\Rightarrow f(D) = \frac{12\times10 + 20\times18 + 15\times16}{12} = 60$

Alors $f(M) = k \Leftrightarrow 12MD^2 + f(D) = k \Leftrightarrow 4MD^2 + 60 = k \Leftrightarrow MD^2 = \frac{k-60}{4}$

$\Rightarrow MD = \sqrt{\frac{k-60}{4}} = \frac{\sqrt{k-60}}{2}$

- si $k < 60$; alors l'ensemble (E) des points M cherchés est vide.
- si $k = 60$; alors $MG = 0$. Ainsi l'ensemble (E) des points M cherchés est le point D.
- si $k > 60$; alors l'ensemble (E) des points M cherchés est le cercle de centre $D\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{k-60}}{2}$

4) Déterminons le réel k $(k > 60)$tel que $A\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ soit élément de (E).

Pour $k > 60$, on a : le cercle de centre $D\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{k-60}}{2}$

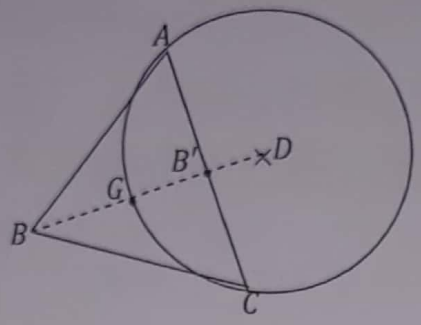
Alors le point $A\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ est élément du ce cercle si et seulement si : $d(A\,;D) = r$, c'est-à-dire que le point A appartient au cercle (E) si la distance du centre D au point A vaut le rayon r.

Donc $d(A\,;D) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \frac{\sqrt{k-60}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \frac{\sqrt{k-60}}{2} \Leftrightarrow$

$2\sqrt{5} = \sqrt{k-60} \Leftrightarrow \left(2\sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{k-60}\right)^2 \Leftrightarrow 20 = k - 60 \Rightarrow k = 80$

Scanned by CamScanner

7 Soit A, B, C un triangle équilatéral de côté 3 ; B' le milieu de $[AC]$et un point D tel que : $4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$



1) Démontrons que D est le barycentre des points pondérés $(A,3)$; $(B,-2)$; $(C,3)$.

Par hypothèse on a : $4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$ (Introduisons le barycentre D).

Alors on a : $4(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD}) = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + 3(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC})$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BD} + 3\overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

D'où D = bary $\{(A,3)\ ;\ (B,-2)\ ;\ (C,3)\}$.

En déduisons que D appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

On sait que D = bary $\{(A,3)\ ;\ (B,-2)\ ;\ (C,3)\}$.

D'autre part B' est le milieu de $[AC]$ alors : $\overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'C} = \vec{0}$

D'où $3\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} = \vec{0} \Leftrightarrow (3\overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{DC}) - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3(\underbrace{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}}_{\text{Introduisons } B'}) - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0}$

$\Rightarrow 3\left[\left(\overrightarrow{DB'} + \overrightarrow{B'A}\right) + \left(\overrightarrow{DB'} + \overrightarrow{B'C}\right)\right] - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\left[\left(\underbrace{\overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'C}}_{\vec{0}}\right) + \left(\underbrace{\overrightarrow{DB'} + \overrightarrow{DB'}}_{2\overrightarrow{DB'}}\right)\right] - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0}$

$\Rightarrow 3\left(2\overrightarrow{DB'}\right) - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{DB'} - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{DB'} - \overrightarrow{DB} = \vec{0}$

Scanned by CamScanner

Alors D appartient à la droite (BB') qui est la médiatrice de $[AC]$

Conclusion : D appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

2) Démontrons que $\overrightarrow{BB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$

D'après la question 1), on a : $3\overrightarrow{DB'} - \overrightarrow{DB} = \vec{0}$ (Introduisons le point B).

$\Rightarrow 3\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BB'}\right) - \left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BB}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{BB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BB'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{BB'} = -2\overrightarrow{DB}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{BD} \quad \Rightarrow \overrightarrow{BB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$

3) Calculons DA^2 et DB^2

D = bary $\{(A,3)\ ;\ (B,-2)\ ;\ (C,3)\}$.

Alors $\overrightarrow{AD} = \frac{-2}{3-2+3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{3-2+3}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{-2}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AD}\right)^2 = \left(\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)^2$

$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{1}{4}AB^2 - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} + \frac{9}{16}AC^2$. Or $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$

$\Rightarrow AD^2 = \frac{1}{4}AB^2 - \frac{3}{4}\left(\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}\right) + \frac{9}{16}AC^2$

$= \frac{1}{4}AB^2 - \frac{3AB^2 + 3AC^2 - 3BC^2}{8} + \frac{9}{16}AC^2$

$= \frac{4AB^2 - 6AB^2 - 6AC^2 + 6BC^2 + 9AC^2}{16}$

(Or ABC est un triangle équilatérale tel que AB = AC = BC = 3)

$\Rightarrow AD^2 = \frac{-2AB^2 + 3AC^2 + 6BC^2}{16} = \frac{-2AB^2 + 3AB^2 + 6AB^2}{16} = \frac{7AB^2}{16} = \frac{7\times(3)^2}{16} = \frac{7\times 9}{16} = \frac{63}{16}$

Scanned by CamScanner

$\Rightarrow AD^2 = \frac{63}{16}$

De même d'après la question 2), on a : $\overrightarrow{BB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BB'}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BD}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\overrightarrow{BB'}\right)^2$

$\Leftrightarrow BD^2 = \frac{9}{4}BB'^2$

ABC étant équilatérale, on a : $BB' = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

D'où $BD^2 = \frac{9}{4}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \times \frac{27}{4} = \frac{243}{16}$

4) Déterminons l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant la relation :

$3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12$

Posons $f(M) = 3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2$

Alors $MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12 \Leftrightarrow f(M) = 12$

Exprimons ainsi $f(M)$ en fonction de MD et de $f(D)$

On sait que $f(M) = \sum \alpha_i MD^2 + f(D)$ avec $\alpha_1 = 3$; $\alpha_2 = -2$ et $\alpha_3 = 3$
Or $\sum \alpha_i MD^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MD^2 = (3 - 2 + 3)MD^2 = 4MD^2 \Rightarrow f(M) = 4MD^2 + f(D)$

D'autre part $f(D) = \frac{(\alpha_1\,\alpha_2)AB^2 + (\alpha_1\,\alpha_3)AC^2 + (\alpha_2\,\alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{-6AB^2 + 9AC^2 - 6BC^2}{4}$

Or ABC est équilatérale tel que AB = AC = BC = 3

$\Rightarrow f(D) = \frac{-6(3)^2 + 9(3)^2 - 6(3)^2}{4} = \frac{-27}{4}$

Donc $f(M) = 4MD^2 + f(G) \Leftrightarrow f(M) = 4MD^2 - \frac{27}{4}$

D'autre part $f(M) = 12$
Par identification, on a : $4MD^2 - \frac{27}{4} = 12$

$\Leftrightarrow 4MD^2 = 12 + \frac{27}{4} \Leftrightarrow 4MD^2 = \frac{75}{4} \Leftrightarrow MD^2 = \frac{75}{16} \Rightarrow MD = \sqrt{\frac{75}{16}} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$

Alors l'ensemble (E) des points M cherchés est le cercle de centre Det de rayon $r = \frac{5\sqrt{3}}{4}$

5) Vérifions que l'isobarycentre du triangle A, B, C appartient à l'ensemble (E) puis tracer (E).

Scanned by CamScanner

(On fera une figure)

G étant l'isobarycentre des points A ; B et C, on a : D ; B' et G sont alignés.

Par conséquent $DG = DB' + B'G$ $(voir\ figure)$

Or $B'G = \frac{1}{3}BB' = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $DB' = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow DG = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

D'où G appartient à l'ensemble (E)

8 Dans l'espace E, on note la distance de deux points M et N par MN

1) Soit trois points A; B; C non alignés et I le point défini par : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Déterminons les coefficients a ; b ; c qu'il faut affecter respectivement aux points A ; B ; C pour que I soit leur barycentre

I= bary$\{(A;a)\ ;\ (B;b)\ ;\ (C;c)\}$ si et seulement si : $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Par hypothèse, on a : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ (Introduisons le barycentre I)

$\Rightarrow 2(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{II}) - 2(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) - (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}) = \vec{0}$.

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Avec $\overrightarrow{II} = \vec{0}$.

$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Par identification avec $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$; On a : $a = 1$; $b = -2$ et $b = -1$

2) On suppose maintenant que le triangle ABC est rectangle en A tel que $AB = 2$; $AC = 1$ et l'ensemble S tel que S = $\{ M \in E \ / \ MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -3\}$
Si ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 2$; $AC = 1$ alors on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow BC^2 = (2)^2 + (1)^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow BC^2 = 5$

Scanned by CamScanner

Par hypothèse, on a : I= bary$\{(A;1)\ ;\ (B;-2)\ ;\ (C;-1)\}$

Démontrons que S est une sphère de centre W et de rayons r à préciser.

$MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -3$

Posons $f(M) = MA^2 - 2MB^2 - MC^2$

Alors $MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -3 \Leftrightarrow f(M) = -3$

Exprimons ainsi $f(M)$ en fonction de MI et de $f(I)$

On sait que $f(M) = \sum \alpha_i\, MI^2 + f(I)$ avec $\alpha_1 = 1\ ;\ \alpha_2 = -2$ et $\alpha_3 = -1$

Or $\sum \alpha_i\, MI^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MI^2 = (1 - 2 - 1)MI^2 = -2MI^2$

$\Rightarrow f(M) = -2MI^2 + f(I)$

I= bary$\{(A;1)\ ;\ (B;-2)\ ;\ (C;-1)\}$

D'autre part $f(I) = \dfrac{(\alpha_1\,\alpha_2)AB^2 + (\alpha_1\,\alpha_3)AC^2 + (\alpha_2\,\alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \dfrac{-2AB^2 - AC^2 + 2BC^2}{-2}$

Or ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 2\ ;\ AC = 1$ et $BC = \sqrt{5}$

$\Rightarrow f(I) = \dfrac{-2(2)^2 - (1)^2 + 2\left(\sqrt{5}\right)^2}{-2} = -\dfrac{1}{2}$

Donc $f(M) = -2MI^2 + f(I) \Leftrightarrow f(M) = -2MI^2 - \dfrac{1}{2}$

D'autre part $f(M) = -3$

Par identification, on a : $-2MI^2 - \dfrac{1}{2} = -3$

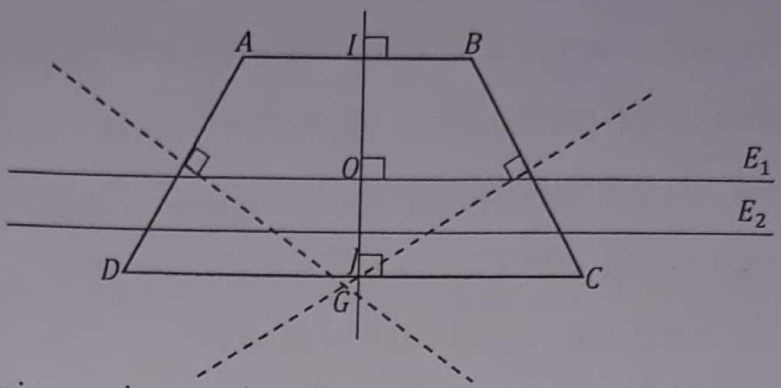
$\Leftrightarrow -2MI^2 = -3 + \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -2MI^2 = -\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow MI^2 = \dfrac{5}{4} \Rightarrow MI = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Alors l'ensemble S des points M cherchés est une sphère de centre I de rayon $r = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Scanned by CamScanner

9 Soit ABC un trapèze tel que (AB) parallèle à (CD) .

Soient I ; J et O les milieux respectifs des segments $[AB]$; $[CD]$ et $[IJ]$.



1) Déterminons puis construisons l'ensemble E_1 des points M du plan tel que :
$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$.

On a : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| - \|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$.

- Introduisons le point I dans $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$ (car I est milieu de $[AB] \Rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$)

- Introduisons le point I dans $\|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$ (car J est milieu de $[CD] \Rightarrow \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$)

$\|\underbrace{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}}\| = \|\underbrace{\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}}\|$.

Introduisons I Introduisons J

$\Rightarrow \|(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})\| = \|(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC}) + (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JD})\|$.

$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\| = \|\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JD}\|$.

$\Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})\| = \|2\overrightarrow{MJ} + (\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD})\|$.

Or $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}) = \vec{0}$

$\Rightarrow \|2\overrightarrow{MI}\| = \|2\overrightarrow{MJ}\|$.

$\Leftrightarrow 2\|\overrightarrow{MI}\| = 2\|\overrightarrow{MJ}\|$.

$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MI}\| = \|\overrightarrow{MJ}\|$.

$\Leftrightarrow MI = MJ$

Alors l'ensemble E_1 des points M cherché est la médiatrice du segment $[IJ]$

Construction : (voir figure)

2) Les médiatrices des côtés $[AD]$; $[BC]$ se coupent en G.

Scanned by CamScanner

Démontrons que $GA^2 + GB^2 = GC^2 + GD^2$.

- G appartient à la médiatrice de $[AD]$ $\Rightarrow GA = GD \Leftrightarrow GA^2 = GD^2$ **(1)**
- G appartient à la médiatrice de $[BC]$ $\Rightarrow GB = GC \Leftrightarrow GB^2 = GC^2$ **(2)**

En effectuant la somme membre des relations **(1)** et **(2)**, on obtient :

$GA^2 + GB^2 = GC^2 + GD^2$.(ce qu'il fallait démontrer)

3) a- Démontrons que l'ensemble E_2 : $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$ est non vide.

On sait que : $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$ (en posant $M = G$), on a :

$GA^2 + GB^2 = GC^2 + GD^2$ ce qui veut dire que G appartient à l'ensemble E_2.

D'où l'ensemble E_2 : $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$ est non vide.

b- Démontrons que $M \in E_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{JC^2 - IA^2}{2}$

On sait que $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$ est non vide. Alors :

- Introduisons le point I dans $MA^2 + MB^2$ (car I est milieu de $[AB] \Rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$)
- Introduisons le point I dans $MC^2 + MD^2$ (car J est milieu de $[CD] \Rightarrow \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$)

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = \left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JD}\right)^2$$

Après développement et arrangement, on a :

$$2MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) = 2MJ^2 + JC^2 + JD^2 + 2\overrightarrow{MJ}\left(\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}\right)$$

Or $\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) = \left(\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}\right) = \vec{0}$

$$\Rightarrow 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = 2MJ^2 + JC^2 + JD^2$$

D'autre part, I est milieu de $[AB] \Rightarrow IA^2 = IB^2$

De même J est milieu de $[DC] \Rightarrow JD^2 = JC^2$

$$\Rightarrow 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = 2MJ^2 + JC^2 + JD^2 \Leftrightarrow 2MI^2 + IA^2 + IA^2 = 2MJ^2 + JC^2 + JC^2$$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 + 2IA^2 = 2MJ^2 + 2JC^2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 + IA^2 = MJ^2 + JC^2$$
$$\Leftrightarrow MI^2 - MJ^2 = JC^2 - IA^2$$

Scanned by CamScanner

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MJ})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}) = JC^2 - IA^2$

$\Leftrightarrow (-\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{MJ})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}) = JC^2 - IA^2$

$\Leftrightarrow -(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MJ})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}) = JC^2 - IA^2$

$\Leftrightarrow -(\overrightarrow{IJ})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}) = JC^2 - IA^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{JI}(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}) = JC^2 - IA^2$

Introduisons le point O dans $(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ})$ (car O est milieu de $[IJ] \Rightarrow \overrightarrow{JO} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$)

$\Rightarrow \overrightarrow{JI}(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OJ}) = JC^2 - IA^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{JI}(2\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) = JC^2 - IA^2$. Or $\overrightarrow{JO} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{JI}(2\overrightarrow{MO}) = JC^2 - IA^2$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{MO} = JC^2 - IA^2$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OM} = JC^2 - IA^2 \quad \Rightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{JC^2 - IA^2}{2}$ (ce qu'il fallait démontrer)

c- En déduisons que $M \in E_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{GM} = 0$

D'après la question b), on a : $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{JC^2 - IA^2}{2}$

Alors $G \in E_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OG} = \frac{JC^2 - IA^2}{2}$

Alors : $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OG} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OG} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OG}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}(\overrightarrow{GM}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{GM} = \vec{0}$

d- Déterminons puis construire E_2

Puisque $E_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{GM} = \vec{0}$. Alors l'ensemble E_2 est donc la droite passant part G et perpendiculaire à la droite (IJ).

10 On donne trois points A ; B et C distinctes non alignés du plan et on note a ; b et c les longueurs des côtés du triangle ABC tel que $BC = a$; $AC = b$ et $AB = c$.
On se propose d'étudier l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Scanned by CamScanner

1) Soit G le centre de gravité du triangle ABC et soit I le milieu du segment$[BC]$.

a- Calculons $2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$

On sait que : $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} \Rightarrow 2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$

Or $BC = a$; $AC = b$ et $AB = c$.

$\Rightarrow 2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = c^2 + b^2 - a^2$

En déduisons que $AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.

Puisque : G est le centre de gravité du triangle ABC; alors on a :

$G = \text{bary}\{(A;1) ; (B;1) ; (C;1)\}$ avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{1+1+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{1+1+1}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$\Leftrightarrow AG^2 = \frac{1}{9}(AB^2 + 2\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AC} + AC^2) = \frac{1}{9}(c^2 + c^2 + b^2 - a^2 + b^2)$

$\Rightarrow AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$

De même on a : $BG^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$ et $CG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2a^2 - c^2)$

b- Montrons que $AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.

D'après 1) a-), on a :

$AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$ (1)

$BG^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$ (2)

$CG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2a^2 - c^2)$ (3)

En effectuant la somme membre à membre des relations : **(1) ; (2) et (3)**, on obtient :

$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2) + \frac{1}{9}(2a^2 + 2c^2 - b^2) + \frac{1}{9}(2b^2 + 2a^2 - c^2)$

Scanned by CamScanner

$$= \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2b^2 + 2a^2 - c^2)$$

$$= \frac{1}{9}(3b^2 + 3c^2 + 3a^2) = \frac{3}{9}(b^2 + c^2 + a^2) = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

D'où $AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ (ce qu'il fallait démontrer)

2) a- Déterminons la nature de (E).

On a (E) : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Posons $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$

Alors $MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow f(M) = a^2 + b^2 + c^2$

Exprimons ainsi $f(M)$ en fonction de MG et de $f(G)$

On sait que $f(M) = \sum \alpha_i MG^2 + f(G)$ avec $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 1$ et $\alpha_3 = 1$

Or $\sum \alpha_i MG^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MG^2 = (1 + 1 + 1)MG^2 = 3MG^2 \Rightarrow f(M) = 4MG^2 + f(G)$

D'autre part $f(G) = \frac{(\alpha_1\ \alpha_2)AB^2 + (\alpha_1\ \alpha_3)AC^2 + (\alpha_2\ \alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{3}$

Avec $AB^2 = c^2$; $AC^2 = b^2$ et $BC^2 = a^2$

$\Rightarrow f(G) = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$

D'où $f(M) = 3MG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$

D'autre part, on a : $f(M) = a^2 + b^2 + c^2$

Alors par identification on a : $3MG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} = a^2 + b^2 + c^2$

$\Leftrightarrow 3MG^2 = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$

$\Leftrightarrow 3MG^2 = \frac{3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - a^2 - b^2 - c^2}{3}$

$\Leftrightarrow 3MG^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2}{3}$

$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2}{9}$

$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{9} \Rightarrow MG = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}}{3}$

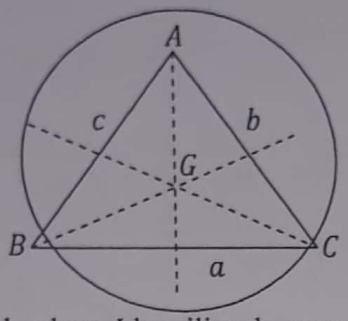
Scanned by CamScanner

Donc l'ensemble (E) des points M du plan cherché est le cercle de centre Get de rayon $r = \frac{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}}{3}$

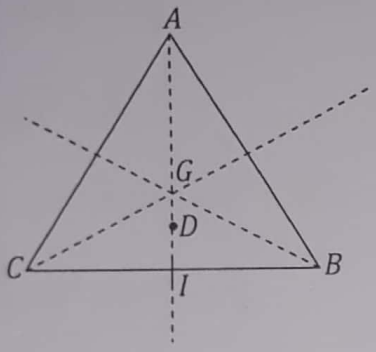
b- On donne $a = 5$; $b = 4$ et $c = 3$.

Si $a = 5$; $b = 4$ et $c = 3$, alors :

L'ensemble (E) des points M du plan cherché est le cercle de centre Get de rayon $r = \frac{10}{3}$



11 Soit ABC un triangle du plan ; I le milieu du segment$[BC]$ et D le barycentre de $\{(A,-1)\ ;\ (B,2)\ ;\ (C,2)\}$ (On fera une figure qui sera compléter au fur et à mesure).



1) Exprimons $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.

$D = bary\{(A,-1)\ ;\ (B,2)\ ;\ (C,2)\}$ Avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -1+2+2 = 3 \neq 0$

$\Rightarrow\ -\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{2}{-1+2+2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{-1+2+2}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

Puisque I est le milieu du segment $[BC]$; alors on a : $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}[(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})]$

Scanned by CamScanner

$= \frac{2}{3}[\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}]$

$= \frac{2}{3}[2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}]$. Or $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}(2\overrightarrow{AI}) = \frac{4}{3}\overrightarrow{AI}$

D'où $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AI}$

2) Déterminons la nature de l'ensemble (E) des points du plan vérifiant :

$\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.

Pour $\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\|$ (Introduisons le barycentre D)

Pour $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.(Introduisons l'isobarycentre G) Avec :

$G = bary\{(A,1) ; (B,1) ; (C,1)\} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Donc $\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$

$\Leftrightarrow \|\sum \alpha_i \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC}\| = \|\sum \alpha_i \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\|$

$\Leftrightarrow \|3\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC}\| = \|3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\|$

Or $D = bary\{(A,-1) ; (B,2) ; (C,2)\} \Rightarrow -\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

Et $G = bary\{(A,1) ; (B,1) ; (C,1)\} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Donc $\|3\overrightarrow{MD} + -\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC}\| = \|3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\|$

$\Leftrightarrow \|3\overrightarrow{MD} + \vec{0}\| = \|3\overrightarrow{MG} + \vec{0}\|$

$\Leftrightarrow \|3\overrightarrow{MD}\| = \|3\overrightarrow{MG}\|$

$\Leftrightarrow 3\|\overrightarrow{MD}\| = 3\|\overrightarrow{MG}\|$

$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{MG}\|$

$\Leftrightarrow MD = MG$

Alors l'ensemble (E) des points M du plan cherché est la médiatrice du segment $[DG]$

3) Justifions que (E) contient I et en déduisons sa construction.

Scanned by CamScanner

On a (E) : $\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.

(E) contient I si et seulement si $\|-\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC}\| = \|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\|$.

$\Leftrightarrow \|-\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC}\| = \|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\|$.

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$. Or $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$\Rightarrow -\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA}$

D'où (E) contient I.

12 Dans le plan affine P rapporté à un repère orthonormé$(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$, on donne les points

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

1) Déterminons puis traçons l'ensemble (Γ) des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ du plan tels que le barycentre du système $\{(A,x)\ ;\ (B,y)\ ;\ (C,xy)\}$ n'existe pas.

Le barycentre du système $\{(A,x)\ ;\ (B,y)\ ;\ (C,xy)\}$ n'existe pas si et seulement si :

$x + y + xy = 0 \Leftrightarrow y(x+1) + x = 0 \Rightarrow y = -\frac{x}{x+1}$ avec $x \neq -1$

L'ensemble cherché est donc l'équation d'une hyperbole

Pour la construction, posons $f(x) = -\frac{x}{x+1}$

$Df = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty\ ;\ -1[\cup]-1\ ;\ +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$

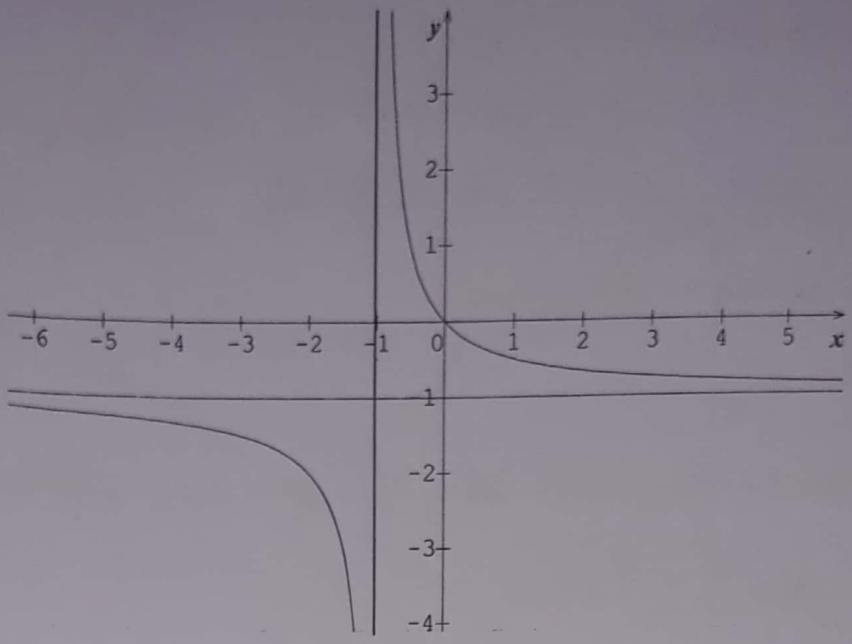
$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

$f(x) = -\frac{x}{x+1} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$

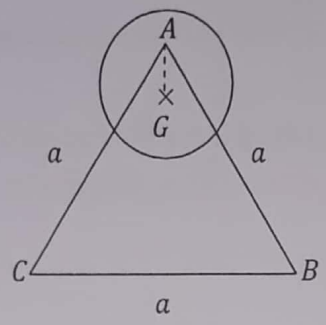
D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		‖	$-$	
$f(x)$	-1 ↘		‖	$+\infty$ ↘	-1
		$-\infty$			

Scanned by CamScanner



2) Soit C le point du plan P tel que ABC soit un triangle équilatéral de côté a ($a \in \mathbb{R}^*$)



a- Déterminons puis construisons le barycentre G des points A ; B et C affectés respectivement des coefficients 2 ; 1 et 1

$G = bary\{(A,2)\ ;\ (B,1)\ ;\ (C,1)\}$ Avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2 + 1 + 1 = 4 \neq 0$

$\Rightarrow\ 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2+1+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2+1+1}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

b- Déterminons l'ensemble (δ) des points M du plan tel que :
$2\overrightarrow{MA^2} + \overrightarrow{MB^2} + \overrightarrow{MG^2} = ka^2$ avec $k \in \mathbb{R}$ (On discutera suivant les valeurs du paramètre k)

Posons $f(M) = 2\overrightarrow{MA^2} + \overrightarrow{MB^2} + \overrightarrow{MG^2}$

(Les points de pondérations sont égaux à celui du barycentre G).

Scanned by CamScanner

Alors on a : $f(M) = \sum \alpha_i MG^2 + f(G)$

Or $\sum \alpha_i MG^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MG^2 = (2+1+1)MG^2 = 4MG^2$

Et $f(G) = \dfrac{(\alpha_1 \alpha_2)AB^2 + (\alpha_1 \alpha_3)AC^2 + (\alpha_2 \alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \dfrac{2AB^2 + 2AC^2 + BC^2}{4}$

Or ABC est équilatérale de côté a $\Rightarrow AB = AC = BC = a$

$\Rightarrow f(G) = \dfrac{2a^2 + 2a^2 + a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{4}$

Alors $f(M) = ka^2 \Leftrightarrow 4MG^2 + f(G) = ka^2 \quad \Leftrightarrow 4MG^2 + \dfrac{5a^2}{4} = ka^2 \Leftrightarrow 4MG^2 = \dfrac{a^2(4k-5)}{4}$

$\Leftrightarrow MG^2 = \dfrac{a^2(4k-5)}{16} \Rightarrow MG = \sqrt{\dfrac{a^2(4k-5)}{16}} = \dfrac{a}{4}\sqrt{4k-5}$

- si $k < \dfrac{5}{4}$; alors l'ensemble (E) des points M cherchés est vide.
- si $k = \dfrac{5}{4}$; alors $MG = 0$. Ainsi l'ensemble (E) des points M cherchés est le point G.
- si $k > \dfrac{5}{4}$; alors l'ensemble (E) des points M cherchés est le cercle de centre G et de rayon $r = \dfrac{a}{4}\sqrt{4k-5}$

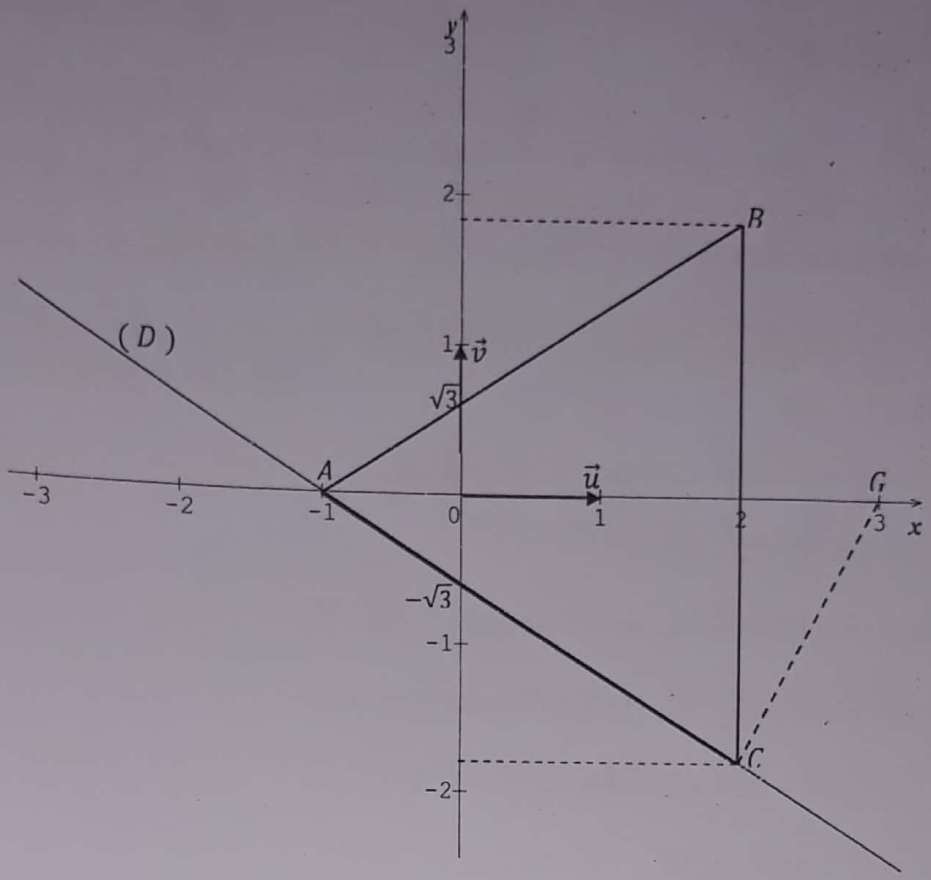
c- Construisons cet ensemble si $k = 2$

Si $k = 2$; alors l'ensemble (E) des points M cherchés est le cercle de centre G et de rayon $r = \dfrac{a}{4}\sqrt{3}$

13 1) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct$(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. On désigne par $A\ ;\ B\ ;\ C$ et G les points du plan d'affixes respectives : $Z_A = -1$; $Z_B = 2 + i\sqrt{3}$; $Z_C = 2 - i\sqrt{3}$ et $Z_G = 3$.

a- Réalisons une figure et plaçons les points $A\ ;\ B\ ;\ C$ et G.

Scanned by CamScanner



b- Calculons les distances AB ; BC et AC puis en déduisons la nature du triangle ABC.

$$AB = |Z_B - Z_A| = |(2 + i\sqrt{3}) - (-1)| = |2 + i\sqrt{3} + 1| = |3 + i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AB = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |Z_C - Z_B| = |(2 - i\sqrt{3}) - (2 + i\sqrt{3})| = |2 - i\sqrt{3} - 2 - i\sqrt{3}| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow BC = 2\sqrt{3}$$

$$AC = |Z_C - Z_A| = |(2 - i\sqrt{3}) - (-1)| = |2 - i\sqrt{3} + 1| = |3 - i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AC = 2\sqrt{3}$$

Puisque $AB = BC = AC = 2\sqrt{3}$, alors on en déduit que ABC est un triangle équilatéral.

c- Calculons un argument du complexe $\frac{Z_A - Z_C}{Z_G - Z_C}$ puis en déduisons la nature du triangle GAC.

$$\frac{Z_A - Z_C}{Z_G - Z_C} = \frac{(-1) - (2 - i\sqrt{3})}{(3) - (2 - i\sqrt{3})} = \frac{-1 - 2 + i\sqrt{3}}{3 - 2 + i\sqrt{3}} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{4i\sqrt{3}}{4} = i\sqrt{3}$$

Scanned by CamScanner

$\Rightarrow arg\left(\frac{Z_A - Z_C}{Z_G - Z_C}\right) = arg(i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$

Puisque $arg\left(\frac{Z_A - Z_C}{Z_G - Z_C}\right) = \frac{\pi}{2}$, alors on en déduit que GAC est un triangle rectangle en C.

2) Soit (D) l'ensemble des points tels que : $\left(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right)\overrightarrow{CG} = 12$ **(1)**

a- Montrons que G est le barycentre du système des points pondérés :

$\{(A,-1)\ ;\ (B,2)\ ;\ (C,2)\}$

Puis que $\sum \alpha_i = -1 + 2 + 2 = 3 \neq 0$. Alors il existe G tel que :

$G = bary\{(A,-1)\ ;\ (B,2)\ ;\ (C,2)\}$

b- Montrons que la relation **(1)** est équivalente à la relation : $\overrightarrow{GM} \bullet \overrightarrow{CG} = -4$ **(2)**

On a : $\left(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right)\overrightarrow{CG} = 12$ **(1)** (Introduisons le point G)

$\Rightarrow \left[-\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right) + 2\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right) + 2\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)\right]\overrightarrow{CG} = 12$

$\Rightarrow \left(-\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GC}\right)\overrightarrow{CG} = 12$

$\Rightarrow \left[3\overrightarrow{MG} + \left(-\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC}\right)\right]\overrightarrow{CG} = 12$. Or $-\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
$\Rightarrow 3\overrightarrow{MG} \bullet \overrightarrow{CG} = 12 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \bullet \overrightarrow{CG} = 4 \Leftrightarrow -\overrightarrow{GM} \bullet \overrightarrow{CG} = 4 \Leftrightarrow \overrightarrow{GM} \bullet \overrightarrow{CG} = -4$

D'où $\overrightarrow{GM} \bullet \overrightarrow{CG} = -4$ **(2)** (ce qu'il fallait démontrer)

c- Vérifions que le point A appartient à l'ensemble (D).

On a : $\overrightarrow{GM} \bullet \overrightarrow{CG} = -4$ **(2)**

Le point A appartient à l'ensemble (D) si et seulement si $\overrightarrow{GA} \bullet \overrightarrow{CG} = -4$

$\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{GA}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix} x_G - x_C \\ y_G - y_C \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{CG}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GA} \bullet \overrightarrow{CG} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = (-4)(1) + (0)\left(\sqrt{3}\right) = -4$

D'où le point A appartient à l'ensemble (D).

d- Montrons que la relation **(2)** est équivalente à la relation : $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{CG} = 0$

On a : $\overrightarrow{GM} \bullet \overrightarrow{CG} = -4$ **(2)** (Introduisons le point A)

$\Rightarrow \left[\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM}\right) \bullet \overrightarrow{CG}\right] = -4$

Scanned by CamScanner

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4$. Or $\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4$

$\Rightarrow -4 + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4 \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$

D'où la relation (2) est équivalente à la relation : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$ (ce qu'il fallait démontrer)

e- En déduisons l'ensemble (D) puis le traçons.

Puisque $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$, alors l'ensemble (D) est la droite passant par le point A et perpendiculaire à la droite CG.

Scanned by CamScanner

Chapitre 11

Applications affines
COURS

I- Définition-propriétés-points invariants expression analytique :

1) Définition

Une application d'un espace vectoriel E dans lui-même est dite affine quand elle de la forme $\vec{u} \to A + \varphi(\vec{u})$ où φ est une application linéaire de E dans lui-même (endomorphisme de E) dans l'espace après le choix d'une origine O. Une application M→ M' est dite affine quand l'application est affine.

Remarque : φ est appelé l'endomorphisme associé à l'application affine f.
Par contre à un même endomorphisme peuvent être associées plusieurs application affines dans les expressions analytiques, il suffire de changer les constantes.

2) Propriétés

P_1 : Les applications affines conservent le barycentre de n points pondérés : c'est-à-dire si f est une application affine, l'image du barycentre d'un système de n points pondérés est le barycentre du système des images de ces points affectés des mêmes coefficients.
Ainsi noud retenons que :
- L'image une droite est une droite.
- L'image d'un plan est un plan.
- L'image d'un segment est un segment.

D'une manière générale :

- L'mage d'une partie convexe de E est une partie convexe de E.
- L'homothétie de centre et de rapport donné ; La translation de vecteur donné ; la symétrie et la projection de base et de direction données et la rotation de centre et d'angle donné sont des exemples d'applications affines.

P_2 : la réciproque d'une transformation affine du plan est une transformation affine du plan.

3) Application vectorielle associée à une application affine

a) **Définition** : soit f une application affine du plan p dans p et A ; B ; C et D quatre points du plan d'images respectives A' ; B' ; C' et D'.
On appelle application affine vectorielle associée à f , tout application vectorielle $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ notée φ tel que : $\forall A \in p$ et $\forall B \in p$ on a : $\overrightarrow{A'B'} = \varphi(\overrightarrow{AB}) => \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{f(A)f(B)}$.
D'où $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$.

Scanned by CamScanner

b) Propriétés :

Soit f une application affine du plan p dans p et φ l'application linéaire associée à f.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan vectorielle $\mathcal{V}$ et pour tout réel α donné, on a les propriétés suivantes :

P_1: $\varphi(\alpha\vec{u}) = \alpha\varphi(\vec{u})$.
P_2: $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$.
P_3: $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$
P_4: $\varphi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(\vec{u_i})$

4) Points invariants par une application affine f

a) Définition

Soit f une application affine du plan P dans P. L'ensemble des points invariants par f est soit un ensemble **vide**, soit un **singleton,** soit une droite ou encore un **plan** tout entier.

b) Propriétés :

P_1 : L'image d'une droite par une transformation affine est une droite.

P_2 : Si (AB) et (CD) sont deux droites parallèles du plan et (A'B') et (C'D') leur images respectives par une application affine f du plan, alors les droites (A'B') et (C'D') sont parallèles.

P_3 : Soit f une application affine du plan P dans P.
- Si f est bijective alors f(P) = P
- Si f n'est pas bijective alors f (P) est un singleton ou une droite.

5) Expression analytique d'une application affine f

a) Définition :

Le plan est muni d'une repère (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$). Soit f une application affine du plan et soit φ sont application linéaire associée. Soit (a ; a') ; (b ; b') et (c ; c') les coordonnées respectives de $\varphi(\vec{\imath})$; $\varphi(\vec{\imath})$ *et de* O' avec $O' = f(O)$. On a : $\overrightarrow{O'M'} = \varphi(\overrightarrow{OM})$

$$= \varphi(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})$$
$$= x\varphi\vec{\imath} + y\varphi\vec{\jmath}$$
$$= x\left(a\vec{\imath} + a'\vec{\jmath}\right) + y\left(b\vec{\imath} + b'\vec{\jmath}\right)$$
$$= xa\vec{\imath} + xa'\vec{\jmath} + yb\vec{\imath} + yb'\vec{\jmath}$$
$$= (ax + by)\vec{\imath} + (a'x + b'y)\vec{\jmath}$$

$$=>(x' - c')\vec{\imath} + (y' - c')\vec{\imath} = (ax + by)\vec{\imath} + (a'x + b'y)\vec{\jmath}$$

Scanned by CamScanner

Par identification on a :

$$\Rightarrow \begin{cases} (x' - c') = (ax + by) \\ (y' - c') = (a'x + b'y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - c' = ax + by \\ y' - c' = a'x + b'y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = ax + by + c' \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

b) propriété:

Une application f est dite affine si sont expression analytique est sous la forme :

$$\begin{cases} x' = ax + by + c' \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

II- Caractérisation des transformations

1) Soit f la transformation : $z' = az + b$

- $si\ a = 1$, alors f est une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'affixe b.
- si $a = -1$, alors f est la symétrie centrale de centre Ω d'affixe $w = \frac{1}{2}b$.
- $si\ a \in \mathbb{R}^* - \{-1\ ;1\}$, alors f est une homothétie de rapport $k = |a|$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.
- $si\ a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = 1\ alors\ f$ est une rotation d'angle $\alpha = \arg(a)$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.
- $si\ a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| \neq 1\ alors\ f$ est une similitude directe de rapport $k = |a|$, d'angle $\alpha = \arg(a)$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.

2) Soit f la transformation : $z' = a\bar{z} + b$

- Si $|a| = 1$, alors f est une symétrie orthogonale d'axe l'ensemble des solutions de $z' = z$.
- Si $|a| \neq 1 alors\ f$ est une similitude indirecte de rapport $k = |a|$, d'angle $\alpha = \arg(a)$, $d'axe\ (\Delta) : y = px + q$ et de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b + a\bar{b}}{1 - a\bar{a}}$

III- Composée des transformations

- La composée de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est une translation $\vec{u} + \vec{v}$.
- La composée de deux homothéties $h_1(\Omega\ ;\ k_1)$ et $h_2(\Omega\ ;\ k_2)$ est une homthétie $h(\Omega\ ;\ k_1 \bullet k_2)$. $Avec\ k_1 \neq k_2$.
- La composée de deux homothéties $h_1(\Omega_1\ ;\ k_1)$ et $h_2(\Omega_2\ ;\ k_2)$ est :
  - Une homothétie $h(\Omega\ ;\ k_1 \bullet k_2)$ si $k_1 \bullet k_2 \neq 1$.
  - Une translation de vecteur $\vec{u}$ si $k_1 \bullet k_2 = 1$.

Scanned by CamScanner

- La composée d'une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'une homothétie $h(\Omega\ ;\ k)$ est :
  - Une translation si $k = 1$.
  - Une homothétie si $\vec{u} = \vec{0}$.
  - Une homothétie si $k \neq 1$ et $\vec{u} = \vec{0}$.
- La composée d'une homothétie et d'une isométrie est une similitude.
- La composée d'une homothétie et d'une symétrie orthogonale est une similitude indirecte.
- La composée de deux antidéplacements est un déplacement.
- La composée de deux déplacements est un déplacement.
- La composée de d'un antidéplacement et un déplacement est un antidéplacement.
- La composée de deux rotations r et r' d'angles respectifs α et α' est :
  - Une rotation d'angle α + α' si α + α'≠ 0
  - Une translation α + α'= 0
- La composée d'une rotation et d'une translation est une symétrie orthogonale.

IV- Expressions analytiques des transformations

1) Expression analytique d'une translation de vecteur translateur $\vec{u}\binom{a}{b}$

Si $M\binom{x}{y}$ et $M'\binom{x'}{y'}$ sont deux points quelconques du plan tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ <=>

$Z' - Z = \binom{a}{b}$, alors l'expression analytique d'une translation est : $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$.

2) Expression analytique d'une homothétie de rapport k et de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$

Si $M\binom{x}{y}$ et $M'\binom{x'}{y'}$ sont deux points quelconques du plan tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$ <=>

$Z' - \omega = k(Z - \omega)$, alors l'expression analytique d'une homothétie est :

$\begin{cases} x' = kx + x_0(1 - k) \\ y' = ky + y_0(1 - k) \end{cases}$.

3) Expression analytique d'une rotation d'angle Θ et de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$

Si $M\binom{x}{y}$ et $M'\binom{x'}{y'}$ sont deux points quelconques du plan tel que,<=> $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \widehat{M\Omega M'} = \theta \end{cases}$

$Z' - \omega = e^{i\theta}(Z - \omega)$, alors l'expression analytique d'une rotation est :

$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta - x_0\cos\theta + y_0\sin\theta + x_0 \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta - x_0\sin\theta - y_0\cos\theta + y_0 \end{cases}$

4) Expression analytique d'une symétrie centrale de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$

Scanned by CamScanner

Si $M\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont deux points quelconques du plan tel que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{O\Omega}$ alors l'expression analytique d'une symétrie est : $\begin{cases}x' = -x + 2x_0\\y' = -y + 2y_0\end{cases}$.

5) Expression analytique d'une symétrie orthogonale d'axe (Δ) : $y = ax + b$

Si $M\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont deux points quelconques du plan tel que si $M \mapsto {}^{S}\!/_{\Delta}$ (M) = M' et $\begin{cases}MM' \perp \Delta\\milieu\\[MM'] \in \Delta\end{cases}$ alors l'expression analytique d'une symétrie orthogonale est :

$$\begin{cases}x' = x\cos 2\theta + y\sin 2\theta - 2ab\\y' = x\sin 2\theta - y\cos 2\theta - 2ac\end{cases}$$

6) Expression analytique d'une similitude directe

Si $M\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont deux points quelconques du plan tel que

$z' = az + b$ avec a et $b \in \mathbb{C}^*$, alors l'expression analytique d'une similitude directe est : $\begin{cases}x' = ax + b\\y' = ay\end{cases}$.

7) Expression analytique d'une similitude indirecte

Si $M\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont deux points quelconques du plan tel que

$z' = a\bar{z} + b$ avec a et $b \in \mathbb{C}^*$,

alors l'expression analytique d'une similitude indirecte est : $\begin{cases}x' = ax + b\\y' = -ay\end{cases}$

8) Expression analytique d'une isométrie

- **Isométrie positive ou déplacement**

$\begin{cases}x' = ax - by + c\\y' = bx + ay + c'\end{cases}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ et $det(Matf) = 1$

NB : tout déplacement (**isométrie positive**) est une similitude directe de rapport $k = 1$ et les déplacements sont des transformations qui conservent l'angle orienté (Rotation ; translation ; symétrie centrale)

Classification des déplacements à partir de l'ensemble des points invariants

Scanned by CamScanner

Ensemble des points invariants par f	Nature de la transformation f
Plan P	f est l'identité du plan
Ensemble vide $\emptyset$	f est la translation du vecteur non nul
Singleton {A}	f est la rotation de centre A

- **Isométrie négative ou antidéplacement**

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + c' \end{cases} avec - a^2 - b^2 = -1 \quad \text{et} \quad det(Matf) = -1$$

NB : tout antidéplacement (isométrie **négative**) est une similitude indirecte de rapport $k = 1$ et les antidéplacements sont des transformations qui conservent l'angle orienté (symétrie orthogonale ; réflexion ; symétrie glissée)

Classification des antidéplacements à partir de l'ensemble des points invariants

Ensemble des points invariants par f	Nature de la transformation f
Droite (D)	f est la symétrie orthogonale par rapport à (D)
Ensemble vide $\emptyset$	f est la symétrie glissée

9) Expression analytique d'une réflexion d'axe

- Par rapport à la droite d'équation $y = x$, on a : $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$
- Par rapport à la droite d'équation $y = 0$, on a : $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$
- Par rapport à la droite d'équation $x = 0$, on a : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

V- Déterminant – Bijection – Projection – Points invariants –Involution

1) Déterminant :

Soit f l'application affine tel qu'on ait :

$$f : \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

Soit mat(f) la matrice A de f tel que mat(f) = A = $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$

Soit det(A) le déterminant de la matrice A tel qu'on ait : det(A) = $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

Scanned by CamScanner

2) Bijection

f est une bijection ou réalise une bijection ssi :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$$

N.B : On utilise la même méthode pour montrer que trois points A, B, C forment un repère du plan c'est-à-dire det $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \neq 0$

3) Projection

f est une projection si et seulement si, il existe trois points :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} ; M''\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \in P \text{ tel que : } f(M) = f(M') = M''$$

C'est-à-dire $\begin{cases} x'' = ax' + by' + c \\ y'' = a'x' + b'y' + c' \end{cases} \Leftrightarrow fof = f$

4) Points invariants

f admet un point invariant si et seulement si, il existe deux points

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in P \text{ tel que } f(M) = M' \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ax + by + c \\ y = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

5) Involution

f est involutive ou réalise une involution si et seulement si : La matrice au carrée de f est égale à la matrice identité c'est-à-dire $\text{Mat}(A^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

VI- Notion sur les matrices

1) Définition :

Une matrice est un ensemble de nombres disposés en lignes et en colonnes sous forme de tableau rectangulaire. (Les lignes sont horizontales et les colonnes sont verticales).
Une matrice comportant m lignes et p colonnes est une matrice de dimension $m \times p$.
Chaque élément d'une matrice est identifiée par la position qu'il occupe dans le tableau chaque élément se situe à l'intersection d'une ligne et d'une colonne ; la position est donnée en indiquant le numéro de la ligne suivi du numéro de la colonne. Ainsi, l'élément a_{ij} d'une matrice occupe l'intersection de la ligne i et de la colonne j.

Scanned by CamScanner

Une matrice $A_{m\times p}$ est un tableau comme suite :

$$A_{m\times p} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1j}\dots a_{1p} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2j}\dots a_{2p} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{i1} & a_{i2}\dots a_{ij}\dots a_{ip} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\dots a_{mj}\dots a_{mp} \end{pmatrix}$$

Notation compact: $A = (a_{i,j})_{(1\le i\le m\,;\,1\le j\le p)}$

2) Matrices particulières

Soient $m, p \in \mathbb{N}^*$ et soit $A = (a_{ij})_{(1\le i\le m\,;\,1\le i\le p)}$ une matrice de type m ; p à coefficients réels.

- Si $p = 1$ on dit que A est une matrice colonne ;
- Si $m = 1$ on dit que a est une matrice ligne ;
- Si tous les a_{ij} sont nuls, on dit que A est la matrice nulle. On la note $O_{m\times p}$;
- Si $m = p$ la matrice A est dite carrée d'ordre m. Les scalaires a_{11}, a_{22},……, a_{mm} constituent alors ce que l'on appelle la diagonale principale de A.
- Si A est une matrice et si tous les coefficients situés hors de la diagonale principale sont nuls. On dit que A est une matrice diagonale ;
- Si A est carrée et si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous i , j on dit que A est matrice symétrique.
- La matrice diagonale dont tous les coefficients situés sur la diagonale principale valent 1 est notée 1_p et est appelée matrice unité d'ordre p.
- Si A est une matrice et si tous les coefficients situés strictement au – dessus (respectivement en dessous) de la diagonale principale sont nuls, on dit que A est triangulaire inférieure (respectivement triangulaire supérieure).

3) Relations entre les matrices

a- Définition:

Deux matrices réelles de mêmes dimensions sont égales si les éléments qui occupent la même position dans l'une et l'autre matrice sont égaux.

Soient deux matrices de même dimension : $A = (a_{ij})_{m\times p}, B = (b_{ij})_{m\times p}$

$A = B \Leftrightarrow \forall i, j,\quad a_{ij} = b_{ij}$

b- Opérations sur les matrices :

Nous définissons quatre opérations sur les matrices : une addition de deux matrices une multiplication d'une matrice par un scalaire, une multiplication de deux matrices et enfin, la transposition d'une matrice.

Scanned by CamScanner

c- Addition de deux matrices :

L'opération addition de deux matrices crée une nouvelle matrice appelée somme. Cette opération est définie sur les matrices de même dimension. Chaque élément de la matrice somme A + B est la somme des éléments de même position des matrices A et B.

$A = (a_{ij})_{m\times p}, B = (b_{ij})_{m\times p}$ $A + B = (S_{ij})_{m\times p}$ où $S_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Exemple : $A \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ *la somme* $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 18 & 1 \end{pmatrix}$

Soit $M_{m\,x\,p}$ l'ensemble des matrices réelles de dimension m×p. L'addition de deux matrices possède les propriétés suivantes : fermeture, associative, commutative, neutre (matrice nulle), inverse A où $-A = (a_{ij})_{m\,x\,p}$

d- Multiplication par un scalaire :

L'opération multiplication par un scalaire est une opération qui crée une nouvelle matrice en utilisant, par exemple, une matrice A et un scalaire k. Chaque élément de la matrice ka est l'élément de même position de la matrice A multipliée par le scalaire k.

Soit un scalaire k et une matrice réelle $A = (a_{ij})_{m\times p}$ $kA = (p_{ij})_{m\times p}$ où $k_{ij} = ka_{ij}$

Exemple : Si le scalaire est 2 et la matrice est

$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ alors la matrice produit est (-2) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$

La multiplication d'une matrice par un scalaire possède les propriétés suivantes : fermeture, associative, commutative, neutre (1) distributivité sur une somme de matrices, distributivité sur une somme de scalaires.

Notez que : Pour l'addition et la multiplication par un scalaire l'ensemble M_{mp} des matrices à m lignes, p colonnes, à coefficients dans le corps K est un K espace vectoriel.

e- Multiplication de deux matrices:

L'opération multiplication de deux matrices est une opération qui crée une nouvelle matrice appelée produit; par exemple, une matrice AB est le produit de A et B. L'élément de la matrice AB occupant la position ij est obtenu en utilisant la ligne i de A et la colonne j de B, de la façon suivante : (1^{cr} élément de la ligne i de A fois 1^{cr} élément de la colonne j de B) + (2è élément de la ligne i de A fois 2è élément de la colonne j de B) +… + (dernier élément de la ligne i de A fois dernier élément de la colonne j de B). La multiplication de deux matrices A et B est possible si et seulement si le nombre de colonne de A est égal au nombre de lignes de B.

Scanned by CamScanner

Soient deux matrices $A = (a_{ij})_{m\times p}$, $B = (b_{ij})_{p\times p}$ $AB = (c_{ij})_{m\times p}$ où

$c_{ij} = \sum a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots\ldots\ldots + a_{ip}b_{pj}$

Exemple : Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} -3 & -15 & -5 \\ 6 & 6 & 17 \end{pmatrix}$$

La multiplication de deux matrices n'est pas une opération commutative ; elle possède les propriétés de fermeture, associative, neutre I, distributivité sur une somme de matrices.

d) Transposition d'une matrice :

La transposition d'une matrice est une opération qui crée une nouvelle matrice de même dimension. L'élément de la matrice transposée située sur la ième ligne et la j^{ème} colonne est l'élément situé sur la j^{ème} ligne et la ième colonne de A. Si une matrice A est symétrique alors elle est égale à sa transposée. On dit que A est antisymétrique si A = - A.

Ainsi si $A = (a_{ij})$, on appelle transposé de A, la matrice notée t_A tel que : $t_A = (a_{jl})$.

Exemple :

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, alors sa transposée est $t_A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

e) Comatrice d'une matrice :

Soit la matrice réelle définie par : $A_{m\,x\,p} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1j}\ldots a_{1p} \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2j}\ldots a_{2p} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{i1} & a_{i2}\ldots a_{ij}\ldots a_{ip} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots a_{mj}\ldots a_{mp} \end{pmatrix}$

On appelle comatrice de A, la matrice obtenue en calculant les différentes valeurs de a_{ij}.
On la note : C_A **tel que :** $C_A = (-1)^{i+j}[\det a_{ij}]$

f) Déterminant et inverse d'une matrice :

À chaque matrice carrée *A* est associé un nombre appelé déterminant de *A* et noté det A.

Une matrice carrée A est dite inversible s'il existe une unique matrice carrée B telle que AB = BA = I. La matrice B est alors l'inverse de A et notée A^{-1}. On démontre qu'une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Ainsi si detA $\neq$ 0, alors $A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot t_{C_A}$ (où t_{C_A} est la transposée de la comatrice de A).

Scanned by CamScanner

VII- Applications Affines, matrice et déterminant

- Soit f l'application affine tel qu'on ait :

$$f: \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

- Soit mat(f) la matrice A de f tel qu'on ait :

$$\text{Mat(f)} = \text{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

- Soit det(A) le déterminant de la matrice A tel qu'on ait :

$$\det(\text{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

1) Bijection :

f est une bijection ou réalise une bijection ssi :

$$\det(\text{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$$

N.B : On utilise la même méthode pour montrer que trois points A, B, C forment un repère du plan c'est-à-dire det($\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$) $\neq 0$

2) Projection :

f est une projection si et seulement si, il existe trois points :

$$\text{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; \text{M}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} ; \text{M}''\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \in \text{P tel que : } f(M) = f(M') = M''$$

$$\text{C'est-à-dire } \begin{cases} x'' = ax' + by' + c \\ y'' = a'x' + b'y' + c' \end{cases} \Leftrightarrow fof = f$$

3) Point invariant :

f Admet un point invariant si et seulement si, il existe deux points

$$\text{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; \text{M}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \text{P tel que f(M) = M' c'est-à-dire } \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ax + by + c \\ y = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

4) Involution :

Scanned by CamScanner

f est involutive ou réalise une involution ssi : La matrice carrée associée à f est égale à la matrice identique c'est-à-dire Mat(A^2) = $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}a & b\\ a' & b'\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a & b\\ a' & b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a & b\\ a' & b'\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

EXERCICES

1 Soit $A(3\,;\,0)$ et $B(1\,;\,-1)$ deux points du repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$

1) Montrer qu'il existe une application affine telle que : $\begin{cases}f(0)=B\\ f(B)=B\\ f(A)=A\end{cases}$

2) Calculer les coordonnées (x',y') de $f(M)=M'$ en fonction des coordonnées (x,y) de M.
3) Calculer fof et déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'application f.

2 Déterminer la traduction complexe de la transformation f dans chacun des cas :
1) f est la transformation qui transforme A d'affixe $-1+i$ en B d'affixe $-2+3i$
2) f est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ qui transforme A d'affixe $-1+i$ en B d'affixe $-2+3i$
3) f est la rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$ qui transforme A d'affixe $-1+i$ en B d'affixe $-2+i$

3 Dans le plan $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ on considère les points :

$$A\binom{2}{0}\ ;\ B\binom{1}{1}\ ;\ C\binom{-2}{-1}\ ;\ A'\binom{3}{10}\ ;\ B'\binom{4}{6}\ ;\ C'\binom{-3}{-1}$$

Soit f l'application affine du plan tel que : $f(A)=A'$; $f(B)=B'$; $f(C)=C'$.
1) Montrer que f est bijective
2) Déterminer l'expression analytique de f.

4 Le plan est muni du repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x,y) associe le point M' de coordonnées (x',y') tel que : $\begin{cases}x'=\frac{1}{3}(4x-2y-6)\\ y'=\frac{1}{3}(2x-y-12)\end{cases}$

1) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe que l'on précisera.
2) Démontrer que $fof=f$

Scanned by CamScanner

3) a) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
b) En déduire la nature des éléments caractéristiques.

5 On considère dans le plan $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\vec{\jmath})$ les points M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) \\ y' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) \end{cases}$$

1) Démontrer que $fof = id$
2) Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite (D) que l'on précisera.
3) Soit M un point du plan et M' son image par f.
a) Démonter que le point I milieu de $[MM']$ appartient à la droite (D).
b) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe orthogonale à celle de (D).
c) En déduire les éléments caractéristiques de f.

6 Le plan euclidien P est rapporté à un repère orthonormé$(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\vec{\jmath})$.

Etant donné un nombre réel a, on appelle T l'application de P dans P qui a tout point M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ fait correspondre le point $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x' = (a-1)x + 2y \\ y' = ax + y \end{cases}$

1) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles Ta est bijective.
2) Déterminer l'ensemble des points invariants par Ta.
3) Déterminer a pour que Ta soit involutive et caractériser géométriquement l'application Ta correspondant à cette valeur de a obtenue.

7 On considère l'application g de E dans E qui à tout point M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point M' $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -y + 2 \end{cases}$

1) Montrer que g est affine, sans point invariant et que son endomorphisme associe φ est involutif.
2) a- Démontrer que gog est une translation.
b- Soit $\vec{u}$ le vecteur de cette translation et t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$
Préciser la nature de l'application S telle que g = toS puis Prouver que toS = Sot.
3) Montrer que l'image (C') de la courbe (C_{-1}) par g a pour équation $y = -x + 2 + lnx$.

8 Soit l'application affine$f$.

f: P→P ; M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ → M' $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$

1) Vérifier que f est bijective.
2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
3) On désigne par Z et Z' les affixes respectives des points M et M'. Exprimer Z' en fonction de Z.
4) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

Scanned by CamScanner

9 Dans le plan P, on considère la translation $t_{\vec{u}}$ définie par $t_{\vec{u}}(A) = B$ où $A\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$.

1) Caractériser cette translation.

2) Déterminer le point C′ image du point $C\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ par $t_{\vec{u}}$

10 Le plan P est rapporté à un repère orthonormé$(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.
Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives $a = 1 + i$ et $b = -4 - i$
Soit T la transformation du plan P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$.

1) Exprimer z' en fonction de z.
2) Montrer que T admet un seul point invariant Ω dont on donnera l'affixe. En déduire que T est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

11 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé$(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.
Soit l'application affine $f : P \to P$ qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases}x' = x - y - 1\\y' = x + y - 1\end{cases}$$

1) Exprimer Z' en fonction de Z.
2) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

12 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé$(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.
Soient l'application affine f et g deux applications de $P \to P$ qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tel que :

$$f : \begin{cases}x' = 2x + 1\\y' = 2y + 1\end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases}x' = x + 2\\y' = y - 1\end{cases}$$

1) Pour chacune des applications f et g :
a- Déterminons l'ensemble des points invariants, préciser celles qui sont bijectives.

b- Préciser la nature et les éléments caractéristiques de chacune d'elles.

2) Définir analytiquement la réflexion d'axe Δ d'équation $y = x$.

13 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé$(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Scanned by CamScanner

Soit l'application affine f : P → P qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases}$$

1) Vérifier que f est bijective.
2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f
3) f est elle une isométrie ? Justifier votre réponse.

14 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine f : P → P qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases}$$

1) Montrer que f admet un seul point invariant J.
2) Montrer que $\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$ puis en déduire la nature et les éléments caractéristiques de f
3) Déterminer le centre et le rayon du cercle (C') image du cercle (C) d'équation : $x^2 + y^2 - 2y = 0$ par f.

15 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine f : P → P qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = 3x + 5y \\ y' = -2x - 3y - 2 \end{cases}$$

1) Montrer que f est une application et admet un seul point invariant dont on déterminera les coordonnées.
2) Quels sont la nature géométrique et les éléments caractéristiques de fof ? En déduire $fofofof$

16 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine T_α : P → P qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$$ où α est un paramètre réel.

1) Montrer que $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, T_α est bijective et admet un unique point invariant que l'on précisera.
2) Montrer qu'il existe une valeur unique de α pour la quelle T_α est une homothétie H dont précisera le centre et le rapport.
3) a- Montrer qu'il existe deux valeurs de α pour les quelles T_α est une isométrie.
b- Vérifier que ces deux isométries sont réciproques l'une de l'autre. On les notera R et R^{-1}

Scanned by CamScanner

17 Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ d'unité 2cm.
Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ et f_α l'application du plan complexe dans lui-même qui, au point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' telle que : $Z' = (1 + i\tan\alpha)Z - i\tan\alpha$.
1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f_α.
2) Soit Ω le point d'affixe 1 et M un point du plan distinct de Ω. Montrer que si α n'est pas nul, alors $MM'\Omega$ est un triangle rectangle en M. Pour quelle valeur de α, ce triangle est-il isocèle ?
3) On pose dans cette partie $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et on note A; B; C et D les points d'affixes respectives : $i\ ;\ 2i\ ;\ -1\ et\ -1+i$.

a) Placer les points A; B; C et D dans le plan.
b) Démontrer que ABDC est un parallélogramme dont on précisera l'aire en cm^2
c) Donner l'expression analytique de $f_{\frac{\pi}{4}}$.
d) En déduire les coordonnées des points A' ; B' ; C' et D', images respectives par $f_{\frac{\pi}{4}}$ des points A ; B ; C et D.
e) Placer ces images dans le plan

18 Dans le plan complexe P, on considère les points A d'affixe $Z_A = 1$; M d'affixe Z et N d'affixe
$Z_N = iZ - (1+i)$. On note T_λ l'application qui à tout point d'affixe Z, associe le point M', barycentre des points pondérés $(M\ ;\ \lambda)$; $(N\ ;\ -\lambda)$ et $(A\ ;\ 1)$ où λ est un nombre réel non nul.
1-Démontrer que pour tout M du plan, le point N est l'image de M par une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques.
2- a- Démontrer que l'affixe Z' du point M'est telle que $Z' = \lambda(1-i)\,Z + \lambda(1+i) + 1$.
b- Démontrer que T_λ est une similitude directe dont on précisera l'affixe du centre Ω ; le rapport et l'angle.
c-Pour quelles valeurs de λ , T_λ est-elle une rotation ?
d-Donner dans chacun de ces cas l'angle et l'affixe de son centre.
e- Exprimer les coordonnées $(x'\ ;\ y')$ du point M' en fonction de celles $(x\ ;\ y)$ de M pour chacun des valeurs de λ obtenus.
3- Le nombre réel λ étant strictement positif, on lui associe le point $P(-ln\,\lambda\ ;\ ln\,\lambda)$.
Soit P' le point du plan tel que $T_\lambda(P) = P'$
a- Déterminer les coordonnées de P' en fonction de λ.
b- Démontrer que lorsque λ décrit $\mathbb{R}_+^*$; l'ensemble des points P' est la courbe (Γ) d'équation $y = 2(x-1)ln(x-1) + (x-1)$.
4- On pose $h(x) = y$ de sorte que la courbe de la fonction numérique h est (Γ)
a-Dresser le tableau de variation de h.
b- Préciser une équation de chacune des éventuelles asymptotes à (Γ)
c- Représenter (Γ) dans un repère orthonormé du plan.

19 On donne deux points distincts A et B du plan affine et k un réel non nul. Soit M_1; l'image du point M par l'homothétie de centre A et de rapport k.
Soit M' le barycentre des points B et M_1 affectés respectivement des coefficients α et 1, où α est un nombre réel distinct de -1.
Soit f l'application du plan P qui à tout point M du plan associe le point M'.

Scanned by CamScanner

1) Montrer que pour tout point M du plan, on a : $(\alpha+1)\overrightarrow{MM'} = (1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB}$.
2) Montrer que si $k = \alpha + 1$ alors f est une translation dont on déterminera le vecteur translateur.
3) Montrer que si $k \neq \alpha + 1$, il existe un unique point invariant G par f puis en déduire alors que f est une homothétie de centre G dont on déterminera le rapport.

20 On désigne par $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan P. Soit a un nombre réel et f_a l'application affine de P dans luis - même qui au point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ tel que :
$\begin{cases}x' = ax\\ y' = (a+3)x - ay + a + 9\end{cases}$

1) a- Démontrer que pour toute valeur non nulle de a, f_a est une bijection.

b- Déterminer l'application f_a^{-1}, réciproque de f_a pour $a \neq 0$.

c- Déterminer l'ensemble des points invariants par f_a. (On discutera suivant les valeurs du un nombre réel a).

2) a- Démontrer que seule f_1 est une involution dont on caractérisera.

b- Démontrer que seule f_{-1} est la composée d'une symétrie s et d'une translation t dont le vecteur est un directeur de l'ensemble des points invariants par s, c'est-à-dire que $f_{-1} = tos$.

21 Dans un espace affine euclidienne E rapporté à un repère orthonormé $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$, on donne les points $A\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$

1) Montrer qu'il existe un et un seul retournement (demi-tour) noté f tel que $f(O) = A$ et $f(B) = B$. Caractériser géométriquement ce retournement et donner sa représentation analytique.

2) Soit g l'application de E vers E qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ telle que :
$\begin{cases}x' = x\\ y' = y\\ z' = -z + 2\end{cases}$

Déterminer la nature de g et ces éléments caractéristiques. On précisera $g(A)$ et $g(B)$.

3) Soit $h = fog$. Montrer que h est déplacement dont on déterminera la nature et les éléments caractéristiques.

22 Le plan affine E est rapporté à un repère orthonormé $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.
On considère l'application f de E dans E qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ telle que : $\begin{cases}x' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2}\\ y' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

Scanned by CamScanner

1) a- Montrer que pour tout point M, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur constant.

b- Etudier l'ensemble des points invariants par f.

c- Reconnaître la nature de l'application f.

2) Soit g l'application de E dans E qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ associe le point $M''\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$ telle que

$$:\begin{cases}x'' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\\ y'' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\end{cases}$$

a- Montrer que g peut s'écrire hof où h est une application de E dans E que l'on précisera.

b- Sans calculer, vérifier que $hof = foh$.

Solutions

1 Soit $A(3\,;\,0)$ et $B(1\,;\,-1)$ deux points du repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$

Soient A et B deux points tel que A $\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$; B $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

1) Montrons qu'il existe une application affine telle que :

$$\begin{cases}f(0) = B\\ f(B) = B\\ f(A) = A\end{cases}$$

On a : $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$$\text{dét}(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}) = \begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix} = -3 \Rightarrow \text{dét}(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}) \neq 0$$

Alors $(0\,;\overrightarrow{AB})$ est un repère du plan par conséquent il existe une affine car si $\text{dét}(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}) \neq 0$ alors O; A ; B ne sont pas alignés.

2) Calculons les coordonnées $(x'\,;\,y')$ de $f(M) = M$ en fonction des coordonnées $(x\,;y)$ de M.

L'expression analytique de l'application f dans le repère $(o\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ est :

$$\begin{cases}x' = ax + by + c\\ y' = a'x + b'y + c'\end{cases}$$

Scanned by CamScanner

$$f(0) = B \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ c' = -1 \end{cases}$$

$$f(B) = B \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 1 = 1 \\ a' - b' - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ a' - b' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a' = b' \end{cases}$$

$$f(A) = A \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 1 = 3 \\ 3a' + (-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 1 = 3 \\ 3a' - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ a' = \frac{1}{3} \end{cases}$$

D'où $\begin{cases} x' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + 1 \\ y' = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - 1 \end{cases}$

Qui est l'expression analytique de f.

3) Calculons fof puis en déduisons la nature et les éléments caractéristiques de f.

Soient $M(x,y)$; $M'(x',y')$; $M''(x'',y'')$ trois points du plan tels que :
$f(M) = f(M') = M''$.

$$\begin{cases} x'' = \frac{2}{3}x' + \frac{2}{3}y' + 1 \\ y'' = \frac{1}{3}x' + \frac{1}{3}y' - 1 \end{cases} \quad or \quad \begin{cases} x' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + 1 \\ y' = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - 1 \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} x'' = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + 1)\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - 1\right) + 1 \\ y'' = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + 1\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - 1\right) - 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + 1 \\ y'' = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' \end{cases} \Leftrightarrow fof = f$$

Nature et éléments caractéristiques de f.

- $fof = f \Leftrightarrow f$ est une projection
- $f(A) = A$ et $f(B) = B$ alors la droite (AB) est invariante par f ; La projection se fait sur (AB).
- $f(o) = B$ alors la projection de fait parallèlement à la droite (OB).

Scanned by CamScanner

2 Déterminons la traduction complexe de la transformation f dans chacun des cas :

1) f est la translation qui transforme A d'affixe $-1+i$ en B d'affixe $-2+3i$

La traduction complexe d'une translation est : $f(Z) = Z + q$.

$f(A) = B \Leftrightarrow f(-1+i) = -2+3i \Leftrightarrow -1+i+q = -2+3i \Rightarrow q = -1+2i$

D'où $f(Z) = Z - 1 + 2i$

2) f est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ qui transforme A d'affixe $-1+i$ en B d'affixe $-2+3i$

La traduction complexe d'une homothétie est $f(Z) = kZ + q$.

$f(A) = B \Leftrightarrow f(-1+i) = -2+3i \Leftrightarrow \frac{-1}{2}(-1+i) + q = -2+3i \Rightarrow q = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$

D'où $f(Z) = \frac{1}{2}Z - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$

3) f est la rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$ qui transforme A d'affixe $-1+i$ en B d'affixe $-2+i$

La traduction complexe d'une rotation est $f(Z) = e^{i\theta}Z + q$.

$f(A) = B \Leftrightarrow f(-1+i) = -2+i \Leftrightarrow e^{i\frac{3\Pi}{4}}(-1+i) + q = -2+i$

$\Rightarrow q = -2 + i(1+\sqrt{2})$

D'où $f(Z) = Ze^{i\frac{3\pi}{4}} - 2 + i(1+\sqrt{2})$

3 Dans le plan $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ on considère les points :

$A\binom{2}{0}$; $B\binom{1}{1}$; $C\binom{-2}{-1}$; $A'\binom{3}{10}$; $B'\binom{4}{6}$; $C'\binom{-3}{-1}$

Soit f l'application affine du plan tel que : $f(A) = A'$; $f(B) = B'$; $f(C) = C'$.

1) Montrons que f est bijective

f est bijective si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) \neq 0$ et $\det(\overrightarrow{A'B'}\,;\overrightarrow{A'C'}) \neq 0$

$$\begin{cases} dét\,(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = 5 \\ dét\,(\overrightarrow{A'B'}\,;\overrightarrow{A'C'}) = -13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dét\,(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) \neq 0 \\ dét\,(\overrightarrow{A'B'}\,;\overrightarrow{A'C'}) \neq 0 \end{cases}$$

Alors f est une application bijective.

Scanned by CamScanner

2) Déterminons l'expression analytique de f.

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

Soit $\begin{cases} \varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'} \\ \varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'} \end{cases}$ et $\begin{cases} \varphi(\vec{i}) = a\vec{i} + a'\vec{j} \\ \varphi(\vec{j}) = b\vec{i} + b'\vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(-\vec{i} + \vec{j}) = \vec{i} - 4\vec{j} \\ \varphi(-4\vec{i} - \vec{j}) = -6\vec{i} - 11\vec{j} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(-\vec{i} + \vec{j}) = \vec{i} - 4\vec{j} \\ \varphi(-4\vec{i} - \vec{j}) = -6\vec{i} - 11\vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\varphi(\vec{i}) + \varphi(\vec{j}) = \vec{i} - 4\vec{j} \\ -4\varphi(\vec{i}) - \varphi(\vec{j}) = -6\vec{i} - 11\vec{j}) \end{cases}$$

$\Rightarrow -5\ \varphi(\vec{i}) = 5\vec{i} - 15\vec{j} \Rightarrow \varphi(\vec{i}) = \vec{i} + 3\vec{j}$ et $\varphi(\vec{j}) = 2\vec{i} - \vec{j}$

Donc $\begin{cases} \varphi(\vec{i}) = \vec{i} + 3\vec{j} \\ \varphi(\vec{j}) = 2\vec{i} - \vec{j} \end{cases}$ *ainsi* $\begin{cases} a = 1\,;\, b = 3 \\ a' = 2\,;\, b' = -1 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x' = x + 2y + c \\ y' = 3x - y + c' \end{cases}$ or $f(A) = A'$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'_A = x_A + 2y_A + C \\ y'_A = 3x_A - y_A + C' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 2 + 2(0) + C \\ 10 = 3(2) - 0 + C' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 1 \\ C' = 4 \end{cases}$$

Ainsi l'expression analytique de f est $\begin{cases} x' = x + 2y + 1 \\ y' = 3x - y + 4 \end{cases}$

4 Le plan est muni du repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées $(x\,;y)$ associe le point M' de coordonnées (x', y') tel que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases}$

1) Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe que l'on précisera.

$$\overrightarrow{MM'} \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x'-x = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) - x \\ y'-y = \frac{1}{3}(2x - y - 12) - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x = \dfrac{x - 2y - 6}{3} \\ y'-y = \dfrac{2(x - 2y - 6)}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x = \frac{1}{3}(x - 2y - 6) \\ y'-y = \frac{2}{3}(x - 2y - 6) \end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{u}\left(\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$ en posant $k = x - 2y - 6$ on a : $\overrightarrow{MM'} = k\vec{u}$

Ainsi le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a même direction que le vecteur $\vec{u}$

Scanned by CamScanner

2) Démontrons que $fof = f$

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$; $M''\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ tel que :

$f(M) = M'$ et $f(M') = M''$

$$f(M') = M'' \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{1}{3}(4x' - 2y' - 6) \\ y'' = \frac{1}{3}(2x' - y' - 12) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' \end{cases}$$

Donc on a : $M' = M''$. Ainsi $fof = f$.

3) a- Déterminons l'ensemble des points invariants par f.

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases}$$

f Admet un point invariant si et seulement si $f(M) = M'$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y = \frac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 6 = 0 \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

D'où l'ensemble des points invariants par f est la droite (D) d'équation $x - 2y - 6 = 0$

b) En déduisons la nature et les éléments caractéristiques *de* f.

* $fof = f$ alors f est une projection

* $\overrightarrow{MM'} = k\vec{u}$ alors l'ensemble des points invariants par f est la projection sur (D) et de direction $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

5 On considère dans le plan $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$ les points M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) \\ y' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) \end{cases}$$

1) Démontrons que $fof = id$

Scanned by CamScanner

Soient $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$; $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ et $M''\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$ trois points du plan telque :

$$\Rightarrow \begin{cases} x''=\frac{1}{13}(5x'-12y'+24) \\ y''=\frac{1}{13}(-12x'-5y'+36) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x''=\frac{1}{13}\left[5\left(\frac{1}{13}(5x-12y+24)\right)-12\left(\frac{1}{13}(-12x-5y+36)\right)+24\right] \\ y''=\frac{1}{13}\left[-12\left(\frac{1}{13}(5x-12y+24)\right)-5\left(\frac{1}{13}(12x-5y+46)\right)+36\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x''=\frac{1}{13}\left(\frac{25}{13}x-\frac{60}{13}y+\frac{120}{13}+\frac{144}{13}x+\frac{60}{13}y-\frac{432}{13}+24\right) \\ y''=\frac{1}{13}\left(-\frac{60x}{13}+\frac{144}{13}y-\frac{288}{13}+\frac{60}{13}x+\frac{25}{13}y-\frac{180}{13}+36\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x''=\frac{1}{13}(13x) \\ y''=\frac{1}{13}(13y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''=x \\ y''=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''=x+0y \\ y''=0x+y \end{cases}$$

Ainsi sa matrice associée est $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = Mat(id)$

D'où $fof = id$

2) Démontrons que l'ensemble des points invariants par f est une droite (D) que l'on précisera.

f admet un point invariant si et seulement si il existe deux points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et M' $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \in P$ tel que $f(M) = M'$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} x=x' \\ y=y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{13}(5x-12y+24) \\ y=\frac{1}{13}(-12x-5y+36) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{13}x-\frac{13}{12}y-\frac{24}{13} \\ y=-\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}y+\frac{36}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{4}{3}x+2 \\ y=-\frac{4}{3}x+2 \end{cases}$$

D'où l'ensemble des points invariants est la droite (D) d'équation : $y = -\frac{4}{3}x+2$

3) Soit M un point du plan et M' son image par f.

a-Démontons que le point I milieu de $[MM']$ appartient à la droite (D).

Scanned by CamScanner

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_M + x_{M'}}{2} \\ y_I = \dfrac{y_M + y_{M'}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x + x'}{2} \\ y_I = \dfrac{y + y'}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x + \frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + \frac{24}{13}}{2} \\ y_I = \dfrac{y - \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y + \frac{36}{13}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{18x - 12y + 24}{26} \\ y_I = \dfrac{-12x + 8y + 36}{26} \end{cases}$$

Ainsi pour que I appartienne à la droite (D) : $y = -\frac{4}{3}x + 2$ il faut que les coordonnées de I vérifient l'équation de la droite (D).

Alors en remplaçant y par y_I et x par xI dans (D), on a : $0 = 0$

Conclusion I appartient à la droite (D).

b) Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe orthogonale à celle de (D).

$$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) - x \\ y'-y = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x = \frac{4}{13}(-2x - 3y + 6) \\ y'-y = \frac{6}{13}(-2x - 3y + 6) \end{cases} \Rightarrow \vec{u}\left(\frac{4}{13}; \frac{6}{13}\right)$$

En posant $k = -2x - 3y + 6$, on a : $\overrightarrow{MM'} = k\vec{u}$

Ainsi le vecteur $\overrightarrow{MM'} = k\vec{u}$ à une direction fixe orthogonale à celle de (D).

c) En déduisons la nature et les éléments caractéristiques de f.

- $fof = id$ alors f est une involution
- $\overrightarrow{MM'} = k\vec{u}$ alors l'ensemble des points invariants par f est la perpendiculaire à (D) et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\frac{4}{13}; \frac{6}{13}\right)$

6 Le plan euclidien P est rapporté à un repère orthonormé$(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$.

Etant donné un nombre réel a, on appelle T l'application de P dans P qui a tout point M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ fait correspondre le point $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x' = (a-1)x + 2y \\ y' = ax + y \end{cases}$

1) Déterminons les valeurs de a pour lesquelles T_a est bijective :

T_a est bijective si, et seulement si l'équation $T_a(M) = M'$ où M' est un point donné du plan euclidien P, a une solution et une seule, c'est-à-dire si et seulement si le système linéaire

$\begin{cases} x' = (a-1)x + 2y \\ y' = ax + y \end{cases}$ Admet une solution et une seule. Ainsi il faut et il suffit que le déterminant du système soit nul.

Scanned by CamScanner

Soit φ l'endomorphisme associé à T_a.

La matrice de T_a dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est $M_a = \begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ et le déterminant associé à cette

matrice est $detM_a = \begin{vmatrix} a-1 & 2 \\ a & 1 \end{vmatrix} = (a-1) - 2a = -a - 1 = -(a+1) \neq 0$

Donc T_a est bijective si et seulement si $-(a+1) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1$

2) Déterminons l'ensemble des points invariants par T_a.

T_a admet un point invariant si et seulement si $Ta(M) = M$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = (a-1)x + 2y & (1) \\ y = ax + y & (2) \end{cases}$$

Dans (2), on a : $y = ax + y \Leftrightarrow ax = 0 \Rightarrow a = 0$

Dans (1), on a : $y = x$
Ainsi l'ensemble des points invariants est la première bissectrice d'équation $y = x$
Si $a \neq 0$, alors $x = 0$ et dans (1) $y = 0$

Ainsi l'ensemble des points invariants est l'origine O $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ du repère.

3) Déterminons a pour que Ta soit involutive. T_a est involutive si et seulement si $T_a 0 T_a = Id$ c'est-à-dire $T_a 0 T_a$ soit égale à l'application identique de P dans P

Soit A la matrice de l'application linéaire T_a. On a alors : $T_a 0 T_a = id$ si et seulement si

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Or\ A = \begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} a^2+1 & 2a \\ a^2 & 2a+1 \end{pmatrix} or A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a^2+1 & 2a \\ a^2 & 2a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+1=1 \\ a^2=0 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} 2a=0 \\ 2a+1=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

D'où $a = 0$

L'application T_0 correspondante a pour points invariants ceux de la droite $y = x$ d'après 2°).

Soit f l'application linéaire associée à T_0, cherchons les vecteur $\vec{u}$ du plan vectoriel associé à P tels que $f(\vec{u}) = -\vec{u}$

Scanned by CamScanner

$f(\vec{u}) = -\vec{u}$ si et seulement si $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ où $(x\,;\,y)$ sont les composantes de $\vec{u}$ dans la base

$(\vec{i},\ \vec{j})$ d'où $\begin{cases} -x+2y=-x \\ y=-y \end{cases}$

La solution est donnée par y = 0 et x quelconque. Les vecteurs $\vec{u}$ sont les vecteurs de composante $(\alpha,\ 0)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
Ainsi, ils constituent la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{i}$.

L'application T_0 est donc la symétrie affine par rapport à la première bissectrice de direction la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{i}$

7 On considère l'application g de E dans E qui à tout point M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point M' $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x' = x+y \\ y' = -y+2 \end{cases}$

1) Montrons que g est affine, sans point invariant et que son endomorphisme associe φ est involutif.

g Admet un point invariant si et seulement si $g(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = x+y \\ y = -y+2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=2 \end{cases}$ (Impossible) donc g n'admet pas de points invariants.

Ainsi l'endomorphisme φ a pour matrice $M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et

$M^2(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$ Mat (id). D'où φ est involutif.

2) a- Démontrons que gog est une translation.

$(gog)(M) = M'' \Leftrightarrow \begin{cases} x''=x'+y' \\ y''=-y'+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x''=(x+y)+(-y+2) \\ y''=-(-y+2)+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x''=x+2 \\ y''=y \end{cases}$

D'où gog est la translation ponctuelle de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

b- Soit $\vec{u}$ le vecteur de cette translation et t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$
Précisons la nature de l'application S telle que g = toS puis Prouvons que toS = Sot.

* $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{\vec{u}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

* g n'admet pas de point invariant.

Scanned by CamScanner

* φ est involutif

* gog est la translation du vecteur $\vec{u}$

Ces conditions étant réunis nous dirons que g = toS = Sot avec t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$

et S est la symétrie affine par rapport à une droite D engendrée par $\frac{1}{2}\vec{u}$

g = toS (composons à gauche par t^{-1}), on a : S = $t^{-1}og$ => S(M) = M_1 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = x'-1 \\ y_1 = y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x+y-1 \\ y_1 = -y+2 \end{cases}$$

Avec t^{-1} la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{u}$

$$S(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+y-1 \\ y = -y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (D): y = 1$$

De même $\varphi(\vec{u}) = -\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = x+y \\ -y = y \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): 2x+y = 0$

S est donc la symétrie affine par rapport à (D) parallèlement à (Δ).

3) Montrons que l'image (C') de la courbe (C_{-1}) par g à pour équation $y = -x + 2 + lnx$.

Avec (C_{-1}) la courbe de la fonction $f_m(x) = mx + e^x$ où $m \in \mathbb{R}$

- La droite (D) à pour équation $x = 0$
- Son image par g est M $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in (D) \Leftrightarrow g(M) = M'$ avec M' $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Tel que $\begin{cases} x' = y \\ y' = -y+2 \end{cases} \Leftrightarrow y' = -x'+2$ d'où l'image de la droite (D) est la droite d'équation $y = -x + 2$. L'image de la droite (Δ) d'équation $y = -x$ est : $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = x+2 \end{cases} \Leftrightarrow x' = 0$ c'est-à-dire l'image de (Δ) est la droite (D) d'équation $x = 0$.

8 Soit l'application affine f.

f: P$\rightarrow$P ; M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow$ M' $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$

1) Vérifions que f est bijective.

Soit φ l'endomorphisme associé à f.

Scanned by CamScanner

La matrice de f dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ et le déterminant associé à cette

Matrice est $detM = \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix}$

Alors f Est bijective si et seulement si $detM \neq 0$

$detM = \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = (1) + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4 \neq 0$. Alors f est bijective.

2) Déterminons l'ensemble des points invariants par f.

f admet un point invariant si et seulement si $f(M) = M$

$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ d'où A $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est le point invariant.

3) Soit Z et Z' d'affixes respectives M et M'.

Exprimons Z' en fonction de Z.

On sait que : $Z' = x' + iy'$. Or $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$

En remplaçant x' et y' par leur valeur dans $Z' = x' + iy'$; on a :

$$\Rightarrow Z' = (x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) + i(x\sqrt{3} + y - \sqrt{3})$$

$$= x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + ix\sqrt{3} + iy - i\sqrt{3}$$

$$= x + i^2 y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + ix\sqrt{3} + iy - i\sqrt{3}$$

$$= (x + ix\sqrt{3}) + (iy + i^2 y\sqrt{3}) + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$$

$$= x(1 + i\sqrt{3}) + iy(1 + i\sqrt{3}) + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$$

$$= (1 + i\sqrt{3})(x + iy) + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}\ .\ \text{Or } Z = x + iy$$

$$\Rightarrow Z' = (1 + i\sqrt{3})Z + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}\ .$$

4) En déduisons la nature et les éléments caractéristiques.

NB :

Si $Z' = aZ + b$ avec $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| \neq 1$. *Alors on a*: une similitude directe de rapport $k = |a|$, d'angle $\alpha = \arg(a)$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1 - a}$.

Scanned by CamScanner

On a : $Z' = (1 + i\sqrt{3})Z + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$. Avec $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$

Ici $a = 1 + i\sqrt{3} \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = |1 + i\sqrt{3}| = 2 \neq 1$.

Alors f est une similitude directe dont les éléments caractéristiques sont :

- Rapport : $k = |a| = |1 + i\sqrt{3}| = 2$.

- Angle θ est tel que : $\theta = \arg(a) = \arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

- Centre A(1 ; 2) (point invariant)

9 Dans le plan P, on considère la translation $t_{\vec{u}}$ définie par $t_{\vec{u}}(A) = B$ où $A\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$.

1) Caractérisons cette translation.

$t_{\vec{u}}(A) = B$ si $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+3\\7-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$. D'où $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ est le vecteur de translation.

2) Déterminons le point C′ image du point $C\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ par $t_{\vec{u}}$

On a : $t_{\vec{u}}(C) = C' \Leftrightarrow \overrightarrow{CC'} = \vec{u}$

$\overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix}x_{C'} - x_C\\y_{C'} - y_C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_{C'}\\y_{C'} + 2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CC'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_{C'} = 4\\y_{C'} + 2 = 6\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x_{C'} = 4\\y_{C'} = 4\end{cases}$ D'où $C'\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$ tel que $t_{\vec{u}}(C) = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$

10 Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives $a = 1 + i$ et $b = -4 - i$
Soit T la transformation du plan P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$.

1) Exprimons z' en fonction de z.

On a : $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$

$\Leftrightarrow Z_{M'} - Z_0 = 2(Z_M - Z_A) + Z_M - Z_B$

$\Leftrightarrow Z_{M'} - Z_0 = 2Z_M - 2Z_A + Z_M - Z_B$

Scanned by CamScanner

$\Leftrightarrow Z' - 0 = 2Z - 2(1 + i) + Z - (-4 - i)$

$\Leftrightarrow Z' = 3Z - 2(1 + i) - (-4 - i)$

$\Leftrightarrow Z' = 3Z - 2 - 2i + 4 + i$

$\Leftrightarrow Z' = 3Z + 2 - i$

2) Montrons que T admet un seul point invariant Ω dont on donnera l'affixe.

T admet un seul point invariant si et seulement si $Z' = Z$.

$Z' = Z \Leftrightarrow Z = 3Z + 2 - i \Leftrightarrow -2Z = 2 - i \Leftrightarrow Z = -1 + \frac{1}{2}i.$

D'où $\Omega\left(-1 ; \frac{1}{2}\right)$ est le point invariant.

En déduisons que T est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

NB :

Si $Z' = aZ + b$ avec $a \in \mathbb{R}^* - \{-1 ; 1\}$, alors on a : une homothétie de rapport $k = |a|$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1 - a}$.

On a : $Z' = 3Z + 2 - i$. Avec $a = 3$ et $b = 2 - i$

Ici $a = 3 \in \mathbb{R}^* - \{-1 ; 1\}$, alors T est une homothétie dont les éléments caractéristiques sont :

- Rapport : $k = |a| = |3| = 3$

- Centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1 - a} = \frac{2-i}{1 - 3} = \frac{2-i}{-2} = \frac{2-i}{-2} = -1 + \frac{1}{2}i$

=> $\Omega\left(-1 ; \frac{1}{2}\right)$ est le centre de l'homothétie.

111 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine $f : P \to P$ qui à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x - y - 1 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$$

1) Exprimons Z' en fonction de Z.

On sait que $Z' = x' + iy'$. Or $\begin{cases} x' = x - y - 1 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$

Scanned by CamScanner

En remplaçant x' et y' par leur valeur dans $Z' = x' + iy'$; on a :

$Z' = (x - y - 1) + i(x + y - 1)$

$= x - y - 1 + ix + iy - i$

$= x + ix - y + iy - 1 - i$

$= x + ix + i^2y + iy - 1 - i$

$= x(1 + i) + iy(1 + i) - 1 - i$

$= (1 + i)(x + iy) - 1 - i$. Or $Z = x + iy$

$\Rightarrow Z' = (1 + i)Z - 1 - i$

2) En déduisons la nature et les éléments caractéristiques de f.

NB :

Si $Z' = aZ + b$ avec $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| \neq 1$. *Alors on a*: une similitude directe de rapport $k = |a|$, d'angle $\alpha = \arg(a)$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1 - a}$.

On a : $Z' = (1 + i)Z - 1 - i$. Avec $a = 1 + i$ et $b = -1 - i$

Ici $a = 1 + i \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = |1 + i| = \sqrt{2} \neq 1$.
Alors f est une similitude directe dont les éléments caractéristiques sont :

- Rapport : $k = |a| = |1 + i| = \sqrt{2}$

- Centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1 - a} = \frac{-1 - i}{1 - (1 + i)} = \frac{-1 - i}{1 - 1 - i} = \frac{-1 - i}{-i} = -1 + \frac{1}{2}i = 1 - i$

$\Rightarrow \Omega(1 ; -1)$ est le centre de la similitude directe.

12 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé$(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.
Soient l'application affine f et g deux applications de $P \to P$ qui à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que :

$f : \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 1 \end{cases}$ et $\quad g : \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$

1) Pour chacune des applications f et g :

a- Déterminons l'ensemble des points invariants, précisons celles qui sont bijectives.

Scanned by CamScanner

Pour l'application f.

- f Admet un point invariant si et seulement si $f(M) = M$ c'est-à-dire $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$ $\Rightarrow A(-1\,;\,-1)$ est le point invariant.

- f est bijective si et seulement si $detM \neq 0$

Soit φ l'endomorphisme associé à f .

La matrice de f dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ est $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et le déterminant associé à cette

Matrice est $detM = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

$detM = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Alors f est bijective.

Pour l'application g.

- g Admet un point invariant si et seulement si $g(M) = M$ c'est-à-dire $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = x + 2 \\ y = y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -1 \\ 0 = -1 \end{cases}$ $\Rightarrow g$ n'admet pas de point invariant.

- g est bijective si et seulement si $detM' \neq 0$

Soit φ' l'endomorphisme associé à g .

La matrice de g dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ est $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et le déterminant associé à cette

Matrice est $detM' = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$detM' = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Alors g est bijective.

b- Précisons la nature et les éléments caractéristiques de chacune d'elles.

Pour l'application f.

1ère Méthode

On a $f : \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 1 \end{cases}$

Exprimons Z' en fonction de Z.

Scanned by CamScanner

On sait que $Z' = x' + iy'$. Or $\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 1 \end{cases}$

En remplaçant x' et y' par leur valeur dans $Z' = x' + iy'$; on a :

$Z' = (2x + 1) + i(2y + 1)$

$= 2x + 1 + 2iy + i$

$= 2x + 2iy + 1 + i$

$= 2(x + iy) + 1 + i$. Or $Z = x + iy$

$\Rightarrow Z' = 2Z + 1 + i$

NB :

Si $Z' = aZ + b$ avec $a \in \mathbb{R}^* - \{-1\,;1\}$, alors on a : une homothétie de rapport $k = |a|$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.

On a : $Z' = 2Z + 1 + i$. Avec $a = 2$ et $b = 1 + i$

Ici $a = 2 \in \mathbb{R}^* - \{-1\,;1\}$, alors f est une homothétie dont les éléments caractéristiques sont :

- Rapport : $k = |a| = |2| = 2$

- Centre $A(-1\,;-1)$: point invariant.

2ième Méthode

On a $f : \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 1 \end{cases}$ sous la forme $\begin{cases} x' = kx + x_0(1-k) \\ y' = ky + y_0(1-k) \end{cases}$

qui est l'expression analytique d'une homothétie de rapport k et de centre $A(x_0\,;\,y_0)$.

D'où f est une homothétie de rapport $k = 2$ et de Centre $A(-1\,;-1)$: point invariant.

Pour l'application g.

1ère Méthode

On a $g : \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$

Exprimons Z' en fonction de Z.

On sait que $Z' = x' + iy'$. Or $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$

Scanned by CamScanner

En remplaçant x' *et* y' par leur valeur dans $Z' = x' + iy'$; on a :

$Z' = (x+2) + i(y-1)$

$= x + 2 + iy - i$

$= x + iy + 2 - i$

$= (x + iy) + 2 - i$. Or $Z = x + iy$

$\Rightarrow Z' = Z + 2 - i$

NB :

si $a = 1$, alors *on* a une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'affixe b.

On a : $Z' = Z + 2 - i$. Avec $a = 1$ et $b = 2 - i$

Ici $a = 1$, alors g est une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'affixe $b = 2 - i \Rightarrow \vec{u}\binom{2}{-1}$

2ième Méthode

On a : $g : \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$ sous la forme $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

qui est l'expression analytique d'une translation de vecteur $\vec{u}\binom{a}{b}$.

D'où g est une translation de vecteur $\vec{u}\binom{2}{-1}$.

2) Définissons analytiquement la réflexion d'axe Δ d'équation $y = x$.

Soit (S) la réflexion d'axe (Δ) d'équation $y = x$ tel que : $\forall M\binom{x}{y}$ et $M'\binom{x'}{y'}$; on a :

$S(M) = M' \Rightarrow \overrightarrow{MM'}$ est un vecteur normal de (Δ).

Soit I le milieu de $[MM']$ $\Rightarrow \overrightarrow{MM'}$ est colinéaire au vecteur normal $\vec{n}(-1\ ;\ 1)$.

Alors il existe un réel k tel que $\overrightarrow{MM'} = k\vec{n}$

D'où $\overrightarrow{MM'} = k\vec{n} \Leftrightarrow \binom{x'-x}{y'-y} = k\binom{-1}{1} \Leftrightarrow \binom{x'-x}{y'-y} = \binom{-k}{k} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = -k \\ y' - y = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - k \\ y' = y + k \end{cases}$

Si I est le milieu de $[MM']$ alors : $I\left(\frac{x'+x}{2}\ ;\ \frac{y'+y}{2}\right)$.

I appartient à (Δ) *si et seulement si* $\frac{x'+x}{2} = \frac{y'+y}{2} \Leftrightarrow x' + x = y' + y$. Or $\begin{cases} x' = x - k \\ y' = y + k \end{cases}$

Scanned by CamScanner

En remplaçant x' et y' par leur valeur dans $x'+x=y'+y$; on a :

$(x-k)+x=(y+k)+y \Leftrightarrow x-k+x=y+k+y \Leftrightarrow 2x-2y-2k=0$

$\Leftrightarrow x-y-k=0 \Leftrightarrow k=x-y$

D'où l'expression analytiquement de la réflexion d'axe Δ d'équation $y=x$ est :

$$\begin{cases} x'=x-(x-y) \\ y'=y+(x-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x-x+y \\ y'=y+x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases}$$

13 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé$(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine $f:\mathrm{P}\to\mathrm{P}$ qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to M'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x'=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+1 \\ y'=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-\sqrt{3} \end{cases}$$

1) Vérifions que f est bijective.

f Est bijective si et seulement si $detM\neq 0$

Soit φ l'endomorphisme associé à f.

La matrice de f dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est $M=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et le déterminant associé à cette

Matrice est : $detM=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}$

$detM=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}\ \frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1\neq 0$. Alors f est bijective.

2) Déterminons l'ensemble des points invariants par f

f Admet un point invariant si et seulement si $f(M)=M$ c'est-à-dire $\begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+1 \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y\sqrt{3}=2 \\ -x\sqrt{3}+y=-2\sqrt{3} \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $x=2$ et $y=0$

D'où $A\binom{2}{0}$ est le point invariant.

Scanned by CamScanner

3) Vérifions si f est une isométrie

f est une isométrie si et seulement si son expression analytique est sous la forme :

$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases}$ C'est-à-dire si $detM = a^2 + b^2 = 1$

On a $f : \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases}$ $\Rightarrow detM = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

D'où f est une isométrie et cette isométrie est positive car $a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

14 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé$(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine $f : P \to P$ qui à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que :

$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases}$

1) Montrons que f admet un seul point invariant J.

f Admet un point invariant si et seulement si $f(M) = M$ c'est-à-dire $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + 2 \\ 2y = y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$

D'où $J\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ est le point invariant.

2) Montrons que $\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$

$\overrightarrow{JM'} = \begin{pmatrix} x' - 2 \\ y' + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + 1 - 2 \\ \frac{1}{2}y - 2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - 1 \\ \frac{1}{2}y + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x - 2) \\ \frac{1}{2}(y + 4) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x - 2 \\ y + 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$

D'où : $\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$

En déduisons la nature et les éléments caractéristiques de f

$\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$ Sous la forme $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$ qui est l'expression d'une homothétie de rapport k et de centre Ω.

D'où f est une homothétie de rapport $k = \frac{1}{2}$ et de centre $J\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Scanned by CamScanner

3) Déterminons le centre et le rayon du cercle (C') image du cercle (C) d'équation : $x^2 + y^2 - 2y = 0$ par f.

On a : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x' = x + 2 \\ 2y' = y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x' - 2 \\ y = 2y' + 4 \end{cases}$

En remplaçant x et y par leur valeur dans $x^2 + y^2 - 2y = 0$, on a :

$(2x' - 2)^2 + (2y' + 4)^2 - 2(2y' + 4) = 0$

$\Leftrightarrow 4(x' - 1)^2 + 4(y' + 2)^2 - 4(y' + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + (y' + 2)^2 - (y' + 2) = 0$
$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + y'^2 + 4y' + 4 - y' - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + y'^2 + 3y' + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + (y'^2 + 3y') + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + \left[y'^2 - 2\left(-\frac{3}{2}\right)y'\right] + 2 = 0$
$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + \left(y' + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = 0$
$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + \left(y' + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = 0$
$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + \left(y' + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + \left(y' + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

D'où (C') est le cercle de centre $\left(1 ; -\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $r = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

15 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine $f : P \to P$ qui à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que :

$\begin{cases} x' = 3x + 5y \\ y' = -2x - 3y - 2 \end{cases}$

1) Montrons que f est une application.

f Est une application si et seulement si $detM \neq 0$

Soit φ l'endomorphisme associé à f .

Scanned by CamScanner

La matrice de f dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est $M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ et le déterminant associé à cette

Matrice est : $detM = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$

$detM = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 10 = 1 \neq 0$. Alors f est une application.

Montrons que f admet un seul point invariant dont on déterminera les coordonnées.

f Admet un point invariant si et seulement si $f(M) = M$ c'est-à-dire $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 3x + 5y \\ y = -2x - 3y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ -2x - 4y = 2 \end{cases}$

La résolution de ce système donne : $x = -5$ et $y = 2$

D'où $\Omega(-5\,;2)$ est le point invariant.

2) Déterminons la nature géométrique et les éléments caractéristiques de fof

fof Est tel que : $\begin{cases} x'' = 3x' + 5y' \\ y'' = -2x' - 3y' - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = 3(3x + 5y) + 5(-2x - 3y - 2) \\ y'' = -2(3x + 5y) - 3(-2x - 3y - 2) - 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = 9x + 15y - 10x - 15y - 10 \\ y'' = -6x - 10y + 6x + 9y + 6 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = -x - 10 \\ y'' = -y + 4 \end{cases}$

Exprimons ainsi Z'' en fonction de Z

$Z'' = x'' + iy''$. Or $\begin{cases} x'' = -x - 10 \\ y'' = -y + 4 \end{cases}$

En remplaçant x'' et y'' par leur valeur dans $Z'' = x'' + iy''$, on a :

$Z'' = (-x - 10) + i(-y + 4)$

$= -x - 10 - iy + 4i$

$= -(x + iy) - 10 + 4i$. Or $Z = x + iy$

$\Rightarrow Z'' = -Z - 10 + 4i$

NB :

Si $a = -1$, alors f est la symétrie centrale de centre Ω d'affixe $w = \frac{1}{2}b$.

On a : $Z' = Z + 2 - i$. Avec $a = -1$ et $b = -10 + 4i$

Scanned by CamScanner

Ici $a = -1$, alors f est une symétrie centrale de centre Ω d'affixe $w = \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(-10 + 4i)$.

$\Rightarrow w = -5 + 2i$

D'où $\Omega(-5\,;2)$ est le centre de la symétrie centrale.

En déduisons $fofofof$

Puisque fof est une symétrie centrale alors $fofofof = (fof)o(fof)$ qui est la composée de deux symétries centrales.

Or la composée de deux symétries centrales est une symétrie centrale.

16 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé$(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine $T_\alpha : P \to P$ qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tel que :

$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$ où α est un paramètre réel.

1) Montrons que $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, T_α est bijective

T_α Est bijective si et seulement si $detM_\alpha \neq 0$

Soit φ l'endomorphisme associé à T_α.

La matrice de T_α dans la base $(\vec{i}\,;\vec{j})$ est $M_\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\alpha \\ \alpha & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et le déterminant associé à cette

matrice est $detM_\alpha = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\alpha \\ \alpha & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (\alpha)^2 = \frac{1}{4} + \alpha^2 \neq 0$. Alors T_α est bijective .

Montrons que T_α admet un unique point invariant que l'on précisera.

T_α Admet un point invariant si et seulement si $T_\alpha(M) = M$ c'est-à-dire $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2\alpha y = 0 \\ 2\alpha x - 3y = 0 \end{cases}$

La résolution de ce système donne : $x = 0$ et $y = 0$

D'où $\Omega(0\,;0)$ est le point invariant.

2) Montons qu'il existe une valeur unique de α pour la quelle T_α est une homothétie H dont précisera le centre et le rapport.

Scanned by CamScanner

Pour cela exprimons Z' en fonction de Z.

On sait que $Z' = x' + iy'$. Or $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$

En remplaçant x' et y' par leur valeur dans $Z' = x' + iy'$; on a :

$$Z' = \left(-\frac{1}{2}x - \alpha y\right) + i\left(\alpha x - \frac{1}{2}y\right)$$

$$= -\frac{1}{2}x - \alpha y + i\alpha x - \frac{1}{2}yi$$

$$= \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}yi\right) + (-\alpha y + i\alpha x)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}yi\right) + (i^2\alpha y + i\alpha x)$$

$$= -\frac{1}{2}(x + iy) + i\alpha(x + iy)$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + i\alpha\right)(x + iy). \text{ Or } Z = x + iy$$

$$\Rightarrow Z' = \left(-\frac{1}{2} + i\alpha\right)Z$$

NB : Si $Z' = aZ + b$, on dit que T_α est une homothétie $a \in \mathbb{R}^* - \{-1\,;1\}$

Avec $a = -\frac{1}{2} + i\alpha$

Alors $a = -\frac{1}{2} + i\alpha \in \mathbb{R}^* - \{-1\,;1\}$ si et seulement si $\alpha = 0$.

D'où T_α est une homothétie si $\alpha = 0$.

3) a- Montrons qu'il existe deux valeurs de α pour les quelles T_α est une isométrie.

T_α est une isométrie si et seulement si son expression analytique est sous la forme :

$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases}$ C'est-à-dire si $\det(Matf) = a^2 + b^2 = 1$

On a T_α : $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$ $\Rightarrow detM_\alpha = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\alpha \\ \alpha & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (\alpha)^2$

$detM_\alpha = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (\alpha)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha^2 = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Scanned by CamScanner

b- Vérifions que ces deux isométries sont réciproques l'une de l'autre. On les notera R et R^{-1}

D'où on a R^{+}: $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$ et R^{-1}: $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$

En observant, on remarque que ces deux isométries sont réciproques l'une de l'autre.

17 Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ d'unité 2cm.
Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et f_α l'application du plan complexe dans lui-même qui, au point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' telle que : $Z' = (1 + i\tan\alpha)Z - i\tan\alpha$.

1) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de f_α.

NB :

Si $Z' = aZ + b$ *avec* $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| \neq 1$ *alors* f est une similitude directe de rapport $k = |a|$, d'angle $\alpha = \arg(a)$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.

On a : $Z' = (1 + i\tan\alpha)Z - i\tan\alpha$. Avec $a = 1 + i\tan\alpha$ *et* $b = -i\tan\alpha$

$|a| = |1 + i\tan\alpha| = \sqrt{1 + \tan^2\alpha} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\cos\alpha} \neq 1$

Alors f_α Est une similitude directe dont les éléments caractéristiques sont :

- Rapport : $k = |a| = |1 + i\tan\alpha| = \sqrt{1 + \tan^2\alpha} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\cos\alpha}$
- Angle : $\theta = arg\,(a) = arg(1 + i\tan\alpha) = \alpha$.
- Centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a} = \frac{-i\tan\alpha}{1-(1+i\tan\alpha)} = \frac{-i\tan\alpha}{1-1-i\tan\alpha} = \frac{-i\tan\alpha}{-i\tan\alpha} = 1 \Rightarrow \Omega(1;0)$

2) Soit Ω le point d'affixe 1 et M un point du plan distinct de Ω.

- Montrons que pour $\alpha \neq 0$; alors $MM'\Omega$ est un triangle rectangle en M.

$MM'\Omega$ est un triangle rectangle en M si et seulement si $\frac{Z_\Omega - Z_M}{Z_{M'} - Z_M} = ib$ ou $-ib$

Avec $Z_\Omega = 1$; $Z_{M'} = Z' = (1 + i\tan\alpha)Z - i\tan\alpha$ et $Z_M = Z$

$\frac{Z_\Omega - Z_M}{Z_{M'} - Z_M} = \frac{(1)-(Z)}{[(1+i\tan\alpha)Z - i\tan\alpha\,] - Z} = \frac{1-Z}{Z + iZ\tan\alpha - i\tan\alpha - Z} = \frac{1-Z}{iZ\tan\alpha - i\tan\alpha}$

Scanned by CamScanner

$= \frac{1-Z}{-itan\alpha(1-Z)} = \frac{1}{-itan\alpha} = \frac{itan\alpha}{tan^2\alpha} = \frac{i}{tan\alpha} = \frac{1}{tan\alpha} i$ (Sous la forme ib).

D'où $MM'\Omega$ est un triangle rectangle en M.

- Déterminons la valeur de α pour que ce triangle soit isocèle

$MM'\Omega$ est un triangle isocèle en M si et seulement si $\frac{Z_\Omega - Z_M}{Z_{M'} - Z_M} = i \Leftrightarrow \frac{1}{tan\alpha} i = i \Leftrightarrow$

$\frac{1}{tan\alpha} = 1 \Leftrightarrow tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

3) On pose dans cette partie $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et on note A; B; C et D les points d'affixes respectives : i ; $2i$; -1 et $-1+i$.

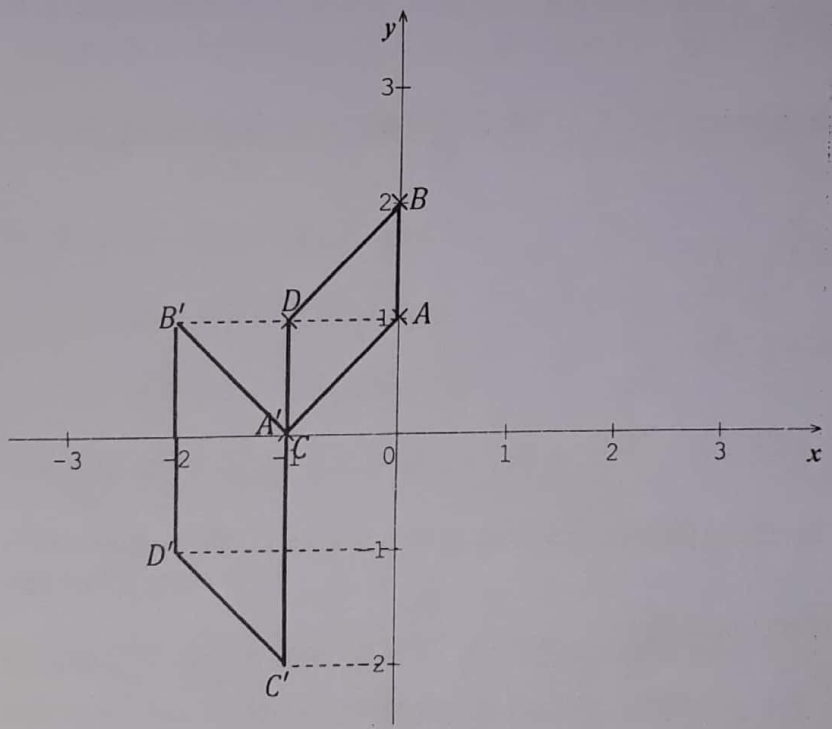
a) Plaçons les points A; B; C et D dans le plan.

$A \to i \Rightarrow A\binom{0}{1}$

$B \to 2i \Rightarrow B\binom{0}{2}$

$C \to -1 \Rightarrow C\binom{-1}{0}$

$D \to -1+i \Rightarrow D\binom{-1}{1}$



b) Démontrons que $ABDC$ est un parallélogramme dont on précisera l'aire en cm^2

$ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Scanned by CamScanner

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Puisque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $ABDC$ est un parallélogramme.

c) Donnons l'expression analytique de $f_{\frac{\pi}{4}}$.

On a f_α : $Z' = (1 + i\tan\alpha)Z - i\tan\alpha$

$\Rightarrow f_{\frac{\pi}{4}}$: $Z' = (1 + i\tan\frac{\pi}{4})Z - i\tan\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow f_{\frac{\pi}{4}}$: $Z' = (1 + i)Z - i$

Alors $Z' = (1 + i)Z - i$

$\Leftrightarrow x' + iy' = (1 + i)(x + iy) - i$

$\Leftrightarrow x' + iy' = (x - y) + i(x + y - 1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$

D'où l'expression analytique de $f_{\frac{\pi}{4}}$ est : $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$

d) En déduisons les coordonnées des points A' ; B' ; C' *et* D', images respectives par $f_{\frac{\pi}{4}}$ des points A ; B ; C *et* D.

$f_{\frac{\pi}{4}}(A) = A' \Leftrightarrow A'\begin{pmatrix} 0-1 \\ 0+1-1 \end{pmatrix} \Rightarrow A'\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f_{\frac{\pi}{4}}(B) = B' \Leftrightarrow B'\begin{pmatrix} 0-2 \\ 0+2-1 \end{pmatrix} \Rightarrow B'\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f_{\frac{\pi}{4}}(C) = C' \Leftrightarrow C'\begin{pmatrix} -1-0 \\ -1+0-1 \end{pmatrix} \Rightarrow C'\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$f_{\frac{\pi}{4}}(D) = D' \Leftrightarrow D'\begin{pmatrix} -1-1 \\ -1+1-1 \end{pmatrix} \Rightarrow D'\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

e) Plaçons ces images dans le plan (Voir figure)

Scanned by CamScanner

18 Dans le plan complexe P, On donne :

$Z_A = 1$

$Z_N = iZ - (1+i)$.

$M' = bary\{(M\,;\,\lambda)\,;\,(N\,;\,-\lambda);\,(A\,;1)\}$

$T_\lambda(M) = M'$ Où λ est un nombre réel non nul.

1-Démontrons que pour tout M du plan, le point N est l'image de M par une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques.

$Z_N = iZ - (1+i)$. (Sous la forme $Z' = aZ + b$) avec $a = i$ et $b = -1 - i$

Puisque $a = i \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = |i| = 1$ *alors* f est une rotation dont les éléments caractéristiques sont :

- Rapport : $k = |a| = |i| = 1$.
- Angle : $\theta = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$
- Centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-1-i}{1-i} = \frac{-(1+i)^2}{2} = -i \Rightarrow \Omega(0\,;\,-1)$

2- a- Démontrons que l'affixe Z' du point M'est telle que $Z' = \lambda(1-i)\,Z + \lambda(1+i) + 1$.

On a : $M' = bary\{(M\,;\,\lambda)\,;\,(N\,;\,-\lambda);\,(A\,;1)\}$

$$\Rightarrow Z' = \frac{\lambda Z_M - \lambda Z_N + Z_A}{\lambda - \lambda + 1} = \frac{\lambda Z_M - \lambda Z_N + Z_A}{1} = \lambda Z_M - \lambda Z_N + Z_A$$

$$\Rightarrow Z' = \lambda Z - \lambda[iZ - (1+i)] + 1$$

$$= \lambda Z - \lambda iZ + \lambda(1+i) + 1$$

$$= \lambda(1-i)\,Z + \lambda(1+i) + 1.$$

D'où T_λ: $Z' = \lambda(1-i)\,Z + \lambda(1+i) + 1$.

b- Démontrons que T_λ est une similitude directe dont on précisera l'affixe du centre Ω ; le rapport et l'angle

NB : Si $Z' = aZ + b$ *avec* $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| \neq 1$ *alors* f est une similitude directe de rapport $k = |a|$, d'angle $\alpha = \arg(a)$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.

On a T_λ: $Z' = \lambda(1-i)\,Z + \lambda(1+i) + 1$. Avec $a = \lambda(1-i)$ et $b = \lambda(1+i) + 1$

Ici $a = \lambda(1-i) \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = |\lambda(1-i)| = \sqrt{2\lambda^2} = \lambda\sqrt{2} \neq 1$

Scanned by CamScanner

Alors T_λ est une similitude dont les éléments caractéristiques sont :

- Rapport : $k = |a| = |\lambda(1-i)| = \sqrt{2\lambda^2} = \lambda\sqrt{2}$
- Angle : $\theta = \arg[\lambda(1-i)] = -\frac{\pi}{4}$
- Centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{\lambda(1+i)+1}{1-[\lambda(1-i)]} = \frac{1-2i\lambda^2}{(1-\lambda)^2+\lambda^2}$

$$= \frac{1}{(1-\lambda)^2+\lambda^2} + i\frac{-2\lambda^2}{(1-\lambda)^2+\lambda^2} \Rightarrow \Omega\left(\frac{1}{(1-\lambda)^2+\lambda^2} ; \frac{-2\lambda^2}{(1-\lambda)^2+\lambda^2}\right)$$

c-Déterminons les valeurs de λ , pour la quelle T_λ est une rotation.

T_λ Est une rotation $si\ a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = 1$ or $a = \lambda(1-i)$.

Puis que λ est un nombre réel non nul alors $\lambda(1-i) \in \mathbb{C}^* - \{1\}$

Alors la seconde condition est satisfaite si $|a| = 1 \Leftrightarrow |\lambda(1-i)| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2\lambda^2} = 1$

$$\Leftrightarrow |\lambda|\sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda\sqrt{2} = 1 \\ ou \\ \lambda\sqrt{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ ou \\ \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

d-Donnons dans chacun de ces cas l'angle et l'affixe de son centre.

- **Pour $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, on a :**
  - Angle : $\theta = \arg\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right] = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$
  - Centre $\Omega\left(\frac{1}{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} ; \frac{-2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right) \Rightarrow \Omega\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2} ; -\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$
- **Pour $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on a :**
  - Angle : $\theta = \arg\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right] = -\frac{\pi}{4}$
  - Centre $\Omega\left(\frac{1}{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} ; \frac{-2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right) \Rightarrow \Omega\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2} ; -\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$

Scanned by CamScanner

e- Exprimons les coordonnées $(x' ; y')$ du point M' en fonction de celles $(x ; y)$ de M pour chacun des valeurs de λ obtenus.

- **Pour $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, on a :**

$$T_{-\frac{\sqrt{2}}{2}} : Z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)Z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) + 1$$

$$\Leftrightarrow x' + iy = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(x+iy) - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) + 1$$

$$\Leftrightarrow x' + iy = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y+1-\sqrt{2}) + i\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y+1-\sqrt{2}) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y-1) \end{cases}$$

- **Pour $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on a :**

$$T_{-\frac{\sqrt{2}}{2}} : Z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)Z + \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) + 1$$

$$\Leftrightarrow x' + iy = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(x+iy) - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) + 1$$

$$\Leftrightarrow x' + iy = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y+1+\sqrt{2}) + i\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y+1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y+1+\sqrt{2}) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y+1) \end{cases}$$

3- Le nombre réel λ étant strictement positif, on lui associe le point $P(-ln\lambda ; ln\lambda)$.

Soit P' le point du plan tel que $T_\lambda(P) = P'$

a- Déterminons les coordonnées de P' en fonction de λ.

Pour cela Exprimons les coordonnées $(x' ; y')$ du point M' en fonction de celles $(x ; y)$ de M

On a : $T_\lambda : Z' = \lambda(1-i)Z + \lambda(1+i) + 1$

$$\Leftrightarrow x' + iy = \lambda(1-i)(x+iy) + \lambda(1+i) + 1$$

$$\Leftrightarrow x' + iy = \lambda\left(x+y+1+\frac{1}{\lambda}\right) + i\lambda(-x+y+1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \lambda\left(x+y+1+\frac{1}{\lambda}\right) \\ y' = \lambda(-x+y+1) \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Alors $T_\lambda(P) = P' \Leftrightarrow \begin{cases} x_{P'} = \lambda\left(-ln\lambda + ln\lambda + 1 + \frac{1}{\lambda}\right) \\ y_{P'} = \lambda\left(ln\lambda + ln\lambda + 1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{P'} = \lambda\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \\ y_{P'} = \lambda(2ln\lambda + 1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{P'} = \lambda + 1 \\ y_{P'} = 2\lambda ln\lambda + \lambda \end{cases} \Rightarrow P'(\lambda + 1 \; ; \; 2\lambda ln\lambda + \lambda)$

b- Démontrons que lorsque λ décrit $\mathbb{R}_+^*$; l'ensemble des points P' est la courbe (Γ) d'équation

$y = 2(x-1)ln(x-1) + (x-1).$

On a : $\begin{cases} x_{P'} = \lambda + 1 \\ y_{P'} = 2\lambda ln\lambda + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = 2\lambda ln\lambda + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x - 1 \quad (1) \\ y = 2\lambda ln\lambda + \lambda \quad (2) \end{cases}$

En éliminant λ entre les équations (1) et (2) ; on a :

$y = 2(x-1)ln(x-1) + (x-1)$

D'où lorsque λ décrit $\mathbb{R}_+^*$; l'ensemble des points P' est la courbe (Γ) d'équation

$y = 2(x-1)ln(x-1) + (x-1).$

4- On pose $h(x) = y$ de sorte que la courbe de la fonction numérique h est (Γ)

a- Dressons le tableau de variation *de h.*

$h(x) = y \Leftrightarrow h(x) = 2(x-1)ln(x-1) + (x-1)$

$Dh = \{x/x \in \mathbb{R}\,; x - 1 > 0\} \Rightarrow Dh =]1\,; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to 1} h(x) = \lim\limits_{x \to 1} 2(x-1)ln(x-1) + (x-1)$

Effectuons un changement de variable en posant $X = x - 1$

Si $x \to 1$ Alors $X \to 0$

D'où $\lim\limits_{x \to 1} h(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{X \to 0} 2XlnX + X = 0$

De même

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2(x-1)ln(x-1) + (x-1)$

Effectuons un changement de variable en posant $X = x - 1$

Scanned by CamScanner

Si $x \to +\infty$ Alors $X \to +\infty$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{X \to +\infty} 2XlnX + X = +\infty$

$h(x) = 2(x-1)ln(x-1) + (x-1) \Rightarrow h'(x) = 2ln(x-1) + 3$

Posons $h'(x) > 0 \Leftrightarrow 2ln(x-1) + 3 > 0 \Leftrightarrow ln(x-1) > -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x - 1 > e^{-\frac{3}{2}}$
$\Leftrightarrow x > e^{-\frac{3}{2}} + 1.$

Ainsi on dira que pour les $x > e^{-\frac{3}{2}} + 1$; on a : $h'(x) > 0$.

D'où le tableau de variation de h est le suivant :

x	1		$e^{-\frac{3}{2}} + 1$		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	0 ‖	↘	$-0,44$	↗	$+\infty$

b- Précisons une équation de chacune des éventuelles asymptotes à (Γ)

$x = 1$ Est asymptote verticale en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty$

Alors la courbe (Γ) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (oy)

c- Représentons (Γ) dans un repère orthonormé du plan.

Scanned by CamScanner



19 On donne deux points distincts A et B du plan affine et k un réel non nul tel que :

- M_1; est l'image du point M par l'homothétie de centre A et de rapport k $\Leftrightarrow$

$M_1 = h_{(A;k)}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM_1} = k\overrightarrow{AM}$

- $M' = bary\{(B,\alpha);(M_1,1)\}$

1) Montrons que pour tout point M du plan, on a : $(\alpha+1)\overrightarrow{MM'} = (1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB}$.
$M' = bary\{(B,\alpha);(M_1,1)\}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\alpha\overrightarrow{M'B}}_{\text{Introduisons Le point } M} + \underbrace{\overrightarrow{M'M_1}}_{\text{Introduisons Le point } A} = \vec{0}$

$\Rightarrow \alpha\left(\overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AM_1}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{M'M} + \alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AM_1} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{M'M} + \alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AM_1} = \vec{0}$.

Or d'après la relation de Chasles on a : $\overrightarrow{M'A} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MA}$

Alors $\alpha\overrightarrow{M'M} + \alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AM_1} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{M'M} + \alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM_1} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \left(\alpha\overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{M'M}\right) + \alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM_1} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\alpha+1)\overrightarrow{M'M} + \alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM_1} = \vec{0}$

Scanned by CamScanner

Or par hypothèse on a : $\overrightarrow{AM_1} = k\overrightarrow{AM}$

Alors $(\alpha+1)\overrightarrow{M'M} + \alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM_1} = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha+1)\overrightarrow{M'M} + \alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{AM} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\alpha+1)\overrightarrow{M'M} + \alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MA} = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha+1)\overrightarrow{M'M} + \alpha\overrightarrow{MB} + (1-k)\overrightarrow{MA} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\alpha+1)\overrightarrow{M'M} + (1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\alpha+1)\overrightarrow{M'M} = -(1-k)\overrightarrow{MA} - \alpha\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\alpha+1)\overrightarrow{MM'} = (1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

D'où pour tout point M du plan, on a : $(\alpha+1)\overrightarrow{MM'} = (1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB}$.

2) Montrons que si $k = \alpha + 1$ alors f est une translation dont on déterminera le vecteur translateur.

On sait que $(\alpha+1)\overrightarrow{MM'} = (1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB}$. Or $k = \alpha + 1$

$\Rightarrow (1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MM'}$.

D'où $(1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB}$ est un vecteur constant et par conséquent $f(M) = M'$ avec

$\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{\alpha+1}\vec{u}$ Où $\vec{u} = (1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB} + \alpha\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{u} = \alpha\overrightarrow{AB}$

En conclusion f est une translation de vecteur $\vec{v} = \frac{\alpha}{\alpha+1}\overrightarrow{AB}$

3) Montrons que si $k \neq \alpha + 1$, il existe un unique point invariant G par f

Si $k \neq \alpha + 1$, le système $\{(B, 1-k) ; (B, \alpha)\}$ admet un barycentre G tel que :

$\alpha\overrightarrow{GB} + (1-k)\overrightarrow{GA} = \vec{0} \Leftrightarrow f(G) = G.$

D'où G est le seule point invariant par f.

En déduisons alors que f est une homothétie dont on déterminera les éléments caractéristiques

$(\alpha+1)\overrightarrow{MM'} = \alpha\overrightarrow{MG} + (1-k)\overrightarrow{GA} \Leftrightarrow (\alpha+1)\overrightarrow{GM'} = -k\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = \frac{k}{\alpha+1}\overrightarrow{GM}$

D'où f est une homothétie de rapport $\frac{k}{\alpha+1}$ et de centre G.

20 On désigne par $(o ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan P. Soit a un nombre réel et f_a l'application affine de P dans luis - même qui au point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = (a+3)x - ay + a + 9 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

1) a- Démontrons que pour toute valeur non nulle de a, f_a est une bijection.

Soit φ l'endomorphisme associé à f_a.

La matrice de f_a dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est $M_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a+3 & -a \end{pmatrix}$

Ainsi le déterminant associé à cette matrice est : $detM_a = \begin{vmatrix} a & 0 \\ a+3 & -a \end{vmatrix}$

$detM_a = \begin{vmatrix} a & 0 \\ a+3 & -a \end{vmatrix} = -a^2 - 0(a+3) = -a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0.$

D'où pour toute valeur non nulle de a , f_a est bijective.

b- Déterminons l'application f_a^{-1}, réciproque de f_a pour $a \neq 0$.

Pour $a \neq 0$, $f_a(M) = M' \Leftrightarrow f_a^{-1}(M') = M \Leftrightarrow \begin{cases} x' = ax \\ y' = (a+3)x - ay + a + 9 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{a}x' \\ ay = \frac{a+3}{a}x' - y' + a + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{a}x' \\ y = \frac{a+3}{a^2}x' - \frac{1}{a}y' + \frac{a+9}{a} \end{cases}$$

D'où f_a^{-1} est définie par :

$$f_a^{-1}:\ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ Avec } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{a}x \\ y_1 = \frac{a+3}{a^2}x - \frac{1}{a}y + \frac{a+9}{a} \end{cases}$$

c- Déterminons l'ensemble des points invariants par f_a. (On discutera suivant les valeurs du un nombre réel a).

L'ensemble des points invariants par f_a est donné par $f_a(M) = M \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = ax \\ y = (a+3)x - ay + a + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)x = 0 \\ (a+3)x - (a+1)y = -a - 9 \end{cases}$$

Le déterminant associé à ce système est $detM_a = \begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ a+3 & -(a+1) \end{vmatrix} = -(a-1)(a+1)$

Alors $detM_a = 0 \Leftrightarrow -(a-1)(a+1) = 0 \Leftrightarrow a = 1$ ou $a = -1$

- <u>Si $a = 1$</u>

On a $f_1(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 4x - y + 10 \end{cases} \Leftrightarrow 4x - 2y = -10 \Leftrightarrow 2x - y + 5 = 0$

D'où pour $\boldsymbol{a = 1}$, l'ensemble des points invariants chercher est la droite d'équation :

$2x - y + 5 = 0$

Scanned by CamScanner

- **Si $a = -1$**

On a $f_{-1}(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x \\ y = 2x + y + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2x = -8 \end{cases}$ ce qui est absurde.

D'où pour $a = -1$, l'ensemble des points invariants n'existe pas.

2) a- Démontrons que seule f_1 est une involution.

On a $f_1: \begin{cases} x' = x \\ y' = 4x - y + 10 \end{cases}$

Soit φ l'endomorphisme associé à f_1.

Ainsi la matrice de f_1 dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

Par conséquent f_1 est involutive si et seulement si $M_1 \times M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ = (matrice identique)

$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_1 \times M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'où f est involutive.

Caractérisons cette involution.

- On sait que la droite d'équation : $2x - y + 5 = 0$ est l'ensemble des points invariants par f_1.

- On sait que aussi que $\varphi_{-1}(\vec{u}) = -\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x \\ -y = 4x - y \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

Conclusion : f_1 est la symétrie affine par rapport à la droite $2x - y + 5 = 0$ parallèlement à la droite vectorielle $x = 0$.

b- Démontrons que seule f_{-1} est la composée d'une symétrie s et d'une translation t dont le vecteur est un directeur de l'ensemble des points invariants par s, c'est-à-dire que $f_{-1} = tos$.

On a $f_{-1}: \begin{cases} x' = -x \\ y' = 2x + y + 8 \end{cases}$

Soit φ' l'endomorphisme associé à f_{-1}.

Ainsi la matrice de f_{-1} dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est $M_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Par conséquent $M_{-1} \times M_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matrice identique)

D'où f_{-1} est involutive.

D'autre part, f_{-1} n'admet pas de point invariant donc $f_{-1} = tos = sot$ où s est une symétrie et t une translation.

Scanned by CamScanner

$f_{-1}of_{-1} = (tos)o(sot) = to(sos)ot = tot.$

Si $\vec{u}$ est le vecteur de la translation t, alors $tot = t_{2\vec{u}}$ et par conséquent $t_{2\vec{u}} = f_{-1}of_{-1}$.

D'autre part on sait que $f_{-1}of_{-1}$ est définie par : $\begin{cases} x'' = x \\ y'' = y + 16 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $2\vec{u}$ a pour coordonnées $(0\,;16)$ et par conséquent $\vec{u}(0\,;8)$.

$f_{-1} = tos \Leftrightarrow s = t^{-1}of_{-1} \Leftrightarrow s$ Est définie analytiquement par : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = 2x + y \end{cases}$

$s(M) = M \Leftrightarrow x = 0.$

L'ensemble des points invariants par s est la droite d'équation $x = 0$.

Nous remarquons que le vecteur $\vec{u}(0\,;8)$ appartient à la direction de cette droite.

21 Dans un espace affine euclidienne E rapporté à un repère orthonormé $(o\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$, on donne les points $A\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$

1) Montrons qu'il existe un et un seul retournement (demi-tour) noté f tel que $f(O) = A$ et $f(B) = B$. Puis caractérisons géométriquement ce retournement et donnons sa représentation analytique.
Un demi-tour étant une rotation d'axe Δ et d'angle π, il est aussi considéré comme une symétrie orthogonale d'axe Δ. Ainsi un demi-tour peut être déterminer par un point invariant (un point de Δ) et un point n'appartenant pas à Δ et son image ; donc $f(O) = A$ et $f(B) = B$ définissent un seul demi-tour f. Soit I le milieu du segment $[O;A]$ alors l'axe du demi-tour f est la droite (IB). Nous avons $I\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (IB) \Leftrightarrow$ il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{IM} = \lambda\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases}$

L'axe $\Delta = (IB)$ de $\vec{\imath}$ est engendré par $\vec{\jmath}$. Le plan orthogonal à cet axe est donc par $(\vec{\imath}\,;\vec{k})$.
Ainsi en désignant par φ l'endomorphisme associé à f, alors on a :
$\varphi(\vec{\jmath}) = \vec{\jmath}$; $\varphi(\vec{\imath}) = -\vec{\imath}$ et $\varphi(\vec{k}) = -\vec{k}$.

La matrice de φ dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$ est donc $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$. Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un point de E tel

que $f(M) = M'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{f(0)f(M)} = \varphi(\overrightarrow{OM}) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \\ z' = -z + 2 \end{cases}$

2) Soit g l'application de E vers E qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ telle que :

Scanned by CamScanner

$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z + 2 \end{cases}$

Déterminons la nature de g et ces éléments caractéristiques. On précisera $g(A)$ et $g(B)$.

g Est une isométrie affine car son endomorphisme associé est une isométrie vectorielle.

$g(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -z + 2 \end{cases} \Leftrightarrow z = 1$. Alors l'ensemble des points invariants par g est le plan π d'équation $z - 1 = 0$. g est donc la symétrie orthogonale par rapport à π.

Par conséquent $g(A) = C$ et $g(B) = D$.

3) Soit $h = fog$. Montrons que h est déplacement dont on déterminera la nature et les éléments caractéristiques.

On sait que f est un demi-tour et g la symétrie orthogonale par rapport à π.
Donc fog est un déplacement et nous remarquons que $(fog)(B) = f[g(B)] = f(D) = B$.

De même, $(fog)(I) = f[g(I)] = I$. D'où la droite (IB) est invariante par $fog = h$.
En conclusion : h est la rotation affine d'axe la droite (IB).

22 Le plan affine E est rapporté à un repère orthonormé $(o\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,)$.
On considère l'application f de E dans E qui à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ telle que : $\begin{cases} x' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

1) a- Montrons que pour tout point M, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur constant.

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} - x \\ \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} - y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

Avec $\begin{cases} X = -\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} \\ Y = \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = -\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} \\ Y = -\sqrt{3}\left(-\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$

$Y = -\sqrt{3}X$. D'où le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ appartient la droite vectorielle d'équation $Y = -\sqrt{3}X \Leftrightarrow$

$\sqrt{3}X + Y = 0$

b- Etudions l'ensemble des points invariants par f.

Scanned by CamScanner

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow -x - \sqrt{3} + 2 = 0$$

L'ensemble des points invariants par f est donc la droite (D) : $-x - \sqrt{3} + 2 = 0$.

c- Déterminons la nature de l'application f.

Des questions a) et b) , nous déduisons que f est la projection affine sur la droite (D) parallèlement au vecteur $\vec{u}$.

2) Soit g l'application de E dans E qui à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point $M''\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ telle que

$$: \begin{cases} x'' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y'' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

a- Montrons que g peut s'écrire hof où h est une application de E dans E que l'on précisera.

$$\begin{cases} x'' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y'' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = x' + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y'' = y' + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Alors M'' est l'image de M' par la translation de vecteur $\vec{v}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

D'où $g = hof$ où h est la translation de vecteur $\vec{v}$.

b- Sans calculer, vérifions que $hof = foh$.

h Étant une translation, cllc commute avec toute application affine.

D'où $hof = foh$.

Scanned by CamScanner

Chapitre 12 Coniques

COURS

Equations et éléments caractéristiques d'une conique:

1) **Les Paraboles d'équation** : $(Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0)$

a) **1^er Cas** : $(B = 0)$

La courbe (Γ) devient : $Ax^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0 \Rightarrow y = \dfrac{-Ax^2 - 2Cx - E}{2D}$

$\Rightarrow y = \dfrac{-A\left(x^2 + \dfrac{2C}{A}x + \dfrac{E}{A}\right)}{2D}$

$\Rightarrow y = \dfrac{-A}{2D}\left(x^2 + \dfrac{2C}{A}x + \dfrac{E}{A}\right)$ (en utilisant la forme canonique)

$\Rightarrow y = \dfrac{-A}{2D}\left[\left(x + \dfrac{C}{A}\right)^2 - \dfrac{C^2 - AE}{A^2}\right]$

$\Rightarrow$ Alors (Γ) est une parabole dont les éléments caractéristiques sont :

Sommet : $S\left(\dfrac{-C}{A} \; ; \; \dfrac{C^2 - AE}{2AD}\right)$

Axe de symétrie : $x = \dfrac{-C}{A}$ (Suivant l'axe $y'Oy$)

NB :

- Si $\dfrac{-A}{2D} < 0$ alors la concavité de la parabole (Γ) est orientée vers le bas.
- Si $\dfrac{-A}{2D} > 0$; alors la concavité de la parabole (Γ) est orientée vers le haut;

b) **2è Cas** (A = 0)

La courbe (Γ) dévient : $By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$

De la même manière ou obtient $x = \dfrac{-B}{2C}\left[\left(y + \dfrac{D}{B}\right)^2 - \dfrac{D^2 - BE}{B^2}\right]$

Alors (Γ) est une parabole dont les éléments caractéristiques sont :

Sommet : $S\left(\dfrac{D^2 - BE}{2CB} \; ; \; \dfrac{-D}{B}\right)$

Axe de symétrie : $y = \dfrac{-D}{B}$

Scanned by CamScanner

N.B :

* Si $\frac{-B}{2C} < 0$; alors la concavité de courbe (Γ) est orientée vers la gauche.

* Si $\frac{-B}{2C} > 0$; alors la concavité de la courbe (Γ) est orientée vers la droite.

2) Les ellipses :

Equation cartésienne : $Ax^2 + by^2 + Cx + Dy + E = 0$

Equation réduite : $A\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2 + B\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2 = \frac{AD^2 + BC^2 - 4ABE}{4AB}$

Equation caractéristique : $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$

a) 1er Cas : $(a > b)$

L'ellipse est portée par l'axe x' Ω x qui est le grand axe de l'ellipse. Ainsi les éléments caractéristiques sont :

Centre : $\Omega \begin{pmatrix} xo \\ yo \end{pmatrix}$ où $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$

Foyers : $F\left(\sqrt{a^2 - b^2}\,; 0\right)$; $F'\left(-\sqrt{a^2 - b^2}\,; 0\right)$

L'excentricité : $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

Les Directrices : (D) : $X = \frac{a}{e}$; (D') : $X' = \frac{-a}{e}$

Les sommets : $A(a\,;\,0)$; $A'(-a\,;\,0)$; $B(0\,;\,b)$; $B'(0\,;\,-b)$

b) 2è Cas : $(a < b)$

L'ellipse est portée par l'axe $y'\,\Omega\,y$ qui est le petit axe de l'ellipse.
Ainsi les éléments caractéristiques sont :

Centre : $\Omega \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}$ ou $\begin{cases} X = x - x_o \\ Y = y - y_o \end{cases}$

Foyers : F (0 ; $\sqrt{b^2 - a^2}$) ; F' (0 ; $-\sqrt{b^2 - a^2}$)

L'excentricité : e = $\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$

Les Directrices : (D) : $y = \frac{b}{e}$; (D') : $y' = \frac{-b}{e}$

Les sommets : $A(a, 0)$; $A'(-a\,;\,0)$ $B(0\,;\,b)$; $B'(0\,;\,-b)$

Scanned by CamScanner

3) Les Hyperboles

Equation cartésienne : $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

Equation réduite : $A\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2 + B\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2 = \frac{AD^2+BC^2-4ABE}{4AB}$

Equations caractéristiques : $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$ ou $\frac{-x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

a) 1er Cas : $\left(\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1\right)$

L'hyperbole est portée par l'axe $(X'\Omega X)$
Ainsi les éléments caractéristiques sont :

Centre : $\Omega\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ ou $\begin{cases}X=x-x_0\\Y=y-y_0\end{cases}$

Foyers : $F\left(\sqrt{a^2+b^2};0\right)$; $F'\left(-\sqrt{a^2+b^2};0\right)$

L'excentricité : $e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

Les Asymptotes : $(D) : Y = \frac{b}{a}x$; $(D') : Y' = \frac{-b}{a}x$

Les sommets : $A(a\,;\,0)$; $A'(-a\,;\,0)$

b) 2ème Cas : $\left(\frac{-X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1\right)$

Les éléments caractéristiques dans ce cas sont :

Centre : $\Omega\begin{pmatrix}x_o\\y_o\end{pmatrix}$ où $\begin{cases}X=x-x_o\\Y=y-y_o\end{cases}$

Foyers : $F\left(0;\sqrt{a^2+b^2}\right)$; $F'\left(0;-\sqrt{a^2+b^2}\right)$

L'excentricité : $e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

Les Asymptotes : $(D) : X = \frac{a}{b}y$; $(D') : X' = \frac{-a}{b}y$

Les sommets : $B(0\,;\,b)$; $B'(0\,;\,-b)$.

Scanned by CamScanner

NB:

Dans les deux cas de parabole, on a :

$X'\Omega X$ et $y'\Omega y$ sont des axes de symétrie.
Si $a > b$; alors l'hyperbole est portée par l'axe $(x' \Omega x)$
Si $a < b$; alors l'hyperbole est portée par l'axe $(y'\Omega y)$

EXERCICES

1 Déterminer la nature de la courbe (Γ) puis traçons-la dans chacun des cas suivants :

1) $-x^2+4x-y+3=0$; **2)** $3x^2+4y^2-3x-2y-5=0$; **3)** $4x^2-y^2-2y-5=0$

2 A tout nombre complexe Z, on associe $f(Z)$ tel que $f(Z)=2Z-\bar{Z}$

1) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M d'affixe Z tel que : $|f(Z)-3|=3$
2) Préciser la nature de(Γ) puis ses éléments caractéristiques (centre, axes, sommets, excentricité, foyers et directrices).
3) Représenter (Γ)

3 On considère la courbe (C) d'équation $xy-2x-3y-1=0$ et la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que : $Z'=\frac{1-i}{2}Z-2+2i$

1) Démontrer que f admet un point invariant P que l'on déterminera.
2) Reconnaître la nature de f puis donner ces éléments caractéristiques
3) Exprimer les coordonnées (x, y) de M en fonction des coordonnées (x, y) de M'.
4) Démontrer que l'image de la courbe (C) par f est la courbe (C') d'équation : $x^2-y^2-x+3y-9=0$
5) En déduire la nature de (C′) puis construire (C′).

4 Le plan est rapporté à un repère orthonormé$(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$. A tout réel m élément de l'intervalle] 0 ; 1 [, on associe la conique (E_m) d'équation (E_m): $y^2=2x-\frac{x^2}{m}$

1) Quelle est la nature de (E_m)?
2) Déterminer, par leurs coordonnées, les centres et les sommets de (E_m)
3) Déterminer la courbe (P) constituant l'ensemble des commets du grand axe de (E_m) quand m varie ans l'intervalle indiqué.
4) Déterminer la courbe (C) constituant l'ensemble des foyers de (E_m) quand m varie dans l'intervalle indiqué.
5) Construire $E_{3/4}$

Scanned by CamScanner

Solutions

1 Déterminons la nature de la courbe (Γ) puis traçons-la dans chacun des cas suivants

1) $-x^2+4x-y+3=0$

Ici $A=-1\ ;\ C=2\ ;\ D=\dfrac{-1}{2}\ ;\ E=3$

Car $-x^2+4x-y+3=0$ est l'équation d'une parabole.

Or $y=\dfrac{-A}{2D}\left[\left(x+\dfrac{C}{A}\right)^2-\dfrac{C^2-AE}{2AD}\right]$

$\Rightarrow y=-\left[(x-2)^2-\dfrac{7}{1}\right]\Rightarrow y=-\left[(x-2)^2-7\right]$

Donc (Γ) est une parabole dont les éléments caractéristiques sont :

- Sommet : $S(2\ ;\ 7)$
- Axe de symétrie : $x=2$

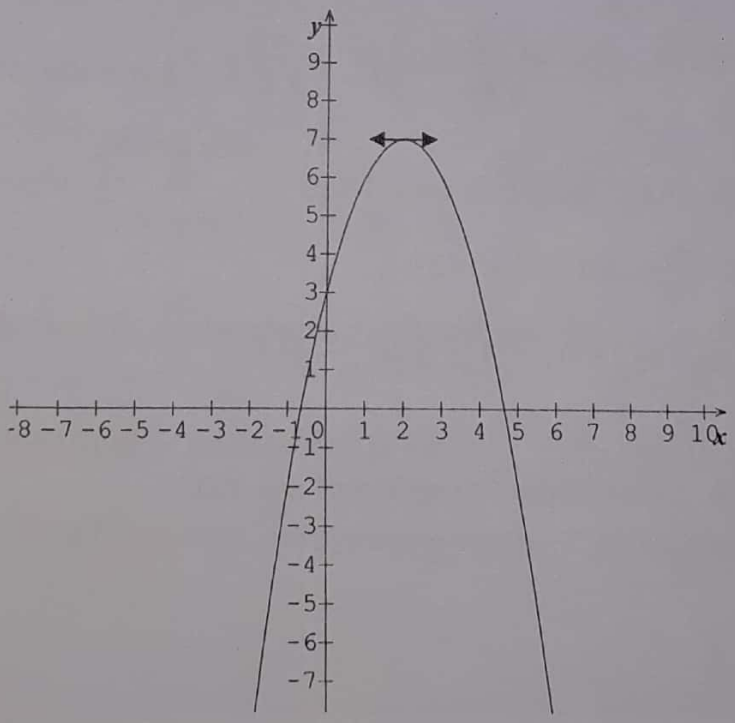
- $(\Gamma)\cap(ox)\Rightarrow y=0\Leftrightarrow x=4{,}64$ *ou* $x=-0{,}64$

Donc (Γ) coupe l'axe (ox) en 4,64 et – 0,64

- $(\Gamma)\cap(oy)\Rightarrow x=0\Leftrightarrow y=3$

Donc (Γ) coupe l'axe (oy) en 3

- $-\dfrac{A}{2D}=-1<0$, donc (Γ) est orienté vers bas.



Scanned by CamScanner

2) $3x^2 + 4y^2 - 3x - 2y - 5 = 0$

Ici $A = 3 ; B = 4 ; C = -3 ; D = -2 ; E = -5$

$$\Rightarrow A\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 + B\left(y + \frac{D}{2B}\right)^2 = \frac{A\times D^2 + B\times C^2 - 4\times A\times B\times E}{4\times A\times B}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x + \frac{-3}{2\times 3}\right)^2 + 4\left(y + \frac{-2}{2\times 4}\right)^2 = \frac{3\times(-2)^2 + 4\times(-3)^2 - 4\times 3\times 4\times(-5)}{4\times 3\times 4}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = 6$$

Posons $\begin{cases} X = x - \frac{1}{2} \\ et \\ Y = y - \frac{1}{4} \end{cases}$ ainsi l'équation dévient : $3X^2 + 4Y^2 = 6$

En divisant chaque membre de cette égalité par 6, on a : $\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{\frac{3}{2}} = 1$.

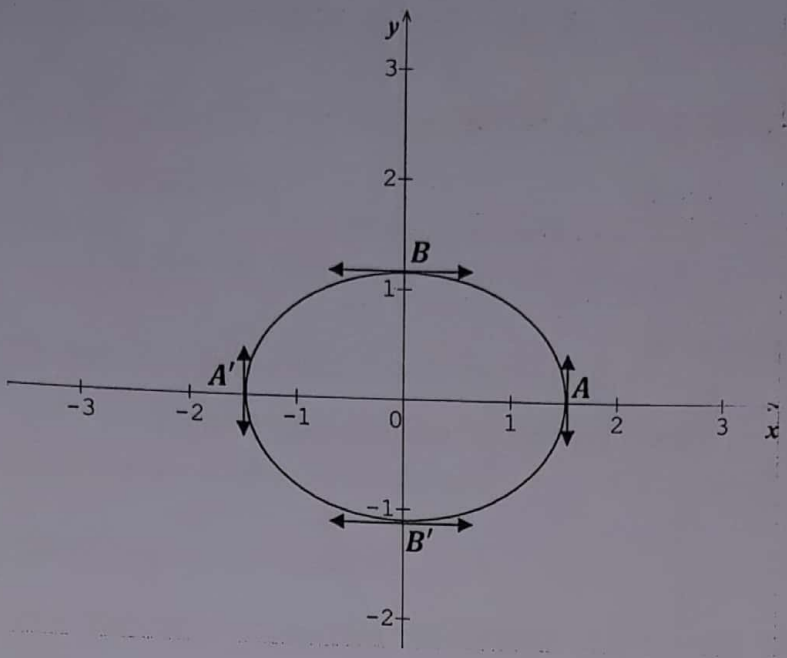
Cette équation est donc sous la forme $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$. Avec $\begin{cases} a^2 = 2 \\ b^2 = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = \sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$

Qui est l'équation d'une ellipse dont les éléments caractéristiques sont :

- Centre : $\Omega \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$
- Foyers : $F\left(\sqrt{2-\frac{3}{2}} ; 0\right) ; F'\left(-\sqrt{2-\frac{3}{2}} ; 0\right) \Rightarrow F\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; 0\right) ; F'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ; 0\right)$
- Excentricité : $e = \frac{\sqrt{2-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$
- Directrices : $(D) : X = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$ et $(D') : X' = -2\sqrt{2}$
- Sommets : $A\left(\sqrt{2} ; 0\right) ; A'\left(-\sqrt{2} ; 0\right) ; B\left(0 ; \sqrt{\frac{3}{2}}\right) ; B'\left(0 ; -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

D'autre part on a : $\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = \sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases} \Rightarrow a > b$, Alors l'ellipse est portée par l'axe $X'\Omega X$

Scanned by CamScanner



3) $4x^2 - y^2 - 2y - 5 = 0$

Ici $A = 4\,;\ B = -1\,;\ C = 0\,;\ D = -2\,;\ E = -5$

Or : $A\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2 + B\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2 = \frac{AD^2 + BC^2 4ABE}{4AB}$

$\Leftrightarrow 4\left(x+\frac{0}{2(4)}\right)^2 - 1\left(y+\frac{-2}{2(-1)}\right)^2 = \frac{4(-2)^2 - 1(0)^2 - 4(4)(-1)(-5)}{4(4)(-1)}$

$\Leftrightarrow 4(x+0)^2 - (y+1)^2 = 4$

Posons $\begin{cases} X = x + 0 \\ \quad et \\ Y = y + 1 \end{cases}$ ainsi l'équation dévient : $4X^2 - Y^2 = 4$

En divisant chaque membre de cette égalité par 6, on a : $\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{4} = 1$.

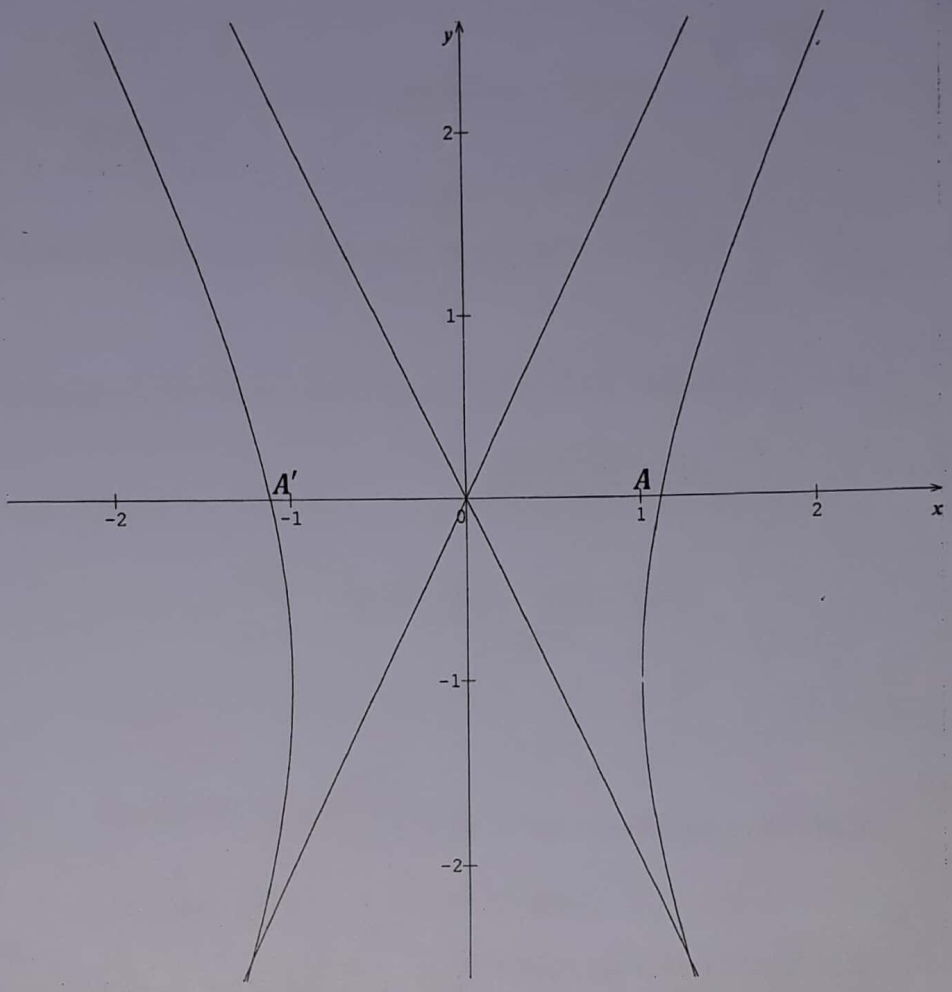
Cette équation est donc sous la forme $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$. Avec $\begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

Qui est l'équation d'une hyperbole dont les éléments caractéristiques sont :

Scanned by CamScanner

- Centre : $\Omega(0\,;\,-1)$
- Foyers $F(\sqrt{5}\,;0)\,;\,F'(-\sqrt{5}\,;0)$
- Excentricité : $e = \dfrac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5} = 2{,}23$
- Asymptotes : $(D) = y = x\sqrt{4} = 2x \quad et \quad (D') : y' = -2x$
- Sommets : $A\,(1\,;\,0)\,;\,A'\,(-1\,;\,0)$

D'autre part : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a < b$, Alors l'hyperbole est portée par l'axe $(Y'\Omega Y)$



2 Soit $f(Z) = 2Z - \overline{Z}$

1) Déterminons l'ensemble (Γ) des points M d'affixe Z tel que : $|f(Z) - 3| = 3$

On sait que (C) est le cercle de centre $\Omega\ (3\,;\,0)$ et de rayon 3

Pour $Z = x + iy$ avec x et y réel on a :

$|f(Z) - 3| = 3 \Leftrightarrow |2(x+iy) - (x-iy) - 3| = 3$

Scanned by CamScanner

$\Leftrightarrow |2x+2iy-x-iy-3|=3 \Leftrightarrow |x-3+3iy|=3$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(3y)^2}=3 \Leftrightarrow (x-3)^2+(3y)^2=9 \Leftrightarrow (x-3)^2+9y^2=9$

Posons $\begin{cases} X=x-3 \\ et \\ Y=y-0 \end{cases}$ ainsi l'équation dévient : $X^2+9Y^2=9$

En divisant chaque membre de cette égalité par 9, on a : $\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{1}=1$.

Cette équation est donc sous la forme $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$. Avec $\begin{cases} a^2=9 \\ b^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}$

Qui est l'équation d'une ellipse

D'où l'ensemble (Γ) des points M d'affixe Z tel que : $|f(Z)-3|=3$ est l'équation d'une ellipse

2) Déterminons les éléments caractéristiques de (Γ).

Les éléments caractéristiques sont :

- Sommets : $A\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$; $A'\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; $B'\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

- Foyers : F $\begin{pmatrix}2+2\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$; F' $\begin{pmatrix}2-2\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$

- Directrices : (D) : $x = 2 + \frac{9}{2\sqrt{2}}$; (D') : $x' = 2 - \frac{9}{2\sqrt{2}}$

- Centre : Ω (2 ; 0)

D'autre part on a : $\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow a > b$, Alors l'ellipse est portée par l'axe $X'\Omega X$

3 Soit la courbe (C) d'équation : $xy - 2x - 3y - 1 = 0$

Le point M d'affixe Z associe Z' d'affixe M' tel que : $Z' = \frac{1-i}{2}Z - 2 + 2i$

1) Démontrons que f admet un point invariant que l'on déterminera :
Soit M un point du plan, M est invariant par f si et seulement si $f(M) = M$.
ou encore $Z' = Z$.

Scanned by CamScanner

Donc Z' = Z $\Leftrightarrow = \frac{1-i}{2}Z - 2 + 2i$. Cette équation admet une unique solution dans $\mathbb{C}$ tel que :

$Z = \frac{-2+2i}{\frac{1+i}{2}} \Leftrightarrow Z = 4i$. donc f admet un point invariant unique $\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2) Déterminons la nature de f puis donnons ces éléments caractéristiques :

On a : $Z' = \frac{1-i}{2}Z - 2 + 2i <=> Z' = aZ + b$ avec a = $\frac{1-i}{2}$ et b = - 2 + 2i.

On n'en déduit que f est une similitude directe dont les éléments caractéristiques sont :

- Centre : $\Omega(0 ; 4)$
- Rapport $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- Angle : $\arg(a) = -\frac{\pi}{2}$

3) Exprimons les coordonnées $(x ; y)$ de M en fonction des coordonnées $(X ; Y)$ de M'.

On sait que : $Z = x + iy$ et $Z' = X + iY$

$f(M) = M' \Leftrightarrow Z' = aZ + b$. Avec $a = \frac{1-i}{2}$ et $b = -2 + 2i$

$\Leftrightarrow Z = \frac{1}{a}(Z' - b)$ avec $\frac{1}{a} = 1 + i$

$\Leftrightarrow x + iy = (1 + i)(X + iY + 2 - 2i)$

$\Leftrightarrow x + iy = X - Y + 4 + i(X + Y)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = X - Y + 4 \\ y = X + Y \end{cases}$

4) Démontrons que l'image de la courbe (C) par f est la courbe (C') d'équation :

$X^2 - Y^2 - X + 3Y - 9 = 0$

On a : (C) : $xy - 2x - 3y - 1 = 0$

En remplaçant x et y obtenus en 3°) par leur expression dans (C), on a :

$(X + Y)(X - Y + 4) - 2(X - Y + 4) - 3(X + Y) - 1 = 0$

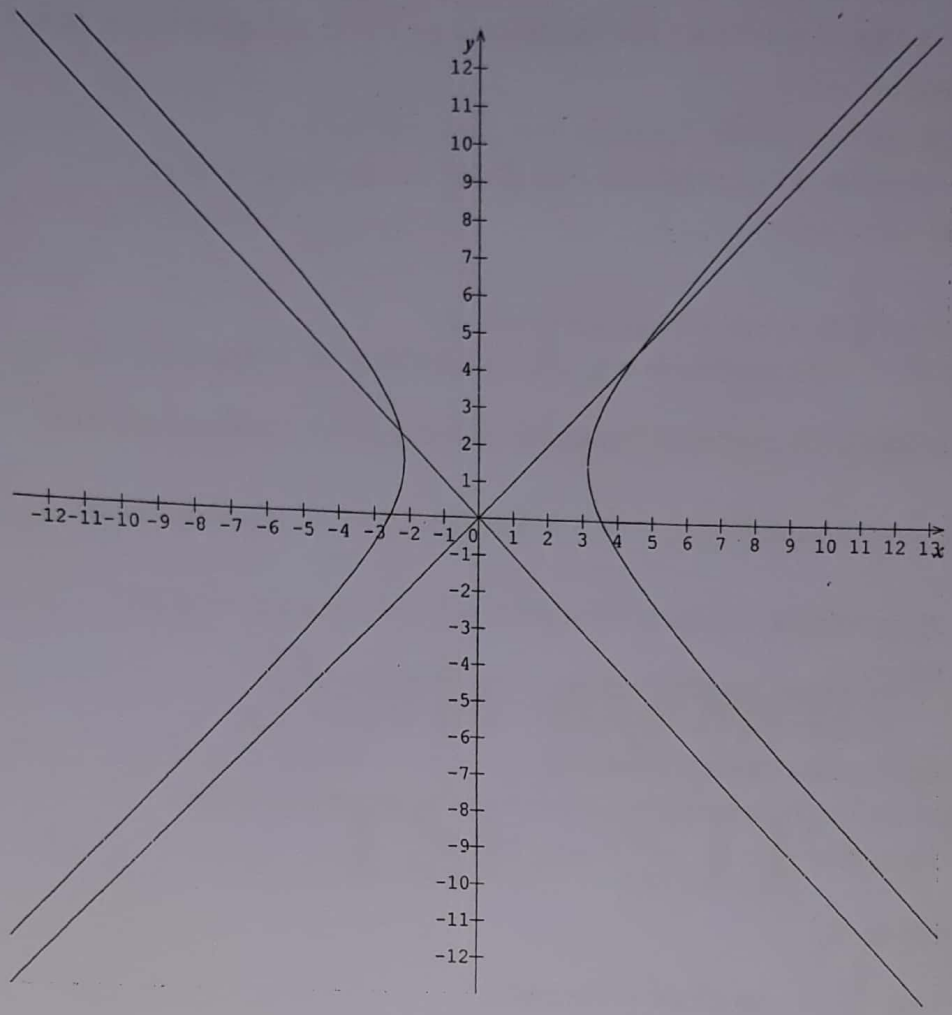
$\Leftrightarrow X^2 - Y^2 - X + 3Y - 9 = 0$ (C')

5) En déduisons la nature de (C') puis construire (C').

(C') : $X^2 - Y^2 - X + 3Y - 9 = 0 \Leftrightarrow \frac{(X - \frac{1}{2})^2}{7} - \frac{(Y - \frac{3}{2})^2}{7} = 1$

Scanned by CamScanner

(C') est donc une hyperbole de centre $K\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$ dont les sommets sont les points :
$A\left(\frac{1}{2}+\sqrt{7}\,;\,\frac{3}{2}\right)$ et $A\left(\frac{1}{2}-\sqrt{7}\,;\,\frac{3}{2}\right)$



4 Soit la conique (E_m) d'équation : (E_m): $y^2 = 2x - \frac{x^2}{m}$

a) Déterminons la nature de (E_m)

L'équation réduite (E_m) est :

$$(x-m)^2 + m(y+0)^2 = m^2 \Leftrightarrow \frac{(x-m)^2}{m^2} + \frac{(y+0)^2}{m} = 1 \Leftrightarrow \text{posons } X = x-m\,;\, Y = y$$

$$\Rightarrow \frac{X^2}{m^2} + \frac{Y^2}{m} = 1 \text{ avec } \begin{cases} a^2 = m^2 \\ b^2 = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = m \\ b = \sqrt{m} \end{cases} \Rightarrow (a > b)$$

b) Déterminons le centre et les sommets de (E_m) dans $(o, \vec{i}\,;\vec{j})$

- Centre $\Omega \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}$

- Sommets : $A\,(m\,;\,0)$; $A'(-m\,;\,0)$; $B(0\,;\,\sqrt{m})$; $B'\,(0\,;-\sqrt{m})$ relativement au repère $(o'\,;\,\vec{i}\,;\vec{j})$. Dans le repère $(o,\,\vec{i}\,;\vec{j})$ les sommets sont les points : $A(2m\,;\,0)$; $A'(0,0)$; $B(m\,;\,\sqrt{m})$; $B'\,(m\,;\,-\sqrt{m})$

Scanned by CamScanner

c) Déterminons la courbe (P) constituant l'ensemble des sommets du grand axe de (E_m) quand m varie dans l'intervalle $]0\,;1[$.

Ainsi les sommets du grand axe sont $B'(m\,;-\sqrt{m})$ et $B\,(m\,;\sqrt{m})$ relativement au repère $(o\,;\vec{i};\vec{j})$. Un point M(x, y) appartient à l'ensemble décrit par B si et seulement si $x = m$ et $y = \sqrt{m}$ c'est-à-dire $y = \sqrt{x}$.

B décrit la branche (P_1) de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ *avec* $0 < x < 1$

Un point $N(x,y)$ appartient à l'ensemble décrit par B' si et seulement si $x = m$ et $y = -\sqrt{m}$ c'est-à-dire

$y = -\sqrt{x}$.

B' décrit la branche (P_2) de la courbe d'équation $y = -\sqrt{x}$.

B et B' décrivent (P_1) v (P_2) : branches de la parabole d'équation $y^2 = x$ avec $0 < x < 1$.

d) Déterminons la courbe (C) constituant l'ensemble des foyers de Em quand un varie dans $]0\,;1[$.

Les foyers (E_m) sont les points $F'(m\,;-\sqrt{m-m^2})$ et $F(m\,;\sqrt{m-m^2})$ relativement du repère $(o,\vec{i};\vec{j})$.

Un point $M(x\,;y)$ appartient à l'ensemble décrit par F' si et seulement si $x = m$ et $y = \sqrt{m-m^2}$ c'est-à-dire

$y = \sqrt{x-x^2}$.

F' décrit la branche (C_2) de la courbe d'équation $y = -\sqrt{x-x^2}$ avec $0 < x < 1$.

F et F' décrivent $(C_1) \cap (C_2)$: arcs de cercle d'équation $y^2 = x - x^2$ c'est-à-dire :

$x^2 + y^2 - x = 0$ avec $0 < x < 1$.

e) construction de $E_{¼}$

En remplaçant m par $\frac{3}{4}$, on a une ellipse de sommets :

$A\left(\frac{3}{2};0\right)$; $A'(0\,;0)$; $B\left(\frac{3}{4};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $B'\left(\frac{3}{4};\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ de centre $0'\left(\frac{3}{4};0\right)$

Scanned by CamScanner

Sujets examens

TSE- STI

Scanned by CamScanner

Conseils pratiques pour l'épreuve de mathématiques au baccalauréat

Le texte de l'épreuve de mathématiques comporte deux exercices et un problème à rédiger en général **4 heures**. Le nombre de points attribués aux exercices et au problème est toujours précisé dans l'énoncé.
Un exercice en **4 ou en 5 points** devra être rédigé et relu en **45 min**, un problème en **12 points** en environ **2h20 min**.

Au début de l'épreuve

- Lisez lentement **tout l'énoncé, c'est-à-dire du début à la fin**. En effet, les questions sont rarement indépendantes et il peut arriver que l'une d'entre elles donne une indication précieuse quand à la résolution des questions précédentes.
- Déterminer le temps maximum que vous devez employer pour traiter, rédiger et relire chaque exercice et le problème en fonction des indications du barème.
- Commencez par l'exercice qui vous parait ≪ **le plus facile** ≫ et même ci possible par **le problème.**

Pendant l'épreuve

- Cherchez d'abord les questions au brouillon, si vous terminez l'exercice, recopiez-le ; si vous n'arrivez pas à résoudre une question, relisez une fois votre brouillon, si tout vous parait juste, commencez la rédaction ; ≪ **la mise au propre** ≫ en faisant ressortir les résultats obtenus dans les premières questions car ceci vous aidera à trouver la suite.
- Si vous n'arrivez pas à démontrer un résultat donné dans l'énoncé, laissez un **blanc** dans votre copie c'est-à-dire **un espace** en fonction de la densité de la question, et continuez votre exercice ou votre problème.
- N'oubliez pas qu'une réponse doit être justifiée.

Présentation de votre copie

- Séparez les questions, encadrez ou soulignez les résultats ; respectez les notations du texte car ceci peux inciter le correcteur à une **indulgence** vis-à-vis de votre copie.
- N'abusez pas **des effaceurs et des correcteurs**, la copie devient parfois illisible.
- N'oubliez pas que **les figures géométriques et les graphiques** doivent comporter tous les points nécessaires à la compréhension de vos démonstrations.

Bonne chance à tous et à toutes !!!

Scanned by CamScanner

Sujet 1

Exercice 1 ..... **(6 points)**

1) Pour tout nombre réel $x \neq -1$, on pose $f(x) = \frac{x^2+6x+8}{x+1}$.

a- Trouver les réels a ; b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$. **(0,5pt)**

b- Calculer l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ **(0,5pt)**

c- Pour quelles valeurs de n, le nombre $\frac{n^2+6n+8}{n+1}$ est il un entier relatif ? **(1pt)**

d- Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $ax + by - c = 0$. **(1pt)**

e- Résoudre l'équation différentielle $ay'' + by' - cy = 0$. **(1pt)**

2) Soit $A\binom{1}{1}$; $B\binom{-1}{1}$; et $C\binom{3}{0}$ trois point du plan.

a- Construire le barycentre G du système $\{(A,a)\ ;\ (B,b)\ ;\ (C,c)\}$. **(1pt)**

(Où a ; b et c sont les réels déterminés en 1°))

b- Soit f : E → R tel que : $f(M) = aMA^2 + bMB^2 + c\,MC^2$.

Déterminer puis construire l'ensemble (r) des points M du plan tel que : $f(M) = \frac{291}{9}$ **(1pt)**

Exercice 2 ..... **(4 points)**

Soit f l'application de $E = \mathbb{C} - \{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $z \mapsto f(z) = \frac{iZ}{z+i}$.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct$(o, \vec{u}, \vec{v})$. On note M le point d'affixe Z.

1) Déterminer les coordonnées du point B dont l'affixe Z_0 et telle que $f(Z_0) = 1 + 2i$ **(1pt)**

2) Soit Z_0 un élément de E. on note r le module de $Z + i$ et α une mesure de son argument. **(1pt)**

Exprimer la forme trigonométrique de $f(Z) - i$ en fonction de r et α.

3) Soit A le point d'affixe $-i$

a- Déterminer l'ensemble (Γ) des points M vérifiant $|f(z) - i| = \sqrt{2}$ **(1pt)**

b- Montrer que B appartient à (Γ). **(1pt)**

Problème ..... **(10 points)**

Soit la fonction numérique f définie pour tout x de [0 ; +∞ [par :
$f(x) = x\ln(x) - x$, pour $x > 0$ et $f(0) = 0$.

1) a- Etudier la continuité te la dérivabilité de f en 0. **(1pt)**

b- Pour tout x strictement positif, calculer f' la fonction dérivée de f et déterminer son signe. **(1pt)**

c-déterminer la limite de f en+∞ puis dresser le tableau de variation de f.**(1pt)**

2) Soit ($\mathcal{C}f$) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Soit (D) la droite d'équation : $y = x - 1$. Soit u la fonction définie pour tout x de [0 ; +∞ [par : $u(x) = x\ln(x) - 2x + 1$.

a- Calculer u' la fonction dérivée de u et déterminer son signe. **(1pt)**

Calculer les limites de u en 0 et en +∞; puis dresser le tableau de variation de u.

Scanned by CamScanner

b- Monter que l'équation $u(x) = 0$ possède exactement deux solutions que l'on notera : a *et* b, avec $(a < b)$. En déduire que (D) et (C_f) se coupent en deux points A et B d'abscisses respectives a *et* b. **(1pt)**

c- Déterminer le signe de $u(x)$. **(1pt)**

d- Montrer que a appartient à] 0 ; 1 [et que b appartient à] 6 ; 7 [. **(1pt)**

3) Tracer dans le repère $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$ la courbe ($\mathcal{C}_f$) et la droite (D). **(1pt)**

4) Soit Δ le domaine du plan limité par la courbe ($\mathcal{C}_f$), la droite (D) et es droites d'équations $x = a$ *et* $x = b$(*où* a *et* b *sont définis en* 2°)b)).

a- Montrer que S, l'aire en cm^2 de Δ, s'exprime sous la forme :

$\int_a^b (2x - 1 - xlnx)\, dx$. **(1pt)**

b- En intégrant par parties, calculé $\int_a^b (xlnx)\, dx$ en fonction de a et b en déduire l'expression de S en fonction de a et b. **(1pt)**

Scanned by CamScanner

Sujet 2

Exercice 1 ..... **(6 points)**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$.

On considère le point A d'affixe $Z_A = 5 - i\sqrt{3}$, le point B d'affixe Z_B tel que le triangle OAB soit équilatéral direct, c'est à dire la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3}$ et le point Q d'affixe Z_Q tel que Q soit milieu du segment $[O ; B]$

1) a- Démontrer que B a pour affixe $Z_B = 4 + 2i\sqrt{3}$. En déduire l'affixe Z_Q de Q. **(1pt)**

b- Déterminer l'affixe Z_K du point K tel que ABQK soit un parallélogramme. **(1pt)**

c- Démontré que $\frac{Z_K - Z_A}{Z_K}$ est imaginaire pur. Que peut-on en déduire pour le triangle OKA ? Préciser la nature du quadrilatère OQAK. **(1pt)**

d- Placer les points A ; B ; Q et K dans le repère. **(1pt)**

2) Soit C le point d'affixe $Z_C = \frac{2Z_A}{3}$

a- Calculer $\frac{Z_K - Z_B}{Z_K - Z_C}$ .Que peut-on en déduire pour les points B ; C et K ? **(1pt)**

b- Placer C sur la figure. **(1pt)**

Exercice 2 ..... **(5 points)**

1) Considère sur IR la fonction f définie par : $f(x) = x^3 - 12x - 16$.

a- Déterminer les réel a et b tel que : $f(x) = (ax + b)(x + 2)^2$. **(0,5pt)**

b- On pose $I = \int_4^5 \sqrt{f(x)}\, dx$. **(1 ,5pt)**

En déduire de la question précédente le calcule de I par les trois méthodes suivantes :

- Intégration par changement de variable ;
- Intégration par parties ;
- Intégration par recherche de primitive directe.

2) a) Développer $(K + 1)^8$ en utilisant le triangle de Pascal. **(1pt)**

b) On donne à K la valeur 13. Sachant que 14 = 13 + 1, en déduire 14^8 dans le système de base 13. **(1pt)**

Problème ..... **(10 points)**

Partie A

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1} \right)$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$.

1) Montrer que f est impaire. **(0,5pt)**

Scanned by CamScanner

2) a- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis vérifier que la dérivée $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$ **(0,5pt)**

b- En déduire le tableau de variation de f. **(1pt)**

3) a- Etudier les branches infinies de la courbe (Cf). **(1pt)**

b-Trouver une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (Cf) au point d'abscisse 0. **(0,5pt)**

c- Préciser la position de (T) et (Cf) **(0,5pt)**

4) Soit α un réel strictement positif. Calculer en fonction de α, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe ( ) et les droites d'équations respectives : $x = 0 ; y = 0 \; et \; x = \alpha$. **(1pt)**

Partie B

1) a- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque g définie sur un domaine I que l'on précisera. **(1pt)**

b- Construire dans le même repère que (Cf), la courbe ( ) de g. **(1pt)**

c- Montrer que pour tout x de I, on a : $g(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})$. **(1pt)**

d- Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique α que l'on déterminera avec la méthode des balayages. **(1pt)**

2) Calculer en fonction de α, l'aire du domaine plan limité par les deux courbes (Cf) , (Cg) et les droites d'équations $x = 0 \; et \; x = 2$. **(1pt)**

Scanned by CamScanner

Sujet 3

Exercice 1 ..... **(5 points)**

1) On considère un entier naturel $n \in [1;6]$.

a- Déterminer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7 **(1pt)**

b- Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7. **(1pt)**

En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7. **(1pt)**

c- A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7. **(1pt)**

2) On désigne par la lettre x un nombre réel.

a- Linéariser $sin^6 x$. **(1pt)**

b- On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^x Sin^5 t Costd \right] dx$. **(1pt)**

Démontrer que $I = \frac{15\pi - 44}{1152}$

Exercice 2 ..... **(5 points)**

Soit f l'application de $E = \mathbb{C} - \{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $z \mapsto f(z) = \frac{iZ}{z+i}$.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct$(o, \vec{u}, \vec{v})$. On note M le point d'affixe Z.

1) Déterminer les coordonnées du point B dont l'affixe Z_0 et telle que $f(Z_0) = 1 + 2i$ **(1pt)**

2) Soit Z_0 un élément de E. on note r le module de $Z + i$ et α une mesure de son argument. **(1pt)**

Exprimer la forme trigonométrique de $f(Z) - i$ en fonction de r et α.

3) Soit A le point d'affixe $-i$

a- Déterminer l'ensemble (Γ) des points M vérifiant $|f(z) - i| = \sqrt{2}$ **(1pt)**

b- Montrer que B appartient à (Γ). **(1pt)**

Problème ..... **(10 points)**

L'objet de ce problème est d'étudier, à l'aide d'une fonction auxiliaire, une fonction et de résoudre une équation différentielle dont elle est solution.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - ln(1 + 2e^x)$.

1) Calculer $g'(x)$ et montrer que ce nombre est strictement négatif pour tout x de IR. **(1pt)**

2) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$. **(0,5pt)**

3) Dresser le tableau de variation de g. **(1pt)**

4) Donner le signe de $g(x)$. **(0,5pt)**

Partie B : Etude d'une fonction et calcul d'une aire :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x} ln(1 + 2e^x)$.

Scanned by CamScanner

On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.)

1) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x, $f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$. **(1pt)**
2) Déterminer la limite de f en $-\infty$. **(1pt)**
3) Déterminer la limite f en $+\infty$. On pourra remarquer que :
si on pose $X = 1 + 2e^x$, $f(x)$ s'écrit $4\dfrac{X}{(X-1)^2}\dfrac{\ln X}{X}$ **(1pt)**
4) Dresser le tableau de variation de f. **(1pt)**
4. Tracer C. **(1pt)**
5. Soit α un réel strictement positif.

a) Vérifier que, pour tout réel x, $\dfrac{e^{-x}}{1+2e^{x}} = e^{-x} - 2\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$ **(1pt)**

En déduire la valeur de l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \dfrac{e^{-x}}{1+2e^{x}}dx$

b) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale : $J(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)dx$

Donner une interprétation graphique de J(α). **(1pt)**

Scanned by CamScanner

Sujet 4

Exercice 1 ..... **(5 points)**

L'objectif de cet exercice est de calculer les intégrales I ; J et K

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx \quad ; \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx \quad ; \quad I = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx.$$

1) **Calcul de I**

Soit la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = ln(x + \sqrt{x^2+2})$.

a- Calculer la dérivée de la fonction $\longmapsto \sqrt{x^2+2}$. **(1pt)**

b- En déduire la dérivée f' de f. **(1pt)**

c- Calculer la valeur de I. **(1pt)**

2) **Calcul de J et de K**

a- Sans calculer explicitement K.vérifier que $J + 2I = K$. **(1pt)**

b- A l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K, démontrer que $K = \sqrt{3} - J$. **(1pt)**

c- En déduire les valeurs de J et de K. **(1pt)**

Exercice 2 ..... **(5 points)**

$\mathbf{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

1) Résoudre dans $\mathbf{C}^3$ le système suivant :

$$\begin{cases} x - y + iz = 0 \\ x + y - z = 0 \\ (1+i)x - 2y + z = 2 - 2i \end{cases}$$ **(2pt)**

2) (x ; y ; z) étant la solution du système ci-dessus. On désigne par A, B, C les points du plan d'affixes respectives x, y , z.

a- Déterminer le module et un argument du nombre complexe $Z = \frac{z-x}{z-y}$ **(1pt)**

b- En déduire la nature du triangle ABC puis le construire dans le plan muni d'un repère orthonormé. **(1pt)**

Problème ..... **(10 points)**

Partie A :

1) On considère la fonction numérique g définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

a) Dresser le tableau de variations de g. **(1pt)**

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique λ telle que $1{,}89 < \lambda < 1{,}90$. **(0,5pt)**

c) Déduire de ce qui précède le signe de g(x). **(0,5pt)**

Scanned by CamScanner

2) On considère la fonction numérique f définie sur]0 ; +∞ [par :

$f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$

a) Dresser le tableau de variations de f. **(1pt)**

b) Vérifier que : $f(\lambda) = \frac{1}{2\lambda^2}$. En déduire un encadrement de $f(\lambda)$ d'amplitude 2.10^{-3} **(1pt)**

c) Tracer la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal en prenant 2 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 20 cm pour unité sur l'axe des ordonnées. **(1pt)**

Partie B :

On considère la fonction numérique F définie sur]0 ; +∞ [par : $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

1) a) Prouver que F est dérivable sur]0 ; +∞ [et préciser F '(x). **(0,5pt)**

b) En déduire le sens de variation de F. **(0,5pt)**

2) a) Vérifier que pour $t \geq 1$ on a : $\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^2}$ **(0,5pt)**

b) Pour $x > 0$ on pose : $I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$ et $J(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(t+1)^2} dt$.

i) a l'aide d'une intégration par parties, calculer I (x). **(0,5pt)**

ii) A l'aide d'une intégration par parties et de l'égalité : $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$ pour $t > 0$, calculer J(x). **(0,5pt)**

c) Déduire de ce qui précède que pour $x > 1$, on a :

$\ln 2 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$ **(0,5pt)**

d) On admet que : $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \theta$. Sans calculer θ, vérifier que $\ln 2 \leq \theta \leq 1$. **(0,5pt)**

3) Soit G la fonction numérique définie sur]0 ; +∞ [par : $G(x) = F\left(\frac{1}{x}\right) - F(x)$.

a) Calculer G '(x) pour $x > 0$. **(0,5pt)**

b) Vérifier que pour tout $x > 0$, $G(x) = 0$.**(0,5pt)**

c) Déduire de ce qui précède la limite de F en 0. **(0,5pt)**

Scanned by CamScanner

Sujet 5

Exercice 1 ..... **(5 points)**

I- La fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est donnée par une partie de son tableau de variation. On sait de plus que la droite d'équation $x = 2$ est axe de symétrie pour la courbe C de f.

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
$f'(x)$		0	$-$	$-$
$f(x)$		1 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 3	

1) Tracer la courbe C de f. **(1pt)**
2) Compléter le tableau de variation de f. **(1pt)**
3) On suppose que f(x) est de la forme $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+\beta x+\alpha}$
   a) Déterminer les réels a, b, c, β, α en utilisant les données du tableau. **(1pt)**
   b) Montrer que la restriction g de f à I =]2, 4] réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser. **(1pt)**

II- On donne A = $\overline{114}^n$; B = $\overline{111}^n$ et C = $\overline{13054}^n$, A x B = C.
1) Trouver n et l'écriture décimale de A, B, C. **(1pt)**
2) Vérifier que le PGCD (A, B) = 1. **(1pt)**

Exercice 2 ..... **(5 points)**

I- Soit l'intégrale I_n définie par :

$I_n = \int_0^1 \dfrac{dx}{\cos^{2n+1} x}$ $\quad (n \in N)$

1) Déterminer le seul réel a tel que : $\forall x \in [0, \dfrac{\Pi}{4}]$ on a :

$\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{a\cos x}{1-\sin x} + \dfrac{a\cos x}{1+\sin x}$ En déduire la valeur de Io. **(2pt)**

2) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que : $\forall n \in N^*$ on a :

$2n\, I_n = (2_n - 1)\, I_{n-1} + \dfrac{2^{-n}}{\sqrt{2}}$ (on pourra poser $\dfrac{1}{\cos^{2n+1} x} = \dfrac{1}{\cos^{2n-1} x} \times \dfrac{1}{\cos^2 x}$)

(2pt)

Scanned by CamScanner

Problème.....(10 points)

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 5 cm).

Partie A :

On considère la fonction f_1 définie sur $[o, +\infty[$ par $f_1(x) = xe^{-x^2}$ et on appelle C_1 sa courbe représentative.

1) Montrer que pour tout réel positif x, $f_1(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$. En déduire le sens de variation de f_1. **(1pt)**
2) Calculer la limite de f_1 en $+\infty$ (on pourra poser $u = x^2$). Interpréter graphiquement ce résultat. **(1pt)**
3) Dresser le tableau de variation de f_1. **(1pt)**
4) On appelle Δ la droite d'équation $y = x$. Déterminer la position de C_1 par rapport à Δ. **(1pt)**
5) Tracer C_1 et Δ. **(1pt)**

Partie B :

On considère la fonction f_3 définie sur $[0, +\infty[$ par $f_3(x) = x^3e^{-x^2}$ et on appelle C_3 sa courbe représentative.

1) Montrer que pour tout réel x positif, $f'_3(x)$ a même signe que $3 - 2x^2$. En déduire le sens de variation de f_3. **(1pt)**
2) Déterminer les positions relatives de C_1 et C_3. **(1pt)**
3) Tracer C_3 dans le même repère que C_1 (on admettra que C_3 a la même asymptote que C_1 en $+\infty$). **(1pt)**
4) On appelle D la droite d'équation $x = 1$. Soit A_1 l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe C_1, les deux axes de coordonnées et la droite D et soit A_3 l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe C_3, les deux axes de coordonnées et la droite D.

a) Calculer A_1. **(1pt)**

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $A_3 = -\frac{1}{2e} + A_1$. **(1pt)**

Scanned by CamScanner

Sujet 6

Exercice 1 ..... **(4 points)**

I- Soient a un nombre réel et n un entier naturel différent de 1.
On considère l'équation différentielle suivante (E) : $y' = ay$.
On se propose, dans cet exercice, de rechercher les solutions strictement positives de (E) sur IR.
1) On pose sur IR : $Z = y^{1-n}$ (ceci a un sens puis que $y > 0$).
Déterminer une équation différentielle satisfaite par Z et la résoudre. **(2pt)**
2) En déduire la solution, strictement positives, de (E) sur IR dans le cas où $n = 0 ; a = 2 \text{ et } y(0) = 2$. **(1pt)**
II- Un nombre s'écrit BABA (A = 1O ; B = 11) dans le système hexadécimal.
Ecrire ce nombre dans le système octal. **(2pt)**

Exercice 2 ..... **(6 points)**

I- Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$.
Soient A et B deux points d'affixes respectives $a = 1 + i \text{ et } b = -4 - i$.
Soit T la transformation du plan P qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{BM}$
1) Exprimer les coordonnées (x', y') de M' en fonction des coordonnées (x , y) de M. **(2pt)**
2) Montrer que T admet un seul point invariant Ω dont on donnera l'affixe. En déduire que T est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport. **(2pt)**

II- Déterminer une suite arithmétique U_n sachant que la somme de ces n premiers termes est égale à $3n^2 + 4n$ ($n \in \mathbb{N}$). **(1pt)**

Problème ..... **(10 points)**

Partie A

Dans cette partie, on se propose de résoudre le problème suivant : trouver une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle]0 ; +∞[, s'annulant pour x = 1 et vérifiant la propriété : pour tout x > 0, $xf'(x) - 3f(x) = 3\ln x$ (E).

1) Trouver toutes les fonctions polynômes P du 3ème degré telles que, pour tout réel x : $xp'(x) - 3P(x) = 0$
2) Soit une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle]0 ; + ∞[telle que f(1) = 0, soit h la fonction définie sur l'intervalle]0 ;+ ∞[par la relation $f(x) = x \cdot h(x)$.

a) Calculer h(1) et calculer f '(x) en fonction de h'(x) et h(x).

b) Démontrer que : f vérifie (E) $\Leftrightarrow \forall x \in]0; +\infty[$, $h'(x) = \frac{3}{x^4}\ln x$.

Scanned by CamScanner

c) On suppose que f vérifie (E). Démontrer que h est définie sur l'intervalle]0 , +∞[par :

$h(x) = \int_1^x \frac{3}{t^4} \ln t \quad dt$

d) Déterminer h(x) en fonction de x par une intégration par partie.

e) Démontrer qu'il existe une unique fonction f solution du problème posé et donner l'expression de f(x).

Partie B :

Etude de la fonction f puis étude d'une suite

Soit f la fonction définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \ln x - \frac{1}{3}$

1) Etudier les variations de f. Déterminer $\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) Construire dans un repère orthogonal (unités : 10 cm en abscisse et 5 cm en ordonnée), la courbe représentative (C) de f sur [0 ; 1]

3) Soit $\lambda \in]0 ; 1[$

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_\lambda^1 \ln t \, dt$

b) En déduire $I(\lambda) = \int_\lambda^1 f(1)\, dt$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Déterminer $\lim_{x\to 0} I(\lambda)$

1) Soit n un entier supérieur ou égal à 2

a) Soit k un entier tel que $1 \le k \le n-1$. Démonter que $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \le \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

b) En déduire les inégalités :

$$\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+.....+f\left(\frac{n}{n}\right)\right] \le \int_{\frac{1}{n}}^{1}[(f)dt \le \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+.....+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right] \quad (1)$$

C'est-à-dire : $\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \le I\left(\frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ (1)

c) En utilisant la courbe (C) et en prenant n = 10, interpréter graphiquement cet encadrement.

2) Pour n un entier supérieur ou égal à 2 on pose : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

a) Déduire des inégalités (1) l'encadrement : $I\left(\frac{1}{n}\right) \le S_n \le I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$ (2)

b) Déterminer $\lim_{\lambda\to 0} \lambda f(\lambda)$ et prouver alors que : $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{4}$

Scanned by CamScanner

3) Dans cette question, on se propose d'utiliser les résultats ci- dessus pour déterminer la limite de la suite(U_n) définie pour tout entier $n \geq 1$, $U_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

a) Démonter en utilisant un raisonnement par récurrence, que : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

b) Justifier, pour tout entier $n \geq 1$, l'égalité : $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{k}{n}\right) = \ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)$.

c) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$S_n = \dfrac{1}{12n^4}[n(n+1)]^2 - \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right) - \dfrac{1}{3}$

d) A partir du résultat précédent, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)$, puis la limite de la suite (U_n)

Scanned by CamScanner

Sujet 7

Exercice 1 .....(6 points)

I- Soit l'application T de P dans P qui à tout point M(x, y) fait correspondre M'(x', y') tel que (T) : $\begin{cases} x' = (a-1)x + 2y \\ y' = ax + y \end{cases}$ avec $(a \in R)$

1) Déterminer les valeurs de a pour que Ta soit bijective. **(1pt)**

2) Déterminer l'ensemble des points invariants par Ta. **(1pt)**

3) Déterminer le réel a pour que Ta soit involutive et caractériser géométriquement l'application Ta correspondant à cette valeur de a obtenue. **(1pt)**

II- Trouver trois réels positifs a,b, c sachant que dans cet ordre a,b,c forment une progression géométrique décroissante et que $\begin{cases} \ln a + \ln c = \ln b + \ln 2 \\ a + b + c = 7 \end{cases}$ **(2pt)**

Exercice 2 .....(6 points)

I- Soient a et b $\mathbf{Z}$. On que a et b sont la somme de deux carrées.

Il existe $x, y \in \mathbf{Z}$ tels que $a = x^2 + y^2$ et il existe Z, t tels que $b = Z^2 + t^2$.

Démontrer que le produit ab est encore la somme de deux carrées.

(Indication : Ecrire $(x^2 + y^2) = |x + iy|^2$ etc....) **(1pt)**

II- On se propose d'étudier la limite en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction f définie par :

$f(x) = \frac{Cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$ pour $x \neq \frac{\pi}{2}$.

1) Vérifier que l'on ait en présence d'une forme indéterminée. **(1pt)**

En considérant l'accroissement moyenne de la fonction Cosinus en $\frac{\pi}{2}$, déterminer la limite ci-dessus. **(1pt)**

2) Par une méthode analogue, étudier les limites des fonctions en x_0 dans les cas suivants : **(2pt)**

a- $g(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ en $x_0 = 0$; b- $h(x) = \frac{\tan(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$ en $x_0 = \frac{\pi}{2}$

Problème.....(8 points)

L'objectif de ce problème est l'étude complète de la fonction numérique f définie pour tout nombre réel x différent de -1 par :

$\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On notera (Cf) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 1cm$ et $\|\vec{j}\| = 4cm$

Scanned by CamScanner

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|$

1) Déterminer Dg et déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$. **(1pt)**

2) Etudier les variations de g ; on ne demande pas de calculer ses limites en -1 et en 0. **(0,5pt)**

3) Calculer $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ puis démontrer que l'on a :

$\forall x \in]-\infty ; -1[\cup]-\frac{1}{2} ; 0[\; g(x) < 0$ **(0,5pt)**

$\forall x \in]-1 : -\frac{1}{2}[\cup]0 ; +\infty [\; g(x) > 0$

Partie B : Etude de la limite de f à l'infini.

1) après une brève étude sur $[0 ; +\infty[$ des fonctions ; $h : t \mapsto [\ln(1+t) - (t - \frac{t^2}{2})]$

et $k : t \mapsto [\ln(1+t) - (t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3})]$ démontrer que :

$\forall t \geq 0 \quad , \quad t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$ **(2pt)**

2) En déduire que $\lim\limits_{t \to 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$ **(0,5pt)**

3) En utilisant les résultats précédents, démontrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ **(0,5pt)**

4) Donner une interprétation graphique des résultats de la question précédente. **(0,5pt)**

Partie C : Etude de la fonction f.

1) Déterminer Df et déterminer la limite de f en -1 **(0,5pt)**
2) Etudier la continuité de f en 0. **(0,5pt)**
3) Démontrer que f est dérivable en 0 et que f '(0) = 1.**(0,5pt)**
4) Calculer la dérivée de f et démontrer que f '(x) = xg(x). **(0,5pt)**
5) Dresser le tableau de variations de f. **(0,5pt)**
6) Déterminer une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 0. **(0,5pt)**

Déterminer les asymptotes à (Cf). **(0,5pt)**

Montrer que l'équation f(x) = 0 a pour solutions 0 et β avec $-0,8 < \beta < -0,7$. **(0,5pt)**

7) Tracer (T), les asymptotes et la courbe (Cf). **(0,5pt)**

Scanned by CamScanner

Sujet 8

Exercice 1 .....(5 points)

1°/ Écrire en base deux, puis en base seize, l'entier naturel N = 6932

2-/ a) Soit $(r_n)_{n\in IN}$ la suite géométrique réelle de premier terme r_0 strictement positif et de raison $\frac{2}{3}$. Exprimez le terme général r_n en fonction de n et de r_0

b) Soit $(\theta_n)_{n\in IN}$ la suite arithmétique réelle de premier terme θ_0 avec $\theta_0 \in [0 ; \frac{\pi}{2}[$ et de raison $\frac{2\pi}{3}$. Exprimez le terme général θ_n en fonction de n et de θ_0

c) $\forall n\in IN$, on pose $Z_n = r_n e^{i\theta_n}$. Sachant que $Z_0.Z_1.Z_2 = 8$, déterminez le module et un argument de chacun des nombres complexes Z_0, Z_1, Z_2

3°-/ Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormal directe, d'unité graphique 3cm, on appelle M_n le point d'affixe $Z_n = r_n e^{i\theta_n}$

a)Placez dans le plan (P) les points M_0, M_1, M_2 et M_3.

b) $\forall n\in IN$, calculez $\left\| \overrightarrow{M_n M_{n+1}} \right\|$ en fonction de n.

c)On pose $I_n = \sum_{k=0}^{n} \left\| \overrightarrow{M_k M_{k+1}} \right\|$. Calculez I_n en fonction de n, puis déterminez $\lim_{n\to+\infty} I_n$

4°/ a)Écrire sous forme trigonométrique ou exponentielle le nombre complexe :

$$Z = \frac{(1+i\tan\theta)^2}{1+\tan^2\theta}, \theta\in IR \text{ et } \theta \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$$

b) Déterminez le module et un argument du nombre complexe $z = \frac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}$

Scanned by CamScanner

Exercice 2.....(5 points)

1°/ Soit un triangle ABC du plan, I le milieu du segment [BC] et D le barycentre des points (A ; –1), (B ; 2), (C ; 2)

a)Exprimez $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.

b) Déterminez l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant l'égalité :

$$\left\| -\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\|.$$

c) Justifiez que (E) contient I.

2°/ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ direct, d'unité graphique 2 cm. Dans cette question, A est le point d'affixe 1, B le point d'affixe 2i et C le point d'affixe z.

a) Que représente géométriquement $\left|\frac{z-2i}{1-2i}\right|$ et $\arg\left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)$?

b) Dans la suite, on suppose que le point C d'affixe z est défini par : $BC = \sqrt{\frac{2}{5}} \times BA$ et

$(\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{BC}) = \alpha$ où $\alpha \in]-\pi ; 0]$ et $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Calculez $\sin\alpha$

c)Démontrez que $\frac{z-2i}{1-2i} = \frac{1-3i}{5}$. En déduire le complexe z et vérifiez que le triangle ABC est isocèle. On fera une figure. On fera une figure.

Problème.....(10 points)

A-//

Soit la fonctions numérique f à variable réelle x définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(-1 + \sqrt{1+x})$$

1°/ calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$ (0,5pt)

2°/ Etudier les variations de f sur $]0 ; +\infty[$ (1pt)

Scanned by CamScanner

3°/ Soit (C) la courbe représentant les variations de f dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$ et A le point de (C) d'abscisse 3. Calculer l'ordonnée de A. Soit B le point de (C) d'abscisse $\frac{5}{4}$; P le projeté orthogonal de B sur l'axe $(O;\vec{e_1})$ et H le projeté orthogonal de B sur l'axe $(O;\vec{e_2})$. Déterminer les coordonnées des points B, P et H.

Placer les points A, B, P et H puis tracer la courbe (C) dans $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$ (2pts)

B//

Soit **r** la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. A tout point M d'affixe z, la rotation **r** associe le point M' d'affixe z'.

1°/a.) Exprimez z' en fonction de z (1pt) . *(1pt)*

On note z = x + iy et z' = x' + iy' ; (x ; y ; x' ; y')$\in \int^4$. Exprimez x' et y' en fonction de x et de y puis x et y en fonction de x' et y'. (1pt)

b.) Déterminez les coordonnées des points A', B' et P' images respectives des points A, B et P par la rotation **r**. *(1pt)*

2°/ Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = e^{-2x} + 2e^{-x}$ et (Γ) la courbe représentant les variations de g dans le repère $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$.

a.)Montrer que si M$\in$(C), son image M' par **r** appartient à (Γ) *(1pt)*.

b.)Tracer sur le graphique précédent les points A', B' et P' et la courbe (Γ). *(1pt)*

C-//

1°/ Calculer $\int_0^{\ln 2} g(x)dx$. Interpréter graphiquement cette intégrale. (1pt)

2°/-a) Déterminer en unité d'aire (*u.a*), l'aire ***a*** du domaine plan (D) limité par [AO], [OH]et [HB] et l'arc de courbe (C) d'extrémités B et A. *(1pt)*

Scanned by CamScanner

b.) Soit $I = \int_{\frac{5}{4}}^{3} \ln(-1+\sqrt{1+x})\,dx$. Trouver une relation entre a et I puis en déduire la valeur de l'intégrale I *(0,5pt)*

Scanned by CamScanner

Sujet 9

Exercice 1 ..... (4 points)

1°/ Le système de numération est le système décimal.

a) Déterminez l'entier naturel N = PGCD (17787 ; 689 ; 297). *(0,5pt)*

b) Résoudre l'équation $(x\,;y)\in ZxZ : 13x-84y=7$ *(1pt)*

2°/ a) Déterminez tous les couples (a, b) d'éléments de Z/12Z tels que

$$\begin{cases} a\times b=\overset{\bullet}{0} \\ a-b=\overset{\bullet}{5} \end{cases} \quad (0,5pt)$$

b) Résoudre dans Z/12Z l'équation $x^2+3x-4=0$. *(1pt)*

c)Démontrez que quelque soit l'entier naturel n, on a : $3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}\equiv 0\ [17]$ *(0,5pt)*

3°/ On pose : $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx$ et $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx$.

Calculez A + B et A – B puis A et B. *(1,5pt)*

Exercice 2 ..... (6 points)

1°/ a) Résoudre l'équation différentielle (E) : $4y'' - 16y' + 17y = 0$ *(1pt)*

b) déterminer la solution particulière f telle que $f(\frac{\pi}{2})=e^{\pi}$ et $f''(\frac{\pi}{2})=\frac{15}{4}e^{\pi}$ *(0,5pt)*

2°/ Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 4 et AC = 6, l'unité de longueur étant le centimètre

a)Déterminez et construire le barycentre G des points pondérés (A ; 5), (B ; 3) et (C ; 2) *(1pt)* ; Calculez GA^2 ; GB^2 ; GC^2. Justifiez l'égalité $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=0$ *(0,5pt)*

b) Développez $(\vec{MG}+\vec{GA})^2$; $(\vec{MG}+\vec{GB})^2$; $(\vec{MG}+\vec{GC})^2$. Démontrez l'égalité $5MA^2-3MB^2+2MC^2=4MG^2-48$ *(1pt)*

c) Déterminez l'ensemble (E) des ponts M du plan vérifiant la relation : $5MA^2-3MB^2+2MC^2=24$. Prouvez que A∈ (E). *(1pt)*

Scanned by CamScanner

Problème.....(10 points)

Partie A

Soit la fonction f de IR vers IR qui à x associe $f(x) = e^{2x} - 2e^{x}$

1°/ Vérifiez que le tableau de variation de f est bien le suivant :

X	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	0	↘		↗		↗	$+\infty$
			-1		0		

2°/ Donnez une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $-\ln 2$.

3°/ Soit g la fonction de IR vers IR définie par $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}(x + \ln 2) + \frac{3}{4}$

a) Déterminez $g'(x)$ et $g''(x)$ pour tout réel x.

b) Du signe de $g''(x)$ déduire celui de $g'(x)$ puis celui de $g(x)$

c) Etudiez la position de (C) par rapport à (T).

4°/ Tracez (T) et (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé unité 1cm

Partie B

Pour tout entier naturel n, on pose f_n la fonction de IR vers IR définie par :

$f_n(x) = \dfrac{e^{x}}{(x+1)^{n}}$ et (C_n) sa courbe représentative. Prouvez que toutes les courbes (C_n) passent par un même point A dont on déterminera les coordonnées.

Partie C

On considère la fonction numérique h de la variable x définie par

$h(x) = \dfrac{1}{e-1}e^{x} - x - \dfrac{1}{e-1}$. On désigne par $(\mathcal{H})$ la représentation graphique de h dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité 2cm)

1°/ a) Calculez h(0), h(1), h(2)

b) Dresser le tableau de variation de h.

c) Prouvez que la courbe $(\mathcal{H})$ admet une asymptote dont on précisera l'équation

d) Utilisez les variations de h pour déterminer le signe de $h(x)$ selon les valeurs de x

2°/ Tracez la courbe $(\mathcal{H})$.

3°/On considère la fonction numérique φ de la variable réelle x définie par :

$\varphi(x) = e^{x} - x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{e-1}$. On note (Γ) la courbe représentative de φ dans le repère précédent.

Scanned by CamScanner

a) Etudiez le sens de variation de φ en précisant les limites aux bornes de l'intervalle de définition.

b) Prouvez que la courbe (Γ) admet une asymptote dont on précisera l'équation

c)Etudiez les positions relatives des courbes ($\mathcal{H}$) et (Γ).

d) Tracez la courbe (Γ) dans le même repère que ($\mathcal{H}$)

4°/ a)Etablir que pour tout réel x $\varphi(x) = \int_{x}^{x+1} h(t)dt$

b) Donnez une interprétation géométrique de φ(0).

Scanned by CamScanner

Sujet 10

Exercice 1 .....(5 points)

1°/ Déterminez le module et un argument de chacun des nombres complexes suivant, puis les écrire sous la forme trigonométrique $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\rho \in IR_+^*$ et $\theta \in IR$:

$z_1 = -2(\sin x + \cos x)$; $z_2 = -3e^{-\frac{2\pi}{3}i}$; $z_3 = \dfrac{-\cos 2x + i\sin 2x}{2\cos 3x - 2i\sin 3x}$

2°/ déterminez les suites arithmétiques d'entiers rationnels de raison 6 dont le produit des 4 premiers termes est 385

3°/ Un lot à usage d'habitation a la forme d'un trapèze dont les deux bases mesurent respectivement 30 m et 21 m ; les deux autres côtés mesurent 18 m et 12 m. Pour la clôture le propriétaire a besoin des poteaux de support à égale distance en nombre entier de mètres pour un nombre minimum de poteaux, avec un poteau à chaque sommet.

a) Quelle est la distance entre deux poteaux ?

d) Déterminez le nombre de poteaux nécessaire à la clôture.

Exercice 2 .....(4 points)

1°/ Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien : A, B, C et D quatre points de $\mathcal{P}$ deux à deux distincts.

a) Montrez que ABCD est un parallélogramme si et seulement si D est le barycentre du système {(A, 1) ; (B,-1) ; (C, 1)}

b) Déterminez l'ensemble (S) des points M de P tels que $\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = BD$

c) On suppose maintenant que ABCD est un rectangle. Déterminez l'ensemble ($\sum$) des points M de $\mathcal{P}$ tels que $MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2$

2°/ Déterminez la solution générale de l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = 0$. Trouvez la solution particulière f dont la courbe représentative(C) admet au point A(0 ; 1) une tangente parallèle à la droite d'équation $3x + y - 2 = 0$. Quelles sont les coordonnées de l'extrémum de (C) ?

Problème.....(11 points)

I / Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie par $f(x) = x\ln\left|1 + \dfrac{1}{x}\right|$

1°/ Précisez l'ensemble de définition D_f de f ; étudiez sa continuité et sa dérivabilité en énonçant le théorème utilisé.

2°/ a)Étudiez la dérivabilité de f' fonction dérivée de f, en déduire les variations de f'.

b) Soit F la restriction de f 'à l'intervalle I =]-1 ; 0[. Démontrez que F est une bijection de I sur un intervalle à préciser. En déduire que dans I l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique, notée α. On ne cherche pas à calculer α, mais on montrera que $\alpha > -\dfrac{1}{2}$

Scanned by CamScanner

c) Calculez $\lim_{x\to-\infty} f'(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$

d) Des résultats précédents, déduire le signe de $f'(x)$ pour $x \in D_f$ et les variations de f

3°/ Déterminez les limites de f aux bornes de D_f

4°/ Soit h : IR →IR, $x \to \begin{cases} h(x) = f(x) \text{ si } x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$

a)Démontrez que h est le prolongement par continuité de f en 0.

b) Étudiez la dérivabilité de h en zéro.

Conclusion de la partie I : Donnez le tableau de variation de f et construire sa courbe ($\mathcal{C}$) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ en précisant l'intersection de ($\mathcal{C}$) avec l'axe des abscisses.

II/ P est le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. Soit S la symétrie orthonormal par rapport à la droite Δ d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

1°/ Soit $\mathcal{C}'$ = S($\mathcal{C}$) (image de $\mathcal{C}$ par S). Construire ($\mathcal{C}'$) dans le même repère que ($\mathcal{C}$)

Soit g : IR →IR, la fonction admettant (C') comme courbe représentative dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. Vérifiez que $g(x) = (x+1)\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$ et précisez Dg, ensemble de définition de g.

2°/ Résoudre graphiquement dans IR l'équation $f(x) = g(x)$.

III/ 1°/Justifiez que $\forall n \in IN^*$, $f(n) < 1 < g(n)$. En déduire l'encadrement suivant de e

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$. Précisez cet encadrement si n = 1.

Soit $l(n)$ la largeur de cet encadrement, c'est-à-dire que

$$l(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Démontrez que $\forall n \in IN^*$ $l(n)$ est majorée par $\frac{4}{n}$ et minorée par $\frac{2}{n}$

2°/ Donnez un rang à partir duquel l'encadrement ci – dessus de e permet d'obtenir une valeur approchée de e à 10^{-3} près, c'est-à-dire que

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < 10^{-3}$$

Scanned by CamScanner

Sujet 11

Exercice 1 .....(5 points)

1°/ Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(\alpha ; \beta)$ dans chacun des cas suivants :

a) $17\alpha - 19\beta = 2$ (0,5pt); b) $17\alpha - 19\beta = -2$ (0,5pt)

2°/ Déterminer l'ensemble des entiers n tels que :

a) $n \equiv 0[17]$ et $n \equiv -2\ [19]$ (0,5pt) ; b) $n \equiv 0[19]$ et $n \equiv -2\ [17]$ (0,5pt)

3°/ En déduire l'ensemble des entiers n tels que $n^2 + 2n$ soit divisible par 323 (1pt)

4°/ P est le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ et C l'ensemble des nombres complexes. On considère l'application affine

$f : P \to P : M(x ; y) \to M'(x' ; y')$ tel que : Justifier que $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$

a) Vérifier que f est bijective (0,5pt)

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f (0,5pt) :

c) On désigne par z et z' les affixes respectives des points M et M'. Exprimer z'

Exercice 2 .....(4 points)

1°/ On considère le système suivant d'équations différentielles du 1er ordre :

l'équation : $\begin{cases} y' + 4z = 2e^{2x} \\ z' - y = e^{2x} \end{cases}$ où y et z désignent deux fonctions inconnues de variable réelle x.

a) Former l'équation différentielle du second ordre (E) à laquelle satisfait $y(x)$ (0,5pt)

b) Intégrer l'équation (E) et en déduire la solution générale du système. (0,5pt)

Préciser la solution particulière pour laquelle on a : $y = 1$ et $z = -i$ pour $x = 0$ (0,5pt).

2°/ On considère la suite complexe (W_n) définie par $\forall n \in IN^*$, $Wn = (1 + \frac{1}{nz})^n$

où $z = x + yi$ est un complexe non nul.

a) Calculer $ln|W_n| = \frac{n}{2}\ln(1 + \frac{1+2nx}{n^2(x^2+y^2)})$ (1pt)

b) On pose $\alpha_n = \frac{1+2nx}{n^2(x^2+y^2)}$ (1pt)

– Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} n\alpha_n$ (1pt)

Scanned by CamScanner

– Vérifier que $\ln|W_n| = \frac{n}{2}\alpha_n \frac{\ln(1+\alpha_n)}{\alpha_n}$ (0,5pt)

En déduire pour z complexe de module 1 $\lim_{n\to+\infty} \ln|W_n|$ puis $\lim_{n\to+\infty} |W_n|$ (1pt)

Problème.....(11 points)

I/ Pour tout réel k strictement positif on considère la fonction f_k définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$. Soit C_k la courbe représentant les variations de f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal (unité 5cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées). On considère la fonction g définie sur $[0 ;+\infty[$ par $g(x) = \ln(1 + x) - x$.

1°/ Etudier le sens de variation de g (0,5pt)

2°/ En déduire que pour tout réel a positif ou nul on a $\ln(1 + a) \leq a$ (0,5pt)

II/ 1°/ Calculer $f'_1(x)$ pour tout x élément de $[0 ; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de f_1 (1pt)

2°/ Montrer que pour tout réel x élément de $[0 ; +\infty[$ $f_1(x) = \ln(1+\frac{x}{e^x})$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$ (0,5pt)

3°/ a)Dresser le tableau de variation de f_1

b) Montrer que pour tout réel x élément de $[0 ; +\infty[$ on a $f_1(x) \leq \frac{k}{2}$. (0,5pt)

4°/ Déterminer une équation de la tangente T_k à C_k au point d'abscisse 0 (0,5pt)

5°/ Soient p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$. Etudier la position relative de C_P et C_m (0,5pt)

6°/ Tracer les courbes C_1 et C_2 ainsi que leurs tangentes respectives T_1 et T_2 au point d'abscisse 0 dans le plan orthogonal du plan. (1,5pt)

III/ Soit λ un réel strictement positif, on note $A(\lambda)$ l'aire du domaine plan limité par la courbe C_k et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

1°/ Sans calculer $A(\lambda)$, montrer que $A(\lambda) \leq \int_0^{\lambda} kxe^{-x}dx$ (On pourra utiliser les résultats de la question I) (0,5pt)

2°/ Calculer à l'aide d'une intégration par partie l'intégrale $\int_0^{\lambda} xe^{-x}dx$ (0,5pt)

3°/ On admet que $A(\lambda)$ a une limite en $+\infty$. Montrer que $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) \leq k$.

Interpréter graphiquement ce résultat (0,5pt)

Scanned by CamScanner

Sujet 12

Exercice 1 .....(6 points)

Soient A et B deux points distincts du plan affine euclidien $\mathcal{P}$ et G le barycentre du système {(A ; –2), (B ; 1)}

1°/ Démontrer que le point A est le milieu du segment [GB]

2°/ Montrer que l'ensemble (Γ) des points M du plan $\mathcal{P}$ vérifient $\frac{MB}{MA}=\sqrt{2}$ est le cercle de centre G et de rayon r que l'on déterminera en fonction de AB

3°/ Soit C un point de (Γ) et (D) l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$ tels que : $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 0$. Montrer que le point C appartient à (D)

4°/ Calculer $\overrightarrow{MC} \bullet \overrightarrow{CG}$ et en déduire alors l'ensemble (D).

5°/ Démontrez que $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 2 .....(6 points)

1°/ a) Résoudre dans $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ l'équation d'inconnue (p , q): $11p - 7q = 1$

b) La division euclidienne d'un système entier naturel n par 7 donne pour reste 4, le même entier divisé par 11 donne pour reste 3. Quel sera son reste dans la division euclidienne par 77 ?

c)Déterminez les valeurs de l'entier naturel n inférieures à 200.

2°/ a)Résoudre dans IR l'équation différentielle d'inconnue f :

$x^2f'(x) + 2xf(x) - 1 = 0$

b) Soit l'équation (E) : $x^2f'(x) - 2xf(x) + f^2(x) = 0$. On pose $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Montrer que l'équation (E) est équivalente à $x^2g'(x) + 2xg(x) = 1$.Déduisez – en la résolution de l'équation (E).

3°/ Soit (U_n) une suite arithmétique décroissante d'entiers naturels.

a) Sachant que $U_1 + U_2 + U_3 = 105$, calculez U_2.

b) On désigne par m et d respectivement le PPCM et le PGCD de U_1 et U_3 sachant que $\frac{m}{d} = 12$, déterminer U_1 et U_3.

c) En déduire l'expression de U_n en fonction de n. Calculez $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$ en fonction de n. Déterminez n pour que S_n soit égale à 525.

Scanned by CamScanner

Problème ..... (8 pts)

Les parties A et B du problème sont indépendantes

A// Le plan muni d'un repère orthonormal $(o, \vec{u}, \vec{v})$ direct. On désigne par f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M distinct de O et d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z'=\frac{5}{\bar{z}}$ ou $\bar{z}$ est le conjugué de z.

1°/ Déterminez l'affixe du point A' image par f du point A d'affixe 1+i . Vérifiez que les points O , A et A' sont alignés.

2°/ Montrez que pour tout point M distinct de O, les points O, M et M' sont alignés.

3°/ Trouvez l'ensemble (Γ) des points invariants par f.

4°/ a) Soit $z \neq 0$, montre que si $|z-(1+i)| = \sqrt{2}$ alors $\left|\frac{5}{1-i} - \frac{5}{\bar{z}}\right| = \left|\frac{5}{\bar{z}}\right|$.

b) En déduire que si M est un point, autre que O du cercle (C) de centre A passant par O, alors son image M' par f appartient à une droite (D) que l'on déterminera.

c) Montrez que tout point de D est l'image par f d'un point de (C) – {0}.

d) Tracer (Γ), (D) et (C) dans le même repère.

e) En déduire l'image de (C) – {0} par f.

B//

n est un entier naturel non nul, on considère la fonction f_n définie sur [0 ; +∞[par $f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - e^{-x}$.

1°/ a) Etudier les variations de f_1 puis donner une équation de la tangente (T) à sa courbe (C_1) au point d'abscisse 0

b) Tracer (C_1) et (T) dans le même repère (unité 3cm)

c)Exprimer en cm2 l'aire du domaine plan limité par (T), (C_1) et la droite d'équation $x = 1$

2°/ Montrer que f_1 réalise une bijection de [0 ; +∞ [vers un intervalle J que l'on précisera. Construire sur le même repère que (C_1) la courbe (C_1') de la bijection réciproque f_1^{-1}

3°/ a) Calculez $f_n'(x)$ et donnez son signe sur [0 ; +∞ [. Précisez $f_n(0)$ et $\lim_{x \to +\infty} f_n(x)$. Donnez le tableau de variation de f_n.

b) Calculez $f_n(n)$, quel est son signe ?

Scanned by CamScanner

c) Démontrez par récurrence que, pour tout n élément de IN $e^{n+1} > 2n+1$, en déduire le signe de $f_n(n+1)$.

d) Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur [n ; n+1]. Cette solution est notée U_n.

e) Calculez $\lim_{n\to+\infty} U_n$ puis $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{n}$.

f) En remarquant que pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, $\frac{x-n}{x+n} = 1 - \frac{2n}{x+n}$, montrez que la valeur moyenne M_n de f_n sur $[0 ; U_n]$ est égale à $1 - \frac{1}{U_n} + \frac{e^{-U_n}}{U_n} - 2(\frac{n}{U_n}) \ln(\frac{U_n}{n} + 1)$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} M_n$.

Scanned by CamScanner

Sujet 13

Exercice 1 .....(4 points)

1°/ a) Déterminer sous forme algébrique les racines sixièmes de l'unité,

C'est-à-dire trouver les nombres complexes u tels que $u^6=1$. *(1pt)*

b) Calculer $(1- i)^6$. *(0,5pt)*

c) En utilisant les questions a) et b) donner la forme algébrique des solutions de l'équation d'inconnue complexe $z : 8z^6 + i = 0$ *(1,5pt)*

2°/ a) Démontrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $5^{3n} - 3^{3n}$ est divisible par 49. *(1pt)*

b) En déduire que si l'entier n n'est pas multiple de 3 alors $5^{2n} + 15^n + 3^{2n}$ est divisible par 49. *(0,5pt)*

3°/ Soient A, B et C 3 points non alignés d'un plan $\mathcal{P}$ et α un nombre réel. A tout point M de $\mathcal{P}$ on associe par l'application f_α le point M' tel que :

$\overrightarrow{MM'} = (2-\alpha)\ \overrightarrow{MA} - 4\ \overrightarrow{MB} + (1+2\alpha)\ \overrightarrow{MC}$.

Préciser, suivant les valeurs de α la nature et les éléments caractéristiques de l'application f_α. *(1,5pt)*

Exercice 2 .....(6 points)

I/ Soit (U_n) la suite numérique définie par $U_0 = 0$ et pour $n \geq 1$

$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}$

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$

(On pourra appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction f qui à x associe $\ln x$ sur l'intervalle $[n\ ;\ n+1]$) *(1pt)*

b) En déduire que pour tout entier non nul n on a : $Un \geq \ln(n+1)$ puis calculer la limite de (U_n) quand n tend vers $+\infty$ *(1pt)*

II/ Le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé et $\mathbb{C}$ est le corps des nombres complexes. A tout point $M(x, y)$ d'affixe z l'application f associe le point $M'(x', y')$ d'affixe z' tel que $\begin{cases} x' = x - y - 1 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$

Scanned by CamScanner

Exprimer z' en fonction de z puis donner la nature et les éléments caractéristiques de f *(2pts)*

Problème.....(10 points)

A/ On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{1}{2}[\ln x - \ln(1-x)]$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 5 *cm*)

1°/ a) Déterminer l'ensemble de définition de f puis calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de cet ensemble. En déduire les équations des droites asymptotes à la courbe (C) *(1pt)*

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation *(0,5pt)*

2°/ a) Montrer que le point $A(\frac{1}{2} ; 0)$ est un centre de symétrie de (C) *(0,5pt)*

b) Déterminer une équation de la tangente (D) à (C) au point A. *(0,5pt)*

c) On pose $\varphi(x) = f(x) - 2x + 1$. Etudier les variations de φ puis déduire les positions relatives de (C) et (D) *(0,5pt)*

3°/ Tracer (C) et (D) dans le repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ *(1pt)*

B/ 1°/ On considère la fonction h définie sur $]0 ; 1[$ par $h(x) = f(x) - x$

a) En utilisant les variations de la fonction h, démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique qu'on notera α dans $]0 ; 1[$. *(0,5pt)*

b) Montrer que $0,8 \leq \alpha \leq 0,9$. *(0,5pt)*

2°/ On appelle s la réflexion d'axe $\Delta : y = x$ et (C') l'image de (C) par s

a) Démontrer qu'un point $M(x, y) \in (C')$ si et seulement si $x \in]0 ; 1[$ et $2x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$. En déduire que (C') est la représentation graphique de la fonction g définie par $g(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$ *(1pt)*

b) Tracer Δ et (C') dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ de la partie A/ *(1pt)*

Scanned by CamScanner

c) Montrer que le nombre α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$ *(0,5pt)*

C/ 1°/ On appelle I l'intervalle] 0,8 ; 0,9[

a) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$. *(0,5pt)*

b) Montrer que pour tout réel x de I, $g(x)$ est aussi élément de I et que

$0 \leq g'(x) \leq 0,3$ *(0,5pt)*

c) En déduire que pour tout x élément de I on a $|g(x) - \alpha| \leq 0,3 \,|\, x - \alpha \,|$. *(0,5pt)*

2°/ On considère la suite (Un) d'éléments de I définie par $U_0 = 0,8$ et pour tout entier naturel n $U_{n+1} = g(U_n)$

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \alpha| \leq 0,3 \times |\, Un - \alpha \,|$. Puis

$|\, Un - \alpha \,| \leq 0,1 \times (0,3)^n$ *(0,5pt)*

b) Déterminer un entier p tel U_p soit une valeur approchée de α à 10^{-4} près

Donner une valeur approchée de U_p à 10^{-4} près *(0,5pt)*.

Scanned by CamScanner

Sujet 14

Exercice 1 .....(5 points)

1°/ Calculer les intégrales suivantes :

a.) $\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1}dx$ (On pourra mettre $\frac{x^2-1}{2x-1}$ sous la forme $ax + b + \frac{c}{2x-1}$ où a, b et c sont trois que déterminera). *(0,5pt)*

b.) $\int_{0}^{1} x^3\sqrt{1+x}dx$ (On pourra utiliser le changement de variable $u = x + 1$) *(0,5pt)*

2°/ a.) Décomposer les nombres 450 et 320 en produit de facteurs premiers. *(0,5pt)*

b.) Quel est le PGCD de 450 et de 320 ? *(0,5 pt)*

c.) Une pièce rectangulaire a pour dimensions 4,5m et 3,20m. On souhaite calculer cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe. Quel est le plus grand côté possible (en cm) de la dalle carrée ? (1pt)

3°/ Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé on désigne par $\mathcal{H}$ l'ellipse d'équation : $4x2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$.

Donnez l'équation réduite de $\mathcal{H}$ et préciser son centre, ses sommets et ses foyers *(1,5pts)*

Exercice 2 .....(5 points)

1°/ Dans l'ensemble **C** des nombres complexes on donne l'équation

$(F) : z^4 - 2z^3(1+\sqrt{3}) + 2z^2(3+2\sqrt{3}) - 4z(2+\sqrt{3}) + 8 = 0$

a.) Démontrer que si le complexe z0 est une solution de l'équation (F) alors il en est de même pour son conjugué $\overline{z_0}$. *(0,5pt)*

b.) vérifiez que le complexe $z_0 = 1+ i$ est une solution de l'équation (F). En déduire une seconde solution z_1 de l'équation *(1pt)*

c.) Déterminer les deux autres solutions z_2 et z_3 de l'équation (F) *(1pt)*

d.) Représentez dans le plan complexe les points images des quatre solutions de l'équation (F). (Le plan est rapporté au repère à un repère orthonormé d'unité graphique 1cm) *(0,5pt)*

Scanned by CamScanner

e.) Déterminez la nature du quadrilatère ainsi obtenu puis calculer en cm^2 l'aire de sa surface *(1 pt)*

Problème .....(10 pts)

Les parties I et II du problème sont indépendantes

I/ $\mathcal{P}$ est le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ direct. f et g sont les applications affines $\mathcal{P}$ qui associent à tout point M(x; y) le point M'(x'; y') telles que :

$$f: \begin{cases} x' = 2x+1 \\ y' = 2y+1 \end{cases} \text{ et } g: \begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y-1 \end{cases}$$

1°/ Pour chacune des applications f et g :

a.) Déterminer l'ensemble des points invariants, préciser celles qui sont bijectives *(1 pt)*

b.) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de chacune d'elles *(1pt)*

2°/ Définir analytiquement la réflexion d'axe Δ d'équation $y = x$. *(0,5pt)*

II/ A./ Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie pour tout réel $x \neq 1$par $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{2(1-x)}$. On appelle ($\Gamma$) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (On ne demande pas de représenter (Γ))

1°/ a.) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en 1 (1pt)

b.) Vérifier que pour tout $x \neq 1$, f(x) peut s'écrire : $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{-x} \times \dfrac{x}{2(x-1)}$. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$ *(0,75pt)*

2°/ a.) Montrer que $f'(x) = \dfrac{xe^{-x}}{2(1-x)^2}$ *(0,5pt)*

b.) Etudier les variations de f. (0,5pt)

c.) Montrer que f admet un minimum que l'on précisera sur $]-\infty ; 1[$ *(0,5pt)*

Scanned by CamScanner

B/ On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = 0$, où y est une fonction deux fois dérivable sur IR.

1°/ Résoudre (E) . (0,5pt)

2°/ On considère les solutions de (E) dont la courbe représentative passe par le point A $(0 ; \frac{1}{2})$

a.) Montrer que ces solutions s'écrivent sous la forme $(ax + \frac{1}{2})e^{-x}$. On note $h_a(x) = (ax + \frac{1}{2})e^{-x}$ où a est un réel. *(0,5pt)*

b.) Etudier le sens de variation de ha selon les valeurs de a et montrer que pour tout réel $a \neq 0$, h_a admet un extrémum pour une valeur de x que l'on déterminera en fonction de a. *(1,25pt)*.

c.) On note C_a la courbe représentative de ha et S_a le point de C_a correspondant à l'extrémum de ha ; vérifier que pour tout réel $a \neq 0$, S_a est un point de la courbe (Γ) de la partie **A.//** *(0,5pt)*

3°/ Construire dans le plan muni du repère $(O; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité 4cm) les courbes C_a pour les valeurs de a : $\frac{1}{4}$; – 2 ; 0 ; 1 et 2. *(2pts)*

4°/ Soit λ un réel supérieur à – 2 ; on appelle D_λ l'ensemble des points M du plan limité par l'axe des abscisses, la courbe $C_{\frac{1}{4}}$ et droite $x = \lambda$.

a.) Exprimer $I = \int_{-2}^{\lambda} h_{\frac{1}{4}}(t)dt$ en fonction de λ ; on pourra utiliser une intégration par parties ou se servir de l'équation différentielle (E). *(0,5pt)*.

b.) soit A(λ) la mesure de l'aire de D_λ ; quelle est la limite de A(λ) quand λ tend vers $+\infty$ *(0,5pt)*

Scanned by CamScanner

Sujet 15

Exercice 1 ..... (4 pts)

1°/ On appelle nombre triangulaire tout entier naturel qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a^2+a}{2}$ avec a un entier naturel non nul.

a.) Démontrer que si n est la somme de deux nombres triangulaires, alors $4n + 1$ est la somme de deux carrés. *(1pt)*

b.) On pose $n = 3$; $4n + 1$ est-il la somme de deux carrés d'entiers ?

Etudier la réciproque de la propriété **a.)** *(1pt)*

2°/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, (unité graphique 4 cm) on considère la courbe (C) d'équation $y^2 = x^2(1 - x^2)$.

a.) Préciser les éléments de symétrie de (C) *(1pts)*

b.) Construire (C) dans le plan muni du repère orthonormé. $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. *(1,5 pt)*

Exercice 2 ..... (6 pts)

1°/ Soit f l'application affine du plan P dans lui-même définie par son expression analytique : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases}$

a.) Montrez que f admet un seul point invariant J. *(0,5pt)*

b.) Montrez que $\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$ où M' = f(M). En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f. *(1pt)*

c.) Déterminer le centre et le rayon du cercle **C '** image du cercle **C** d'équation :

$x^2 + y^2 - 2y = 0$ par f. *(1pt)*

2°/ On considère l'équation différentielle : $y'' - 3y' + 2y = 8x^2 - 24x$ (E)

a.) Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction numérique g définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de l'équation (E) dans $\mathbb{R}$ *(1,5pt)*

Scanned by CamScanner

b.) Résoudre l'équation $y'' - 3y' + 2y = 0$; puis en déduire les solutions de l'équation (E) *(1,5pt)*

Problème.....(10 pts)

A-//

Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + \ln x$$

1°/ a.) Justifier l'existence d'un réel unique α compris entre 0,5 et 1 tel que

$$f(\alpha) = 0 \text{ } (1,5pt)$$

b.) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x *(1 pt)*

2°/ Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + (\ln x)^2$

Calculer $g'(x)$ et vérifier que $g'(x) = \frac{2}{x} f(x)$. En déduire le tableau de variation de g *(1,5pt)*

B-//

1°/ Montrer que le réel α défini dans la partie **A-// 1°/ a.)** est solution de l'équation $h(x) = x$, où h est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$h(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 + \ln x). \text{ } (1pt)$$

2°/ a.) Calculer $h'(x)$ et étudier son signe sur $[\frac{1}{2} ; 1]$ *(0,5pt)*

b.) Prouver que $h([\frac{1}{2} ; 1]) \subset [\frac{1}{2} ; 1]$ *(0,5pt)*

c.) Calculer $h''(x)$ et étudier son signe sur $[\frac{1}{2} ; 1]$. *(0,5pt)*

d.) En déduire que, $\forall x \in [\frac{1}{2} ; 1]$ on a $0 \leq h'(x) \leq 0,3$. *(0,5pt)*

3°/ On définit la suite (U_n) par $U_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = h(U_n)$.

a.) Montrer que, pour tout entier naturel, $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$, et que la suite (U_n) est décroissante. *(1 pt)*

b.) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que l'on a,

Scanned by CamScanner

$\forall n \in \mathbb{N}, \sigma U_{n+1} - \alpha\sigma \leq (0,3) \times \sigma U_n - \alpha\sigma$, puis que $\sigma U_n - \alpha\sigma \leq \frac{1}{2}(0,3)^n$ *(1pt)*

c.) En déduire que la suite (U_n) converge vers α *(0,5pt)*

d.) Déterminer un entier n_0 tel que U_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-5} près et indiquer la valeur de U_{n_0} donnée par la calculatrice. (avec 5 décimales) *(0,5pt)*

Scanned by CamScanner

Sujet 16

Exercice 1 .....(4 pts)

1°/ On appelle nombre triangulaire tout entier naturel non nul qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a^2+a}{2}$ avec $a \in \mathbb{N}^*$.

a.) Démontrer que si n est la somme de deux nombres triangulaires, alors $4n + 1$ est la somme de deux carrés. *(1pt)*

b.) On pose $n = 3$; $4n + 1$ est il la somme de deux carrés d'entiers ? *(0,5pt)*

Etudier la réciproque de la propriété **a.)** *(0,5pt)*

b.) Etudier le cas général. *(0,5pt)*

2°/ Etudier et représenter graphiquement la fonction f définie par :

$$f(x) = 8\sin x - \tan x. \text{ (2pts)}$$

En déduire le nombre de solutions de l'équation $\frac{m}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} = 8$; m étant un paramètre réel et $x \in [0 ; 2\pi]$. *(0,5pt)*

Exercice 2 .....(4 pts)

1°/ Résoudre l'équation $z \in \mathbb{C}$; $z^2 - [(1 + 2i)u + 1]z + (-1 + i)u^2 + i.u = 0$ où u est un paramètre complexe. On appellera z' la solution qui est un polynôme du premier degré en u et dont le coefficient de u est $(1 + i)$; z'' l'autre solution *(1,5pt)*

2°/ Dans le plan complexe on appelle P le point d'affixe u, M' celui d'affixe z', M'' celui d'affixe z''.

a.) Par quelle transformation T_1 du plan passe-t-on de P à M' ? Expliciter ses éléments caractéristiques. *(1pt)*

b.) Par quelle transformation T_2 du plan passe-t-on de P à M'' ? Expliciter ses éléments caractéristiques. *(1pt)*

3°/ Par quelle transformation T du plan passe-t-on de M' à M'' ? Donner les éléments caractéristiques de T. *(1,5pt)*

Problème.....(10 pts)

A-//

On se propose de déterminer l'ensemble **F** des fonctions numériques f d'une variable réelle x définies et dérivables sur $]-1 ; +\infty[$ et vérifiant :

Scanned by CamScanner

$$\forall x \in]-1;+\infty[\ (1+x)f'(x) + f(x) = 1 + \ln(1+x)$$

1°/ Soit $f \in \mathbf{F}$ et soit g la fonction définie par : $\forall x \in]-1;+\infty[, g(x) = (1+x)f(x)$.

Démontrer que g est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et que g est une primitive de la fonction h définie par : $\forall x \in]-1;+\infty[\ h(x) = 1 + \ln(1+x)$. *(1pt)*

Réciproquement, soit g_1 une primitive de h. Démontrer que la fonction f_1 définie par : $\forall x \in]-1;+\infty[, f_1(x) = \dfrac{g_1(x)}{1+x}$ est élément de **F**. *(0,5pt)*

2°/a.) Déterminer les réels a et b tels que

$$\forall x \in]-1;+\infty[, \frac{x}{1+x} = a + \frac{b}{1+x}. \text{ (0,5pt)}$$

b.) À l'aide d'une intégration par partie déterminer l'ensemble des primitives de h. *(1pt)*

3°/ En déduire l'ensemble F. *(1pt)*

B-//

On considère l'ensemble des fonctions f_k de $]-1;+\infty[$ vers $\mathbb{J}$ définies par :

$$\forall x \in]-1;+\infty[\ f_k(x) = \ln(1+x) + \frac{k}{1+x}\ ;\ k \in \mathbb{J}$$

1°/ Discuter suivant les valeurs de k, le sens de variation de f_k. *(1pt)*

2°/ Tracer dans le même repère les représentations graphiques des fonctions f_1, f_0. et f_{-1}. *(1,5pt)*

C-//

1°/ Soit $P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - \ldots\ldots\ldots - x^{2n-1}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in]-1;+\infty[$

$P_n(x) = f_0'(x) - \dfrac{x^{2n}}{1+x}$. En déduire que $f_0'(x) = P_n(x) + \dfrac{x^{2n}}{1+x}$. *(1pt)*

Scanned by CamScanner

2°/ Démontrer que $\forall n \in \rfloor, \forall x \in [0\ ;\ 1],\ \dfrac{x^{2n}}{1+x} \leq x^{2n}$. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$ la double inégalité : $0 \leq \int_0^1 \dfrac{x^{2n}}{1+x}dx \leq \dfrac{1}{2n+1}$ *(1pt)*

3°/ On considère la suite (W_n) définie par $\forall n \in \rfloor^*$

$$W_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots - \frac{1}{2n}.$$

Démontrer que $\forall n \in \rfloor^*\ f_0(1) = W_n + \int_0^1 \dfrac{x^{2n}}{1+x}dx$. En déduire que la suite (W_n) admet, lorsque n tend vers $+\infty$, une limite que l'on précisera. *(1pt)*

4°/ Trouver un entier n_0 tel que $\ln 2 - W_{n_0} < 10^{-1}$. *(0,5pt)*

Scanned by CamScanner