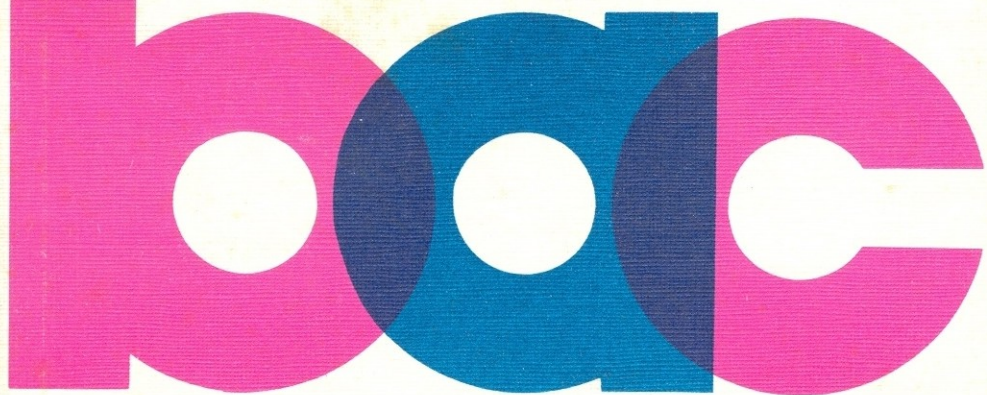


ENTRAINEMENT A L'EXAMEN



F et H

P. FAURE

MATHEMATIQUES

*nathan
technique
formation*

Entraînement à l'examen

Paul Faure

Agrégé de mathématiques

Inspecteur Pédagogique Régional

B.A.C.

F. et H.

MATHÉMATIQUES

NATHAN TECHNIQUE FORMATION

Dans la même collection

- Mathématiques CAP - Mécanique
- CAP - Électricité, Électrotechnique
- CAP - Métiers du bâtiment
- CAP - Métiers de l'habillement
- BEP - Électricité, électronique
- BEP - Mécanique
- CAP - Commerciaux

© Editions Fernand Nathan 1979.

*Toute reproduction, même partielle, de cet ouvrage est interdite.
Une copie ou reproduction par quelque procédé que ce soit, photographie, photocopie, microfilm, bande magnétique, disque ou autre, constitue une contrefaçon passible des peines prévues par la loi du 11 mars 1957 sur la protection des droits d'auteur.*

Avant-propos

Ce livre « d'entraînement à l'examen » est destiné aux étudiants qui préparent les baccalauréats de technicien des séries F et H. Il met en évidence les résultats essentiels du cours qui doivent être connus et présente de nombreux exercices et problèmes dont la plupart ont été donnés aux examens.

Pour cela, le manuel comprend :

- des *résumés de cours* suivis d'exemples simples, couvrant la totalité du programme;
- des *exercices résolus* groupés en familles : trigonométrie, résolution d'équations, intégration, équations différentielles, géométrie, nombres complexes;
- des *problèmes de synthèse* entièrement résolus illustrant les différentes parties du cours de mathématiques.

Cet ouvrage se propose de donner, par la grande variété des thèmes traités, des méthodes de résolution, tout en incitant la réflexion des élèves.

Je serai reconnaissant à tout lecteur qui voudrait bien m'envoyer des suggestions susceptibles d'améliorer l'ouvrage.

P.F.

RÉSUMÉS DE COURS

1. Fonctions numériques

1. Ensemble de définition d'une fonction numérique f .

C'est l'ensemble $\mathcal{D}$ des réels x qui ont une image par f :

$$\mathcal{D} = \{x / x \in \mathbb{R} \text{ et } \exists y, y = f(x)\}.$$

2. Fonction paire. Fonction impaire.

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de la fonction f tel que si $x \in \mathcal{D}$, $-x \in \mathcal{D}$.

f est dite *paire* si
 $(\forall x \in \mathcal{D}) f(-x) = f(x)$

f est dite *impaire* si
 $(\forall x \in \mathcal{D}) f(-x) = -f(x).$

3. Fonction périodique.

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est *périodique*, de période T , si T est le plus petit nombre réel strictement positif tel que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x + T) = f(x).$$

4. Fonction croissante (décroissante) sur un intervalle A .

La fonction f est croissante sur A , si et seulement si, quels que soient x_1 et x_2 distincts de A :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0 \quad (\text{décroissante : } \leq).$$

5. Composée de deux fonctions.

Soit f et g deux fonctions dont les ensembles de définition sont $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$ tels que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$. La fonction $g \circ f$ est la fonction qui, à tout x de $\mathcal{D}_f$, associe le réel $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$.

La loi $\circ$ de composition est une loi associative mais non commutative.

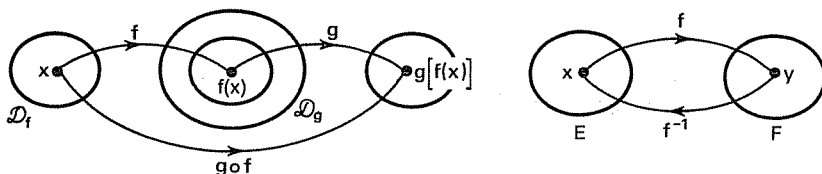


Fig. 1

6. Application réciproque d'une application bijective.

Si f est une bijection de E sur F , l'application qui à tout élément y de F associe l'élément x de E tel que $y = f(x)$ est une application de F dans E , appelée *application réciproque* de f . Elle est notée f^{-1} .

Si f est une bijection de E sur F , alors f^{-1} est une bijection de F sur E .

EXEMPLES

7. Ensembles de définition de fonctions.

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions numériques définies par :

$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x+1)}$	$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
$g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$	$\mathcal{D}_g =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$
$h(x) = \sqrt{9 - x^2}$	$\mathcal{D}_h = [-3, 3]$
$j(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$	$\mathcal{D}_j =]1, +\infty[$
$k(x) = \frac{1}{2 - x }$	$\mathcal{D}_k =]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[$

8. Composition de fonctions.

Soit f et g les fonctions numériques définies par $f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = -x + 3$. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Posons $u = f(x) = 2x - 1$.

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(u) = -u + 3 \quad \text{donc} \quad (g \circ f)(x) = -2x + 4.$$

Posons $v = g(x) = -x + 3$.

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(v) = 2v - 1 \quad \text{donc} \quad (f \circ g)(x) = -2x + 5.$$

9. Croissance de fonctions.

1. Démontrer que la somme de deux fonctions décroissantes sur un intervalle A est décroissante sur A .

2. Soit la fonction homographique f telle que $f(x) = \frac{2}{x+1}$.

Montrer qu'elle est décroissante sur l'intervalle $A = [0, 9]$. Que peut-on dire de la fonction h définie sur $[0, 9]$ par $h(x) = -x + \frac{2}{x+1}$?

1. x_1 et x_2 étant deux valeurs distinctes de A ,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0 \quad \text{et} \quad \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0.$$

On en déduit par addition :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1) + g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0 \quad \text{soit} \quad \frac{(f+g)(x_2) - (f+g)(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0.$$

Donc $(f+g)$ est décroissante sur A (résultat analogue avec des fonctions strictement décroissantes).

2. Soit x_1 et x_2 deux valeurs distinctes de l'intervalle $[0, 9]$.

Formons :

$$\alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{x_2 - x_1} \left(\frac{2}{x_2 + 1} - \frac{2}{x_1 + 1} \right)$$

$$\alpha = \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{2(x_1 - x_2)}{(x_2 + 1)(x_1 + 1)} \quad \text{soit} \quad \alpha = \frac{-2}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}.$$

Sur A , $x_1 + 1 > 0$ et $x_2 + 1 > 0$, donc sur l'intervalle A , α étant strictement négatif la fonction f est *strictement décroissante*.

La fonction $g : x \mapsto -x$ est strictement décroissante sur $[0, 9]$.

La fonction h étant la somme de deux fonctions strictement décroissantes sur l'intervalle A est donc *strictement décroissante sur A* .

10. Application réciproque.

La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x-3}$ admet-elle une fonction réciproque?

L'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f est $\mathbb{R} - \{3\}$.

y étant un réel, cherchons s'il existe un élément x de $\mathcal{D}_f$ tel que

$$y = \frac{1}{x-3} \quad \text{soit} \quad y(x-3) = 1 \quad \text{donc} \quad xy = 1 + 3y.$$

Si $y \neq 0$, il existe un et un seul élément de $\mathcal{D}_f$, $x = \frac{1+3y}{y}$ tel que $f(x) = y$. On en déduit que f est une application bijective de $\mathbb{R} - \{3\}$ sur $\mathbb{R}^*$.

L'application réciproque f^{-1} de f est donc définie par

$$f^{-1}(y) = \frac{1+3y}{y}.$$

En changeant x et y de façon à appeler x la variable et y l'image de x par f^{-1} , l'application f^{-1} est une bijection de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R} - \{3\}$ définie par

$$f^{-1}(x) = \frac{1+3x}{x}.$$



2. Fonction continue

1. Fonction continue en un point.

a) Définition

Soit une fonction numérique f admettant $\mathcal{D}$ pour ensemble de définition. f est continue au point x_0 de $\mathcal{D}$, si pour tout intervalle ouvert J contenant $f(x_0)$, il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que :

$$(\forall x \in \mathcal{D} \cap I) \quad f(x) \in J.$$

De façon équivalente, f est continue au point x_0 de $\mathcal{D}$ si

$$(\forall \varepsilon > 0), \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D} \quad (|x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

b) Opérations sur les fonctions continues en un point

Si f et g sont deux fonctions continues en x_0 et si k est un réel, alors les fonctions $f + g$, kf , fg sont continues en x_0 .

Si f et g sont deux fonctions continues en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$, alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en x_0 .

Si f est une fonction continue en x_0 et si g est une fonction continue en $f(x_0)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue en x_0 .

2. Continuité sur un segment.

Si une fonction f est continue sur un segment $[a, b]$ alors l'image par la fonction de ce segment est un segment $[m, M]$ (fig. 1).

Si f est continue sur $[a, b]$ et si $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors il existe un point x_0 de $]a, b[$ tel que $f(x_0) = 0$ (fig. 2).

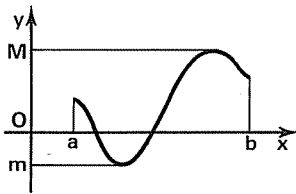


Fig. 1

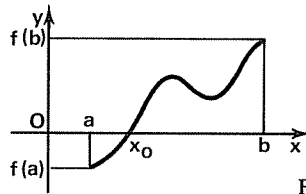


Fig. 2

3. Fonction réciproque d'une fonction continue.

Une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle A est une bijection de A sur $f(A)$.

La fonction réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(A)$. Dans un repère orthonormé, les représentations graphiques de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

4. Fonctions polynômes. Fonctions rationnelles.

Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions rationnelles sont continues dans tout intervalle où elles ne s'annulent pas.

EXEMPLES

5. Continuité en un point.

La fonction f définie par $f(x) = x + |x|$ est-elle continue au point 0?

Pour $x \geq 0$, $f(x) = x + x$ soit $f(x) = 2x$.

Pour $x < 0$, $f(x) = x - x$ soit $f(x) = 0$.

D'autre part $f(0) = 0$. On en déduit la représentation graphique de f (fig. 3). Soit un intervalle ouvert J contenant $f(0)$: $J =]-\varepsilon, \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$; cherchons si on peut trouver un intervalle I contenant 0 tel que

$$(\forall x \in I) \quad f(x) \in J.$$

On a donc : $-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$ soit $-\varepsilon < x + |x| < \varepsilon$.

Si $x > 0$, $0 < 2x < \varepsilon$ donc $x < \frac{\varepsilon}{2}$.

Si $x < 0$, $-\varepsilon < 0 < \varepsilon$ (vérifié pour tout x négatif).

Il suffit donc de considérer l'intervalle $I =]-\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}[$. La fonction f est donc continue au point 0.

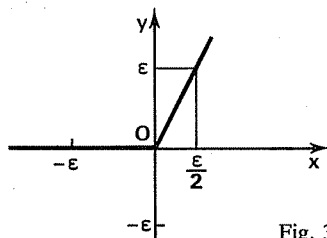


Fig. 3

6. Continuité sur un segment.

On considère la fonction f telle que $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Calculer $f(1)$ et $f(2)$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine comprise entre 1 et 2.

$$f(1) = 1 - 3 + 1 = -1 \quad f(2) = 8 - 6 + 1 = 3.$$

La fonction f est une fonction polynôme; elle est donc continue sur le segment $[1, 2]$. Comme $f(1) \cdot f(2) < 0$ on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine comprise entre 1 et 2.

7. Fonction réciproque.

Soit la fonction f définie sur $[0, 2]$ par $f(x) = x^2 - 3$. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque g . Préciser les propriétés de g .

Soit a et b deux valeurs distinctes de x de l'intervalle $[0, 2]$.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^2 - 3 - (a^2 - 3)}{b - a} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = b + a.$$

Sur $[0, 2]$, $b + a > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $[0, 2]$. La fonction f est continue, strictement croissante sur $[0, 2]$; elle est donc une bijection de $[0, 2]$ sur $[f(0), f(2)] = [-3, 1]$. Elle admet donc une fonction réciproque g définie sur le segment $[-3, 1]$, continue et strictement croissante.

L'arc AB est la représentation graphique de f (fig. 4).

L'arc CD est la représentation graphique de g , symétrique de l'arc AB par rapport à la première bissectrice (repère orthonormé).

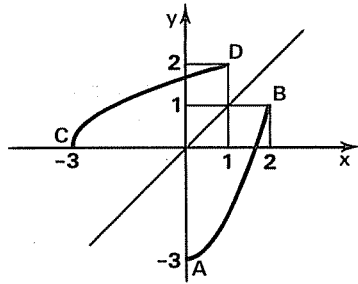


Fig. 4



3. Limites

1. Limite d'une fonction en un point.

Une fonction f définie sur $\mathcal{D}$ admet une limite a au point x_0 si quel que soit l'intervalle ouvert $\mathcal{A}$ contenant a , il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que

$$\forall x \in \mathcal{D} \cap [J - \{x_0\}] \quad f(x) \in \mathcal{A}$$

De façon équivalente, f admet a pour limite au point x_0 si

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \alpha > 0) \quad \forall x \in \mathcal{D} \quad (0 < |x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - a| < \varepsilon).$$

On écrit :

$$\lim_{x_0} f = a \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

2. Limite et continuité.

Une fonction f définie dans un intervalle ouvert contenant x_0 est continue en x_0 , si et seulement si, la limite de f en x_0 est $f(x_0)$.

3. Théorèmes relatifs aux limites.

$\lim_{x_0} f$	$\lim_{x_0} g$	$\lim_{x_0} (f + g)$	$\lim_{x_0} (fg)$	$\lim_{x_0} \frac{f}{g}$
a	b	$a + b$	ab	$\frac{a}{b} (b \neq 0)$
a	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty (a > 0)$ $-\infty (a < 0)$	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$?$
0	$+\infty$	$+\infty$	$?$	0

4. Résultats importants.

Lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, une fonction polynôme a même limite que son terme de plus haut degré; une fonction rationnelle a même limite que le rapport des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

EXEMPLES

5. Détermination de limites de fonctions.

Déterminer les limites au point x_0 des fonctions f telles que :

$f(x)$	x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0} f$
$\frac{x-2}{x+1}$	3	$\lim_{x \rightarrow 3} f = \frac{3-2}{3+1} = \frac{1}{4}$
$\frac{x^2+2}{x-1}$	1	$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f = +\infty \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f = -\infty$
$\frac{2x^2+5x-1}{x^2-3x+5}$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f = 2$
$\frac{2x^2-3x+1}{x-1}$	$+\infty$	$\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{+\infty} 2x = +\infty$
$\frac{x+3}{3x^2+6x-8}$	$-\infty$	$\lim_{-\infty} f = \lim_{-\infty} \frac{x}{3x^2} = \lim_{-\infty} \frac{1}{3x} = 0$
$\frac{x^2-6x+3}{(x-2)(x+1)}$	2	$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2-6x+3) = -5$ $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)(x+1) = 0$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = -\infty; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = +\infty$

Déterminer la limite de $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - x$ quand x tend vers $+\infty$.

$$\lim_{+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty; \quad \lim_{+\infty} x = +\infty.$$

On ne peut pas conclure, « $f(x)$ prenant la forme indéterminée $+\infty - \infty$ ».

Transformons $f(x)$:

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x = \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}.$$

Comme $\lim_{+\infty} (\sqrt{x^2+1} + x) = +\infty$, on déduit :

$$\lim_{+\infty} f(x) = 0.$$

6. Fonctions trigonométriques.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

On donne $f(x) = \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

On écrit :

$$\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{x}{\operatorname{tg} x} \times 2.$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1.$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x} = 1 \times 1 \times 2 = 2.$$



4. Dérivée

1. Nombre dérivé d'une fonction en un point.

Une fonction f définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 , admet un nombre dérivé en x_0 , s'il existe un nombre réel A tel que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A.$$

Le nombre dérivé de f au point x_0 est A ; on le note $f'(x_0)$.

Remarque : il est équivalent de dire qu'il existe une fonction φ continue au point 0 telle que :

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + h\varphi(h) \quad \text{avec} \quad \varphi(0) = 0.$$

Toute fonction dérivable au point x_0 est continue en x_0 .

2. Interprétation géométrique.

Si la fonction f est dérivable au point x_0 , alors le graphique C de f admet une tangente au point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$.

Une équation de la tangente en M_0 est :

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(X - x_0).$$

3. Formules usuelles.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
a	0	$\sin x$	$\cos x$
$x^n \quad n \in \mathbb{Q}$	nx^{n-1}	$\cos x$	$-\sin x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$	$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$u(x) \cdot v(x)$	$u'(x)v(x) + u(x) \cdot v'(x)$	$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$[u(x)]^n$	$n[u(x)]^{n-1} \cdot u'(x)$	$\frac{1}{u(x)}$	$\frac{-u'(x)}{u^2(x)}$

Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Toute fonction rationnelle, quotient de deux fonctions polynômes, est dérivable en tout point de l'ensemble de définition.

4. Fonction composée de deux fonctions dérivables.

Si f est dérivable au point x et si g est dérivable au point $u = f(x)$ alors $g \circ f$ est dérivable au point x :

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

5. Fonction réciproque d'une fonction dérivable.

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle J et si f admet au point x de J un nombre dérivé non nul, alors sa fonction réciproque f^{-1} admet un nombre dérivé au point $y = f(x)$ tel que :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]}.$$

EXEMPLES

6. Calcul de dérivée.

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x telle que $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 - 6x + 8}$.

Déterminer la dérivée de f et une équation de la tangente à la courbe représentative au point M d'abscisse 1.

La fonction f est une fraction rationnelle définie en tout point x tel que $x^2 - 6x + 8 \neq 0$. Son ensemble de définition est :

$$\mathcal{D} =]-\infty, 2[\cup]2, 4[\cup]4, +\infty[.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et :

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2-6x+8) - (2x-6)(x^2-2x+5)}{(x^2-6x+8)^2} = \frac{-4x^2+6x+14}{(x^2-6x+8)^2}.$$

Le point M a pour coordonnées 1 et $f(1) = \frac{4}{3}$.

Le coefficient directeur de la tangente à C en M est $f'(1) = \frac{16}{9}$.

Une équation de la tangente est :

$$y - \frac{4}{3} = \frac{16}{9}(x - 1) \quad \text{soit} \quad y = \frac{16}{9}x - \frac{4}{9}.$$

7. Dérivées de fonctions trigonométriques.

$f(x)$	$f'(x)$
$f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$	$f'(x) = (3 \sin^2 x \cdot \cos x) \cos x + \sin^3 x (-\sin x)$ $f'(x) = \sin^2 x (3 \cos^2 x - \sin^2 x).$
$f(x) = \sin^2(3x)$ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$	$f'(x) = 2 \sin 3x \cdot \cos 3x \cdot 3$ $f'(x) = 6 \sin 3x \cdot \cos 3x = 3 \sin 6x.$
$f(x) = \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}$ $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \left\{x_0/x_0 = \frac{\pi}{4} + k\pi\right\} (k \in \mathbb{Z})$	$f'(x) = \frac{\cos x (\sin x - \cos x) - \sin x (\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2}$ $f'(x) = \frac{-1}{(\sin x - \cos x)^2}.$

8. Fonction réciproque.

On considère la fonction f telle que $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Montrer que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Déterminer le nombre dérivé de f^{-1} au point $(y_0 = \sqrt{x_0^2 + 1})$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Sur $]0, +\infty[$, $f'(x) > 0$, donc la fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Elle prend ses valeurs sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[1, +\infty[$ et à valeurs dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

Au point $(y_0 = \sqrt{x_0^2 + 1})$ on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{soit} \quad (f^{-1})'(y_0) = 1 : \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x_0^2 + 1}}{x_0}.$$



5. Équations algébriques

1. Équation du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Le discriminant de l'équation est : $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$\text{Si } \Delta > 0 \dots x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

$$\text{Si } \Delta = 0 \dots, x' = x'' = -\frac{b}{2a}.$$

Si $\Delta < 0$... il n'y a pas de solutions.

Lorsqu'il y a deux racines, leur somme est $-\frac{b}{a}$, leur produit est $\frac{c}{a}$. Si deux nombres ont pour somme S et pour produit P, ils sont les racines réelles, si elles existent de l'équation :

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

2. Signe du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Si le trinôme ($ax^2 + bx + c$) a des racines distinctes il a le signe opposé au coefficient de x^2 pour les valeurs de x comprises entre les racines. Dans les autres cas, lorsqu'il est non nul, il y a le signe de a .

3. Système linéaire de deux équations à deux inconnues.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Le déterminant du système est $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$.

Si $D \neq 0$ la solution unique du système est :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{D} = \frac{cb' - c'b}{D}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{D} = \frac{ac' - a'c}{D}.$$

Si $D = 0$ le système est indéterminé ou n'a pas de solution.

EXEMPLES

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^4 + x^2 - 12 = 0$.

C'est une équation « bicarrée ». En posant $x^2 = X$ on obtient l'équation du second degré $X^2 + X - 12 = 0$.

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1 + 48 = 7^2$:

$$X' = \frac{-1-7}{2} = -4 \quad X'' = \frac{-1+7}{2} = 3.$$

Seule la racine positive convient car $X \geq 0$, donc :

$$x^2 = 3 \quad \text{soit} \quad x = -\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{3}.$$

L'ensemble des solutions est : $S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x^2 - x - 20 > 0$.

Le discriminant du trinôme ($x^2 - x - 20$) est :

$$\Delta = 1 + 80 = 9^2.$$

Les racines du trinôme sont :

$$x' = \frac{1-9}{2} = -4 \quad x'' = \frac{1+9}{2} = 5.$$

L'ensemble des solutions est la réunion des intervalles :

$] -\infty, -4[\cup]5, +\infty[.$

6. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2. \end{cases}$$

Le déterminant du système est $D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1$.

a) Pour $m \neq 1$ et $m \neq -1$, la solution unique du système est :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix}}{D} = \frac{m(m+1) - 2}{m^2 - 1} = \frac{(m-1)(m+2)}{m^2 - 1} \quad \text{soit} \quad x = \frac{m+2}{m+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & m+1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{2m - (m+1)}{m^2 - 1} = \frac{m-1}{m^2 - 1} \quad \text{soit} \quad y = \frac{1}{m+1}.$$

Résumés de cours

b) Pour $m = -1$, le système devient :

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Il n'y a pas de solution.

c) Pour $m = 1$, le système devient :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad x + y = 2.$$

Le système est indéterminé. Les solutions sont :

$$S = \{(x_0, 2 - x_0), x_0 \in \mathbb{R}\}.$$

Conclusion

$m \neq 1 \text{ et } m \neq -1$	$S = \left\{ x = \frac{m+2}{m+1}, y = \frac{1}{m+1} \right\}$
$m = -1$	$S = \emptyset$
$m = 1$	$S = \{(x_0, 2 - x_0), x_0 \in \mathbb{R}\}$

7. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équations :

$$\begin{cases} x + y - 2xy = -10 \\ 2(x + y) + 3xy = 36. \end{cases}$$

Posons $x + y = S$, $xy = P$. Le système devient :

$$\begin{cases} S - 2P = -10 \\ 2S + 3P = 36 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 2S - 4P = -20 \\ 2S + 3P = 36 \end{cases}$$

Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} 7P = 56 \\ 2S + 3P = 36 \end{cases} \quad \text{soit} \quad P = 8, S = 6.$$

x et y sont solutions de l'équation du second degré : $X^2 - 6X + 8 = 0$.

On en déduit : $X' = 2$, $X'' = 4$.

Donc :

$$S = \{(2, 4); (4, 2)\}.$$

6. Étude de fonctions

1. Résultats fondamentaux.

Si une fonction numérique f est dérivable sur un intervalle $I =]a, b[$, on admettra les résultats suivants :

<i>Si</i>	<i>Alors</i>
$\forall x \in I, f'(x) = 0$	f est constante sur I .
$\forall x \in I, f'(x) > 0$	f est strictement croissante sur I .
$\forall x \in I, f'(x) < 0$	f est strictement décroissante sur I .
$\forall x \in I, f'(x) \geq 0$	f est croissante sur I .
$\forall x \in I, f'(x) \leq 0$	f est décroissante sur I .

2. Plan d'étude d'une fonction numérique.

1. Étudier l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f ; pour des raisons de parité ou de périodicité éventuelles on peut parfois étudier la restriction de f à une partie de $\mathcal{D}$.

2. Étudier f aux bornes des intervalles d'étude.

3. Étudier les *variations* de f , généralement à partir du signe de la dérivée. Les résultats sont consignés dans un *tableau de variations*.

4. Étudier les *points remarquables* (point à tangente parallèle aux axes,...) et les *branches infinies*.

5. Représenter graphiquement la fonction dans un repère d'axes $x'Ox, y'Oy$.

3. Branches infinies.

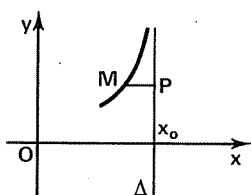


Fig. 1

$$\overline{PM} = x - x_0; \lim_{x \rightarrow x_0} \overline{PM} = 0$$

Asymptote Δ d'équation

$$x = x_0$$

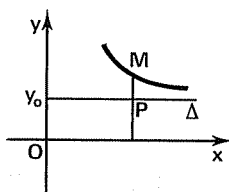


Fig. 2

$$\overline{PM} = f(x) - y_0; \lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{PM} = 0$$

Asymptote Δ d'équation

$$y = y_0$$

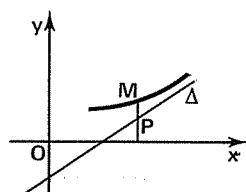


Fig. 3

$$\overline{PM} = \varphi(x) = f(x) - (ax + b).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0.$$

Asymptote Δ d'équation $y = ax + b$.

$$f(x) = ax + b + \varphi(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0.$$

EXEMPLES

4. Étude de la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{x(x-2)}{(x+1)^2}$.

1. L'ensemble de définition de la fonction f est $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{-1\}$ soit :

$$\mathcal{D} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[.$$

C'est une fonction rationnelle continue sur son ensemble de définition $\mathcal{D}$.

Lorsque x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1.$$

Lorsque x tend vers -1 , le numérateur et le dénominateur de $f(x)$ ont respectivement pour limites 3 et 0 (par valeurs positives) donc :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty.$$

2. La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et :

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2-2x)}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)(2x-1)}{(x+1)^4} = \frac{2(2x-1)}{(x+1)^3}.$$

$f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0,5$.

$f'(x)$ a le signe du polynôme $(x+1)(2x-1)$, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	$0,5$	$+\infty$
$f'(x)$	+	$\parallel$	-	+
$f(x)$	1 $\nearrow$ $+\infty$	$\parallel$ $+\infty$ $\searrow$ $-\frac{1}{3}$	$\nearrow$ 1	

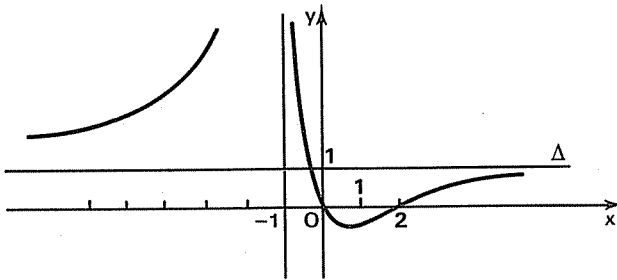


Fig. 4

3. Dans un repère orthogonal d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, la courbe C représentative de la fonction f se compose de deux branches. Elle admet pour asymptotes les droites d'équations respectives $x = -1$ et $y = 1$ (fig. 4).

La courbe C coupe la droite Δ d'équation $y = 1$ au point dont l'abscisse est racine de l'équation :

$$\frac{x(x-2)}{(x+1)^2} = 1 \quad \text{soit} \quad x^2 - 2x = x^2 + 2x + 1 \quad \text{donc} \quad x = -\frac{1}{4}.$$

La courbe C coupe $x'Ox$ aux points d'abscisses $x = 0$ et $x = 2$.

5. Étude de la fonction numérique f définie par $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-2}$.

1. Le polynôme $x-2$ prend la valeur 0 pour $x = 2$.

L'ensemble de définition de la fonction f est $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{2\}$.

La fonction f est une fonction rationnelle continue sur $\mathcal{D}$.

Résumés de cours

Lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, $\frac{1}{x-2}$ tend vers 0, donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty.$$

2. La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2 - 1}{(x-2)^2}, \quad f'(x) = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}.$$

$f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$ ou $x = 3$.

$f'(x)$ a le signe du polynôme $(x-3)(x-1)$. On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$							
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+				
$f(x)$		$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(1) = 1 + 1 + \frac{1}{1-2} = 1$$

$$f(3) = 3 + 1 + \frac{1}{3-2} = 5$$

3. La courbe représentative C de la fonction f se compose de deux branches. Elle admet pour asymptotes les droites d'équations respectives $x = 2$ et $y = x + 1$.

La courbe C coupe $x'Ox$ aux points dont les abscisses sont solutions de l'équation :

$$f(x) = 0 \quad \text{soit} \quad x + 1 + \frac{1}{x-2} = 0 \quad \text{donc} \quad x^2 - x - 1 = 0.$$

$$\text{On trouve} \quad x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,62 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,62.$$

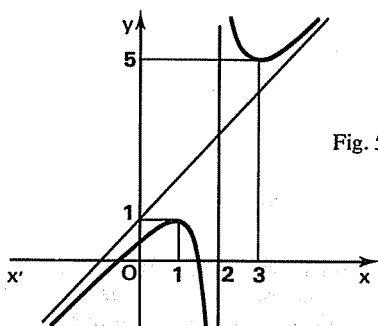


Fig. 5

7. Intégration - Primitives

1. Fonction intégrable sur un segment.

L'intégrale d'une fonction f , intégrable sur le segment $[a, b]$, est le réel noté

$$\int_a^b f(t) dt.$$

Toute fonction *monotone* sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.

Toute fonction *continue* sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.

Toute fonction bornée, monotone par morceaux sur $[a, b]$ ou continue par morceaux est intégrable sur $[a, b]$.

Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ alors

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(t) + g(t)] dt &= \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt. \\ \int_a^b k f(t) dt &= k \int_a^b f(t) dt. \end{aligned}$$

Relation de Chasles : si f est intégrable sur un segment contenant a, b, c , alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Théorème de la moyenne : si f est continue sur $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

2. Fonctions primitives d'une fonction f .

a) La fonction F est une primitive de f sur un intervalle I , si et seulement si, F est dérivable sur I et admet f comme fonction dérivée :

$$(\forall x \in I) \quad F'(x) = f(x).$$

b) Si la fonction f admet une primitive F sur l'intervalle I , l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions : $(x \mapsto F(x) + k)$ où k est un réel arbitraire.

c) Si f est continue sur $[a, b]$ la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ définie sur $[a, b]$ est une primitive de f sur $[a, b]$, donc $F'(x) = f(x)$.

$$\int_a^b f(t) dt = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

3. Primitives des fonctions usuelles.

Fonction f	Fonction primitive	Fonction f	Fonction primitive
0	$k \quad k \in \mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + k$
a	$ax + k$	$\sin x$	$-\cos x + k$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + k$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + k$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotg} x + k$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$	$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + k$
$u^r(x) u'(x) \quad r \in \mathbb{Q}$	$\frac{u^{r+1}(x)}{r+1} + k$	$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + k$
$r \neq -1$			

EXEMPLES

4. Calculer $A = \int_1^3 (x^2 - 3x + 1) dx$.

Une primitive de la fonction f telle que $f(x) = x^2 - 3x + 1$ est la fonction F telle que $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + x$.

Donc $A = F(3) - F(1) = \left(\frac{27}{3} - \frac{27}{2} + 3\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 1\right)$ soit $A = -\frac{4}{3}$.

5. Détermination de fonctions primitives.

a) Primitives de f telle que $f(x) = 2x + \frac{2}{(x-1)^2}$.

Sur un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas le point 1, les primitives de f sont les fonctions F telles que :

$$F(x) = x^2 - \frac{2}{x-1} + k.$$

b) Primitives de g telle que $g(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

La fonction g est définie et continue pour tout x réel, car $x^2+x+1 > 0$ (le discriminant du trinôme est strictement négatif).

Considérons la fonction u telle que $u(x) = x^2 + x + 1$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x + 1$, donc $g(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$.

Une primitive de g est G telle que $G(x) = 2\sqrt{u(x)} + k$.

Sur $\mathbb{R}$, les primitives de g sont définies par :

$$G(x) = 2\sqrt{x^2+x+1} + k.$$

c) Primitives de h telle que $h(x) = \sin x (2 \cos x + 1)$.

La fonction h est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Considérons la fonction u telle que : $u(x) = 2 \cos x + 1$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -2 \sin x$; donc :

$$h(x) = -\frac{1}{2} u(x) \cdot u'(x).$$

Une primitive H de h est telle que $H(x) = -\frac{1}{4} [u(x)]^2$.

Sur $\mathbb{R}$, les primitives de h sont définies par :

$$H(x) = -\frac{1}{4} (2 \cos x + 1)^2 + k.$$

6. Exercice.

Déterminer la primitive F de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2 \cos 2x$ telle que $F(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les primitives de f sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin 2x + k$$

$$F(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{entraîne} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin 0 + k \quad \text{soit} \quad k = 0.$$

Donc :

$$F(x) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin 2x.$$

8. Calculs d'aires. Calculs de volumes

1. Calculs d'aires de domaines plans.

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, à valeurs positives, l'aire de la partie du plan, ensemble des points $M(x, y)$ tels que (fig. 1) :

$$a \leq x \leq b \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq f(x)$$

est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx.$$

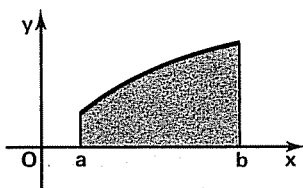


Fig. 1

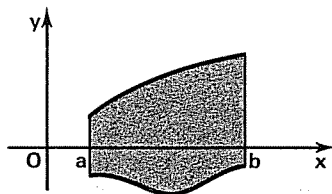


Fig. 2

Si f et g sont des fonctions continues sur $[a, b]$, l'aire de la partie du plan, ensemble des points $M(x, y)$ tels que (fig. 2) :

$$a \leq x \leq b \quad \text{et} \quad f(x) \leq y \leq g(x)$$

est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx.$$

2. Calcul de volumes.

Pyramide : $V = \frac{1}{3} Bh$ (B : aire de la base; h hauteur).	Cône : $V = \frac{1}{3} Bh$
Boule : $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ (R : rayon)	Tronc de cône : $V = \frac{h}{3} (R^2 + Rr + r^2)$ (R et r , rayons des bases; h : hauteur).

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, le volume engendré par la partie $\mathcal{D}$ hachurée (fig. 1) tournant autour de Ox est :

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

EXEMPLES

3. Calcul d'une aire plane et d'un volume.

Soit f_1 et f_2 deux fonctions numériques définies par :

$$f_1(x) = -x^2 + 2x \quad f_2(x) = x^2.$$

Tracer les courbes C_1 et C_2 représentatives de f_1 et f_2 dans le plan muni d'un repère orthonormé et déterminer les points d'intersection O et A de C_1 et C_2 .

On considère la partie $\mathcal{D}$ du plan limitée par les arcs d'extrémités O et A de C_1 et C_2 . Calculer l'aire de $\mathcal{D}$ et le volume engendré par la rotation de $\mathcal{D}$ autour de Ox.

Les courbes C_1 et C_2 sont des paraboles représentées sur la figure 3. Les coordonnées x et y de leurs points d'intersection vérifient le système :

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x \\ y = x^2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} -x^2 + 2x = x^2 \\ y = x^2 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x(x-1) = 0 \\ y = x^2. \end{cases}$$

On obtient les points O (origine des axes) et A($x = 1$, $y = 1$).

$\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M(x , y) tels que :

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad x^2 \leq y \leq -x^2 + 2x.$$

L'aire de $\mathcal{D}$ est :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (-x^2 + 2x - x^2) dx = \int_0^1 (-2x^2 + 2x) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + x^2 \right]_0^1$$

donc :
$$\mathcal{A} = \frac{1}{3}.$$

Le volume V engendré par la rotation de $\mathcal{D}$ autour de $x'Ox$ est :

$$V = \int_0^1 \pi [(-x^2 + 2x)^2 - x^4] dx = \pi \int_0^1 (-4x^3 + 4x^2) dx$$

$$V = 4\pi \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$V = \frac{\pi}{3} \approx 1,047 \text{ (unité de volume)}$$

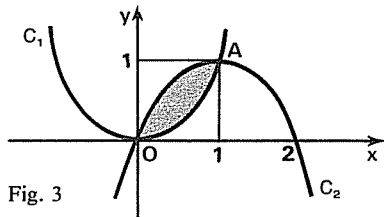


Fig. 3

4. Partage d'un domaine plan.

On considère la courbe C représentant la fonction f définie par $f(x) = \sin x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Calculer m pour que la droite d'équation $x = m$ partage le domaine limité par les axes et la courbe C en deux parties ayant la même aire.

Résumés de cours

Les domaines considérés admettent pour aires :

$$\mathcal{A}_1 = \int_0^m \sin x \, dx \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_2 = \int_m^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx.$$

Soit : $\mathcal{A}_1 = [-\cos x]_0^m = -\cos m + 1$

$$\mathcal{A}_2 = [-\cos x]_m^{\frac{\pi}{2}} = \cos m$$

$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ si et seulement si $-\cos m + 1 = \cos m$

soit : $\cos m = \frac{1}{2}$ donc $m = \frac{\pi}{3}$.

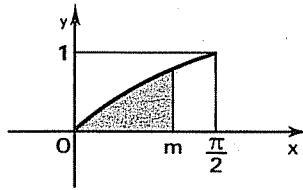


Fig. 4



9. Fonctions logarithmes

1. Fonction logarithme népérien.

a) Définition

La fonction logarithme népérien est la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

C'est donc la primitive de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]0, +\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$. On écrit :

$$\text{Log } x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

$$\text{Log } 1 = 0.$$

b) Propriétés

La fonction logarithme népérien est dérivable et $(\text{Log } x)' = \frac{1}{x}$.

Elle est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc :

$$\text{Log } x \leq \text{Log } y \iff x \leq y.$$

Quels que soient les réels a et b strictement positifs :

$$\text{Log } ab = \text{Log } a + \text{Log } b$$

$$\text{Log } a^r = r \text{Log } a \quad (r \in \mathbb{Q})$$

$$\text{Log } \frac{1}{a} = -\text{Log } a$$

$$\text{Log } \frac{a}{b} = \text{Log } a - \text{Log } b$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Log } x = +\infty \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \text{Log } x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log } x}{x} = 0.$$

x	0	$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$		+
$\text{Log } x$	$-\infty$	$+\infty$

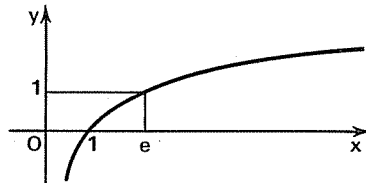


Fig. 1

2. Fonction logarithme de base a .

On appelle fonction logarithme de base a ($a > 0$, $a \neq 1$) la fonction f notée $\log_a$ définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\log_a x = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } a}.$$

La fonction $\log_a$ est dérivable sur $]0, +\infty[$:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \text{ Log } a}.$$

	x	0	$+\infty$
$a > 1$	$\log_a x$	$-\infty$	$+\infty$
$0 < a < 1$	$\log_a x$	$+\infty$	$-\infty$

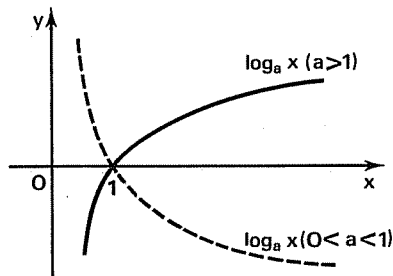


Fig. 2

Remarque : $\log_a a = 1$; $\log_a a^r = r$ ($r \in \mathbb{Q}$).

EXEMPLES

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\text{Log}(x - 2) + \text{Log}(x + 2) = \text{Log } 12.$$

Il est nécessaire que les inégalités suivantes soient vérifiées :

$$x - 2 > 0 \quad \text{et} \quad x + 2 > 0 \quad \text{soit en définitive} \quad x > 2.$$

Dans ces conditions, l'équation s'écrit :

$$\text{Log}(x - 2)(x + 2) = \text{Log } 12 \quad \text{soit} \quad (x - 2)(x + 2) = 12.$$

On en déduit $x^2 = 16$ donc $x_1 = 4$, $x_2 = -4$.

Seule convient $x_1 = 4$ donc

$$S = \{4\}.$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\text{Log}(x - 2) + \text{Log}(x + 1) = \text{Log}(3x - 5).$$

Il est nécessaire que les inégalités suivantes soient vérifiées :

$$x - 2 > 0, \quad x + 1 > 0 \quad \text{et} \quad 3x - 5 > 0,$$

soit en définitive $x > 2$.

L'équation donnée s'écrit :

$$\text{Log}(x - 2)(x + 1) = \text{Log}(3x - 5) \quad \text{soit} \quad (x - 2)(x + 1) = 3x - 5.$$

On en déduit : $x^2 - 4x + 3 = 0$ soit $x_1 = 1, x_2 = 3$.

Seule convient $x_2 = 3$ donc $S = \{3\}$.

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\text{Log } x)^2 - 2 \text{Log } x - 3 = 0$.

En posant $u = \text{Log } x$, l'équation devient :

$$u^2 - 2u - 3 = 0$$

dont les solutions sont $u_1 = -1$ et $u_2 = 3$.

On en déduit :

$$\text{Log } x = -1 \quad \text{soit} \quad x = \frac{1}{e}$$

$$\text{Log } x = 3 \quad \text{soit} \quad x = e^3. \quad S = \left\{ \frac{1}{e}; e^3 \right\}.$$

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\text{Log}(3 - x) \leq \text{Log}(2x + 5)$.

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur $]0, +\infty[$ l'inéquation est équivalente à :

$$\begin{cases} 3 - x \leq 2x + 5 \\ 3 - x > 0 \\ 2x + 5 > 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x \geq -\frac{2}{3} \\ x < 3 \\ x > -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Les valeurs de x solution sont telles que :

$$-\frac{2}{3} \leq x < 3.$$

6. Calculer $I = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{(\text{Log } x)^2}{x} dx$.

La fonction u telle que $u(x) = (\text{Log } x)^3$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$u'(x) = 3 \frac{(\text{Log } x)^2}{x}$ donc :

$$\frac{(\text{Log } x)^2}{x} = \frac{u'(x)}{3}.$$

Résumés de cours

Sur $]0, +\infty[$ une primitive de $\frac{u'(x)}{3}$ est $\frac{u(x)}{3}$ soit $\frac{1}{3}(\text{Log } x)^3$.

$$\text{Donc : } I = \left[\frac{1}{3} (\text{Log } x)^3 \right]_{\frac{1}{e}}^1 = \frac{1}{3} \left[(\text{Log } 1)^3 - \left(\text{Log } \frac{1}{e} \right)^3 \right]$$

Soit :

$$I = \frac{1}{3}.$$

7. Exemples de fonctions primitives.

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$\frac{2x}{x^2+1}$	$\text{Log}(x^2+1) + k$	$\frac{2x+1}{x^2+x+1}$	$\text{Log}(x^2+x+1) + k$
$\frac{2}{x-1}$	$x > 1, F(x) = 2 \text{Log}(x-1) + k$ $x < 1, F(x) = 2 \text{Log}(1-x) + k$	$\frac{2}{2x+1}$	$x > -\frac{1}{2}, F(x) = \text{Log}(2x+1) + k$ $x < -\frac{1}{2}, F(x) = \text{Log}(-2x-1) + k$

8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\log_3 x)^4 - 6(\log_3 x)^3 + 9(\log_3 x)^2 = 0$.

En posant $u = \log_3 x$, l'équation s'écrit $u^4 - 6u^3 + 9u^2 = 0$ soit $u^2(u-3)^2 = 0$ dont les solutions sont $u = 0$ et $u = 3$. On en déduit :

$$a) \log_3 x = 3 \quad \text{soit} \quad \frac{\text{Log } x}{\text{Log } 3} = 3 \quad \text{donc} \quad \text{Log } x = 3 \text{Log } 3 \quad \text{d'où} \quad x = 3^3,$$

$$b) \log_3 x = 0 \quad \text{soit} \quad x = 1.$$

En définitive :

$$S = \{1, 27\}.$$



10. Fonctions exponentielles

1. Fonction exponentielle de base e .

La fonction exponentielle de base e est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien. C'est une application bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$y = e^x \quad \text{équivalent à} \quad (x = \text{Log } y, y > 0).$$

Donc : $e^{\text{Log } x} = x \quad \text{Log } e^x = x.$

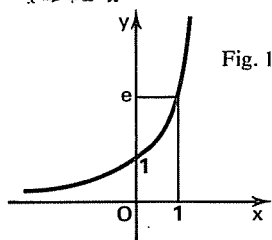
Quels que soient les réels a et b :

$$\begin{aligned} e^{a+b} &= e^a \cdot e^b & (e^a)^b &= e^{ab} \\ \frac{e^a}{e^b} &= e^{a-b} & e^{-a} &= \frac{1}{e^a}. \end{aligned}$$

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	0	1	$+\infty$



2. Fonction exponentielle de base a .

La fonction exponentielle de base a ($a > 0$ et $a \neq 1$) est la fonction réciproque de la fonction logarithme de base a . C'est une application bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$y = a^x \quad \text{équivalent à} \quad (x = \log_a y, y > 0).$$

Pour tout x réel, $a^x = e^{x \text{ Log } a}.$

Quels que soient les réels x et y

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad (a^x)^y = a^{xy} \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

La fonction exponentielle de base a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$(a^x)' = a^x \cdot \text{Log } a.$$

	x	$-\infty$	$+\infty$
$a > 1$	a^x	0	$+\infty$
$0 < a < 1$	a^x	$+\infty$	0

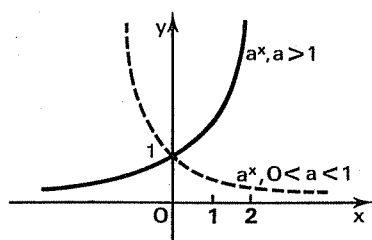


Fig. 2

Une primitive de $(x \mapsto a^x)$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $(x \mapsto \frac{a^x}{\text{Log } a})$.

EXEMPLES

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$2e^x - \frac{5}{e^x} + 3 = 0$$

L'équation est équivalente à : $2e^{2x} + 3e^x - 5 = 0$.

En posant $u = e^x$, l'équation devient : $2u^2 + 3u - 5 = 0$

dont les solutions sont $u_1 = 1$, $u_2 = -\frac{5}{2}$.

On en déduit :

$$e^x = 1 \quad \text{soit } x = 0,$$

$$e^x = -\frac{5}{2} \text{ n'a pas de solution car pour tout } x \text{ réel, } e^x > 0.$$

Donc

$$S = \{0\}.$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$e^{6x+1} + e^{3x+1} - 6e = 0$$

$$\text{L'équation est équivalente à : } e(e^{6x} + e^{3x} - 6) = 0$$

$$\text{soit à : } e^{6x} + e^{3x} - 6 = 0.$$

$$\text{En posant } u = e^{3x}, \text{ l'équation devient : } u^2 + u - 6 = 0$$

$$\text{dont les solutions sont } u_1 = -3, \quad u_2 = 2.$$

On en déduit :

$$e^x = 2 \quad \text{donc } x = \text{Log } 2.$$

$$e^x = u_1 \text{ n'a pas de solution car pour tout } x \text{ réel, } e^x > 0.$$

Donc :

$$S = \{\text{Log } 2\}.$$

5. u étant réel, calculer le produit $(u-2)(u-4)(u+5)$.

En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation d'inconnue x :

$$e^{3x} - e^{2x} - 22e^x + 40 = 0.$$

En développant le produit de réels on obtient :

$$p = (u^2 - 6u + 8)(u + 5) \quad \text{soit} \quad p = u^3 - u^2 - 22u + 40.$$

En posant $u = e^x$, l'équation devient :

$$u^3 - u^2 - 22u + 40 = 0 \quad \text{soit} \quad (u-2)(u-4)(u+5) = 0$$

dont les solutions sont :

$$u_1 = 2 \quad u_2 = 4 \quad u_3 = -5.$$

On en déduit :

$$e^x = 2 \text{ donc } x = \text{Log } 2; \quad e^x = 4 \text{ donc } x = \text{Log } 4.$$

$$e^x = u_3 \text{ n'a pas de solution car pour tout } x \text{ réel, } e^x > 0.$$

Donc :

$$S = \{\text{Log } 2; 2 \text{ Log } 2\}.$$

Valeurs approchées des solutions : 0,693 15; 1,386 30.

6. On considère le polynôme $P(y) = y^4 - 6y^3 + 9y^2$.

Décomposer $P(y)$ en produit de facteurs et résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(y) = 0$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $9^{2x} - 6 \cdot 3^{3x} + 9^{x+1} = 0$ (1)

$$P(y) = y^2(y^2 - 6y + 9) \text{ donc } P(y) = y^2(y - 3)^2.$$

L'ensemble S des solutions de l'équation $P(y) = 0$ est donc :

$$S = \{0; 3\}.$$

Remarquons que :

$$9 = 3^2; \quad 9^{2x} = (3^2)^{2x} = 3^{4x}; \quad 9^{x+1} = 9 \cdot 3^{2x}.$$

L'équation (1) s'écrit :

$$3^{4x} - 6 \cdot 3^{3x} + 9 \cdot 3^{2x} = 0.$$

En posant $y = 3^x$, l'équation devient : $y^4 - 6y^3 + 9y^2 = 0$
dont les solutions sont 0 et 3.

On en déduit :

$$3^x = 3 \text{ donc } x \text{ Log } 3 = \text{Log } 3 \text{ soit } x = 1;$$

$$3^x = 0 \text{ n'a pas de solution car pour tout } x \text{ réel, } 3^x > 0.$$

Donc :

$$S = \{1\}.$$



11. Équations différentielles

1. Équation différentielle du type $y' = ay$.

Elle admet pour solutions, l'ensemble des fonctions f définies par :

$$f(x) = Ce^{ax}.$$

C est une constante réelle arbitraire.

2. Équation différentielle du type $y'' + \omega^2 y = 0$.

Elle admet pour solutions l'ensemble des fonctions f définies par :

$$f(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x.$$

A et B sont des constantes réelles arbitraires.

EXEMPLES

3. Intégrer l'équation différentielle $y' = 5y$. Déterminer la solution φ de cette équation telle que $\varphi(0) = 1$.

Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions f définies par :

$$f(x) = Ce^{5x}.$$

Pour déterminer la solution φ , calculons le réel C ; il vérifie :

$$1 = Ce^0 \quad \text{soit} \quad C = 1.$$

La fonction φ est définie par

$$\varphi(x) = e^{5x}.$$

4. Intégrer l'équation différentielle $y' = -3y$. Déterminer la solution φ de cette équation telle que $\varphi(\log 2) = 1$.

Les solutions de l'équation sont les fonctions f telles que $f(x) = Ce^{-3x}$.

Pour déterminer φ , calculons le réel C ; il vérifie :

$$1 = Ce^{-3 \log 2} \quad \text{soit} \quad 1 = Ce^{\log \frac{1}{8}}$$

$$1 = C \cdot \frac{1}{8} \quad \text{donc} \quad C = 8.$$

La fonction φ est définie par

$$\varphi(x) = 8e^{-3x}.$$

5. Résoudre l'équation différentielle $4y' + y = 0$. Déterminer la solution φ telle que $\varphi(4) = e$.

On obtient $y' = -\frac{1}{4}y$. Les solutions de l'équation sont les fonctions f telles que :

$$f(x) = Ce^{-\frac{x}{4}}.$$

Pour déterminer φ , calculons le réel C ; il vérifie :

$$e = Ce^{-1} \quad \text{soit} \quad C = e^2.$$

La fonction φ est définie par $\varphi(x) = e^2 \cdot e^{-\frac{x}{4}}$ soit

$$\boxed{\varphi(x) = e^{2-\frac{x}{4}}.}$$

6. Intégrer l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$. Trouver la solution particulière f qui vérifie $f(\pi) = -1$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$.

L'équation différentielle est du type $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega^2 = 9$.

Les solutions de l'équation sont les fonctions f telles que :

$$f(x) = A \cos 3x + B \sin 3x.$$

Déterminons les réels A et B tels que $f(\pi) = -1$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$.

$$f(\pi) = A \cos 3\pi + B \sin 3\pi \quad \text{soit} \quad -1 = -A \quad \text{donc} \quad A = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = A \cos \frac{3\pi}{2} + B \sin \frac{3\pi}{2} \quad \text{soit} \quad \sqrt{3} = -B \quad \text{donc} \quad B = -\sqrt{3}.$$

La solution particulière est définie par

$$\boxed{f(x) = \cos 3x - \sqrt{3} \sin 3x.}$$

7. Intégrer l'équation différentielle $4y'' + 9y = 0$. Déterminer la solution particulière f vérifiant $f(0) = \sqrt{3}$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

L'équation différentielle s'écrit $y'' + \frac{9}{4}y = 0$. Elle est du type $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega^2 = \frac{9}{4}$.

Les solutions de l'équation sont les fonctions f telles que

$$f(x) = A \cos \frac{3}{2}x + B \sin \frac{3}{2}x.$$

Déterminons les réels A et B tels que $f(0) = \sqrt{3}$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

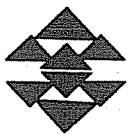
$$\begin{aligned} f(0) &= A = \sqrt{3} \\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= A \cos \frac{\pi}{2} + B \sin \frac{\pi}{2} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2} = B. \end{aligned}$$

La solution particulière est définie par

$$f(x) = \sqrt{3} \cos \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \sin \frac{3}{2}x.$$

8. Autres exemples.

Équations différentielles	Ensemble des fonctions solutions
$2y' = 3y$ $3y' = -2y$ $y'' + y = 0$ $y'' + 3y = 0$ $9y'' + 4y = 0$	$f(x) = Ce^{\frac{3}{2}x}$ $f(x) = Ce^{-\frac{2}{3}x}$ $f(x) = A \cos x + B \sin x$ $f(x) = A \cos \sqrt{3}x + B \sin \sqrt{3}x$ $f(x) = A \cos \frac{2}{3}x + B \sin \frac{2}{3}x$



12. Équations différentielles (sections F₂, F₃, F₅)

1. Équation différentielle du premier ordre à variables séparables.

Si f est une fonction continue sur un intervalle I et g une fonction continue sur un intervalle I' , une équation différentielle à variables séparables peut se mettre sous la forme

$$g(y)y' = f(x).$$

Exemples : $yy' = x^2$; $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x^2}$.

Pour intégrer l'équation différentielle $g(y) \cdot y' = f(x)$ on détermine les primitives F et G de f et g . Une fonction φ solution telle que $y = \varphi(x)$ vérifie :

$$G(y) = F(x) + \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

2. Équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre à coefficients constants.

Elle peut se mettre sous la forme

$$y' + ay = f(x) \tag{E}$$

Une solution particulière φ de cette équation, définie sur un intervalle I est telle que :

$$(\forall x \in I) \quad \varphi'(x) + a\varphi(x) = f(x).$$

Si on connaît une solution particulière φ , la solution générale de (E) est définie par

$$y = Ce^{-ax} + \varphi(x). \quad (C \text{ constante réelle})$$

Cas où le second membre de (E) est $f(x) = M \cos \omega x + N \sin \omega x$.

On démontre qu'une solution particulière φ est une fonction de la forme :

$$y = \varphi(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x.$$

On détermine les réels A et B par identification.

3. Équation différentielle linéaire du 2^e ordre : $y'' + ay' + by = 0$.

L'équation caractéristique de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ est l'équation du second degré

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Racines de l'équation caractéristique	Solution générale de : $y'' + ay' + by = 0$
deux racines réelles r_1 et r_2	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
une racine double r	$y = e^{rx} (C_1 x + C_2)$
deux racines complexes $r = \alpha \pm j\beta$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

4. Équation différentielle (E) : $y'' + ay' + by = M \cos \omega x + N \sin \omega x$.

On intègre tout d'abord l'équation différentielle *sans second membre*

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Les solutions de l'équation (E) s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière, la solution générale de l'équation sans second membre.

Détermination d'une solution particulière de (E) :

a) Si les fonctions $x \mapsto \cos \omega x$ et $x \mapsto \sin \omega x$ ne sont pas solutions de l'équation sans second membre, on cherche une solution particulière φ définie par :

$$\varphi(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x.$$

On obtient les réels A et B par identification.

b) Si les fonctions $x \mapsto \cos \omega x$ et $x \mapsto \sin \omega x$ sont des solutions de l'équation sans second membre, on cherche une solution particulière φ définie par

$$\varphi(x) = x(A \cos \omega x + B \sin \omega x).$$

EXEMPLES

5. Intégrer l'équation différentielle $2yy' = x$.

C'est une équation différentielle du premier ordre du type $g(y)y' = f(x)$ telle que $g(y) = 2y$ et $f(x) = x$.

On obtient l'ensemble des solutions définies par

$$y^2 = \frac{x^2}{2} + C.$$

6. Intégrer l'équation différentielle : $y'' - 6y' + 9y = 0$ et déterminer la solution f de cette équation telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = e^3$.

L'équation caractéristique est : $r^2 - 6r + 9 = 0$.

On obtient $r_1 = r_2 = 3$.

La solution générale de l'équation est l'ensemble des fonctions f telles que

$$f(x) = (Ax + B)e^{3x}.$$

Déterminons les réels A et B tels que $f(0) = 0$ et $f(1) = e^3$.

$$\begin{cases} 0 = B \\ e^3 = (A + B)e^3 \end{cases} \quad \text{donc} \quad A = 1 \text{ et } B = 0.$$

La fonction f demandée est définie par

$$f(x) = xe^{3x}.$$

7. Intégrer l'équation différentielle : $2y'' - 5y' + 3y = 0$.

L'équation caractéristique est : $2r^2 - 5r + 3 = 0$.

On obtient $r_1 = 1$ et $r_2 = \frac{3}{2}$.

La solution générale de l'équation est l'ensemble des fonctions f telles que :

$$f(x) = Ae^x + Be^{\frac{3}{2}x}.$$

8. Intégrer l'équation différentielle : $y'' - 2y' + 5y = 0$.

L'équation caractéristique est : $r^2 - 2r + 5 = 0$. On obtient :

$$r_1 = 1 - 2j \quad r_2 = 1 + 2j.$$

La solution générale de l'équation est l'ensemble des fonctions f telles que

$$f(x) = e^x (A \cos 2x + B \sin 2x).$$

9. Intégrer l'équation différentielle : $y' + 2y = \sin 2x$ (E).

La solution générale de l'équation sans second membre $y' + 2y = 0$ est l'ensemble des fonctions définies par

$$y = Ce^{-2x}.$$

Pour intégrer (E) cherchons une solution particulière de la forme

$$y = A \cos 2x + B \sin 2x \quad \text{donc} \quad y' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x.$$

On obtient pour tout x réel :

$$(-2A + 2B) \sin 2x + (2B + 2A) \cos 2x = \sin 2x.$$

A et B sont définis par le système d'équations :

$$\begin{cases} -2A + 2B = 1 \\ 2A + 2B = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad A = -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{4}.$$

La fonction définie par $y = -\frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x$ est une solution particulière de (E). L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions définies par :

$$y = Ce^{-2x} - \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x.$$

10. Intégrer l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 8y = 3 \sin x - 2 \cos x$.

a) Intégrons l'équation sans second membre (E') : $y'' + 4y' + 8y = 0$.

L'équation caractéristique est : $r^2 + 4r + 8 = 0$. On obtient :

$$r_1 = -2 - 2j \quad r_2 = -2 + 2j.$$

La solution générale de l'équation sans second membre est l'ensemble des fonctions définies par :

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

b) Cherchons une *intégrale particulière* de (E) de la forme

$$y = A \cos x + B \sin x$$

donc : $y' = -A \sin x + B \cos x$, $y'' = -A \cos x - B \sin x$.

Pour tout x réel, on obtient :

$$(-A \cos x - B \sin x) + 4(-A \sin x + B \cos x) + 8(A \cos x + B \sin x) = 3 \sin x - 2 \cos x.$$

Soit en identifiant les termes en sinus et cosinus :

$$\begin{cases} -4A + 7B = 3 \\ 7A + 4B = -2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad A = -\frac{26}{65} \quad B = \frac{13}{65}.$$

La fonction définie par $y = -\frac{26}{65} \cos x + \frac{13}{65} \sin x$ est une solution particulière de (E).

La solution générale de (E) est l'ensemble des fonctions f définies par :

$$f(x) = e^{-2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{26}{65} \cos x + \frac{13}{65} \sin x.$$

11. Intégrer l'équation différentielle (E) : $y'' + 9y = \sin 3x$.

La solution générale de l'équation sans second membre $y'' + 9y = 0$ est l'ensemble des fonctions définies par

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Comme la fonction $x \mapsto \sin 3x$ est une solution de l'équation sans second membre, on cherche une intégrale particulière de la forme :

$$y = x(A \cos 3x + B \sin 3x)$$

$$\text{soit } y' = A \cos 3x + B \sin 3x + x(-3A \sin 3x + 3B \cos 3x)$$

$$y'' = -6A \sin 3x + 6B \cos 3x + x(-9A \cos 3x - 9B \sin 3x).$$

Pour tout x réel, on obtient en substituant dans (E) :

$$-6A \sin 3x + 6B \cos 3x = \sin 3x.$$

Par identification on déduit $A = -\frac{1}{6}$, $B = 0$. Une solution particulière de (E) est donc

$$\text{définie par : } y = -\frac{x}{6} \cos 3x.$$

La solution générale de (E) est l'ensemble des fonctions f :

$$f(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{x}{6} \cos 3x.$$



13. Géométrie analytique

1. Espace vectoriel de dimension trois.

a) Coordonnées d'un vecteur dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$.

Les coordonnées du vecteur $(\lambda\vec{u} + \lambda'\vec{v})$ sont :

$$X = \lambda x + \lambda' x' \quad Y = \lambda y + \lambda' y' \quad Z = \lambda z + \lambda' z'.$$

b) Produit scalaire de deux vecteurs :

On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel, toute forme bilinéaire symétrique définie positive.

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et le réel λ :

$$\begin{aligned} (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot \vec{v} &= \vec{u}_1 \cdot \vec{v} + \vec{u}_2 \cdot \vec{v} & (\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} &= \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v}) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{v} \cdot \vec{u} & \vec{u} \cdot \vec{u} &> 0 \text{ si } \vec{u} \neq \vec{0}. \end{aligned}$$

Norme d'un vecteur : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

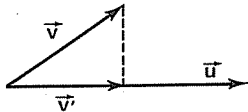
Orthogonalité de deux vecteurs : $\vec{u} \perp \vec{v}$ si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Dans toute base orthonormée :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est égal au produit des mesures algébriques $\bar{u} \times \bar{v}'$ de $\vec{u}$ et de la projection orthogonale $\vec{v}'$ de $\vec{v}$ sur un vecteur normé, linéairement dépendant de $\vec{u}$.

Fig. 1



$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \bar{u} \times \bar{v}' \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}). \end{aligned}$$

2. Plan affine (repère : O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

a) Milieu du bipoint (A, B) : $A(x_0, y_0)$; $B(x_1, y_1)$.

Coordonnées de M milieu de (A, B) :

$$x_M = \frac{x_0 + x_1}{2} \quad y_M = \frac{y_0 + y_1}{2}.$$

b) Équation d'une droite de coefficient directeur m contenant $A(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Si la droite contient les points A et B alors $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.

3. Plan affine euclidien (repère orthonormé $O, \vec{i}, \vec{j}$).

a) Distance des points $A(x_0, y_0)$ et $B(x_1, y_1)$:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

b) Relations du triangle rectangle ABC :

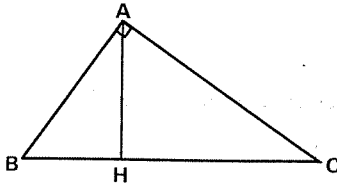


Fig. 2

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= BC^2 \\ AH^2 &= HB \cdot HC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB^2 &= \overline{BH} \cdot \overline{BC} \\ AC^2 &= \overline{CH} \cdot \overline{CB}. \end{aligned}$$

c) Relations du triangle quelconque :

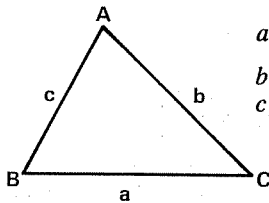


Fig. 3

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$A + B + C = \pi.$$

d) Équation du cercle C de centre $I(a, b)$ de rayon R :

Un point $M(x, y)$ appartient à C si et seulement si $IM^2 = R^2$:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

On peut aussi écrire :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$$

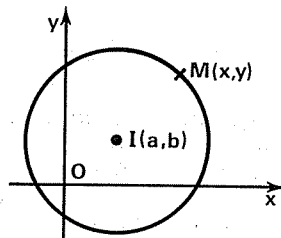


Fig. 4

4. Produit vectoriel de deux vecteurs de E.

Dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}.$$

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Si $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OP} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ alors OP est perpendiculaire au plan OAB;
 $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OP})$ est de sens direct et :

$$\|\overrightarrow{OP}\| = OA \times OB \times |\sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})|.$$

EXEMPLES

5. Cercle; tangente en un point.

Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points $I(2, 3)$ et $A(-3, -1)$.

- a) Déterminer l'équation du cercle C de centre I passant par A.
 b) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point $P(x, y)$ appartienne à la tangente à C au point A est $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$. Déterminer une équation de cette tangente.

- a) Un point $M(x, y)$ appartient au cercle C de centre $I(2, 3)$ de rayon R, si et seulement si $IM^2 = R^2$ soit $IM^2 = IA^2$.

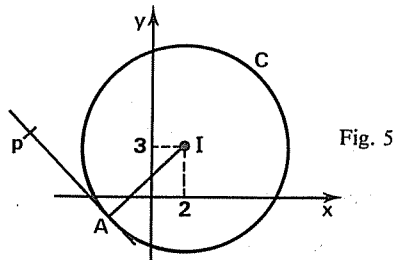


Fig. 5

D'où l'équation de C :

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = (-3 - 2)^2 + (-1 - 3)^2$$

soit :

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 28 = 0.$$

- b) Le point P appartient à la tangente à C au point A, si et seulement si, $\overrightarrow{AP}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AI}$ ce qui équivaut à $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$.

Or $\overrightarrow{AI}$ a pour coordonnées (5, 4) et $\overrightarrow{AP}$ (x + 3, y + 1).

Donc : $5(x + 3) + 4(y + 1) = 0$.

Une équation de la tangente à C au point A est donc :

$$5x + 4y + 19 = 0.$$

6. Aire d'un triangle.

Dans l'espace euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points $A(0, 3, 5)$, $B(4, 0, 5)$, $C(4, 0, 0)$ et $D(0, 3, 0)$.

a) Comparer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$. Que peut-on conclure?

b) Calculer l'aire du triangle COD puis la longueur de la hauteur issue de O.

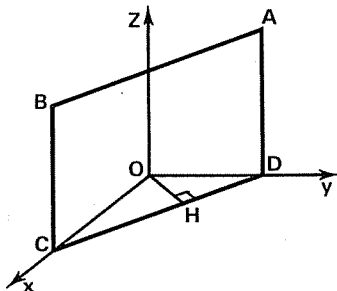


Fig. 6

a) Exprimons les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$:

$$\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 3\vec{j} \quad \overrightarrow{DC} = 4\vec{i} - 3\vec{j}.$$

Donc :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{BC} = -5\vec{k}$. On en déduit :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (4\vec{i} - 3\vec{j}) \cdot (-5\vec{k}).$$

Comme $\vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$, on obtient : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ n'étant pas nuls, ils sont donc orthogonaux.

b) Le triangle COD étant rectangle, son aire est :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} OC \times OD = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \quad \text{donc} \quad \mathcal{A} = 6.$$

OH étant la hauteur issue de O : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} OH \times CD$.

Or $CD^2 = OC^2 + OD^2 = 4^2 + 3^2 = 5^2$ donc $CD = 5$.

D'où : $OH = \frac{2 \times 6}{5}$ soit $OH = 2,4$.

14. Parabole. Ellipse. Hyperbole

1. Parabole d'équation $y = ax^2$ (repère orthonormé, $a > 0$).

C'est l'ensemble des points équidistants d'une droite D (directrice) et d'un point F (foyer) (fig. 1). $MF = MH$.

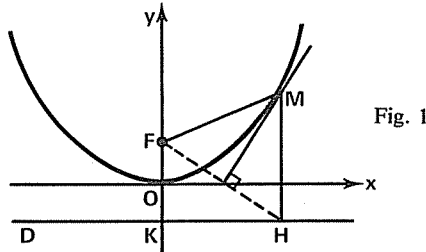


Fig. 1

La distance FK du point F à la droite D est le paramètre de la parabole :

$$p = \frac{1}{2a}.$$

Coordonnées du foyer F : $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$.

Équation de la directrice D : $y = -\frac{1}{4a}$.

La tangente en M à la parabole est la médiatrice du segment [F, H].

La projection orthogonale du foyer sur une tangente appartient à la tangente au sommet Ox.

2. Ellipse.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ toute courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une ellipse qui admet l'origine pour centre de symétrie et les axes de coordonnées pour axes de symétrie.

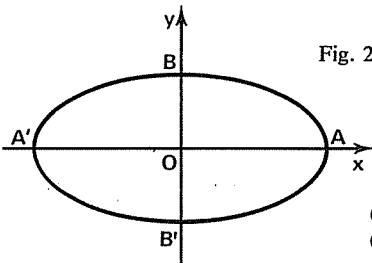


Fig. 2

$$\begin{aligned} OA &= OA' = a. \\ OB &= OB' = b. \end{aligned}$$

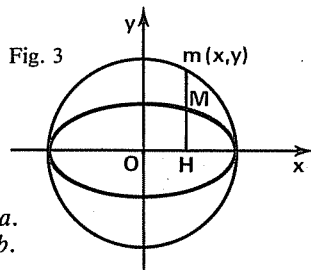


Fig. 3

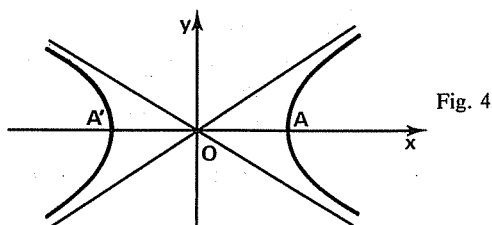
Un cercle se transforme suivant une ellipse dans une affinité orthogonale ayant pour axe un diamètre du cercle (fig. 3).

Équation du cercle : $x^2 + y^2 = a^2$. $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{Hm}$.

Formules de l'affinité : $X = x$, $Y = ky$.

Équation de l'ellipse : $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2k^2} = 1$.

3. Hyperbole.



Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ toute courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une hyperbole qui admet O pour centre de symétrie et les axes de coordonnées pour axes de symétrie.

$$OA = OA' = a.$$

Équation des asymptotes : $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$.

L'équation d'une hyperbole par rapport à un repère cartésien dont les axes sont les asymptotes est $XY = k$.

Si $a = b$ l'hyperbole est *équilatère*; les asymptotes sont perpendiculaires.

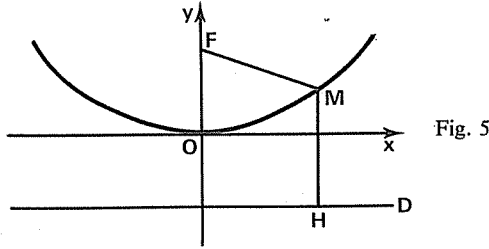
EXEMPLES

4. Parabole.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$ on considère le point $F(0, 2)$ et la droite D d'équation $y = -2$. Déterminer l'équation de la parabole de foyer F, de directrice D.

Un point $M(x, y)$ est un point de la parabole, si et seulement si (fig. 5) :

$$MF^2 = MH^2.$$



H est la projection orthogonale du point M sur D. Donc :

$$x^2 + (y - 2)^2 = (y + 2)^2.$$

Soit :

$$y = \frac{x^2}{8}.$$

5. Foyer et directrice d'une parabole.

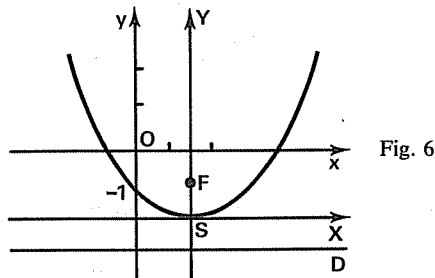
Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère la parabole P d'équation $y = \frac{1}{3}x^2 - x - 1$. Si le point S est le sommet de la parabole, déterminer l'équation de P dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer le foyer et la directrice de la parabole.

La fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2}{3} - x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = \frac{2}{3}x - 1.$$

$f'(x) = 0$ si et seulement si $x = \frac{3}{2}$. Les coordonnées de S sont $x_0 = \frac{3}{2}$ et $f(x_0)$ soit :

$$S\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{4}\right).$$



Si (X, Y) sont les coordonnées de M dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$ alors :

$$x = \frac{3}{2} + X \quad \text{et} \quad y = -\frac{7}{4} + Y.$$

L'équation de P dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$ est donc :

$$-\frac{7}{4} + Y = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} + X \right)^2 - \left(\frac{3}{2} + X \right) - 1 \quad \text{soit} \quad \boxed{Y = \frac{1}{3} X^2}.$$

On en déduit que le paramètre de la parabole est $p = \frac{3}{2}$. Dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$ les coordonnées du foyer sont $(0; \frac{3}{4})$, l'équation de la directrice est $Y = -\frac{3}{4}$. Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $F(\frac{3}{2}, -1)$; l'équation de D est $y = -\frac{5}{2}$.

6. Cercle et ellipse.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$ on considère le cercle C d'équation $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Déterminer l'équation de l'ellipse E déduite de C dans l'affinité orthogonale d'axe $x'Ox$, de rapport $\frac{1}{2}$.

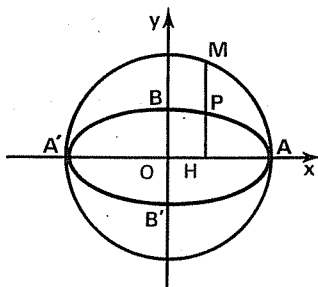


Fig. 7

L'affinité orthogonale d'axe $x'Ox$, de rapport $\frac{1}{2}$, transforme le point $M(x, y)$ suivant le point $P(X, Y)$ tel que : $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{HM}$ (fig. 7) soit :

$$X = x$$

$$Y = \frac{1}{2} y.$$

Le point P appartient à l'image E de C par l'affinité, si et seulement si, $M(X, 2Y)$ appartient à C , c'est-à-dire si :

$$X^2 + 4Y^2 - 4 = 0.$$

L'équation de E est donc :

$$\frac{X^2}{4} + Y^2 - 1 = 0.$$

Les sommets de E sont les points A(2, 0), A'(-2, 0), B(0, 1), B'(0, -1).

7. Hyperbole.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$ on considère la courbe H d'équation $x^2 - 3y^2 - 3 = 0$.

Tracer cette courbe après avoir déterminé les coordonnées des sommets et les équations des asymptotes.

L'équation de H s'écrit : $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$.

La courbe H est donc une hyperbole admettant O pour centre de symétrie et les axes de coordonnées pour axes de symétrie.

Elle coupe l'axe $x'Ox$ aux points A et A' d'ordonnée nulle ($y = 0$) dont les abscisses vérifient $x^2 = 3$. Soit A($\sqrt{3}$, 0), A'(- $\sqrt{3}$, 0).

L'équation de l'ensemble des asymptotes est :

$$\frac{x^2}{3} - y^2 = 0 \quad \text{soit} \quad \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + y\right)\left(\frac{x}{\sqrt{3}} - y\right) = 0.$$

Soit :

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad y = -\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

On en déduit le tracé de l'hyperbole (fig. 8).

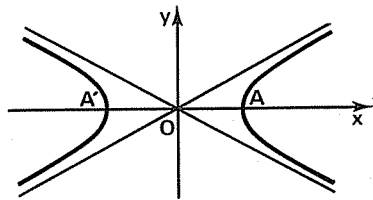


Fig. 8



15 Nombres complexes

1. Définition. Module. Argument.

Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique :

$$z = a + jb$$

a est la partie réelle de z ; b est la partie imaginaire de z .

a et b sont réels; le nombre complexe j est tel que $j^2 = -1$.

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, muni de l'addition et de la multiplication est un corps.

Le nombre complexe conjugué de $z = a + jb$ est noté $\bar{z}$:

$$\bar{z} = a - jb$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}, \quad \overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}, \quad \left(\frac{\bar{z}}{z'}\right) = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}.$$

Le *module* du nombre complexe $z = a + jb$ est le réel :

$$|\bar{z}| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Argument d'un nombre complexe z non nul :

$$\text{Si } z = a + jb \quad \text{alors} \quad z = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + j \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

$$\text{On pose } r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{donc} \quad z = r (\cos \theta + j \sin \theta) = [r, \theta]$$

θ est un argument de z .

2. Représentation d'un nombre complexe dans le plan affine euclidien.

z est l'affixe du point M .

Les coordonnées de M sont (a, b) .

$$OM = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$\text{mes}(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \text{argument de } z$.

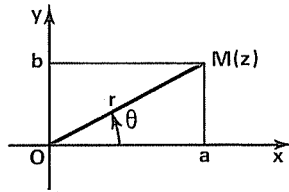


Fig. 1

3. Produit et quotient de deux nombres complexes.

$$\begin{aligned} z &= [r, \theta] & z \cdot z' &= [r, \theta] \cdot [r', \theta'] = [rr', \theta + \theta'] \\ z' &= [r', \theta'] & \frac{z}{z'} &= \frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta' \right]. \end{aligned}$$

4. Formule de Moivre.

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad (\cos \theta + j \sin \theta)^n = \cos n\theta + j \sin n\theta.$$

5. Racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe.

Ce sont les solutions de l'équation $z^n = r(\cos \theta + j \sin \theta)$. Soit :

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) + j \sin \left(\frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \right) \quad \text{avec} \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Autre représentation d'un nombre complexe :

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x.$$

EXEMPLES

7. Étude d'un nombre complexe.

a) Déterminer le module et l'argument de $z = \frac{1 + \sqrt{3}j}{1 - \sqrt{3}j}$.

b) Déterminer les racines carrées de z .

c) Calculer z^{10} .

a) On obtient : $z = \frac{(1 + \sqrt{3}j)(1 + \sqrt{3}j)}{(1 - \sqrt{3}j)(1 + \sqrt{3}j)} = \frac{1 - 3 + 2j\sqrt{3}}{4}$.

Donc :

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j = \cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3}.$$

Le nombre complexe z a pour module 1 et pour argument $\frac{2\pi}{3}$.

b) Les racines carrées de z sont les nombres complexes :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right) \quad \text{avec } k \in \{0, 1\},$$

soit

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j \\ z_2 &= \cos \frac{4\pi}{3} + j \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j. \end{aligned}$$

c) En appliquant la formule de Moivre, on obtient :

$$z^{10} = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3}\right)^{10} = \cos \frac{20\pi}{3} + j \sin \frac{20\pi}{3}.$$

Remarquons que $\frac{20\pi}{3} = 6\pi + \frac{2\pi}{3}$ donc :

$$z^{10} = \cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} \quad \text{soit} \quad \boxed{z^{10} = z.}$$

8. Forme algébrique et trigonométrique d'un nombre complexe.

On considère le nombre complexe $z = \sqrt{2} \cdot \frac{(\sqrt{2}-1) + j(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+j}$.

a) Écrire z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

b) Déterminer l'entier relatif n pour que z^n soit un réel positif.

a) En multipliant le numérateur et le dénominateur de z par $(\sqrt{2} - j)$ on obtient :

$$z = \sqrt{2} \cdot \frac{(\sqrt{2} - 1) + j(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} + j)(\sqrt{2} - j)} \cdot (\sqrt{2} - j) = \sqrt{2} \cdot \frac{3 + 3j}{3}$$

soit :

$$z = \sqrt{2} (1 + j).$$

On peut écrire : $z = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} j \right)$

donc :

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

b) En appliquant la formule de Moivre, on obtient :

$$z^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + j \sin \frac{n\pi}{4} \right).$$

z^n est un réel positif, si et seulement si :

$$\sin \frac{n\pi}{4} = 0 \quad \text{et} \quad \cos \frac{n\pi}{4} \geq 0,$$

$\sin \frac{n\pi}{4} = 0$ entraîne $n = 4k$ ($k \in \mathbb{Z}$); or $\cos k\pi = (-1)^k$, donc z^n est un réel positif si et seulement si k est pair donc $n = 8k'$ ($k' \in \mathbb{Z}$).

9. Module et argument d'un nombre complexe.

On considère le nombre complexe $z = (\sqrt{2} - \sqrt{6}) - j(\sqrt{2} + \sqrt{6})$.

Calculer sous forme algébrique $Z = z^2$ et déterminer le module et l'argument de Z .

En déduire le module et l'argument de z . Calculer z^6 .

a) Calcul de Z .

$$Z = [(\sqrt{2} - \sqrt{6}) - j(\sqrt{2} + \sqrt{6})]^2$$

$$Z = (\sqrt{2} - \sqrt{6})^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 - 2j(\sqrt{2} - \sqrt{6})(\sqrt{2} + \sqrt{6})$$

$$Z = -4\sqrt{12} - 2j(2 - 6) \quad \text{donc} \quad Z = 8(-\sqrt{3} + j).$$

On en déduit :

$$|Z| = 8\sqrt{3+1} = 16, \quad \cos \theta = \frac{-8\sqrt{3}}{16} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}.$$

Donc :

$$|Z| = 16; \quad \theta = \frac{5\pi}{6} \quad (2\pi).$$

Résumés de cours

b) *Module et argument de z .*

On en déduit le module de z : $|z| = 4$.

Si z a pour argument α alors $2\alpha = \frac{5\pi}{6} \quad (2\pi)$

donc : $\alpha = \frac{5\pi}{12} \quad (\pi).$

Comme $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ et $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ sont négatifs, on en déduit que

$$\alpha = \frac{5\pi}{12} + \pi$$

$$\text{soit } \boxed{\alpha = \frac{17\pi}{12} \quad [2\pi].}$$

c) *Calcul de z^6 .*

Module de z^6 : $|z^6| = |z|^6 = 4^6$.

Si z^6 a pour argument θ alors $\theta = 6\alpha = \frac{17\pi}{2} = 8\pi + \frac{\pi}{2}$.

Donc :

$$\boxed{z^6 = j \cdot 4^6.}$$



EXERCICES

1. Trigonométrie (équations, calcul intégral).

1 a) Montrer que pour tout x réel

$$\cos\left(2x - \frac{4\pi}{3}\right) + \cos 2x + \cos\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0.$$

b) En exprimant $\sin^2 a$ à l'aide de $\cos 2a$, calculer :

$$A = \sin^2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin^2 x + \sin^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right).$$

a) En utilisant $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, on obtient :

$$\cos\left(2x - \frac{4\pi}{3}\right) = \cos 2x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \sin 2x \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x$$

$$\cos\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos 2x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \sin 2x \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x.$$

Donc :

$$\cos\left(2x - \frac{4\pi}{3}\right) + \cos 2x + \cos\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0.$$

Exercices

b) Calcul de A.

Remarquons que :

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \sin^2 \left(x - \frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(2x - \frac{4\pi}{3}\right)\right] \\ \sin^2 \left(x + \frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(2x + \frac{4\pi}{3}\right)\right].\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left(2x - \frac{4\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left(2x + \frac{4\pi}{3}\right) \\ A &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left[\cos \left(2x - \frac{4\pi}{3}\right) + \cos 2x + \cos \left(2x + \frac{4\pi}{3}\right) \right].\end{aligned}$$

En utilisant le résultat (a), on obtient

$$A = \frac{3}{2}.$$

2 On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = 2 \sin 2x + 3 \sin x.$$

a) Déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

b) Sachant que a est un réel, calculer $I(a) = \int_0^a f(x) dx$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue a : $I(a) = 6$.

a) Primitives de f .

Les fonctions primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont définies par :

$$F(x) = -\cos 2x - 3 \cos x + k.$$

b) Calcul de $I(a)$.

$$I(a) = F(a) - F(0)$$

soit :

$$I(a) = -\cos 2a - 3 \cos a + 4.$$

c) Résolution de l'équation $I(a) = 6$.

L'équation s'écrit :

$$-\cos 2a - 3 \cos a + 4 = 6 \quad \text{soit} \quad \cos 2a + 3 \cos a + 2 = 0.$$

En remarquant que $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$, on obtient :

$$2 \cos^2 a + 3 \cos a + 1 = 0.$$

En posant $u = \cos a$, l'équation devient : $2u^2 + 3u + 1 = 0$
dont les solutions sont $u_1 = -1$, $u_2 = -\frac{1}{2}$.

On en déduit :

$$\cos a = -1 \quad \text{soit}$$

$$\cos a = -\frac{1}{2} \quad \text{soit}$$

$$a = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$a = \varepsilon \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \varepsilon = \pm 1.$$

3 On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \sin^3 x.$$

a) Démontrer que pour tout x réel $f(x) = \sin x - \cos^2 x \sin x$.

b) Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx$.

a) Transformation de $f(x)$.

Pour tout x réel :

$$\sin^3 x = \sin x \cdot \sin^2 x = \sin x (1 - \cos^2 x)$$

$$\text{donc :} \quad f(x) = \sin x - \cos^2 x \cdot \sin x.$$

b) Calcul de I .

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$; elle admet donc une primitive F telle que :

$$F(x) = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x.$$

Donc :

$$I = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = 0 - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)$$

soit :

$$I = \frac{2}{3}.$$

4 a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\sin x \cdot \cos 3x = 0.$$

b) Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot \cos 3x \, dx = 0$.

a) Résolution de l'équation :

L'équation $\sin x \cdot \cos 3x = 0$ se décompose suivant :

Exercices

$$\sin x = 0 \quad \text{et} \quad \cos 3x = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{donc} \quad x = k\pi$$

$$\cos 3x = 0 \quad \text{donc} \quad 3x = \varepsilon \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{soit} \quad x = \varepsilon \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

$$\text{Donc} \quad S = \left\{ x/x = k\pi \right\} \cup \left\{ x/x = \varepsilon \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \right\} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

b) Calcul de I.

$$\text{Transformons } \sin x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2} (\sin 4x - \sin 2x).$$

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2} (\sin 4x - \sin 2x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Si F est une primitive de f alors :

$$F(x) = -\frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{4} \cos 2x.$$

$$\text{Donc :} \quad I = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = -\frac{1}{8} \cos \pi + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\right).$$

Soit :

$$I = 0.$$

5 On considère la fonction numérique f de la variable réelle définie par

$$f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

a) Déterminer les fonctions primitives de f.

$$b) \text{ Calculer } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \, dx.$$

a) Primitives de f.

Pour tout x réel :

$$2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3} + x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3} - x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Donc :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\sin 2x + \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right) \quad \text{soit} \quad f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

b) Calcul de I.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Si F est une primitive de f alors :

$$F(x) = -\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{4} x.$$

Donc :

$$I = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)$$

soit

$$I = -\frac{\pi\sqrt{3}}{16} + \frac{1}{4} \approx 0,59.$$

6 Soit la fonction numérique de la variable réelle définie par $f(x) = \sin 2x \cdot \cos 3x$.

a) Étudier le signe de $f(x)$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Calculer $A = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx$ et $B = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

a) Signe de $f(x)$.

Quand x appartient à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $2x$ appartient à l'intervalle $[0, \pi]$ et $\sin 2x \geq 0$. Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ le signe de $f(x)$ est donc celui de $\cos 3x$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$			
$3x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$			
$\cos 3x$	1	+	0	-	-1	-	0

Donc sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, $f(x) \geq 0$;

sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) \leq 0$.

Exercices

b) Calcul de A et B.

Remarquons que : $\sin 2x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2} (\sin 5x - \sin x)$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$. Si F est une primitive de f alors :

$$F(x) = -\frac{1}{10} \cos 5x + \frac{1}{2} \cos x.$$

$$A = F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0) = -\frac{1}{10} \cos \frac{5\pi}{6} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\right).$$

Comme $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

donc $A = \frac{\sqrt{3}}{20} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{2}{5}$ soit $A = \frac{3\sqrt{3}}{10} - \frac{2}{5} \approx 0,919$.

$B = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}\right)$; or $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, donc $B = -F\left(\frac{\pi}{6}\right)$ soit :

$$B = -\frac{3\sqrt{3}}{10} \approx -0,519.$$

7 Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x$.

a) Démontrer que pour tout x réel, $f(x) = \frac{1}{4} (\sin 2x + \sin 4x - \sin 6x)$.

b) En déduire la primitive de f qui prend la valeur 0 pour $x = 0$.

a) Transformation de $f(x)$.

Remarquons que $\sin x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 4x)$.

Donc : $f(x) = \frac{1}{2} (\sin 2x \cdot \cos 2x - \sin 2x \cdot \cos 4x)$.

Or : $\sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 4x$ et $\sin 2x \cos 4x = \frac{1}{2} (\sin 6x - \sin 2x)$.

Donc, pour tout x réel,

$$f(x) = \frac{1}{4} (\sin 2x + \sin 4x - \sin 6x).$$

b) La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet des fonctions primitives définies par :

$$F(x) = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \cos 4x + \frac{1}{6} \cos 6x \right) + k.$$

Or :
$$F(0) = -\frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{24} + k = -\frac{7}{48} + k.$$

$F(0) = 0$ si et seulement si $k = \frac{7}{48}$.

La primitive de f qui prend la valeur 0 pour $x = 0$ est donc la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) = -\frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 4x + \frac{1}{24} \cos 6x + \frac{7}{48}.$$

8 a) Développer $(\sin^2 x + \cos^2 x)^3$ et montrer que pour tout x réel

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{8} (5 + 3 \cos 4x).$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}. \quad (1)$$

c) Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{12}} (\sin^6 x + \cos^6 x) dx$.

a) Calculons $\sin^6 x + \cos^6 x$.

En remarquant que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, on obtient :

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = \sin^6 x + 3 \sin^4 x \cdot \cos^2 x + 3 \sin^2 x \cdot \cos^4 x + \cos^6 x$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = \sin^6 x + 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^6 x$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = \sin^6 x + 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^6 x.$$

Or $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \sin^2 2x$ donc :

$$1 = \sin^6 x + \frac{3}{4} \sin^2 2x + \cos^6 x \quad \text{soit} \quad \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x.$$

En remarquant que $\sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2}$, on obtient le résultat :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{8} (5 + 3 \cos 4x).$$

Exercices

b) Résolution de l'équation (1).

Elle est équivalente à : $\frac{1}{8}(5 + 3 \cos 4x) = \frac{7}{16}$

soit : $\cos 4x = -\frac{1}{2}$ d'où $\cos 4x = \cos \frac{2\pi}{3}$.

Donc : $4x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ soit

$$x = \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$4x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ soit

$$x = -\frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{2}$$

c) Calcul de I.

La fonction $x \mapsto (\sin^6 x + \cos^6 x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{12}\right]$:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{1}{8} (5 + 3 \cos 4x) dx = \frac{1}{8} \left[5x + \frac{3}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{12}}$$

$$I = \frac{1}{8} \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{3}{4} \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{donc}$$

$$I = \frac{1}{32} \left(\frac{5\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \approx 0,245.$$

9 a) Montrer que pour tout x réel : $\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4 \cos 2x + 3)$.

b) En déduire, parmi les primitives de la fonction f définie par $f(x) = \cos^4 x$ celle qui prend la valeur 0 pour $x = 0$.

c) Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$.

a) Expression de $\cos^4 x$.

Pour tout x réel, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

Donc : $\cos^4 x = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos^2 2x$

soit : $\cos^4 x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 + \cos 4x}{2}$.

Donc :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4 \cos 2x + 3).$$

b) *Primitives de f.*

La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, admet des fonctions primitives définies par :

$$F(x) = \frac{1}{8} \left(\frac{\sin 4x}{4} + 2 \sin 2x + 3x \right) + k.$$

Remarquons que $F(0) = k$, donc la primitive φ de f qui prend la valeur 0 pour $x = 0$ s'obtient en prenant $k = 0$ soit :

$$\varphi(x) = \frac{1}{8} \left(\frac{\sin 4x}{4} + 2 \sin 2x + 3x \right).$$

c) *Calcul de I.*

$$\text{On obtient : } I = \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) - \varphi(0) = \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

$$\text{Donc : } I = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \cdot \sin \frac{4\pi}{3} + 2 \sin \frac{2\pi}{3} + \pi \right) \quad \text{soit}$$

$$I = \frac{1}{8} \left(\frac{7\sqrt{3}}{8} + \pi \right) \approx 0,58.$$

10 On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = 2 \sin^2 3x + \sin^2 6x.$$

a) *Exprimer $f(x)$ en fonction de $\sin 3x$.*

b) *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x : $f(x) = 2$.*

a) *Calcul de $f(x)$.*

$$\begin{aligned} \sin 6x &= 2 \sin 3x \cdot \cos 3x \\ f(x) &= 2 \sin^2 3x + 4 \sin^2 3x \cdot \cos^2 3x = 2 \sin^2 3x + 4 \sin^2 3x (1 - \sin^2 3x). \end{aligned}$$

Donc :

$$f(x) = -4 \sin^4 3x + 6 \sin^2 3x.$$

b) *Résolution de l'équation $f(x) = 2$.*

$$\text{L'équation s'écrit : } 4 \sin^4 3x - 6 \sin^2 3x + 2 = 0$$

$$\text{soit : } 2 \sin^4 3x - 3 \sin^2 3x + 1 = 0.$$

En posant $u = \sin 3x$, l'équation devient :

$$2u^4 - 3u^2 + 1 = 0 \quad \text{soit} \quad (u^2 - 1)(2u^2 - 1) = 0.$$

$$\text{Les solutions sont : } u = -1, \quad u = 1, \quad u = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad u = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Exercices

On obtient successivement :

$$\sin 3x = 1 \quad \text{soit} \quad 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{donc} \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$$

$$\sin 3x = -1 \quad \text{soit} \quad 3x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \quad (\text{mêmes solutions que pour } \sin 3x = 1)$$

$$\sin 3x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi & \text{donc} \quad x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \\ 3x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi & \text{donc} \quad x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

$$\sin 3x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi & \text{donc} \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \\ 3x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi & \text{donc} \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

En résumé les solutions dans $\mathbb{R}$ sont :

$$\boxed{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \quad -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \quad \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).}$$

11 a) Étudier les variations de l'application f définie sur $[-\pi, \pi]$ par :

$$f(x) = 2 + \cos x - \cos^2 x.$$

Tracer la courbe représentative de f dans le plan euclidien muni d'un repère ortho-normé.

b) Calculer l'aire de la partie du plan, ensemble des points $M(x, y)$ tels que $0 \leq x \leq \pi$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

a) *Étude de la fonction f .*

La fonction f est définie et continue sur $\mathcal{D} = [-\pi, \pi]$. Comme $f(-x) = f(x)$ sur $\mathcal{D}$, f est paire. On l'étudie dans l'intervalle $[0, \pi]$ et on complètera le graphique en effectuant une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées :

$$f(0) = 2; \quad f(\pi) = 2 - 1 - 1 = 0.$$

L'application f est dérivable et :

$$f'(x) = -\sin x + 2 \sin x \cos x \quad \text{soit} \quad f'(x) = \sin x (2 \cos x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \sin x = 0 \quad \text{ou} \quad \cos x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Sur } [0, \pi], \quad f'(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0, \quad x = \pi, \quad x = \frac{\pi}{3}.$$

Sur $]0, \pi[$, $\sin x > 0$; le signe de $f'(x)$ est celui de $(2 \cos x - 1)$. D'où le tableau de variations :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	+	0	-	0
$f(x)$	2	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	0

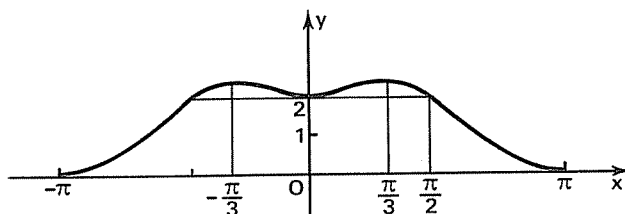


Fig. 1

b) Calcul de l'aire.

L'aire de la partie du plan est :

$$\mathcal{A} = \int_0^{\pi} (2 + \cos x - \cos^2 x) dx.$$

Or $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ donc $\mathcal{A} = \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} + \cos x - \frac{\cos 2x}{2} \right) dx$

$$\mathcal{A} = \left[\frac{3}{2}x + \sin x - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{3\pi}{2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{A} = \frac{3\pi}{2} \simeq 4,71 \text{ unités.}}$$

12 a) Étudier sur le segment $[0, 2\pi]$ les variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sin x + \cos^2 x.$$

Tracer la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé d'axes $x'Ox, y'Oy$. On déterminera les abscisses des points d'intersection de C avec Ox .

b) Déterminer l'aire de la partie du plan, ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$0 \leq x \leq \pi \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq f(x).$$

Exercices

a) Étude de la fonction f .

Sur $[0, 2\pi]$, la fonction f est définie, continue, dérivable :

$$f(0) = 1; \quad f(2\pi) = 1$$

$$f'(x) = \cos x - 2 \cos x \sin x = \cos x (1 - 2 \sin x).$$

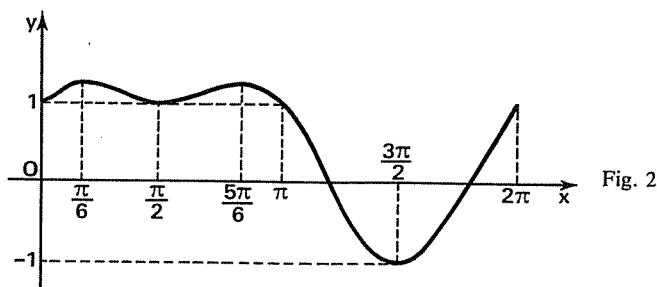
$$f'(x) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \cos x = 0 \quad \text{ou} \quad \sin x = 0,5, \quad \text{soit sur} \quad [0, 2\pi] :$$

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{3\pi}{2}, \quad x = \frac{\pi}{6}, \quad x = \frac{5\pi}{6}.$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ et le tableau de variations.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π			
$\cos x$		+	0	−	0	+			
$1 - 2 \sin x$	+	0	−	0	+				
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\searrow$	−1	$\nearrow$	1

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}; \quad f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin \frac{5\pi}{6} + \cos^2 \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.$$



La courbe C coupe Ox aux points dont les abscisses vérifient l'équation :

$$\sin x + \cos^2 x = 0 \quad \text{soit} \quad \sin^2 x - \sin x - 1 = 0.$$

En posant $\sin x = u$, on obtient l'équation $u^2 - u - 1 = 0$ dont les solutions sont :

$$u_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \quad \text{Comme } u_2 > 1, \text{ seule convient } u_1.$$

On obtient : $\sin x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,6180$

soit : $x = -0,666 + 2k\pi$ ou $x = \pi + 0,666 + 2k\pi$
 donc : $x_1 = -0,666 + 2\pi \approx 5,61$ et $x_2 = 0,666 + \pi \approx 3,80$.

b) Calcul de l'aire.

L'aire de la partie du plan est :

$$\mathcal{A} = \int_0^\pi (\sin x + \cos^2 x) dx.$$

Or $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ donc $\mathcal{A} = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + \sin x \right) dx$

$$\mathcal{A} = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} - \cos x \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} + 1 - (-1) \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{A} = \frac{\pi}{2} + 2 \approx 3,57 \text{ u.}}$$

13 Calculer la dérivée de la fonction numérique f définie sur l'intervalle :

$$\left[0, \frac{\pi}{4} \right] \quad \text{par} \quad f(x) = \text{Log}(\sin x + \cos x).$$

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$.

Calculer $I + J$, $I - J$ et en déduire I et J .

Quand $x \in \left[0, \frac{\pi}{4} \right]$, $(\sin x + \cos x) \in \mathbb{R}^{*+}$, donc la fonction f est bien définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4} \right]$.

La fonction f , composée de fonctions dérivables, $x \mapsto \sin x + \cos x$ et $u \mapsto \text{Log } u$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4} \right]$.

$$\boxed{f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}}.$$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x}{\sin x + \cos x} + \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx$$

donc

$$\boxed{I + J = \frac{\pi}{4}}$$

Exercices

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) dx$$

donc $I - J = [f(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(0)$ soit $I - J = \text{Log } \sqrt{2}$.

On en déduit :

$$I = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \text{Log } 2 \right) \approx 0,739$$

$$J = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \text{Log } 2 \right) \approx 0,046.$$

14 On considère la fonction numérique de la variable réelle x telle que :

$$f(x) = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x.$$

a) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = k \sin(ax + b)$ où les constantes k, a, b sont à déterminer ($b \in]-\pi, \pi]$).

b) Résoudre dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ l'équation $f(x) = \sqrt{2}$.

c) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{3}]$.

a) Expression de $f(x)$.

En remarquant que pour tout x réel :

$$A \cos \omega x + B \sin \omega x = \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \omega x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \omega x \right)$$

on obtient :

$$f(x) = 2 \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x \right).$$

Posons $\cos b = \frac{1}{2}$, $\sin b = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc si $b \in]-\pi, \pi]$ alors $b = \frac{\pi}{3}$.

Dans ces conditions :

$$f(x) = 2 \left(\sin 2x \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos 2x \right) \text{ soit } f(x) = 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right).$$

b) Résolution de l'équation $f(x) = \sqrt{2}$.

L'équation s'écrit :

$$\sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ soit } \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{4}.$$

Donc :
$$\begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi & \text{soit} & x = \frac{7\pi}{24} + k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi & \text{soit} & x = \frac{13\pi}{24} + k\pi \end{cases}$$

c) Valeur moyenne de f .

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$. Une primitive de f est F

définie par $F(x) = -\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

La valeur moyenne de f sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ est $I = \frac{3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$ soit

$$I = \frac{3}{\pi} \left(F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F(0) \right) = 0.$$

Donc :

$$I = 0.$$

15 Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 \cos^2 x + \sin 2x$.

a) Trouver les constantes réelles a, b, c telles que, pour tout x :

$$g(x) = a + b \cos 2x + c \sin 2x.$$

Montrer que $g(x) = a + A \cos(2x + \varphi)$ où les constantes a, A, φ sont à déterminer ($-\pi < \varphi \leq \pi$).

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x : $g(x) = 0$.

c) Calculer $I = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx$.

a) Expression de $g(x)$.

Pour tout x réel, $2 \cos^2 x = \cos 2x + 1$.

Donc :

$$g(x) = 1 + \cos 2x + \sin 2x.$$

Remarquons que : $\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x \right)$.

En posant $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient :

$$\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2} \cdot \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right).$$

Exercices

Donc :

$$g(x) = 1 + \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \left(\varphi = -\frac{\pi}{4}\right).$$

b) Résolution de l'équation $g(x) = 0$.

Elle est équivalente à :

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{soit} \quad \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{3\pi}{4}.$$

Donc :

$$\begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi & \text{soit} \\ 2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi & \text{soit} \end{cases} \quad \boxed{\begin{matrix} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{matrix}} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

c) Calcul de I.

La fonction g est continue donc intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Si G est une primitive de g alors :

$$G(x) = x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x.$$

$$\text{Donc : } I = \frac{2}{\pi} \left[G\left(\frac{\pi}{2}\right) - G(0) \right] \quad \text{avec} \quad G\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad G(0) = -\frac{1}{2}.$$

Donc :

$$I = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \quad \text{soit} \quad \boxed{I = 1 + \frac{2}{\pi} \approx 1,64.}$$

16 On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^x \cos 3x \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^x \sin 3x \, dx$.

On considère les réels a et b tels que :

$$3I + J = a \quad \text{et} \quad I - 3J = b.$$

a) En utilisant la dérivée de la fonction f telle que $f(x) = e^x \sin 3x$, calculer a . En utilisant la dérivée de la fonction g telle que $g(x) = e^x \cos 3x$, calculer b .

b) Calculer I et J .

a) Calcul des réels a et b .

La fonction f est dérivable comme produit de fonctions dérivables : $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \sin 3x$.

$$f'(x) = e^x (\sin 3x + 3 \cos 3x).$$

$$a = 3I + J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 3e^x \cos 3x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^x \sin 3x \, dx$$

$$a = \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^x (3 \cos 3x + \sin 3x) \, dx \quad \text{soit} \quad a = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f'(x) \, dx.$$

Donc : $a = [f(x)]_0^{\frac{\pi}{6}} = f\left(\frac{\pi}{6}\right) - f(0)$ soit $\boxed{a = e^{\frac{\pi}{6}}}$.

En utilisant la fonction $g : x \mapsto e^x \cos 3x$, on obtient :

$$g'(x) = e^x (\cos 3x - 3 \sin 3x)$$

$$b = I - 3J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^x (\cos 3x - 3 \sin 3x) \, dx \quad \text{soit} \quad b = \int_0^{\frac{\pi}{6}} g'(x) \, dx.$$

Donc : $b = [g(x)]_0^{\frac{\pi}{6}} = g\left(\frac{\pi}{6}\right) - g(0)$ soit $\boxed{b = -1}$.

b) Calcul de I et J.

On obtient le système :

$$\begin{cases} 3I + J = a \\ I - 3J = b \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 10I = 3a + b \\ 10J = a - 3b \end{cases}$$

Donc : $I = \frac{3a + b}{10}$ et $J = \frac{a - 3b}{10}$

soit : $\boxed{I = \frac{3e^{\frac{\pi}{6}} - 1}{10}}$ $\boxed{J = \frac{e^{\frac{\pi}{6}} + 3}{10}}$.

17 a) Déterminer la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = -x \cos x$.

En déduire $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x + x \sin x) \, dx$ puis $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$.

b) Déterminer la dérivée de la fonction g définie par $g(x) = x^2 \sin x$. Déduire

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx.$$

a) Calcul de A et B.

La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -\cos x + x \sin x.$$

Donc : $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x + x \sin x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) \, dx$

soit : $A = [f(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)$ d'où $\boxed{A = 0}$.

Exercices

En écrivant : $x \sin x = (-\cos x + x \sin x) + \cos x$

on obtient : $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x + x \sin x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$

Donc : $B = A + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$ soit $\boxed{B = 1.}$

b) Calcul de C.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$g'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

En écrivant : $x^2 \cos x = (2x \sin x + x^2 \cos x) - 2x \sin x$ on obtient :

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x \sin x + x^2 \cos x) dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

$$C = [g(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2B \quad \text{soit} \quad C = g\left(\frac{\pi}{2}\right) - g(0) - 2.$$

Donc :

$$\boxed{C = \frac{\pi^2}{4} - 2.}$$



2. Résolution d'équations

11 a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\frac{4e^{2x} - 4e^x - 3}{e^x + 5} = 0. \quad (1)$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\text{Log}(2e^x + 5) + \text{Log} \frac{1}{7} \leq 0$.

a) Résolution de l'équation (1).

Pour tout x réel, $e^x + 5 > 0$. L'équation (1) est équivalente à :

$$4e^{2x} - 4e^x - 3 = 0.$$

En posant $u = e^x$, l'équation s'écrit : $4u^2 - 4u - 3 = 0$ dont les solutions sont

$$u_1 = -\frac{1}{2}, \quad u_2 = \frac{3}{2}.$$

On en déduit : $e^x = \frac{3}{2}$ soit $x = \text{Log} \frac{3}{2} \approx 0,405$.

$e^x = -\frac{1}{2}$ n'a pas de solution car pour tout x réel, $e^x > 0$.

Donc :

$$S = \left\{ \text{Log} \frac{3}{2} \right\}.$$

b) Résolution de l'inéquation.

Elle est équivalente à : $\text{Log} \frac{1}{7} (2e^x + 5) \leq 0$.

Or $\text{Log} u \leq 0$ si et seulement si $0 < u \leq 1$.

L'inéquation est donc équivalente à :

$$0 < \frac{1}{7} (2e^x + 5) \leq 1 \quad \text{soit à :} \quad 0 < 2e^x + 5 \leq 7.$$

Pour tout x réel, $0 < 2e^x + 5$ est vérifié donc il vient $2e^x + 5 \leq 7$ soit $e^x \leq 1$ c'est-à-dire $x \leq 0$ car la fonction exponentielle est strictement croissante.

$$S = \{x/x \leq 0\}.$$

12 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations d'inconnue x :

$$(\text{Log } x)^2 - (\text{Log } x) - 6 = 0.$$

$$e^{2x} - e^x - 6 = 0.$$

En posant $u = \text{Log } x$ ou $u = e^x$, chacune des équations s'écrit :

$$u^2 - u - 6 = 0.$$

Exercices

Les solutions de cette équation sont :

$$u_1 = \frac{1-5}{2} = -2 \quad u_2 = \frac{1+5}{2} = 3.$$

Première équation. On en déduit :

$$\begin{array}{ll} \text{Log } x = -2 & \text{donc } x = e^{-2} \approx 0,1353 \\ \text{Log } x = 3 & \text{donc } x = e^3 \approx 20,086. \end{array}$$

Donc :

$$S = \{e^{-2}, e^3\}.$$

Seconde équation. On en déduit :

$$e^x = 3 \quad \text{donc } x = \text{Log } 3 \approx 1,0986.$$

$e^x = u_1$ n'a pas de solution car pour tout x réel, $e^x > 0$.

$$S = \{\text{Log } 3\}.$$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$2^x + \frac{1}{2^x} = 3.$$

Remarquons que $2^x \cdot 2^x = 2^{2x}$.

L'équation proposée est équivalente à l'équation :

$$2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 1 = 0.$$

En posant $u = 2^x$, l'équation s'écrit $u^2 - 3u + 1 = 0$ dont les solutions sont

$$u_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad u_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

On en déduit :

$$2^x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{soit} \quad x = \log_2 \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

$$2^x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{soit} \quad x = \log_2 \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

$$S = \left\{ \log_2 \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \log_2 \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Remarquons que $u_1 \approx 0,382$, $u_2 \approx 2,618$, $\log_2 a = \frac{\text{Log } a}{\text{Log } 2}$ donc :

$$\log_2 0,382 \approx -1,38 \quad \text{et} \quad \log_2 2,618 \approx 1,38.$$

On peut vérifier directement que $\log_2 \frac{3-\sqrt{5}}{2} = -\log_2 \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\log(8x^2 - 12x + 4) + \log(5 - x) = 1 + \log(x^2 - 3x + 2) + \log(1 - x).$$

L'équation n'a de sens que si les inégalités suivantes sont vérifiées.

Inégalités	Résolution	Résultats
$8x^2 - 12x + 4 > 0$	$2x^2 - 3x + 1 > 0$ $x' = 1, x'' = \frac{1}{2}$	$x < \frac{1}{2}$ ou $x > 1$
$5 - x > 0$		$x < 5$
$x^2 - 3x + 2 > 0$	$x' = 1, x'' = 2$	$x < 1$ ou $x > 2$
$1 - x > 0$		$x < 1$

Ces inégalités sont toutes vérifiées pour $x < \frac{1}{2}$.

L'équation s'écrit :

$$\log(8x^2 - 12x + 4)(5 - x) = \log 10(x^2 - 3x + 2)(1 - x).$$

Donc :

$$(8x^2 - 12x + 4)(5 - x) = 10(x^2 - 3x + 2)(1 - x). \quad (1)$$

Remarquons que : $8x^2 - 12x + 4 = 4(2x - 1)(x - 1)$

et que : $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$

L'équation (1) s'écrit :

$$\begin{aligned} 4(2x - 1)(x - 1)(5 - x) - 10(x - 1)(x - 2)(1 - x) &= 0 \\ 2(x - 1)[2(2x - 1)(5 - x) - 5(x - 2)(1 - x)] &= 0 \\ 2(x - 1)(x^2 + 7x) &= 0. \end{aligned}$$

On obtient : $x = 0, \quad x = 1, \quad x = -7.$

Donc :

$$S = \{0, -7\}.$$

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation :

$$\text{Log}\left(2^x - \frac{1}{4}\right) - \text{Log}\frac{3}{4} \leq 0.$$

Comme $\text{Log}\left(2^x - \frac{1}{4}\right) - \text{Log}\frac{3}{4} = \text{Log}\left(2^x - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{4}{3}$ l'inéquation est équivalente à :

$$\text{Log}\frac{4}{3}\left(2^x - \frac{1}{4}\right) \leq 0.$$

Exercices

Or $\text{Log } u \leq 0$ si et seulement si $0 < u \leq 1$, donc on obtient :

$$0 < \frac{4}{3} \left(2^x - \frac{1}{4} \right) \leq 1 \quad \text{ou} \quad 0 < 2^x - \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4}.$$

Soit :

$$\frac{1}{4} < 2^x \leq 1.$$

La fonction $x \mapsto \log_2 x$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$ on en déduit que :

$$\log_2 \frac{1}{4} < x \leq 0.$$

Remarquons que $\log_2 \frac{1}{4} = -\log_2 4 = -\frac{\text{Log } 4}{\text{Log } 2} = -2 \frac{\text{Log } 2}{\text{Log } 2} = -2.$

En définitive :

$$\boxed{-2 < x \leq 0.}$$

6 a) Effectuer dans $\mathbb{R}$ le produit $(u + 3)(u^2 - 1)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x :

(1) $(\text{Log } x)^3 + 3(\text{Log } x)^2 - \text{Log } x - 3 = 0.$

(2) $e^{-6x} + 3e^{-4x} - e^{-2x} - 3 = 0.$

a) Dans $\mathbb{R}$ la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition permet d'écrire :

$$(u + 3)(u^2 - 1) = u^3 + 3u^2 - u - 3.$$

b) Résolution de l'équation (1).

En posant $u = \text{Log } x$, l'équation devient :

$$u^3 + 3u^2 - u - 3 = 0 \quad \text{soit} \quad (u + 3)(u^2 - 1) = 0$$

dont les solutions sont $u_1 = -3$, $u_2 = -1$, $u_3 = 1$.

On en déduit :

$$\text{Log } x = -3 \quad \text{soit} \quad x = e^{-3} \approx 0,0498$$

$$\text{Log } x = -1 \quad \text{soit} \quad x = e^{-1} \approx 0,3679$$

$$\text{Log } x = 1 \quad \text{soit} \quad x = e \approx 2,7183.$$

Donc :

$$\boxed{S = \{e^{-3}, e^{-1}, e\}.}$$

c) Résolution de l'équation (2).

En posant $u = e^{-2x}$ et en remarquant que $u^2 = e^{-4x}$ et $u^3 = e^{-6x}$ l'équation (2) s'écrit :

$$u^3 + 3u^2 - u - 3 = 0.$$

e^{-2x} égale u_1 ou u_2 n'a pas de solution car pour tout x , $e^x > 0$.
 $e^{-2x} = 1$ entraîne $x = 0$.

Donc :

$$\boxed{S = \{0\}.}$$

7 a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$\text{Log}(2x - 3) + \text{Log}(x + 1) = \text{Log } 21 - \text{Log } 3. \quad (1)$$

b) Vérifier que pour tout u réel : $u^2 - 3u^2 - 6u + 8 = (u + 2)(u - 1)(u - 4)$, puis résoudre l'équation d'inconnue x :

$$e^{3x} - 3e^{2x} - 6e^x + 8 = 0. \quad (2)$$

a) Résolution de l'équation (1).

Il est nécessaire que les inégalités suivantes soient vérifiées :

$$2x - 3 > 0 \quad \text{et} \quad x + 1 > 0 \quad \text{soit} \quad x > \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x > -1.$$

Soit en définitive, $x > \frac{3}{2}$.

Remarquons que $\text{Log } 21 - \text{Log } 3 = \text{Log } \frac{21}{3} = \text{Log } 7$.

L'équation donnée s'écrit :

$$\text{Log}(2x - 3)(x + 1) = \text{Log } 7. \text{ Donc : } (2x - 3)(x + 1) = 7.$$

On en déduit : $2x^2 - x - 10 = 0$,

qui admet pour racines $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{5}{2}$.

L'équation (1) admet donc pour solution :

$$S = \left\{ \frac{5}{2} \right\}.$$

b) Résolution de l'équation (2).

Dans $\mathbb{R}$, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition permet d'écrire :

$$A = (u + 2)(u - 1)(u - 4) = (u^2 + u - 2)(u - 4).$$

$$A = (u^2 + u - 2)u - (u^2 + u - 2)4 = u^3 - 3u^2 - 6u + 8.$$

Donc pour tout u réel :

$$u^3 - 3u^2 - 6u + 8 = (u + 2)(u - 1)(u - 4).$$

En posant $e^x = u$ et en remarquant que $u^2 = e^{2x}$, $u^3 = e^{3x}$, l'équation s'écrit :

$$u^3 - 3u^2 - 6u + 8 = 0$$

dont les solutions sont : $u_1 = -2$, $u_2 = 1$, $u_3 = 4$.

On en déduit :

$e^x = u_1$ qui n'a pas de solution car pour tout x réel, $e^x > 0$;

$e^x = 1$ soit $x = 0$;

$e^x = 4$ soit $x = \text{Log } 4 \approx 1,38629$.

Donc :

$$S = \{0, \text{Log } 4\}.$$

Exercices

8 a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$4x^4 - 37x^2 + 9 = 0.$$

b) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ des équations d'inconnue x :

$$4(\cos x)^4 - 37(\cos x)^2 + 9 = 0$$

$$4(\text{Log } x)^4 - 37(\text{Log } x)^2 + 9 = 0$$

$$4e^{4x} - 37e^{2x} + 9 = 0.$$

a) Résolution de l'équation $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$.

Il s'agit d'une équation bicarrée. En posant $x^2 = X$, elle s'écrit :

$$4X^2 - 37X + 9 = 0.$$

Le discriminant de l'équation est $\Delta = 37^2 - 4 \times 4 \times 9 = 35^2$.

$$X' = \frac{37 - 35}{8} = \frac{1}{4}, \quad X'' = \frac{37 + 35}{8} = 9.$$

D'où :

$$x^2 = \frac{1}{4} \quad \text{soit} \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$x^2 = 9 \quad \text{soit} \quad x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -3.$$

L'ensemble des solutions est :

$$S = \left\{ -3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3 \right\}.$$

b) Équation $4(\cos x)^4 - 37(\cos x)^2 + 9 = 0$.

En posant $u = \cos x$, l'équation s'écrit :

$$4u^4 - 37u^2 + 9 = 0.$$

On en déduit, en tenant compte des résultats précédents :

$$\begin{array}{ll} \cos x = \frac{1}{2} & \text{soit} \quad x = \varepsilon \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} & \text{soit} \quad x = \varepsilon \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \quad (\varepsilon = \pm 1; k \in \mathbb{Z})$$

c) Équation $4(\text{Log } x)^4 - 37(\text{Log } x)^2 + 9 = 0$.

On obtient de même, en posant $u = \text{Log } x$:

$$\text{Log } x = -3 \quad \text{soit} \quad x = e^{-3} \approx 0,04979$$

$$\text{Log } x = -\frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad x = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,6065$$

$$\text{Log } x = \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad x = e^{\frac{1}{2}} \approx 1,6487$$

$$\text{Log } x = 3 \quad \text{soit} \quad x = e^3 \approx 20,086.$$

Donc :

$$S = \{e^{-3}; e^{-\frac{1}{2}}; e^{\frac{1}{2}}; e^3\}$$

d) Équation $4e^{4x} - 37e^{2x} + 9 = 0$.

En posant $u = e^x$, on obtient :

$$e^x = \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad x = \text{Log } \frac{1}{2} = -\text{Log } 2 \approx -0,6931$$

$$e^x = 3 \quad \text{soit} \quad x = \text{Log } 3 \approx 1,0986.$$

Donc :

$$S = \{-\text{Log } 2; \text{Log } 3\}.$$

9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue u :

$$u^4 - 2u^2 + 15 = 0.$$

En déduire la résolution des équations d'inconnue x :

$$(\log x)^4 - 2(\log x)^2 - 15 = 0; \quad e^{4x} - 2e^{2x} - 15 = 0.$$

Solution abrégée.

Équation	Calculs intermédiaires	Solutions
$u^4 - 2u^2 + 15 = 0$	$u^2 = X; X^2 - 2X - 15 = 0$ $X' = -3; X'' = 5$	$S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$
$(\log x)^4 - 2(\log x)^2 - 15 = 0$	$\log x = u$ $\log x = -\sqrt{5},$ $\log x = \sqrt{5}$	$S = \{10^{-\sqrt{5}}, 10^{\sqrt{5}}\}$ $10^{-\sqrt{5}} \approx 0,006$ $10^{\sqrt{5}} \approx 172$
$e^{4x} - 2e^{2x} - 15 = 0$	$e^x = u; e^x = \sqrt{5}$	$S = \{\text{Log } \sqrt{5}\}$ $\text{Log } \sqrt{5} = \frac{1}{2} \text{Log } 5 \approx 0,8047$

10 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, le système d'inconnue (x, y) :

$$\begin{cases} 2 \text{Log } x + \text{Log } y = 2 \\ x^2 + y = e^2 + 1. \end{cases}$$

L'équation (1) n'a de sens que si x et y sont *strictement positifs*.

Elle s'écrit : $\text{Log } x^2 + \text{Log } y = 2$ soit $\text{Log } x^2 y = 2$.

On en déduit le système :

$$\begin{cases} x^2 y = e^2 \\ x^2 + y = e^2 + 1. \end{cases}$$

Exercices

Il en résulte que x^2 et y sont solutions de l'équation du second degré :

$$u^2 - (e^2 + 1)u + e^2 = 0$$

dont les racines sont : $u_1 = 1$ et $u_2 = e^2$.

Donc :
$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y = e^2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x^2 = e^2 \\ y = 1. \end{cases}$$

Comme x et y sont strictement positifs, on obtient :

$$(x = 1, y = e^2) \quad \text{ou} \quad (x = e, y = 1).$$

On vérifie bien que ces deux couples satisfont le système.

Donc :

$$S = \{(x = 1, y = e^2); (x = e, y = 1)\}.$$

11 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équations :

$$\begin{cases} 3 \operatorname{Log} x + 2 \operatorname{Log} y = 2 \\ x^3 + y^2 = 2e. \end{cases}$$

L'équation (1) n'a de sens que si x et y sont *strictement positifs*.

Elle s'écrit : $\operatorname{Log} x^3 y^2 = 2$ soit $x^3 y^2 = e^2$.

Le système proposé devient :

$$\begin{cases} x^3 y^2 = e^2 \\ x^3 + y^2 = 2e. \end{cases}$$

En posant $x^3 = X$ et $y^2 = Y$, on obtient :

$$X + Y = 2e \quad \text{et} \quad XY = e^2.$$

X et Y sont solutions de l'équation du second degré :

$$u^2 - 2eu + e^2 = 0 \quad \text{soit} \quad (u - e)^2 = 0$$

et admet pour solution $u = e$.

Donc :

$$x^3 = e \quad \text{et} \quad y^2 = e,$$

soit :

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{e} \approx 1,396 \\ y &= \sqrt{e} \approx 1,649. \end{aligned}$$

On vérifie que $(3 \operatorname{Log} \sqrt[3]{e} + 2 \operatorname{Log} \sqrt{e})$ égale bien 2 et que $(x^3 + y^2)$ égale $2e$.

Donc :

$$S = \{x = \sqrt[3]{e}; y = \sqrt{e}\}.$$

12 a étant un paramètre strictement positif, résoudre et discuter dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} e^x \cdot e^y = a^2 \\ xy = 4. \end{cases}$$

Remarquons que $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$.

Le système est donc équivalent au système :

$$\begin{cases} e^{x+y} = a^2 \\ xy = 4 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x + y = 2 \operatorname{Log} a \quad (\text{car } a > 0) \\ xy = 4. \end{cases}$$

x et y sont solutions de l'équation du second degré :

$$u^2 - (2 \operatorname{Log} a) u + 4 = 0. \quad (1)$$

Le discriminant réduit de l'équation est $\Delta' = (\operatorname{Log} a)^2 - 4$.

L'équation (1) admet des solutions si et seulement si $\Delta' \geq 0$ soit :

$$\operatorname{Log} a \leq -2 \quad \text{ou} \quad \operatorname{Log} a \geq 2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0 < a \leq e^{-2} \quad \text{ou} \quad a \geq e^2.$$

Donc si $0 < a < e^{-2}$ ou $a > e^2$, les racines sont distinctes et :

$$\begin{array}{|l} x = \operatorname{Log} a - \sqrt{(\operatorname{Log} a)^2 - 4} \\ y = \operatorname{Log} a + \sqrt{(\operatorname{Log} a)^2 - 4} \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{|l} x = \operatorname{Log} a + \sqrt{(\operatorname{Log} a)^2 - 4} \\ y = \operatorname{Log} a - \sqrt{(\operatorname{Log} a)^2 - 4} \end{array}$$

$$\text{Si } a = e^{-2},$$

$$\text{si } a = e^2,$$

$$x = y = \operatorname{Log} e^{-2} = -2$$

$$x = y = \operatorname{Log} e^2 = 2.$$



3. Intégration

1 Déterminer l'ensemble des fonctions primitives de chacune des fonctions numériques f_1, f_2, f_3 définies par :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2x + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}; & f_2(x) &= \frac{2x+1}{x^2+x+5}; \\ f_3(x) &= \cos x \cdot e^{\sin x}. \end{aligned}$$

a) *Primitives de f_1 .*

La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$. Sur chacun des intervalles $] -\infty, -1[$, $]1, +\infty[$ les fonctions $h : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ et $g : x \mapsto \frac{2}{(x+1)^2}$ sont continues; elles admettent comme fonctions primitives :

$$H \text{ telle que } H(x) = \text{Log } |x+1|$$

$$G \text{ telle que } G(x) = -\frac{2}{x+1}.$$

Les primitives de f_1 sont les fonctions F_1 telles que :

$$F_1(x) = x^2 + \text{Log } |x+1| - \frac{2}{(x+1)} + k.$$

Remarquons que sur l'intervalle $] -\infty, -1[$, $\text{Log } |x+1| = \text{Log } (-x-1)$ et sur l'intervalle $] -1, +\infty[$, $\text{Log } |x+1| = \text{Log } (x+1)$.

b) *Primitives de f_2 .*

Considérons la fonction u définie par $u(x) = x^2 + x + 5$. Remarquons que pour tout x réel, $u(x)$ est strictement positif ($\Delta = 1 - 20$ est négatif) donc la fonction f_2 définie et continue sur $\mathbb{R}$, admet une primitive.

$$\text{Comme } u'(x) = 2x + 1, \quad f_2(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Une primitive F de f_2 , est telle que : $F(x) = \text{Log } u(x)$.

Sur $\mathbb{R}$, les primitives de f_2 sont les fonctions F_2 telles que :

$$F_2(x) = \text{Log } (x^2 + x + 5) + k.$$

c) *Primitives de f_3 .*

La fonction f_3 est définie et continue sur $\mathbb{R}$; elle admet donc sur $\mathbb{R}$ une primitive.

Considérons la fonction u définie par $u(x) = \sin x$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = \cos x$, donc :

$$f_3(x) = u'(x) \cdot e^{u(x)}.$$

Une primitive F de f_3 est telle que : $F(x) = e^{u(x)}$.
 Sur $\mathbb{R}$, les primitives de f_3 sont les fonctions F_3 telles que :

$$F_3(x) = e^{\sin x} + k.$$

2 Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \text{Log}(\text{Log } x)$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

b) Calculer $f'(x)$ et $I = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \text{Log } x}$.

a) Ensemble de définition de f .

La fonction f est définie pour tout x réel tel que $\text{Log } x > 0$ c'est-à-dire pour $x > 1$.
 L'ensemble de définition de f est l'intervalle $]1, +\infty[$.

b) Calcul de I .

Dans l'intervalle $]1, +\infty[$, la fonction f est dérivable comme composée de fonctions dérivables.

Si $f(x) = \text{Log } u(x)$ alors $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Or $u(x) = \text{Log } x$, donc :

$$f'(x) = \frac{1}{x \text{Log } x}.$$

L'intégrale I s'écrit :

$$I = \int_e^{e^2} f'(x) dx \quad \text{donc} \quad I = f(e^2) - f(e).$$

$$I = \text{Log}(\text{Log } e^2) - \text{Log}(\text{Log } e) = \text{Log } 2 \approx 0,693 \text{ 15}.$$

Donc :

$$I = \text{Log } 2.$$

3 x étant un nombre réel, on appelle partie entière de x et on note $E(x)$ le plus grand entier relatif inférieur à x :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

a) Représenter graphiquement dans un repère orthonormé la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[-2, 4]$ par $f(x) = E\left(\frac{x}{2}\right)$.

b) Calculer $I = \int_{-2}^4 f(x) dx$.

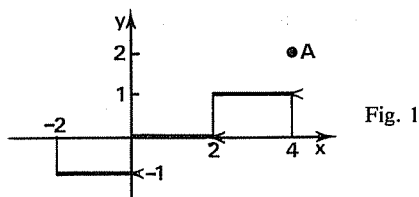


Fig. 1

a) Étude de la fonction f .

Quand $x \in [-2, 0[, \frac{x}{2} \in [-1, 0[$ donc $E\left(\frac{x}{2}\right) = -1$.

Quand $x \in [0, 2[, \frac{x}{2} \in [0, 1[$ donc $E\left(\frac{x}{2}\right) = 0$.

Quand $x \in [2, 4[, \frac{x}{2} \in [1, 2[$ donc $E\left(\frac{x}{2}\right) = 1$.

Quand $x = 4, \frac{x}{2} = 2$ donc $E\left(\frac{x}{2}\right) = 2$.

La courbe représentative de f est constituée de trois segments parallèles à Ox , ouverts à l'extrémité droite et d'un point A de coordonnées (4, 2).

b) I est l'intégrale d'une fonction en escalier définie par :

Si $x \in [-2, 0[, f(x) = -1$

Si $x \in [0, 2[, f(x) = 0$

Si $x \in [2, 4[, f(x) = 1; f(4) = 2$.

Donc :

$$I = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx$$

$$I = [0 - (-2)](-1) + (2 - 0) \cdot 0 + (4 - 2) \cdot 1 \quad \text{donc} \quad \boxed{I = 0.}$$

4 On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie par :

$$g(x) = x \operatorname{Log} x - x.$$

a) Calculer sa dérivée.

b) Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = x^2 - 5x + 2 \operatorname{Log} x$.

Calculer $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx$.

a) Calcul de g' .

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et :

$$g'(x) = \operatorname{Log} x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 \quad \text{soit} \quad \boxed{g'(x) = \operatorname{Log} x.}$$

b) Calcul de I.

Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ la fonction f est continue comme somme de fonctions continues. Elle est donc intégrable sur $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Si F est une primitive de f alors :

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 2g(x) \quad \text{soit} \quad F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 2x \operatorname{Log} x - 2x.$$

On en déduit :

$$I = F(2) - F\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$F(2) = \frac{8}{3} - \frac{5 \times 4}{2} + 4 \operatorname{Log} 2 - 4 = -\frac{34}{3} + 4 \operatorname{Log} 2$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24} - \frac{5}{8} + \operatorname{Log} \frac{1}{2} - 1 = -\frac{19}{12} - \operatorname{Log} 2.$$

Donc :

$$I = \left(-\frac{34}{3} + 4 \operatorname{Log} 2\right) - \left(-\frac{19}{12} - \operatorname{Log} 2\right).$$

Soit :

$$I = -\frac{39}{4} + 5 \operatorname{Log} 2 \approx -6,284.$$

5 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de longueur : 2 cm), on considère la parabole P d'équation $y = \frac{1}{2}x^2$ et la droite D d'équation $y = x$.

Soit E l'ensemble des points $M(x, y)$ définis par :

$$0 \leq x \leq 2 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{2} \leq y \leq x.$$

Calculer en cm^3 le volume V du solide engendré par E dans sa rotation autour de l'axe Ox .

La droite D d'équation $y = x$ coupe la parabole P aux points dont les coordonnées (x, y) vérifient le système :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = x \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}x^2 \\ y = x \end{cases}$$

La première équation s'écrit $x(x - 2) = 0$ soit $x = 0$ ou $x = 2$.

Exercices

Les points d'intersection de D et de P sont donc (fig. 2) :

$$O(x=0, y=0) \quad A(x=2, y=2).$$

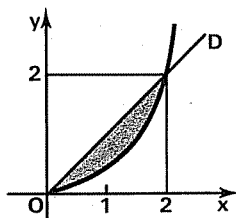


Fig. 2

Le volume V demandé est :

$$V = \int_0^2 \pi \left[x^2 - \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 \right] dx = \pi \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^4}{4} \right) dx$$

$$V = \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{20} \right]_0^2 = \pi \left(\frac{8}{3} - \frac{32}{20} \right) \quad \text{soit} \quad V = \frac{16}{15} \pi \text{ (unités).}$$

L'unité de volume est 8 cm^3 donc :

$$V = \frac{128}{15} \pi \approx 26,808 \text{ cm}^3.$$

6 Représenter dans le plan affine euclidien d'axes $x'Ox$, $y'Oy$ (unité : 2 cm) la fonction numérique f définie pour tout x strictement positif par $f(x) = \frac{1}{x}$. On considère le domaine plan $\mathcal{D}$, ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$1 \leq x \leq 2 \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq f(x).$$

a) Calculer l'aire de $\mathcal{D}$; en donner une valeur approchée à 1 mm^2 près.

b) Calculer le volume du solide engendré par la rotation de $\mathcal{D}$ autour de $x'Ox$.

a) Calcul de l'aire de $\mathcal{D}$.

Sur $]0, +\infty[$, la fonction f est continue et strictement décroissante. Sa courbe représentative est représentée sur la figure 3.

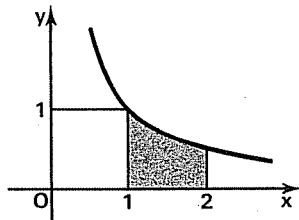


Fig. 3

L'aire de $\mathcal{D}$ est :

$$S = \int_1^2 \frac{dx}{x} = [\text{Log } x]_1^2 = \text{Log } 2 \text{ (unités)}.$$

L'unité étant 4 cm^2 , on a donc :

$$S = 4 \text{ Log } 2 \approx 2,77 \text{ cm}^2.$$

b) *Calcul du volume.*

Le volume du solide engendré par la rotation de $\mathcal{D}$ autour de $x'Ox$ est :

$$V = \int_1^2 \pi [f(x)]^2 dx = \pi \int_1^2 \frac{dx}{x^2}$$

$$V = \pi \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = \pi \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) \quad \text{soit} \quad V = \frac{\pi}{2} \text{ (unités)}.$$

L'unité de volume étant 8 cm^3 , on a donc :

$$V = 4\pi \approx 12,556 \text{ cm}^3.$$

7 Soit C la courbe d'équation $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$ tracée dans un repère orthonormé d'axes $x'Ox, y'Oy$ (unité 1 cm). On considère la plaque P homogène, mince, limitée par l'axe $x'Ox$, la courbe C et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$.

a) Calculer, en cm^2 , l'aire de la plaque P .

b) Calculer le moment d'inertie de la plaque P par rapport à $y'Oy$ en fonction de sa masse M .

c) Calculer, en cm^3 , le volume du solide engendré par la rotation de la plaque P autour de $x'Ox$.

a) *Aire de la plaque P .*

La fonction $f : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{x}}$ est définie, continue, strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Sa courbe représentative C est tracée sur la figure 4. Indiquons les coordonnées de quelques points de C :

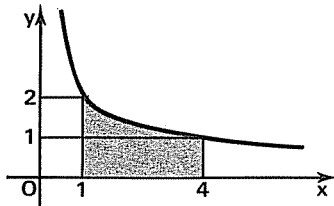


Fig. 4

Exercices

x	1	2	4
$f(x)$	2	$\sqrt{2}$	1

L'aire de la plaque P est :

$$S = \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}} dx.$$

Une primitive de f sur $\mathbb{R}^{*+}$ est la fonction F telle que $F(x) = 4\sqrt{x}$.

Donc : $S = F(4) - F(1) = 8 - 4$ soit $S = 4 \text{ cm}^2$.

b) Moment d'inertie de P par rapport à $y'Oy$.

Le moment d'inertie élémentaire est : $\Delta I = x^2 \cdot \Delta m$ avec $\Delta m = \frac{2}{\sqrt{x}} \Delta x$ (la masse surfacique étant 1), donc $\Delta I = 2x^{\frac{3}{2}} \Delta x$.

$$\text{Soit : } I = \int_1^4 2x^{\frac{3}{2}} dx = \left[\frac{4}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_1^4 = \frac{4}{5} (32 - 1)$$

donc $I = \frac{4 \times 31}{5}$. La masse surfacique étant l'unité, la masse M de la plaque est 4.

Donc :

$$I = \frac{31}{5} M.$$

c) Volume du solide.

Le volume du solide engendré par la rotation de P autour de $x'Ox$ est :

$$V = \int_1^4 \pi [f(x)]^2 dx = \pi \int_1^4 \frac{4}{x} dx \quad \text{soit} \quad V = 4\pi [\text{Log } x]_1^4$$

$$V = 4\pi \text{ Log } 4 \approx 17,421.$$

Le volume en cm^3 de la plaque est 17,421.

8 a) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tracer la courbe C représentant la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = (1-x)e^x$.

b) Si G est la fonction numérique définie par $G(x) = \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2}x + \frac{x^2}{2} \right) e^{2x}$ calculer $G'(x)$.

c) Calculer le volume de révolution engendré par la rotation autour de Ox du domaine plan $\mathcal{D}$, ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq f(x).$$

a) Étude de la fonction $f : x \mapsto (1-x)e^x$.

La fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$; $f(0) = 1$; $f(1) = 0$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = -e^x + (1-x)e^x \quad \text{soit} \quad f'(x) = -xe^x.$$

$f'(x) = 0$ si $x = 0$ et sur l'intervalle $[0, 1]$ $f'(x)$ est négatif, donc f est décroissante.

On en déduit le tracé (fig. 5).

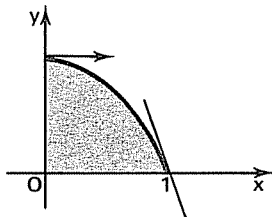


Fig. 5

b) Calcul de $G'(x)$.

La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$G'(x) = \left(-\frac{3}{2} + x\right)e^{2x} + 2\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2}x + \frac{x^2}{2}\right)e^{2x}$$

$$G'(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{2x} \quad \text{soit} \quad \boxed{G'(x) = (x - 1)^2 e^{2x}}.$$

c) Calcul du volume.

Le volume de révolution engendré par le domaine $\mathcal{D}$ est :

$$V = \int_0^1 \pi [f(x)]^2 dx \quad \text{soit} \quad V = \pi \int_0^1 (1-x)^2 e^{2x} dx.$$

Une primitive de la fonction $x \mapsto (1-x)^2 e^{2x}$ est G , donc :

$$V = \pi (G(1) - G(0)).$$

$$\text{Avec :} \quad G(1) = \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)e^2 = \frac{e^2}{4} \quad \text{et} \quad G(0) = \frac{5}{4}.$$

Donc :

$$\boxed{V = \frac{\pi}{4} (e^2 - 5) \approx 1,876 \text{ (unités)}}.$$

9 a) Étudier les variations de la fonction numérique f définie sur $[0, 2\pi]$ par :

$$f(x) = \sin \frac{x}{2}.$$

Tracer sa courbe représentative C dans le plan muni d'un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

Exercices

b) Soit P le domaine plan fini limité par C et Ox. Calculer l'aire de P.

c) Déterminer le volume engendré par la rotation de P autour de Ox.

a) Étude de la fonction f.

La fonction f est définie et continue sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(2\pi) = \sin \pi = 0.$$

La fonction f est dérivable sur $[0, 2\pi]$ et :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}.$$

$f'(x) = 0$ si et seulement si $\cos \frac{x}{2} = 0$ soit $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ donc $x = \pi + 2k\pi$.

Sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, $f'(x) = 0$ pour $x = \pi$.

On en déduit le tableau de variations et le tracé de C.

x	0	π	2π
$\frac{x}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	1
			$\searrow$
			0

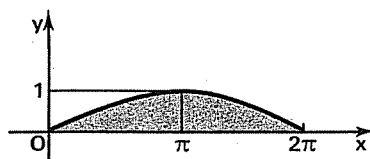


Fig. 6

b) Aire de P.

$$S = \int_0^{2\pi} \sin \frac{x}{2} dx = \left[-2 \cos \frac{x}{2} \right]_0^{2\pi} = -2 \cos \pi - (-2 \cos 0).$$

Donc :

$$S = 4 \text{ (unités).}$$

c) Volume engendré par la rotation de P autour de Ox.

$$V = \int_0^{2\pi} \pi [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx.$$

Or $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$; donc une primitive de f^2 est la fonction F telle que :

$$F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2}.$$

Donc : $V = \pi [F(2\pi) - F(0)]$ soit $V = \pi^2 \approx 9,870$ (unités).

10 a) Établir sur le segment $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ les variations de la fonction f telle que :

$$f(x) = \cos^2 x.$$

Tracer la courbe C représentative de cette fonction dans un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$ (unité : 2 cm).

b) Établir l'égalité : $\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4 \cos 2x + 3)$ puis calculer le volume du solide engendré par la rotation autour de $x'Ox$ du domaine plan fini limité par la courbe C et $x'Ox$.

a) Étude de la fonction $f : x \mapsto \cos^2 x$.

La fonction f est définie et continue sur le segment $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Comme

$f(-x) = f(x)$ la fonction f est paire. On peut limiter son étude au segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -2 \sin x \cos x = -\sin 2x$.

$f'(x) = 0$ si et seulement si $\sin 2x = 0$ soit $2x = k\pi$ donc $x = \frac{k\pi}{2}$.

Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

On en déduit le tableau de variations :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	—	0
$f(x)$	1	$\searrow$	0

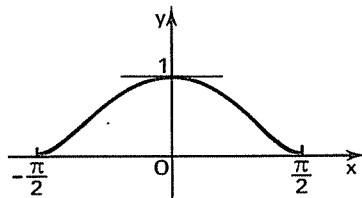


Fig. 7

Exercices

La courbe C présente l'axe $y'Oy$ pour axe de symétrie.

b) *Calcul du volume.*

L'égalité $\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4 \cos 2x + 3)$ a été établie à la page 68.

Le volume V du solide est :

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi [f(x)]^2 dx = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx.$$

Une primitive de la fonction $x \mapsto \cos^4 x$ est la fonction F telle que :

$$F(x) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \sin 4x + 2 \sin 2x + 3x \right).$$

Donc :

$$V = \pi \left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right].$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \sin 2\pi + 2 \sin \pi + 3 \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3}{16} \pi; \quad F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{16} \pi.$$

Soit :

$$V = \frac{3}{8} \pi^2.$$

L'unité de volume étant 8 cm^3 , on obtient :

$V = 3\pi^2 \approx 29,609 \text{ cm}^3.$



4. Équations différentielles

1 a) Intégrer l'équation différentielle $9y'' + 4y = 0$.

b) Déterminer la solution particulière f dont la courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ passe par le point P de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{3}\right)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur $-\frac{2}{3}$.

c) Montrer que pour tout x réel, $f(x) = 2 \cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

a) Résolution de l'équation différentielle $9y'' + 4y = 0$.

L'équation différentielle s'écrit $y'' + \frac{4}{9}y = 0$. Elle est du type $y'' + \omega^2 y = 0$ avec

$$\omega^2 = \frac{4}{9}.$$

Les solutions de l'équation sont les fonctions f telles que :

$$f(x) = A \cos \frac{2}{3}x + B \sin \frac{2}{3}x.$$

b) Recherche d'une solution particulière.

Déterminons les réels A et B tels que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{3}$.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = A \cos \frac{\pi}{3} + B \sin \frac{\pi}{3} = \frac{A}{2} + \frac{B\sqrt{3}}{2}.$$

$$f'(x) = -\frac{2}{3}A \sin \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}B \cos \frac{2}{3}x \quad \text{donc} \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2A}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2B}{3} \cdot \frac{1}{2}.$$

Les réels A et B vérifient le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{A}{2} + \frac{B\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ -\frac{A\sqrt{3}}{3} + \frac{B}{3} = -\frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} A + B\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \\ -A\sqrt{3} + B = -2. \end{cases}$$

On trouve $(A = \sqrt{3}, B = 1)$.

Exercices

La solution particulière f demandée est définie par :

$$f(x) = \sqrt{3} \cos \frac{2}{3}x + \sin \frac{2}{3}x.$$

c) Résolution de l'équation $f(x) = 0$.

On peut écrire : $f(x) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{2}{3}x + \frac{1}{2} \sin \frac{2}{3}x \right)$.

En posant $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$ et $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$, on obtient :

$$f(x) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{2}{3}x + \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{2}{3}x \right)$$

soit :

$$f(x) = 2 \cos \left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6} \right)$$

$f(x) = 0$ si et seulement si $\cos \left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6} \right) = 0$ soit :

$$\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{donc} \quad x = \pi + \frac{3k\pi}{2}$$

$$S = \left\{ x/x = \pi + \frac{3}{2}k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2 a) Intégrer l'équation différentielle $9y'' + y = 0$.

b) Déterminer la solution particulière f qui prend la valeur 1 pour $x = 0$ et dont la dérivée est égale à $\frac{1}{3}$ pour $x = 0$.

Montrer que pour tout x réel, $f(x) = a \cos(\omega x + \varphi)$, a , ω et φ étant des constantes réelles ($a > 0$).

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos \frac{x}{3} + \sin \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

a) Résolution de l'équation différentielle $9y'' + y = 0$.

L'équation différentielle s'écrit $y'' + \frac{1}{9}y = 0$. Elle est du type $y'' + \omega^2 y = 0$ avec

$$\omega^2 = \frac{1}{9}.$$

Les solutions de l'équation sont les fonctions f telles que :

$$f(x) = A \cos \frac{x}{3} + B \sin \frac{x}{3}.$$

b) Recherche d'une solution particulière.

Déterminons les réels A et B tels que $f(0) = 1$ et $f'(0) = \frac{1}{3}$.

$$f(0) = A$$

$$f'(x) = -\frac{A}{3} \sin \frac{x}{3} + \frac{B}{3} \cos \frac{x}{3} \quad \text{donc} \quad f'(0) = \frac{B}{3}.$$

On en déduit ($A = 1$, $B = 1$).

La solution particulière f demandée est définie par :

$$f(x) = \cos \frac{x}{3} + \sin \frac{x}{3}.$$

On peut écrire : $f(x) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{3} \right)$.

En posant $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4}$, on obtient :

$$f(x) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{x}{3} + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{x}{3} \right)$$

soit :

$$f(x) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4} \right)$$

c) Résolution de l'équation $\cos \frac{x}{3} + \sin \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

L'équation s'écrit :

$$\sqrt{2} \cos \left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{soit} \quad \cos \left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}.$$

Donc : $\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4} = \varepsilon \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (\varepsilon = \pm 1; k \in \mathbb{Z})$

soit : $\frac{x}{3} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$$x = \frac{7\pi}{4} + 6k\pi$$

$\frac{x}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$$x = -\frac{\pi}{4} + 6k\pi.$$

Exercices

3 a) Soit la fonction f définie par $y = f(x) = \cos \frac{x}{2} - 3 \sin \frac{x}{2}$. Calculer $y'' = f''(x)$ et trouver une relation simple entre y et y'' .

b) Donner la solution générale de l'équation $4y'' + y = 0$ et déterminer la solution particulière g telle que $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ et $g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

a) Relation entre y et y'' .

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$y' = f'(x) = -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \cos \frac{x}{2}.$$

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$y'' = f''(x) = -\frac{1}{4} \cos \frac{x}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{x}{2}.$$

Remarquons que : $4y'' = -\cos \frac{x}{2} + 3 \sin \frac{x}{2}$.

Donc :

$$4y'' + y = 0.$$

b) Résolution de l'équation différentielle $4y'' + y = 0$.

L'équation différentielle s'écrit : $y'' + \frac{1}{4}y = 0$. Elle est du type $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega^2 = \frac{1}{4}$.

Les solutions de l'équation sont les fonctions g telles que :

$$g(x) = A \cos \frac{x}{2} + B \sin \frac{x}{2}.$$

Déterminons les réels A et B tels que $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ et $g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = A \cos \frac{\pi}{6} + B \sin \frac{\pi}{6} = A \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{B}{2}.$$

$$g'(x) = -\frac{A}{2} \sin \frac{x}{2} + \frac{B}{2} \cos \frac{x}{2} \quad \text{donc} \quad g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{A}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{B}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Les réels A et B vérifient le système :

$$\begin{cases} A \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{B}{2} = 0 \\ -\frac{A}{4} + \frac{B\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} A\sqrt{3} + B = 0 \\ -A + B\sqrt{3} = 4\sqrt{3}. \end{cases}$$

On trouve : $(A = -\sqrt{3}, B = 3)$.

La solution particulière g demandée est définie par :

$$g(x) = -\sqrt{3} \cos \frac{x}{2} + 3 \sin \frac{x}{2}.$$

4 a) Intégrer l'équation différentielle $y' = 5y$.

Déterminer les réels a et b tels que la fonction f définie par $f(x) = ax + b$ soit solution de l'équation différentielle :

$$y' - 5y = x \quad (\text{E})$$

Trouver la solution générale de (E).

Les solutions de l'équation $y' = 5y$ sont les fonctions définies par $y = Ce^{5x}$.

La fonction f , telle que $f(x) = ax + b$, est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si :

$$f'(x) - 5f(x) = x.$$

Or $f'(x) = a$ donc, pour tout x réel,

$$a - 5(ax + b) = x \quad \text{soit} \quad (-5a - 1)x + a - 5b = 0.$$

On en déduit :

$$\begin{cases} 5a + 1 = 0 \\ a - 5b = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \left(a = -\frac{1}{5}, b = -\frac{1}{25} \right).$$

La fonction f est telle que : $f(x) = -\frac{x}{5} - \frac{1}{25}$.

Les solutions de l'équation (E) s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière la solution générale de l'équation sans second membre ($y' - 5y = 0$). Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies par :

$$y = Ce^{5x} - \frac{x}{5} - \frac{1}{25}.$$

5 a) Intégrer l'équation différentielle $0,1y'' + 40y' + 5000 = 0$.

b) Déterminer la solution particulière f de cette équation telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 100$.

a) Résolution de l'équation différentielle.

L'équation caractéristique de l'équation différentielle est :

$$0,1r^2 + 40r + 5000 = 0 \quad \text{soit} \quad r^2 + 400r + 50000 = 0.$$

Exercices

Le discriminant réduit est :

$$\Delta' = (200)^2 - 50\,000 = -(100)^2.$$

Donc : $r_1 = -200 - 100j$, $r_2 = -200 + 100j$.

La solution générale de l'équation est l'ensemble des fonctions f telles que :

$$f(x) = e^{-200x} (A \cos 100x + B \sin 100x).$$

b) Recherche d'une solution particulière.

Déterminons les réels A et B tels que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 100$.

$$f(0) = A.$$

$$f'(x) = e^{-200x} (A \cos 100x + B \sin 100x)(-200) + e^{-200x} (-100A \sin 100x + 100B \cos 100x)$$

$$f'(0) = -200A + 100B.$$

Les réels A et B vérifient le système :

$$\begin{cases} A = 0 \\ -200A + 100B = 100 \end{cases} \quad \text{soit} \quad (A = 0, B = 1).$$

La solution particulière f demandée est définie par :

$$f(x) = e^{-200x} \cdot \sin 100x.$$

6 a) Intégrer l'équation différentielle : $y'' + 2y' + 5y = 0$.

b) Déterminer la solution particulière f telle que $f(0) = 5$ et $f'(0) = -11$.

c) Intégrer l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + 5y = 30 \cos x$.

a) *Intégration de $y'' + 2y' + 5y = 0$.*

L'équation caractéristique de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 5y = 0$ est :

$$r^2 + 2r + 5 = 0.$$

Le discriminant réduit est $\Delta' = 1 - 5 = -(2)^2$.

Donc :

$$r_1 = -1 + 2j \quad r_2 = -1 - 2j.$$

La solution générale de l'équation est l'ensemble des fonctions f telles que :

$$f(x) = e^{-x} (A \cos 2x + B \sin 2x).$$

b) Recherche d'une solution particulière.

Déterminons les réels A et B tels que $f(0) = 5$ et $f'(0) = -11$.

$$f'(x) = e^{-x}(-A \cos 2x - B \sin 2x) + e^{-x}(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x)$$

$$f(0) = A \quad \text{et} \quad f'(0) = -A + 2B.$$

Donc A et B vérifient le système :

$$\begin{cases} A = 5 \\ -A + 2B = -11 \end{cases} \quad \text{soit} \quad (A = 5, B = -3).$$

La solution particulière f demandée est définie par :

$$f(x) = e^{-x}(5 \cos 2x - 3 \sin 2x).$$

c) *Intégration de (E).*

Cherchons une *solution particulière* de la forme :

$$Y = M \cos x + N \sin x$$

$$Y' = -M \sin x + N \cos x \quad Y'' = -M \cos x - N \sin x.$$

Y est solution, si et seulement si,

$$(-M \cos x - N \sin x) + 2(-M \sin x + N \cos x) + 5(M \cos x + N \sin x) = 30 \cos x.$$

$$\text{soit : } (4M + 2N) \cos x + (-2M + 4N) \sin x = 30 \cos x.$$

En identifiant les termes en cosinus et sinus, on obtient :

$$\begin{cases} 4M + 2N = 30 \\ -2M + 4N = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad (M = 6, N = 3).$$

Donc la fonction définie par $Y = 6 \cos x + 3 \sin x$ est une solution particulière de (E).

La solution générale de (E) est donc l'ensemble des fonctions f définies par :

$$f(x) = (A \cos 2x + B \sin 2x) e^{-x} + 6 \cos x + 3 \sin x.$$

74 a) *Intégrer l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 4y = 0$.*

b) *Déterminer la solution particulière f telle que : $f(0) = 1$ et $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.*

c) *Intégrer l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4y = \sin 3x$.*

a) *Intégration de $y'' + 4y' + 4y = 0$.*

L'équation caractéristique de l'équation différentielle est :

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \quad \text{soit} \quad (r + 2)^2 = 0$$

dont les racines sont $r_1 = r_2 = -2$.

La solution générale de l'équation est l'ensemble des fonctions f telles que :

$$f(x) = (Ax + B) e^{-2x}.$$

Exercices

b) Détermination d'une solution particulière.

Déterminons les réels A et B tels que : $f(0) = 1$ et $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

$$f'(x) = e^{-2x}(-2Ax - 2B + A)$$

donc : $f(0) = B$ et $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = e(2A - 2B)$.

Les réels A et B vérifient le système :

$$\begin{cases} B = 1 \\ 2eA - 2eB = 0 \end{cases} \text{ soit } (A = B = 1).$$

La solution particulière f demandée est définie par :

$$f(x) = (x + 1)e^{-2x}.$$

c) Intégration de (E) : $y'' + 4y' + 4y = \sin 3x$.

Cherchons une solution particulière de la forme :

$$Y = M \cos 3x + N \sin 3x.$$

$$Y' = -3M \sin 3x + 3N \cos 3x \quad Y'' = -9M \cos 3x - 9N \sin 3x.$$

L'équation (E) devient :

$$(-9M \cos 3x - 9N \sin 3x) + 4(-3M \sin 3x + 3N \cos 3x) + 4(M \cos 3x + N \sin 3x) = \sin 3x$$

$$\text{soit : } (-5M + 12N) \cos 3x + (-5N - 12M) \sin 3x = \sin 3x.$$

En identifiant les termes en cosinus et sinus, on obtient :

$$\begin{cases} -5M + 12N = 0 \\ -12M - 5N = 1 \end{cases} \text{ soit } \left(M = -\frac{12}{169}, N = -\frac{5}{169} \right).$$

La fonction définie par $Y = -\frac{12}{169} \cos 3x - \frac{5}{169} \sin 3x$ est une solution particulière de (E).

La solution générale de (E) est donc l'ensemble des fonctions f définies par :

$$f(x) = (Ax + B)e^{-2x} - \frac{12}{169} \cos 3x - \frac{5}{169} \sin 3x.$$

8 a) Intégrer l'équation différentielle (E) : $y'' - 3y = \sin x$.

b) Déterminer la fonction f solution de cette équation telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

a) Résolution de (E).

Intégrons tout d'abord l'équation différentielle sans second membre :

$$y'' - 3y = 0.$$

L'équation caractéristique est $r^2 - 3 = 0$ dont les solutions sont :

$$r_1 = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad r_2 = -\sqrt{3}.$$

La solution générale de l'équation est l'ensemble des fonctions définies par :

$$y = Ae^{\sqrt{3}x} + Be^{-\sqrt{3}x}.$$

Déterminons une solution particulière de (E), de la forme :

$$Y = M \cos x + N \sin x$$

$$Y' = -M \sin x + N \cos x \quad Y'' = -M \cos x - N \sin x.$$

Y est solution si et seulement si :

$$(-M \cos x - N \sin x) - 3(M \cos x + N \sin x) = \sin x$$

$$\text{soit :} \quad -4M \cos x - 4N \sin x = \sin x.$$

En identifiant les termes en cosinus et sinus on obtient :

$$\left(N = -\frac{1}{4}, M = 0 \right).$$

La fonction définie par $Y = -\frac{1}{4} \sin x$ est une solution particulière de (E).

La solution générale de (E) est l'ensemble des fonctions f telles que :

$$f(x) = Ae^{\sqrt{3}x} + Be^{-\sqrt{3}x} - \frac{1}{4} \sin x.$$

b) Détermination de la solution particulière.

Déterminons les réels A et B tels que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

$$f'(x) = A\sqrt{3} e^{\sqrt{3}x} - B\sqrt{3} e^{-\sqrt{3}x} - \frac{1}{4} \cos x.$$

$$\text{Donc :} \quad f(0) = A + B \quad \text{et} \quad f'(0) = A\sqrt{3} - B\sqrt{3} - \frac{1}{4}.$$

Les réels A et B vérifient le système :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A\sqrt{3} - B\sqrt{3} - \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \left(A = \frac{1}{8\sqrt{3}}, B = -\frac{1}{8\sqrt{3}} \right).$$

La solution particulière demandée est la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{8\sqrt{3}} (e^{\sqrt{3}x} - e^{-\sqrt{3}x}) - \frac{1}{4} \sin x.$$

EXERCICES AVEC RÉPONSES

9 a) Intégrer l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$.

Déterminer la solution particulière dont la courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ passe par le point $A\left(1, \frac{3}{e}\right)$ et telle qu'en ce point le coefficient directeur de la tangente égale $-\frac{1}{e}$.

b) Intégrer l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = \cos x$.

Réponses :

a) Équation caractéristique $(r + 1)^2 = 0$. Solution générale : $y = (Ax + B)e^{-x}$. Déterminer A et B tel que :

$$f(1) = \frac{3}{e} \quad \text{et} \quad f'(1) = -\frac{1}{e} : (A = 2, B = 1).$$

Solution particulière f :

$$f(x) = (2x + 1)e^{-x}.$$

b) Chercher une solution particulière $Y = M \cos x + N \sin x$. On trouve

$$Y = \frac{1}{2} \sin x.$$

Solution générale :

$$f(x) = (Ax + B)e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x.$$

10 a) Intégrer l'équation différentielle $y'' + 2y' + 3y = 4$. (E)

b) Déterminer la solution particulière f telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Réponses :

a) Équation caractéristique :

$$r^2 + 2r + 3 = 0; \quad r_1 = -1 + j\sqrt{2}; \quad r_2 = -1 - j\sqrt{2}.$$

Solution générale de l'équation sans second membre :

$$y = e^{-x}(A \cos \sqrt{2} x + B \sin \sqrt{2} x).$$

Une solution particulière de (E) est $y = \frac{4}{3}$.

Les solutions de (E) sont définies par :

$$f(x) = e^{-x}(A \cos \sqrt{2} x + B \sin \sqrt{2} x) + \frac{4}{3}.$$

b) Déterminer A et B tels que :

$$f(0)=0 \quad \text{et} \quad f'(0)=0 \quad \left(A = -\frac{4}{3}; B = \frac{-2\sqrt{2}}{3} \right).$$

Solution particulière :

$$f(x) = -\frac{2}{3} e^{-x} (2 \cos \sqrt{2}x + \sqrt{2} \sin \sqrt{2}x) + \frac{4}{3}.$$

11 a) Intégrer l'équation différentielle $y'' + 2y' - 3y = 0$.

b) Intégrer l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' - 3y = -7 \cos 2x - 4 \sin 2x$.

c) Déterminer la solution particulière f telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$.

Réponses :

a) $y = Ae^x + Be^{-3x}$.

b) Chercher une solution particulière définie par $Y = M \cos 2x + N \sin 2x$.
($M = 1, N = 0$). $Y = \cos 2x$.

Solutions de (E) :

$$f(x) = Ae^x + Be^{-3x} + \cos 2x.$$

c) Solution particulière :

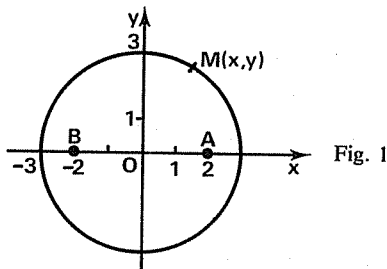
$$f(x) = e^x + \cos 2x.$$



5. Géométrie

1 Cercle. Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points $A(2, 0)$, $B(-2, 0)$ et $M(x, y)$.

- a) Calculer en fonction de x et y le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.
 b) Déterminer l'ensemble C des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$.



a) Calcul du produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont :

$$\overrightarrow{MA}(2-x, -y) \quad \overrightarrow{MB}(-2-x, -y).$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (2-x)(-2-x) + (-y)(-y)$$

soit :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = x^2 + y^2 - 4.$$

b) Détermination de C .

Le point $M(x, y)$ appartient à C , si et seulement si, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$ soit :
 $x^2 + y^2 - 4 = 5$ donc $x^2 + y^2 = 9$.

L'équation de C est : $x^2 + y^2 = 9$.

C est le cercle de centre O , de rayon 3.

2 Cercle. Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ déterminer le centre ω et le rayon du cercle C d'équation :

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0.$$

Déterminer les points d'intersection A et B de C avec la droite $O\omega$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.

a) Détermination du cercle.

Remarquons que pour tous x et y réels :

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = (x-2)^2 + (y-2)^2 - 4 - 4 + 4.$$

L'équation du cercle C s'écrit donc :

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4.$$

Le point ω , centre du cercle, a pour coordonnées (2, 2). Le rayon du cercle est 2. Le cercle C est tangent aux axes de coordonnées (fig. 2).

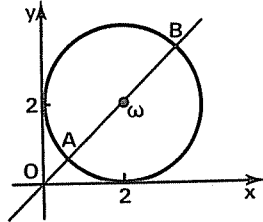


Fig. 2

b) Intersection de C avec $O\omega$.

La droite $O\omega$ admet pour coefficient directeur $m = 1$.

Une équation de la droite $O\omega$ est $y = x$.

Les coordonnées des points d'intersection de C avec $O\omega$ sont solutions du système :

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} y = x \\ 2x^2 - 8x + 4 = 0. \end{cases}$$

$x^2 - 4x + 2 = 0$ admet pour solutions $x_1 = 2 - \sqrt{2}$, $x_2 = 2 + \sqrt{2}$.

Donc les coordonnées des points d'intersection sont :

$$A(2 - \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$$

$$B(2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}).$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) = (4 - 2) + (4 - 2).$$

Donc :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 4.$$

3 Ellipse. Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne deux points $A(2, 0)$ et $A'(-2, 0)$. Déterminer par son équation l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$HM^2 = -\frac{1}{2} \overline{HA} \cdot \overline{HA'}$$

H étant la projection orthogonale de M sur $x'Ox$.

La relation $HM^2 = -\frac{1}{2} \overline{HA} \cdot \overline{HA'}$ est équivalente à :

$$y^2 = -\frac{1}{2}(2 - x)(-2 - x)$$

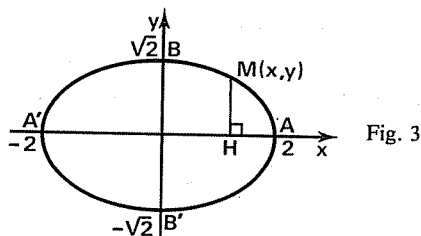


Fig. 3

Soit : $x^2 + 2y^2 = 4$. L'ensemble des points M a pour équation : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

On reconnaît l'équation d'une ellipse dont les axes de symétrie sont les axes de coordonnées. Les sommets de l'ellipse sont les points A(2, 0), A'(-2, 0) de l'axe $x'Ox$ et les points B(0, $\sqrt{2}$) et B'(0, $-\sqrt{2}$) de l'axe $y'Oy$.

Remarque : l'aire de l'ellipse est πab soit $2\sqrt{2}\pi \approx 8,89$ unités d'aire.

4 Cercle. Ellipse. Le plan affine euclidien est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $x'Ox$, $y'Oy$. Le point A a pour coordonnées (2, 0) et un point M variable a pour coordonnées (x, y).

a) Calculer en fonction de x et y le produit scalaire $\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MA} = f(x, y)$. On considère l'ensemble C des points M tels que $f(x, y) = 0$. Montrer que C est un cercle; préciser le centre et le rayon.

b) On considère l'affinité orthogonale h d'axe $x'Ox$, de rapport $\frac{1}{2}$. Déterminer l'équation de E déduite de C par h . Préciser les éléments de E.

a) Calcul du produit scalaire $\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MA}$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{MO}$ sont $(-x, -y)$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{MA}$ sont $(2-x, -y)$.

Donc $\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MA} = -x(2-x) + (-y)(-y)$ soit

$$\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MA} = x^2 + y^2 - 2x.$$

La courbe C admet pour équation : $x^2 + y^2 - 2x = 0$.
soit $(x-1)^2 - 1 + y^2 = 0$.

Donc

$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

On reconnaît l'équation du cercle de centre $\omega(1, 0)$ de rayon 1.

b) Étude de la courbe E.

Considérons le repère $(\omega, \vec{i}, \vec{j})$. Si (X, Y) sont les coordonnées d'un point dans ce repère, alors :

$$x = 1 + X \quad \text{et} \quad y = Y.$$

Dans ce repère l'équation de C est donc $X^2 + Y^2 = 1$.

L'affinité orthogonale h transforme le point $M(X, Y)$ suivant $M'(X', Y')$ tel que $\overline{HM'} = \frac{1}{2} \overline{HM}$ (H projection orthogonale de M sur $x'x$) soit :

$$X' = X \quad \text{et} \quad Y' = \frac{1}{2} Y.$$

Un point M' appartient à l'image E de C par l'affinité h , si et seulement si, $M(X', 2Y')$ appartient à C , c'est-à-dire si :

$$X'^2 + 4Y'^2 = 1.$$

L'équation de E est donc :

$$X'^2 + \frac{Y'^2}{\frac{1}{4}} = 1.$$

E est une ellipse de centre ω , d'axes définis par $(\omega, \vec{i})$ et $(\omega, \vec{j})$. Les sommets de E sont dans le repère $(\omega, \vec{i}, \vec{j})$ les points $O(-1, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, \frac{1}{2})$, $B'(0, -\frac{1}{2})$ (fig. 4).

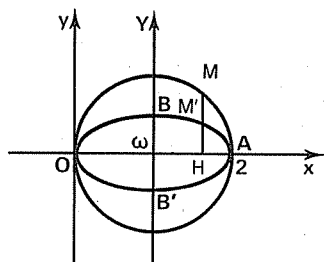


Fig. 4

5 Parabole. Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, on considère les points $F(0, -2)$, $H(2, -1)$, $L(\frac{1}{2}, 2)$.

a) Montrer que le triangle FHL est rectangle en H .

b) Quelle doit être la directrice de la parabole P admettant pour foyer le point F , pour axe la droite $y'y$ et pour tangente en l'un de ses points la droite HL .

c) Déterminer l'équation de P .

a) Étude du triangle FHL .

Les coordonnées de $\overrightarrow{FH}$ sont $(2 - 0, -1 + 2)$ soit $(2, 1)$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{HL}$ sont $(\frac{1}{2} - 2, 2 + 1)$ soit $(-\frac{3}{2}, 3)$.

Exercices

On en déduit :

$$\overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{HL} = 2\left(-\frac{3}{2}\right) + (1 \times 3) = 0.$$

Les droites FH et LH sont donc orthogonales. Le triangle FHL est rectangle en H.

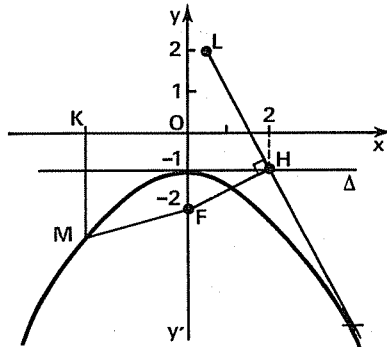


Fig. 5

b) Directrice de la parabole P.

La projection orthogonale du foyer d'une parabole sur une tangente appartient à la tangente au sommet. Donc, si la droite HL est une tangente à la parabole, alors le point H appartient à la tangente au sommet, qui est la droite Δ passant par H et perpendiculaire à l'axe $y'y$ de la parabole.

On en déduit que l'axe $x'Ox$ est la directrice de P.

c) Équation de P.

Si $M(x, y)$ est un point de la parabole alors $MF = MK$ (K étant la projection orthogonale de M sur $x'x$) :

$$MF^2 = x^2 + (y + 2)^2 \quad MK^2 = y^2.$$

On en déduit l'équation de la parabole :

$$x^2 + (y + 2)^2 = y^2 \quad \text{soit} \quad x^2 + 4y + 4 = 0$$

donc :

$$y = -\frac{x^2}{4} - 1.$$

6 Hyperbole. Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé d'axes $x'Ox, y'Oy$ on considère la courbe H d'équation :

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

a) Quelle est la nature de la courbe H. Déterminer ses sommets (on appelle A le sommet d'abscisse positive) et les équations des asymptotes. Montrer que le point $F(5, 0)$ est un foyer de H; déterminer l'autre foyer.

b) Soit E le point de coordonnées $\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$. Montrer que $OA = OE$ et que le triangle OEF est rectangle en E.

a) Étude de l'hyperbole H.

L'équation proposée est du type $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. La courbe H est donc une hyperbole admettant l'origine comme centre de symétrie et les axes de coordonnées comme axes de symétrie.

Elle coupe l'axe $x'Ox$ aux points A et A' d'ordonnée nulle ($y = 0$) dont les abscisses vérifient $\frac{x^2}{16} = 1$ soit $x' = 4$, $x'' = -4$.

D'où les sommets :

$$\boxed{A(4, 0); \quad A'(-4, 0)}.$$

L'équation de l'ensemble des asymptotes est :

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 0 \quad \text{soit} \quad \left(\frac{x}{4} + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{3}\right) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{y = -\frac{3}{4}x} \quad \text{et} \quad \boxed{y = \frac{3}{4}x}.$$

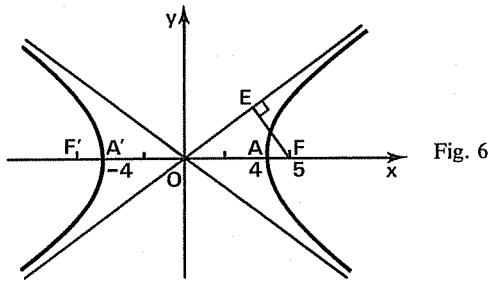


Fig. 6

On en déduit le tracé de l'hyperbole (fig. 6).

En posant $a = 4$, $b = 3$, la longueur c est telle que $c^2 = a^2 + b^2 = 25$ soit $c = 5$. Les foyers sont donc les points :

$$\boxed{F(5, 0)} \quad \text{et} \quad \boxed{F'(-5, 0)}.$$

b) Étude de la figure 6.

Remarquons que le point E appartient à l'asymptote Δ d'équation $y = \frac{3}{4}x$ car

$$\frac{12}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{16}{5}.$$

Exercices

$$OE^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} (4^4 + 3^2 \cdot 4^2)$$

soit
$$OE^2 = \frac{4^2}{25} (4^2 + 3^2) = \frac{4^2 \times 5^2}{25} = 4^2.$$

Donc :

$$OE = OA = 4.$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{OE}$ sont $\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{EF}$ sont $\left(5 - \frac{16}{5}, -\frac{12}{5}\right)$ soit $\left(\frac{9}{5}, -\frac{12}{5}\right)$.

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{EF} = \frac{16}{5} \times \frac{9}{5} + \frac{12}{5} \left(-\frac{12}{5}\right) = 0$.

On en déduit que les droites OE et EF sont perpendiculaires.
Le triangle OEF est donc rectangle en E.

7 Hyperbole et cercle. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, on considère l'hyperbole H d'équation $x^2 - y^2 = 5$.

a) Vérifier que les points P(3, 2) et Q(-3, 2) appartiennent à H. Tracer H après avoir précisé ses sommets et ses asymptotes.

b) Soit A($\sqrt{5}$, 0). Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$.

c) Soit le point M(x, y). Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}$; en déduire une équation du cercle C de diamètre [PQ]. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C avec les axes.

a) Étude de l'hyperbole H.

Le point P(3, 2) appartient à H car $3^2 - 2^2 = 5$.

Le point Q(-3, 2) appartient à H car $(-3)^2 - 2^2 = 5$.

La courbe d'équation $x^2 - y^2 = 5$ est une hyperbole équilatère admettant les axes de coordonnées comme axes de symétrie.

H coupe $x'Ox$ aux points d'ordonnée nulle ($y = 0$) dont les abscisses vérifient $x^2 = 5$. Les sommets sont donc les points :

$$A(\sqrt{5}, 0); \quad A'(-\sqrt{5}, 0).$$

Les asymptotes sont les droites d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$. On en déduit le tracé de H (fig. 7).

b) Calcul du produit scalaire $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AP}$ sont $(3 - \sqrt{5}, 2)$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AQ}$ sont $(-3 - \sqrt{5}, 2)$.

Donc : $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = (3 - \sqrt{5})(-3 - \sqrt{5}) + (2 \times 2) = 0$.

On en déduit que les droites AP et AQ sont perpendiculaires.

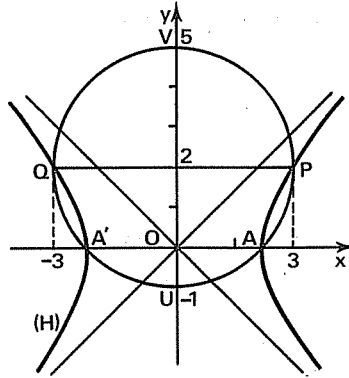


Fig. 7

c) *Étude du cercle C.*

Les coordonnées de $\overrightarrow{MP}$ sont $(3-x, 2-y)$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{MQ}$ sont $(-3-x, 2-y)$.

Donc : $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = (3-x)(-3-x) + (2-y)^2 = x^2 + y^2 - 4y - 5$.

Le point M appartient au cercle C de diamètre $[PQ]$ si et seulement si les droites MP et MQ sont perpendiculaires, c'est-à-dire si $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0$.

L'équation de C est donc :

$$x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0.$$

C coupe $x'Ox$ aux points d'ordonnée nulle ($y=0$) dont les abscisses vérifient $x^2=5$. Ce sont les points A et A'.

C coupe $y'Oy$ aux points d'abscisse nulle ($x=0$) dont les ordonnées vérifient :

$$y^2 - 4y - 5 = 0 \quad \text{soit} \quad y_1 = -1, \quad y_2 = 5.$$

Ce sont les points

$$U(0, -1), \quad V(0, 5).$$

Remarquons que C coupe H aux points A, A', P, Q.



6. Nombres complexes

1 On considère les deux nombres complexes $z = 1 + j \operatorname{tg} \alpha$ et $\omega = \frac{1}{1-z}$; ($\alpha \neq k \frac{\pi}{2}$).

a) Calculer en fonction de α , le module et l'argument des nombres complexes z et ω lorsque $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ puis lorsque $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

b) Cas particulier $\alpha = \frac{\pi}{6}$ et $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

a) *Module et argument de $z = 1 + j \operatorname{tg} \alpha$.*

$$z = 1 + j \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} (\cos \alpha + j \sin \alpha).$$

Si $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos \alpha > 0$, donc $|z| = \frac{1}{\cos \alpha}$ et un argument de z est α .

Si $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, $\cos \alpha < 0$, donc $z = -\frac{1}{\cos \alpha} (-\cos \alpha - j \sin \alpha)$ soit

$$z = \frac{-1}{\cos \alpha} [\cos(\pi + \alpha) + j \sin(\pi + \alpha)].$$

Dans ce cas, $|z| = -\frac{1}{\cos \alpha}$ et un argument de z est $\pi + \alpha$.

Module et argument de ω .

$$\omega = \frac{1}{-j \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} j.$$

Si $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\operatorname{tg} \alpha > 0$, $|\omega| = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$; un argument de ω est $\frac{\pi}{2}$.

Si $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, $\operatorname{tg} \alpha < 0$, $|\omega| = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$; un argument de ω est $-\frac{\pi}{2}$.

b) *Cas particulier.*

— Si $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $|z| = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$; un argument de z est $\frac{\pi}{6}$.

$$|\omega| = \sqrt{3}; \text{ un argument de } \omega \text{ est } \frac{\pi}{2}.$$

— Si $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $|z| = \frac{-1}{\cos \frac{2\pi}{3}} = 2$; un argument de z est $\frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{5\pi}{3}$.

$|\omega| = \frac{1}{\sqrt{3}}$; un argument de ω est $-\frac{\pi}{2}$.

2 On donne $z = \frac{(1 - \sqrt{3}j)^4}{(1 + j)^3}$.

Mettre z sous la forme algébrique $(a + bj)$ puis sous la forme trigonométrique. En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Forme algébrique de z .

$$z_1 = (1 - \sqrt{3}j)^4 = (1 - 3 - 2\sqrt{3}j)^2 = (-2 - 2\sqrt{3}j)^2$$

$$z_1 = 4 + 8\sqrt{3}j + 12j^2$$

soit : $z_1 = 8(-1 + \sqrt{3}j)$

$$z_2 = (1 + j)^3 = 1 + 3j + 3j^2 + j^3$$

soit : $z_2 = -2 + 2j = 2(-1 + j)$.

Donc :

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{8(-1 + \sqrt{3}j)}{2(-1 + j)} = \frac{4(-1 + \sqrt{3}j)(-1 - j)}{(-1 + j)(-1 - j)};$$

$$z = \frac{4(-1 + \sqrt{3}j)(-1 - j)}{2}.$$

Donc :

$$z = 2(1 + \sqrt{3}) + 2(1 - \sqrt{3})j.$$

Forme trigonométrique de z .

$$1 - \sqrt{3}j = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + j \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = \left[2; -\frac{\pi}{3}\right].$$

Donc : $z_1 = \left[2^4; -\frac{4\pi}{3}\right].$

$$1 + j = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{j}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4}\right) = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right].$$

Donc : $z_2 = \left[2\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right].$

Exercices

Comme $z = \frac{z_1}{z_2}$, on en déduit que :

$$|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{soit} \quad |z| = \frac{2^4}{2\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}.$$

$$\theta = \arg z = -\frac{4\pi}{3} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{25\pi}{12} \quad [2\pi].$$

$$\text{Soit :} \quad \theta = -\frac{\pi}{12} \quad [2\pi].$$

$$z = 4\sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + j \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) \right].$$

$$\text{On en déduit que} \quad \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2(1+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}} = (1+\sqrt{3}) \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2(1-\sqrt{3})}{4\sqrt{2}} = (1-\sqrt{3}) \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Donc :

$$\cos \frac{\pi}{12} = (1+\sqrt{3}) \frac{\sqrt{2}}{4}; \quad \sin \frac{\pi}{12} = (\sqrt{3}-1) \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

3 On considère le nombre complexe $z_0 = \frac{3+j\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$.

a) Calculer le module et l'argument de z_0 puis z_0^{1975} .

b) En remarquant qu'il existe un réel k tel que $z_0^{1975} = kz_0$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^3 = z_0^{1975} - 7z_0.$$

a) Module et argument de z_0 et de z_0^{1975} .

$$z_0 = \frac{3}{2\sqrt{3}} + \frac{j\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \quad \text{soit} \quad z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{j}{2} = \cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Donc } |z_0| = 1; \text{ argument de } z_0 = \frac{\pi}{6}.$$

z_0^{1975} admet donc 1 pour module; si α est un argument de z_0^{1975} alors :

$$\alpha = 1975 \frac{\pi}{6} [2\pi]. \quad \text{Or} \quad \frac{1975\pi}{6} = (164 \times 2\pi) + \frac{7\pi}{6}.$$

Donc :

$$\alpha = \frac{7\pi}{6} \quad [2\pi].$$

En définitive :

$$z_0 = \left[1, \frac{\pi}{6} \right]; \quad z_0^{1975} = \left[1, \frac{7\pi}{6} \right].$$

b) Résolution de l'équation $z^3 = z_0^{1975} - 7z_0$.

z_0^{1975} et z_0 ont même module et des arguments qui diffèrent de π , donc $z_0^{1975} = -z_0$.
L'équation s'écrit :

$$z^3 = -z_0 - 7z_0 \quad \text{soit} \quad z^3 = -8z_0.$$

Donc :

$$z^3 = \left[8, \frac{7\pi}{6} \right].$$

Si r et φ représentent le module et l'argument de z alors :

$$\begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\varphi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} r = 2 \\ \varphi = \frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}.$$

Donc :

$$z = 2 \left[\cos \left(\frac{7\pi}{18} + 2 \frac{k\pi}{3} \right) + j \sin \left(\frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right]; k \in \{0, 1, 2\}.$$

4) z est le nombre complexe de module 1, d'argument θ ($0 < \theta \leq \pi$).

a) Montrer que si $\bar{z}$ est le nombre complexe conjugué de z alors $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

b) On considère le nombre complexe :

$$Z = \frac{(z+1)z}{z-1}.$$

Calculer $\bar{Z}$ en fonction de $\bar{z}$ puis de z . Déterminer z de façon que $\bar{Z} = Z$.
 Z peut-il être un réel non nul?

a) Si z admet 1 pour module et θ pour argument alors :

$$z = \cos \theta + j \sin \theta \quad \text{d'où} \quad \bar{z} = \cos \theta - j \sin \theta.$$

Donc :

$$z\bar{z} = (\cos \theta + j \sin \theta)(\cos \theta - j \sin \theta) = 1$$

Soit :

$$\bar{z} = \frac{1}{z}.$$

b) Si $Z = \frac{(z+1)z}{z-1}$ alors $\bar{Z} = \frac{\overline{(z+1)z}}{\overline{(z-1)}} = \frac{(\bar{z}+1)\bar{z}}{\bar{z}-1}$.

$$\text{Donc : } \bar{Z} = \frac{\left(\frac{1}{z} + 1\right) \frac{1}{z}}{\frac{1}{z} - 1}$$

$$\text{soit : } \bar{Z} = \frac{1+z}{z(1-z)}.$$

Exercices

(z est différent de 1 car $0 < \theta \leq \pi$).

L'égalité $\bar{Z} = Z$ est vérifiée si et seulement si :

$$\frac{1+z}{z(1-z)} = \frac{(z+1)z}{z-1} \quad \text{soit} \quad (1+z) + (1+z)z^2 = 0.$$

Donc : $(1+z)(1+z^2) = 0.$

On obtient :

$$z = -1; \quad z = j; \quad z = -j.$$

Z est réel si et seulement si $Z = \bar{Z}$. Donc :

— pour $z = -1$, $Z = 0$

— pour $z = j$, $Z = \frac{(j+1)j}{j-1} = \frac{(j+1)^2 j}{-2} = 1$

— pour $z = -j$, $Z = \frac{(-j+1)(-j)}{-j-1} = \frac{(-j+1)^2(-j)}{-2} = 1.$

Donc, Z est un réel non nul pour :

$$z = j \quad \text{ou} \quad z = -j.$$

5 Calculer les nombres complexes z tels que :

$$\begin{cases} z \cdot \bar{z} = 16 \\ z + \bar{z} = -4. \end{cases}$$

Déterminer le module et l'argument de chacun de ces nombres.

Posons $z = x + jy$; alors $\bar{z} = x - jy$.

Donc : $z\bar{z} = x^2 + y^2$ et $z + \bar{z} = 2x$.

Les réels x et y vérifient le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 2x = -4. \end{cases}$$

On obtient : $x = -2$ et $y^2 = 12$ soit $y = \varepsilon 2\sqrt{3}$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

D'où les solutions :

$$z_1 = -2 - 2j\sqrt{3}; \quad z_2 = -2 + 2j\sqrt{3}.$$

Remarquons que $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = 4$.

On peut écrire :

$$z_1 = 4 \left(-\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \text{et} \quad z_2 = 4 \left(-\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Donc :

$$z_1 = 4 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + j \sin \frac{4\pi}{3} \right) \quad z_2 = 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

6 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = -7 + 24j$.
Calculer le module et l'argument des solutions.

Posons $z = x + jy$.

z est solution de l'équation si et seulement si :

$$(x + jy)^2 = -7 + 24j \quad \text{soit} \quad x^2 - y^2 + 2xyj = -7 + 24j.$$

On en déduit :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -7 \\ xy = 12 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x^2 + (-y^2) = -7 \\ x^2 \cdot (-y^2) = -144 \end{cases} \quad \text{et} \quad xy > 0.$$

Les réels x^2 et $(-y^2)$ sont les solutions de l'équation du second degré :

$$u^2 + 7u - 144 = 0.$$

Soit :

$$u_1 = -16 \quad \text{et} \quad u_2 = 9.$$

$$\text{Donc :} \quad x^2 = 9 \quad \text{et} \quad -y^2 = -16 \quad \text{soit} \quad y^2 = 16.$$

On en déduit, en tenant compte que $xy > 0$:

$$(x = 3, y = 4) \quad (x = -3, y = -4).$$

Les nombres complexes cherchés sont :

$$z_1 = 3 + 4j; \quad z_2 = -3 - 4j.$$

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

$$\text{Si } \theta_1 \text{ est un argument de } z_1 \text{ alors } \cos \theta_1 = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ et } \sin \theta_1 = \frac{4}{5} = 0,8 \text{ soit } \theta_1 \approx 53^\circ 10'.$$

z_1 et z_2 étant opposés, un argument de z_2 est $\theta_2 \approx 233^\circ 10'$.

7 Soit E l'ensemble des nombres complexes z vérifiant :

$$10z\bar{z} - 3(z^2 + \bar{z}^2) = 16.$$

Montrer que l'ensemble des points $M(x, y)$ images des nombres complexes z appartiennent à une ellipse.

On pose $z = [\rho, \theta]$. Montrer que pour θ donné il existe une valeur et une seule de ρ que l'on déterminera en fonction de θ telle que $z \in E$.

Application : $\theta = \frac{\pi}{4}$. Calculer ρ .

Posons $z = x + jy$ et soit le point $M(x, y)$ affixe de z .

$$\begin{aligned} \bar{z} &= x - jy \quad \text{et} \quad z\bar{z} = x^2 + y^2. \\ z^2 + \bar{z}^2 &= (x + jy)^2 + (x - jy)^2 = 2(x^2 - y^2). \end{aligned}$$

Exercices

z appartient à E si et seulement si :

$$10(x^2 + y^2) - 3 \times 2(x^2 - y^2) = 16$$

soit : $4x^2 + 16y^2 = 16$ d'où $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. (1)

Les affixes de z appartiennent donc à l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (fig. 1).

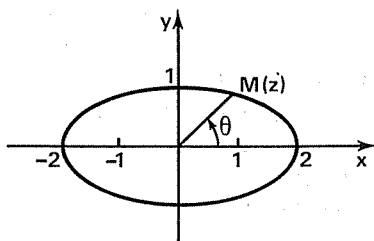


Fig. 1

On sait que $\cos \theta = \frac{x}{\rho}$, $\sin \theta = \frac{y}{\rho}$ donc $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$.

La relation (1) s'écrit :

$$\rho^2 \cos^2 \theta + 4\rho^2 \sin^2 \theta = 4 \quad \text{soit} \quad \rho^2(\cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta) = 4.$$

ρ étant positif, on en déduit :

$$\rho = \frac{2}{\sqrt{\cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta}}.$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\rho = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{4}{2}}}$ soit $\rho = 2\sqrt{\frac{2}{5}}$.

8 x et y désignant des nombres réels, on considère les nombres complexes :

$$z = x - 2 + 3j \quad \text{et} \quad z' = -1 + j(y + 1)$$

et dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ le point $M(x, y)$.

a) Calculer $z + z'$, $z \times z'$ et $z'^2 - z^2$.

b) Déterminer l'ensemble E des points M tels que $(z + z')$ soit réel, l'ensemble F des points M tels que $z'^2 - z^2$ soit imaginaire et l'ensemble G des points M tels que zz' soit réel.

a) Calcul de $(z + z')$.

$$z + z' = (x - 2 + 3j) + (-1 + j(y + 1))$$

soit :

$$z + z' = x - 3 + j(y + 4).$$

Calcul de zz' .

$$zz' = (x - 2 + 3j)[-1 + (y + 1)j]$$

soit :

$$zz' = -x - 3y - 1 + [-3 + (x - 2)(y + 1)]j.$$

Calcul de $z'^2 - z^2$.

$$z'^2 - z^2 = [-1 + j(y + 1)]^2 - [(x - 2) + 3j]^2$$

soit :

$$z'^2 - z^2 = 10 - (x - 2)^2 - (y + 1)^2 - 2[(y + 1) + 3(x - 2)]j.$$

b) Détermination de l'ensemble E.

$(z + z')$ est réel, si et seulement si, $y + 4 = 0$.

E est la droite Δ d'équation $y + 4 = 0$.

Détermination de l'ensemble F.

$(z'^2 - z^2)$ est imaginaire, si et seulement si, $10 - (x - 2)^2 - (y + 1)^2 = 0$.

Soit : $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$.

En posant $x - 2 = X$ et $y + 1 = Y$ on obtient dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\Omega(2, -1)$ le **cercle d'équation $X^2 + Y^2 = 10$ de centre Ω , de rayon $\sqrt{10}$.**

Détermination de l'ensemble G.

zz' est réel, si et seulement si, $(x - 2)(y + 1) - 3 = 0$.

Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ l'équation de G est $XY = 3$.

G est une hyperbole équilatère admettant ΩX et ΩY pour asymptotes (fig. 2).

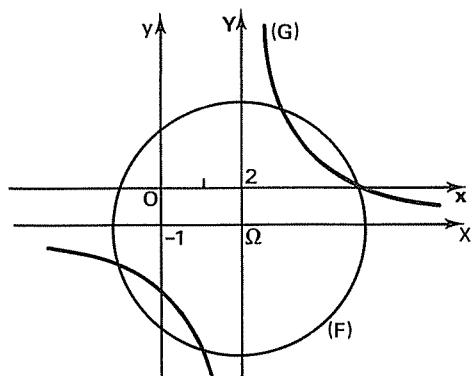


Fig. 2

Exercices

9 Soit $A(z) = z^3 - j(1 + 2\sqrt{3})z^2 - 2(\sqrt{3} + 2)z + 4j$ où $z \in \mathbb{C}$.

a) Montrer que $A(j) = 0$. Mettre $A(z)$ sous la forme :

$$A(z) = (z - j)(az^2 + bz + c)$$

et déterminer les coefficients complexes a , b , c .

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $A(z) = 0$. Écrire les racines z_0 , z_1 , z_2 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique. Calculer le produit $z_0 z_1 z_2$.

Réponses :

a) $A(j) = 0$. En développant $A(z) = az^3 + (b - aj)z^2 + (c - bj)z - cj$ et en identifiant les termes en z^3 , z^2 , z et z^0 , on trouve $a = 1$, $b = -2\sqrt{3}j$, $c = -4$.

b) L'équation $A(z) = 0$ se décompose suivant $z - j = 0$ et $z^2 - 2\sqrt{3}jz - 4 = 0$, qui s'écrit : $(z - \sqrt{3}j)^2 = 1$ d'où les solutions :

$$z_0 = j, \quad z_1 = 1 + \sqrt{3}j, \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}j, \quad z_0 z_1 z_2 = -4j.$$



PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

1 Fonction rationnelle et fonction exponentielle.

1. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}.$$

- a) Étudier les variations de f .
- b) Montrer que f'' s'annule pour une seule valeur de la variable.
- c) Tracer la courbe représentative C_1 de f dans un plan muni d'un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$ (unité : 2 cm).
- d) Soit A le point de C_1 d'abscisse 0 et B le point de C_1 d'ordonnée 0; calculer, en cm^2 à $0,5 \cdot 10^{-3}$ près, l'aire du domaine plan compris entre C_1 et le segment $[A, B]$.

2. Soit g la fonction $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(e^x)$.

- a) Étudier les variations de g .
- b) Tracer sa courbe représentative C_2 dans un repère analogue au précédent.
- c) Indiquer une équation de la tangente à la courbe C_2 au point d'abscisse $\text{Log } 4$.
- d) m désignant un paramètre réel, déterminer graphiquement le nombre et le signe des solutions de l'équation.

$$me^{2x} - 2(1+2m)e^x + 4m + 3 = 0.$$

Calculer ces solutions pour $m = 3$.

1^{re} partie

a) Étude de la fonction f .

Remarquons que $f(x) = \frac{2(x-2)+1}{(x-2)^2}$ soit $f(x) = \frac{2x-3}{(x-2)^2}$.

La fonction f est définie et continue sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{2\}$.

Quand x tend vers $+\infty$, $\frac{2}{x-2}$ et $\frac{1}{(x-2)^2}$ tendent vers 0 donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

De même $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Quand x tend vers 2, $(2x-3)$ tend vers 1, donc :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty.$$

La fonction f étant rationnelle, est dérivable sur $\mathcal{D}$ et :

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-2)^2} - \frac{2}{(x-2)^3} \quad \text{soit} \quad f'(x) = \frac{-2(x-1)}{(x-2)^3}.$$

Problèmes

$f'(x) = 0$ si et seulement si, $x = 1$; $f'(x)$ a le signe du polynôme $(1 - x)(x - 2)$. On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +		-
$f(x)$	0 ↘	-1 ↗	$+\infty$	$+\infty$ ↘ 0

$$f(1) = -1.$$

b) Calcul de $f''(x)$.

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R} - \{2\}$ et

$$f''(x) = \frac{4}{(x-2)^3} + \frac{6}{(x-2)^4} = \frac{4(x-2) + 6}{(x-2)^4} \quad \text{soit} \quad f''(x) = \frac{4x-2}{(x-2)^4}.$$

$f''(x) = 0$ si et seulement si $x = \frac{1}{2}$.

c) Tracé de la courbe C_1 .

La courbe C_1 représentative de la fonction f admet pour asymptotes les droites d'équations $x = 2$ et $y = 0$. Nous indiquons les coordonnées de quelques points de C_1 .

x	0	1	$\frac{3}{2}$	3	4
$f(x)$	$-\frac{3}{4}$	-1	0	3	$\frac{5}{4}$

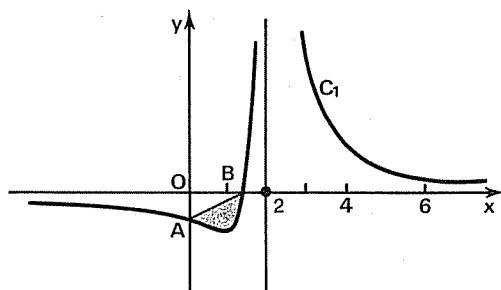


Fig. 1

d) Calcul de l'aire.

Les coordonnées du point A sont $(0, -\frac{3}{4})$; celles de B : $(\frac{3}{2}, 0)$.

Si $\mathcal{A}_1$ est l'aire limitée par Oy, C₁ et Ox et si $\mathcal{A}_2$ est l'aire du triangle OAB alors $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2$.

$$\text{Calculons : } I = \int_0^{\frac{3}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} \right) dx$$

$$I = \left[2 \operatorname{Log} |x-2| - \frac{1}{x-2} \right]_0^{\frac{3}{2}} = \left(2 \operatorname{Log} \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(2 \operatorname{Log} 2 + \frac{1}{2} \right)$$

$$I = -4 \operatorname{Log} 2 + \frac{3}{2}. \text{ Comme } I \text{ est négatif, } \mathcal{A}_1 = 4 \operatorname{Log} 2 - \frac{3}{2}.$$

$$\text{L'aire du triangle OAB est } \mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} OA \times OB = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{16}.$$

Donc :

$$\mathcal{A} = 4 \operatorname{Log} 2 - \frac{3}{2} - \frac{9}{16} = 4 \operatorname{Log} 2 - \frac{33}{16} \quad (\text{unités}).$$

L'unité de surface étant 4 cm², on obtient :

$$\boxed{\mathcal{A} = 16 \operatorname{Log} 2 - \frac{33}{4} \text{ (cm}^2\text{)}} \quad \text{soit } \mathcal{A} \approx 2,840 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

2^e partie

$$a) \text{ Étude de la fonction } g : g(x) = f(e^x) = \frac{2}{e^x - 2} + \frac{1}{(e^x - 2)^2}.$$

La fonction g n'est pas définie pour $e^x - 2 = 0$ soit pour $x = \operatorname{Log} 2$.

L'ensemble de définition de g est $\mathcal{D}' = \mathbb{R} - \{\operatorname{Log} 2\}$.

$$\text{Quand } x \text{ tend vers } -\infty, e^x \text{ tend vers } 0, \text{ donc } \lim_{-\infty} g(x) = -\frac{3}{4}.$$

$$\text{Quand } x \text{ tend vers } +\infty, e^x \text{ tend vers } +\infty, \text{ donc } \lim_{+\infty} g(x) = 0.$$

Quand x tend vers $\operatorname{Log} 2$, $g(x)$ tend vers $+\infty$.

La fonction g , composée de fonctions dérivables, $x \mapsto e^x$ et $y \mapsto f(y)$ est dérivable sur $\mathcal{D}'$ et :

$$g'(x) = f'(e^x) \cdot e^x.$$

Donc $g'(x) = 0$, si et seulement si $f'(e^x) = 0$ soit

$$\frac{-2(e^x - 1)}{(e^x - 2)^3} = 0 \quad \text{donc } x = 0.$$

Problèmes

Pour tout x réel, $e^x > 0$, donc $g'(x)$ est du signe de $f'(e^x)$ c'est-à-dire du signe de $(1 - e^x)(e^x - 2)$. On en déduit le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	0	Log 2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	-
$g(x)$	$-\frac{3}{4}$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		-1	$+\infty$	0

b) Tracé de la courbe C_2 .

Elle admet pour asymptotes les droites d'équations $x = \text{Log } 2$, $y = -\frac{3}{4}$ et $y = 0$.

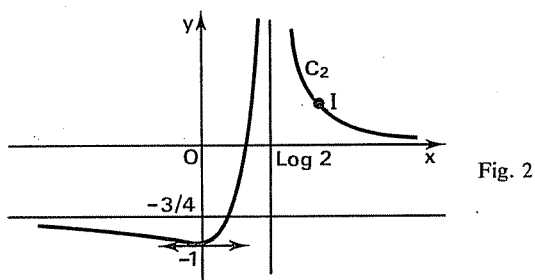


Fig. 2

c) Équation de la tangente à C_2 au point $I\left(\text{Log } 4, \frac{5}{4}\right)$.

$$y - g(\text{Log } 4) = g'(\text{Log } 4) \cdot (x - \text{Log } 4).$$

Or

$$g'(\text{Log } 4) = f'(4) \cdot 4 = -3.$$

Une équation de la tangente à C_2 au point I est :

$$y - \frac{5}{4} = -3(x - \text{Log } 4) \quad \text{soit} \quad \boxed{12x + 4y - 5 - 12 \text{Log } 4 = 0.}$$

d) Étude de l'équation : $me^{2x} - 2(1 + 2m)e^x + 4m + 3 = 0$.

Elle s'écrit :

$$m(e^x - 2)^2 = 2e^x - 3$$

soit pour $x \neq \text{Log } 2$, $m = \frac{2e^x - 3}{(e^x - 2)^2}$ d'où $m = g(x)$.

Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de C_2 avec la droite d'équation $y = m$. D'où les résultats :

$m < -1$	$S = \emptyset$	$-\frac{3}{4} \leq m \leq 0$	1 racine positive
$m = -1$	$S = \{0\}$	$m > 0$	2 racines positives
$-1 < m < \frac{3}{4}$	2 racines de signe contraire		

Pour $m = 3$, $g(x) = 3$ donc $f(e^x) = 3$ et en posant $u = e^x$, on obtient : $\frac{2u-3}{(u-2)^2} = 3$
soit $3u^2 - 14u + 15 = 0$. On trouve $u_1 = 3$ et $u_2 = \frac{5}{3}$.

D'où $e^x = 3$ donc
 $e^x = \frac{5}{3}$ donc

$$x = \text{Log } 3 \approx 1,099.$$

$$x = \text{Log } \frac{5}{3} \approx 0,511.$$

2. Fonction rationnelle. Équation trigonométrique.

1. Étudier la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{-2x}{2x^2 + x - 1}$$

et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé (unité : 2 centimètres).

2. Trouver deux nombres réels A et B tels que :

$$\frac{-2x}{2x^2 + x - 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1}.$$

En déduire les fonctions primitives de f .

3. Calculer en cm^2 , avec la précision permise par les tables de logarithmes, l'aire de la surface comprise entre la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations

$$x = 1 \quad \text{et} \quad x = 3.$$

4. En utilisant la courbe C , discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m , l'existence et le nombre des solutions appartenant à l'intervalle $[-1, +1]$ de l'équation :

$$2mx^2 + (m+2)x - m = 0.$$

Problèmes

5. Montrer que l'on a l'égalité :

$$\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} 3a = \frac{-2 \sin 2a}{2 \cos^2 2a + \cos 2a - 1}$$

sauf pour certaines valeurs de a que l'on précisera.

6. Utiliser les résultats de 4. et 5. pour déterminer le nombre des valeurs de a appartenant à l'intervalle :

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{et vérifiant : } \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} 3a = m \operatorname{tg} 2a.$$

1. Étude de la fonction f .

Le trinôme $(2x^2 + x - 1)$ ayant pour racines -1 et $\frac{1}{2}$, l'ensemble $\mathcal{D}$ de définition de f est $\mathbb{R} - \left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$. La fonction f est continue sur $\mathcal{D}$.

Lorsque x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$, $f(x)$ a même limite que $\frac{-2x}{2x^2}$ soit même limite que $-\frac{1}{x}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Lorsque x tend vers -1 ou $\frac{1}{2}$, $(2x^2 + x - 1)$ tend vers 0, donc $|f(x)|$ tend vers $+\infty$.

La fonction f étant rationnelle, est dérivable sur $\mathcal{D}$ et

$$f'(x) = \frac{-2(2x^2 + x - 1) - (4x + 1)(-2x)}{(2x^2 + x - 1)^2} = \frac{2(2x^2 + 1)}{(2x^2 + x - 1)^2}.$$

$f'(x)$ est strictement positif sur $\mathcal{D}$. On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$	$+\infty$ ↗	0
		$-\infty$	$-\infty$	

La courbe C représentative de f admet pour asymptotes les droites d'équations $y = 0$, $x = -1$ et $x = \frac{1}{2}$ (fig. 3).

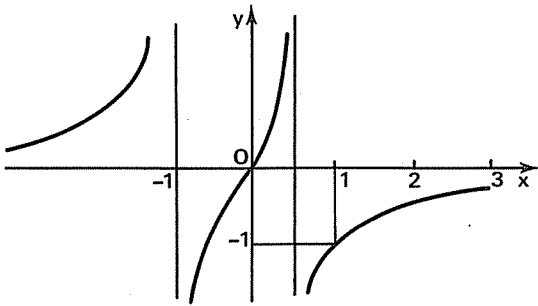


Fig. 3

x	-2	0	1	3
$f(x)$	$\frac{4}{5}$	0	-1	$-\frac{3}{10}$

2. Fonctions primitives de f .

Les réels A et B sont tels que, pour tout $x \in \mathcal{D}$,

$$A(2x - 1) + B(x + 1) = -2x \quad \text{soit} \quad (2A + B)x + B - A = -2x.$$

A et B vérifient le système :

$$\begin{cases} 2A + B = -2 \\ -A + B = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \left(A = -\frac{2}{3}; B = -\frac{2}{3} \right).$$

Donc :

$$f(x) = -\frac{2}{3(x+1)} - \frac{2}{3(2x-1)}.$$

Dans chacun des intervalles où la fonction est définie, $]-\infty, -1[$,

$]-1, \frac{1}{2}[$, $]\frac{1}{2}, +\infty[$ les primitives de f sont les fonctions F telles que :

$$F(x) = -\frac{2}{3} \text{Log } |x+1| - \frac{1}{3} \text{Log } |2x-1| + k.$$

3. Aire du domaine plan.

La fonction f étant négative sur l'intervalle $[1, 3]$, l'aire du domaine est :

$$\mathcal{A} = - \int_1^3 f(x) dx = -[F(3) - F(1)].$$

$$\mathcal{A} = - \left(-\frac{2}{3} \text{Log } 4 - \frac{1}{3} \text{Log } 5 + \frac{2}{3} \text{Log } 2 + 0 \right) = \frac{2}{3} \text{Log } 2 + \frac{1}{3} \text{Log } 5.$$

Problèmes

L'unité de surface étant 4 cm^2 ,

$$\mathcal{A} = 4 \left(\frac{2}{3} \text{Log } 2 + \frac{1}{3} \text{Log } 5 \right) (\text{cm}^2)$$

soit $\mathcal{A} = 4 \left(\frac{2}{3} \times 0,69315 + \frac{1}{3} \times 1,60944 \right) = 3,99 \text{ cm}^2$.

4. Étude de l'équation $2mx^2 + (m+2)x - m = 0$.

L'équation s'écrit : $m(2x^2 + x - 1) = -2x$.

Il est évident que -1 et $\frac{1}{2}$ ne sont pas solutions, donc sur $\mathcal{D}$, on obtient :

$$m = \frac{-2x}{2x^2 + x - 1} \quad \text{soit} \quad f(x) = m.$$

L'existence des solutions appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$ est l'existence des points d'intersection de C , d'abscisse x , avec la droite d'équation $y = m$; ($-1 \leq x \leq 1$).

Donc :

- si $m \leq -1$, deux racines x' et x'' telles que $-1 < x' < 0 < x'' < 1$.
- si $m > -1$, une racine x telle que $-1 < x < \frac{1}{2}$.

5. Égalité trigonométrique.

$$\text{tg } a - \text{tg } 3a = \frac{\sin a}{\cos a} - \frac{\sin 3a}{\cos 3a} = \frac{\sin a \cos 3a - \sin 3a \cos a}{\cos a \cos 3a}$$

soit : $\text{tg } a - \text{tg } 3a = \frac{\sin(a - 3a)}{\cos a \cdot \cos 3a} = \frac{-\sin 2a}{\cos a \cdot \cos 3a}$.

Cette égalité est définie pour $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $a \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ soit $a \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$.

Or $\cos a \cdot \cos 3a = \frac{1}{2}(\cos 4a + \cos 2a)$ et $\cos 4a = 2 \cos^2 2a - 1$

donc : $\cos a \cdot \cos 3a = \frac{1}{2}(2 \cos^2 2a + \cos 2a - 1)$

d'où :

$$\text{tg } a - \text{tg } 3a = \frac{-2 \sin 2a}{2 \cos^2 2a + \cos 2a - 1} \quad \left(a \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \right).$$

6. Équation $\text{tg } a - \text{tg } 3a = m \text{ tg } 2a$.

Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ cette équation a un sens si $a \neq \frac{\pi}{6}$, $a \neq \frac{\pi}{2}$ et $a \neq \frac{\pi}{4}$.

L'équation s'écrit :

$$\frac{-2 \sin 2a}{2 \cos^2 2a + \cos 2a - 1} = m \frac{\sin 2a}{\cos 2a}$$

soit :

$$\frac{\sin 2a}{\cos 2a} \left(\frac{-2 \cos 2a}{2 \cos^2 2a + \cos 2a - 1} - m \right) = 0.$$

On obtient : $\sin 2a = 0$ soit $2a = k\pi$ donc $a = \frac{k\pi}{2}$ soit $a = 0$, quel que soit m .

En posant $x = \cos 2a$, on obtient : $m = f(x)$ avec $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $2a \in [0, \pi]$ d'où $x \in [-1, 1]$.

A chaque valeur de x , correspond une valeur de a de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

D'où les résultats :

Si $m \leq -1$, deux valeurs de a ,
 Si $m > -1$, une valeur de a .
 Pour tout m , $a = 0$.

3 **Fonction rationnelle** $g : x \mapsto \frac{x^3 + 6x + 2}{x^2 + x + 1}$.

Soit f et g les fonctions numériques de la variable réelle x , définies par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x + 1} \quad g(x) = \frac{x^3 + 6x + 2}{x^2 + x + 1}.$$

A) 1. Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$ (unité : 2 centimètres).
 Déterminer l'abscisse des points d'intersection A et B de C avec l'axe Ox et les équations des tangentes à C en A et B (abscisse de A inférieure à celle de B).

2. Démontrer que la droite Δ d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est axe de symétrie de la courbe C .

3. Déterminer la fonction g' dérivée de la fonction g . Montrer que pour tout réel $x : g'(x) = [f(x)]^2$.

4. Calculer, en cm^3 , le volume V engendré par la rotation autour de Ox du domaine plan constitué par les points $M(x, y)$ tels que :

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 1 \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$$

B) 1. Montrer que pour tout nombre réel x :

$$g(x) = x - 1 + 3 \cdot \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

Problèmes

- Déterminer toutes les fonctions primitives de la fonction g .
- Déterminer la fonction primitive G de la fonction g qui prend la valeur zéro pour $x_0 = -1$.

Partie A

1. Étude de la fonction f .

Le trinôme $(x^2 + x + 1)$ n'ayant pas de racines, l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, $f(x)$ a même limite que $\frac{x^2}{x^2}$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1.$$

La fonction f étant une fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition et :

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2+x+1) - (2x+1)(x^2+x-2)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{3(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \text{ si et seulement si } x = -\frac{1}{2}.$$

$f'(x)$ est du signe de $(2x+1)$; on en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	1	$\searrow$ -3	$\nearrow$ 1

La courbe C représentative de f admet pour asymptote la droite d'équation $y = 1$ (fig. 4).

x	-2	$-\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	0	-3	0	$\frac{4}{7}$

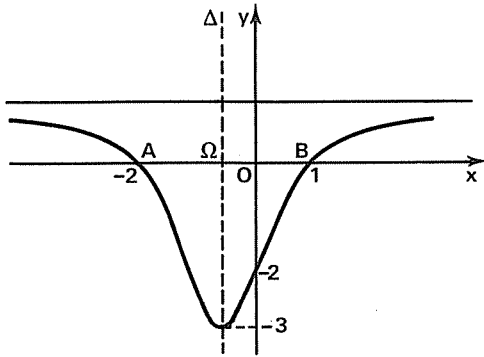


Fig. 4

Les abscisses des points d'intersection s'obtiennent en résolvant l'équation :

$$x^2 + x - 2 = 0 \quad \text{soit} \quad x_1 = -2; \quad x_2 = 1.$$

Équations des tangentes à C en A et B.

Une équation de la tangente à C au point $(x_0, f(x_0))$ est :

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Or :

$$f'(-2) = -1 \quad \text{et} \quad f'(1) = 1.$$

Une équation de la tangente à C en A(-2, 0) est :

$$y = -x + 2.$$

Une équation de la tangente à C en B(1, 0) est :

$$y = x - 1.$$

2. Axe de symétrie de la courbe.

Si Ω est le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, déterminons l'équation de C dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

Si (X, Y) sont les coordonnées d'un point M dans ce repère, alors :

$$x = X - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y = Y.$$

Dans ce repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, l'équation de C est définie par :

$$Y = \frac{\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(X - \frac{1}{2}\right) - 2}{\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(X - \frac{1}{2}\right) + 1} = \frac{X^2 - \frac{9}{4}}{X^2 + \frac{3}{4}}.$$

Problèmes

La fonction $X \mapsto \frac{X^2 - \frac{9}{4}}{X^2 + \frac{3}{4}}$ qui est représentée par C dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ est paire. La courbe C admet donc la droite $(\Omega, \vec{j})$ pour axe de symétrie, c'est-à-dire la droite Δ d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

3. Détermination de g' .

La fonction g étant une fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$ et :

$$g'(x) = \frac{(3x^2 + 6)(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(x^3 + 6x + 2)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Or pour tout x réel :

$$(x^2 + x - 2)^2 = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = [f(x)]^2.$$

4. Calcul du volume.

Le volume du solide est :

$$V = \pi \int_{-2}^1 [f(x)]^2 dx.$$

Or la fonction g est une primitive de la fonction f^2 donc :

$$V = \pi [g(1) - g(-2)] = \pi (3 - (-6)).$$

Soit :

$$V = 9\pi \text{ (unités)}.$$

L'unité de volume étant 8 cm^3 , $V = 72\pi \text{ cm}^3 \approx 226 \text{ cm}^3$.

Partie B

1. Expression de $g(x)$.

Pour tout x réel :

$$x - 1 + 3 \cdot \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1) + 6x + 3}{x^2 + x + 1} = \frac{x^3 + 6x + 2}{x^2 + x + 1}.$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) = x - 1 + \frac{3(2x + 1)}{x^2 + x + 1}$

2. Primitives de g .

Sur $\mathbb{R}$, les primitives de g sont les fonctions G telles que :

$$G(x) = \frac{x^2}{2} - x + 3 \operatorname{Log}(x^2 + x + 1) + k.$$

Celle qui prend la valeur 0 pour $x = -1$ est telle que :

$$G(-1) = \frac{3}{2} + k = 0 \quad \text{soit} \quad k = -\frac{3}{2}.$$

Donc :

$$G(x) = \frac{x^2}{2} - x + 3 \operatorname{Log}(x^2 + x + 1) - \frac{3}{2}.$$

4 **Fonction rationnelle :** $x \mapsto \frac{-2x^2 + 5x - 4}{x - 1}.$

g est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \frac{-2x^2 + 5x - 4}{x - 1}$$

et C est la courbe représentant g dans un repère orthonormé, d'axes $x'Ox$, $y'Oy$ (unité : 2 cm).

1. Montrer que $g(x)$ peut s'écrire $ax + b + \frac{c}{x - 1}$; a , b et c étant des constantes réelles.

2. En déduire que la courbe représentative admet une asymptote non parallèle aux axes; préciser les positions relatives de la courbe C et de cette asymptote.

3. Étudier les variations de g . Tracer C .

4. Δ_m est la droite passant par l'origine du repère et de coefficient directeur m . Discuter suivant les valeurs de m le nombre des points d'intersection de C et Δ_m . Vérifier graphiquement les résultats obtenus, en délimitant les secteurs correspondant aux différentes situations.

5. Calculer une primitive de g .

6. Calculer une valeur approchée au millimètre carré près de l'aire du domaine limité par C et la droite Δ_m pour $m = -\frac{4}{3}$.

Problèmes

1. Expression de $g(x)$.

La fonction g est définie sur l'ensemble $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{1\}$.

Les nombres réels a, b, c sont tels que, pour tout réel x différent de 1,

$$(ax + b)(x - 1) + c = -2x^2 + 5x - 4$$

soit :

$$ax^2 + (b - a)x - b + c = -2x^2 + 5x - 4$$

a, b, c vérifient le système d'équations :

$$\begin{cases} a = -2 \\ b - a = 5 \\ -b + c = -4 \end{cases} \quad \text{donc } a = -2, \quad b = 3, \quad c = -1.$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \quad g(x) = -2x + 3 - \frac{1}{x-1}.$$

2. Asymptote non parallèle aux axes.

La relation $g(x) - (-2x + 3) = -\frac{1}{x-1}$ montre que $g(x) - (-2x + 3)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. La courbe C admet donc pour asymptote la droite D d'équation : $y = -2x + 3$.

Si $x > 1$, $g(x) - (-2x + 3) < 0$; donc C est « au-dessous » de D .

Si $x < 1$, $g(x) - (-2x + 3) > 0$; donc C est « au-dessus » de D .

3. Étude des variations de g .

Remarquons que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

Quand x tend vers 1 par valeurs supérieures (resp. inférieures), $(x - 1)$ tend vers 0 par valeurs positives (resp. négatives) donc $g(x)$ tend vers $-\infty$ (resp. $+\infty$). La droite d'équation $x = 1$ est donc une asymptote de la courbe C .

La fonction g est dérivable sur $\mathcal{D}$ et :

$$g'(x) = -2 + \frac{1}{(x-1)^2} \quad \text{soit} \quad g'(x) = \frac{-2x^2 + 4x - 1}{(x-1)^2}$$

$g'(x) = 0$ si et seulement si : $-2x^2 + 4x - 1 = 0$

$$\text{soit :} \quad x' = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \approx 0,29 \quad \text{et} \quad x'' = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \approx 1,71.$$

On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	x'			1	x''			$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+		+	0	-	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$			$+2$	$\nearrow$			$-\infty$
			a			-2	M		

$$a = g(x') = -2 \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right) + 3 - \frac{2}{-\sqrt{2}} = 1 + 2\sqrt{2} \approx 3,83.$$

$$M = g(x'') = -2 \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right) + 3 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 1 - 2\sqrt{2} \approx -1,83.$$

On en déduit le tracé de C (fig. 5).

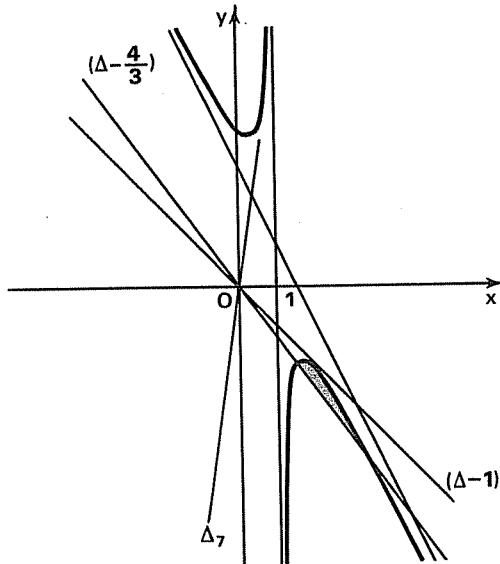


Fig. 5

4. Intersection de C et de Δ_m .

Une équation de Δ_m est $y = mx$.

Les coordonnées des points d'intersection de C et Δ_m vérifient le système d'équations :

$$\begin{cases} y = mx \\ y = \frac{-2x^2 + 5x - 4}{x - 1} \end{cases}$$

Problèmes

En éliminant y , on obtient « l'équation aux abscisses des points d'intersection » :

$$mx = \frac{-2x^2 + 5x - 4}{x - 1},$$

soit :

$$(2 + m)x^2 - (m + 5)x + 4 = 0. \quad (1)$$

Le discriminant de l'équation du second degré est le trinôme :

$(m + 5)^2 - 16(2 + m)$ soit $m^2 - 6m - 7$ dont les racines sont -1 et 7 .

D'où les résultats :

Si $m < -1$ ou $m > 7$... deux points d'intersection ($m \neq -2$).
 Si $m = -1$ ou $m = 7$... deux points confondus.
 Si $-1 < m < 7$... aucun point d'intersection.
 Si $m = -2$, l'équation est du 1^{er} degré, un point d'intersection.

On vérifie que les droites Δ_{-1} et Δ_7 sont tangentes à C . Ainsi apparaissent deux secteurs opposés, limités par ces droites, telles que Δ_m coupe C en deux points.

5. Calcul d'une primitive de g .

Sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$, $]1, +\infty[$, la fonction g est continue et admet une primitive G telle que :

$$G(x) = -x^2 + 3x - \text{Log } |x - 1|.$$

6. Calcul de l'aire.

Déterminons les points d'intersection de C et de $\Delta_{-\frac{4}{3}}$.

Pour $m = -\frac{4}{3}$, l'équation (1) s'écrit :

$$\left(2 - \frac{4}{3}\right)x^2 - \left(-\frac{4}{3} + 5\right)x + 4 = 0 \quad \text{soit} \quad 2x^2 - 11x + 12 = 0.$$

Les racines sont : $x_1 = \frac{3}{2}$ et $x_2 = 4$.

L'aire demandée est :

$$\mathcal{A} = \int_{\frac{3}{2}}^4 \left[\left(-2x + 3 - \frac{1}{x-1}\right) - \left(-\frac{4}{3}x\right) \right] dx = \int_{\frac{3}{2}}^4 \left(-\frac{2}{3}x + 3 - \frac{1}{x-1} \right) dx,$$

$$\mathcal{A} = \left[-\frac{x^2}{3} + 3x - \text{Log}(x-1) \right]_{\frac{3}{2}}^4 = \left(-\frac{16}{3} + 12 - \text{Log } 3 \right) - \left(-\frac{9}{12} + \frac{9}{2} - \text{Log } \frac{1}{2} \right),$$

$$\mathcal{A} = \frac{35}{12} - \text{Log } 3 - \text{Log } 2 \approx 1,125.$$

L'unité de surface étant 4 cm^2 , on obtient :

$$\mathcal{A} = \frac{35}{3} - 4 (\text{Log } 3 + \text{Log } 2) \approx 4,50 \text{ cm}^2 \quad \text{soit} \quad 450 \text{ mm}^2.$$

5 Courbe d'équation $y^2 = x^3 - 6x^2 + 9x$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel seront tracées les courbes demandées. Les vecteurs unitaires ont pour longueur 2 cm.

A) a) Déterminer les réels a et b pour que la fonction f définie par

$$f(x) = (ax + b)\sqrt{x}$$

admette un minimum égal à -2 pour la valeur $x = 1$ de la variable.

b) Étudier la fonction g définie par $g(x) = (3 - x)\sqrt{x}$.

c) On appelle C la courbe représentative de g ; donner une équation de la tangente au point d'abscisse $x = 3$. On précisera l'angle qu'elle fait avec l'axe $x'Ox$.

d) Construire la courbe C . En déduire la courbe C' représentative de la fonction f dans le même repère. On placera en particulier les points d'abscisse $x = 4$.

B) a) On considère l'ensemble E des points du plan dont les coordonnées x et y vérifient la relation

$$y^2 = x(3 - x)^2 = x^3 - 6x^2 + 9x.$$

Montrer que $E = C \cup C'$.

b) Déterminer en cm^2 l'aire du domaine D délimité par la courbe E et correspondant à $0 \leq x \leq 3$. On donnera une valeur approchée de cette aire à $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$.

c) Déterminer le volume engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe $x'Ox$ (en cm^3). On donnera une valeur approchée de ce volume à $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$.

C) a) Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre m le nombre de solutions de l'équation :

$$x^3 - 6x^2 + 9x - m^2 = 0.$$

b) Résoudre les équations

$$\begin{aligned} e^{3x} - 6e^{2x} + 9e^x - 4 &= 0 \\ (\log x)^3 - 6(\log x)^2 + 9\log x - 4 &= 0. \end{aligned}$$

On donnera une valeur approchée de la solution non rationnelle à 10^{-4} .

Partie A.

a) Détermination de la fonction f .

La fonction f est définie, sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$f'(x) = a\sqrt{x} + \frac{ax+b}{2\sqrt{x}} = \frac{3ax+b}{2\sqrt{x}}.$$

$$f'(x) = 0 \text{ si et seulement si } x = -\frac{b}{3a}.$$

Cette valeur représente un extremum de f donc :

$$1 = -\frac{b}{3a} \text{ soit } 3a = -b.$$

D'autre part $f(1) = -2$ donc $a + b = -2$.

Les réels a et b vérifient le système d'équations :

$$\begin{cases} 3a + b = 0 \\ a + b = -2 \end{cases} \text{ soit } (a = 1, b = -3).$$

Donc :

$$f(x) = (x - 3)\sqrt{x}.$$

b) Étude de la fonction $g : x \mapsto (3 - x)\sqrt{x}$.

La fonction g est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

$g(0) = 0$. Quand x tend vers $+\infty$, $g(x)$ tend vers $-\infty$.

g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et :

$$g'(x) = -\sqrt{x} + \frac{3-x}{2\sqrt{x}} = \frac{3(1-x)}{2\sqrt{x}}.$$

On en déduit le tableau de variations :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\searrow$
		2	$-\infty$

c) Tangente à la courbe C au point d'abscisse 3.

Le coefficient directeur de la tangente au point $(x = 3, y = 0)$ est

$$g'(3) = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}.$$

Une équation de la tangente en ce point est :

$$y = -\sqrt{3}(x - 3).$$

L'angle de cette droite avec $x'Ox$ est, dans le plan orienté, $-\frac{\pi}{3}$.

On en déduit le tracé de la courbe C (fig. 6).

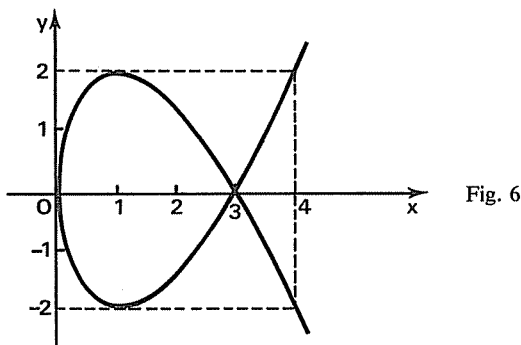


Fig. 6

On remarque que, pour tout x positif, $f(x) = -g(x)$. La courbe C' se déduit donc de la courbe C par symétrie d'axe Ox .

On vérifie que $g(4) = -2$ et $f(4) = 2$.

Partie B.

a) *Étude de E.*

L'équation de C est : $y - (3 - x)\sqrt{x} = 0$.

L'équation de C' est : $y - (x - 3)\sqrt{x} = 0$.

Un point $M(x, y)$ appartient à l'ensemble $E = C \cup C'$, si et seulement si :

$$[y - (3 - x)\sqrt{x}][y - (x - 3)\sqrt{x}] = 0$$

soit, en développant :

$$y^2 - (3 - x)^2 x = 0$$

d'où :

$$y^2 = x(3 - x)^2 = x^3 - 6x^2 + 9x.$$

b) *Aire du domaine D.*

L'aire du domaine D est :

$$\mathcal{A} = \int_0^3 [g(x) - f(x)] dx = \int_0^3 2(3 - x)\sqrt{x} dx = \int_0^3 (6\sqrt{x} - 2x\sqrt{x}) dx.$$

Problèmes

Une primitive de $\sqrt{x}$ ou $x^{\frac{1}{2}}$ est $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$ soit $\frac{2}{3} x \sqrt{x}$.

Une primitive de $x\sqrt{x}$ ou $x^{\frac{3}{2}}$ est $\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}$ soit $\frac{2}{5} x^2 \sqrt{x}$.

Donc :

$$\mathcal{A} = \left[4x\sqrt{x} - \frac{4}{5} x^2 \sqrt{x} \right]_0^3 = 12\sqrt{3} - \frac{36}{5} \sqrt{3} = \frac{24}{5} \sqrt{3}.$$

L'unité de surface étant 4 cm^2 :

$$\mathcal{A} = \frac{96}{5} \sqrt{3} \approx 33,255 \text{ cm}^2.$$

c) Calcul du volume engendré par D.

$$V = \int_0^3 \pi [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x) dx = \pi \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2} \right]_0^3$$

$$V = \int_0^3 \pi [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x) dx = \pi \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2} \right]_0^3$$

$$V = \pi \left(\frac{81}{4} - 54 + \frac{81}{2} \right) = \frac{27}{4} \pi.$$

L'unité de volume étant 8 cm^3 ,

$$V = 54 \pi \approx 169,646 \text{ cm}^3.$$

Partie C.

a) Étude de l'équation $x^3 - 6x^2 + 9x - m^2 = 0$.

Elle s'écrit :

$$m^2 = x^3 - 6x^2 + 9x.$$

Elle représente les abscisses des points d'intersection de la droite d'équation $y = m$ avec la courbe $E = C \cup C'$. Donc :

- si $m < -2$ ou $m > 2$, une solution
- si $m = -2$ ou $m = 2$, deux solutions
- si $-2 < m < 2$, trois solutions.

b) Résolution des équations.

En posant $e^x = X$ ou $\log x = X$, chacune des équations s'écrit :

$$X^3 - 6X^2 + 9X = 4.$$

Pour $m = 2$, les solutions sont $X = 1$ et $X = 4$ donc :

$$e^x = 1 \quad \text{soit} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad e^x = 4 \quad \text{soit} \quad x = \text{Log } 4 \approx 1,3863$$

$$S = \{0, \text{Log } 4\}$$

$$\log x = 1 \quad \text{soit} \quad x = 10 \quad \text{et} \quad \log x = 4 \quad \text{soit} \quad x = 10^4$$

$$S = \{10; 10^4\}.$$

6 Famille de fonctions $f_m : x \mapsto x - \frac{1}{x} - m \operatorname{Log} x$

A tout nombre réel m , on associe la fonction f_m définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_m(x) = x - \frac{1}{x} - m \operatorname{Log} x.$$

On appelle C_m la courbe représentative de la fonction f_m dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 4 cm).

- A) 1. Montrer que toutes les courbes C_m ont un point commun A.
2. Déterminer la fonction dérivée f'_m de la fonction f_m .
3. Pour quelles valeurs de m , f'_m est-elle positive ou nulle sur $]0, +\infty[$?

B) Dans la suite du problème, on désigne par g la fonction f_m correspondant à $m = 2$.

1. Calculer à 10^{-2} près : $g\left(\frac{1}{2}\right)$; $g(1)$; $g(2)$; $g(4)$.
2. Comparer $g\left(\frac{1}{x}\right)$ et $g(x)$.
3. Étudier les variations de la fonction g .
4. Tracer la partie de la courbe C_2 représentant la fonction g sur l'intervalle $]0, 4]$. Déterminer le point de C_2 dont l'abscisse est solution de l'équation $g''(x) = 0$. Quelle est la tangente en ce point à C_2 ?

C) Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = x \operatorname{Log} x - x$.

1. Déterminer la fonction dérivée de h .
En déduire les primitives de la fonction g .
2. Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe C_2 , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$.

Partie A.

1. **Point commun aux courbes** C_m .
Le point A de coordonnées $(1, 0)$ appartient à toutes les courbes C_m car
 $f_m(1) = 1 - \frac{1}{1} - m \operatorname{Log} 1$ soit $f_m(1) = 0$.

2. **Fonction dérivée** f'_m .
La fonction f_m est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
Étant la somme de fonctions dérivables, elle est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$f'_m(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{m}{x} \quad \text{soit} \quad \boxed{f'_m(x) = \frac{x^2 - mx + 1}{x^2}}.$$

Problèmes

3. Signe de $f'_m(x)$.

$f'_m(x) \geq 0$ si et seulement si $(x^2 - mx + 1) \geq 0$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Le discriminant du trinôme est $m^2 - 4$.

Si $m^2 - 4 \leq 0$ soit $-2 \leq m \leq 2$, $f'_m(x)$ est du signe du coefficient de x^2 , donc $f'_m(x)$ est positive ou nulle sur $]0, +\infty[$.

Partie B.

Étude de la fonction g définie par $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \operatorname{Log} x$.

1. Calcul de valeurs particulières.

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 2 - 2 \operatorname{Log} \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + 2 \times 0,693 \approx -0,11$$

$$g(1) = 0$$

$$g(2) = 2 - \frac{1}{2} - 2 \operatorname{Log} 2 = \frac{3}{2} - 2 \times 0,693 \approx 0,11$$

$$g(4) = 4 - \frac{1}{4} - 2 \operatorname{Log} 4 = \frac{15}{4} - 2 \times 1,386 \approx 0,98.$$

2. Comparaison de $g(x)$ et $g\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - x - 2 \operatorname{Log} \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - x + 2 \operatorname{Log} x.$$

Donc pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$g\left(\frac{1}{x}\right) = -g(x).$$

3. Variations de la fonction g .

Déterminons la limite de $g(x)$ quand x tend vers 0. Pour cela remarquons que :

$$g(x) = x - \frac{1}{x} (1 + 2x \operatorname{Log} x).$$

Sachant que $\lim_{x \rightarrow 0} (x \operatorname{Log} x) = 0$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$.

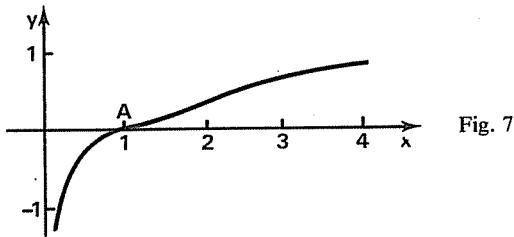
En utilisant la partie A, on obtient :

$$g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}.$$

On en déduit le tableau de variations :

x	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$		+	0	+
$g(x)$	$-\infty$			

4. Tracé de la courbe C_2 .



La fonction g' est dérivable sur $]0, +\infty[$ et :

$$g''(x) = \frac{2(x-1)x^2 - 2x(x-1)^2}{x^4} = \frac{2x(x-1)[x - (x-1)]}{x^4}$$

soit :
$$g''(x) = \frac{2(x-1)}{x^3}.$$

$g''(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$.

Au point $(1, 0)$ le coefficient angulaire de la tangente à la courbe est $g'(1) = 0$.

Donc la tangente à ce point en C_2 est l'axe Ox .

On en déduit le tracé de la courbe C_2 (fig. 7).

Partie C.

1. Primitives de la fonction g .

La fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et :

$$h'(x) = \text{Log } x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \text{Log } x.$$

Problèmes

Les primitives de g sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions G telles que :

$$G(x) = \frac{x^2}{2} - \text{Log } x - 2(x \text{ Log } x - x) + k$$

soit :

$$G(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - \text{Log } x - 2x \text{ Log } x + k.$$

2. Calcul de l'aire du domaine plan.

$$\mathcal{A} = \int_1^4 g(x) dx = G(4) - G(1)$$

$$\mathcal{A} = \frac{16}{2} + 8 - \text{Log } 4 - 8 \text{ Log } 4 - \left(\frac{1}{2} + 2\right) = \frac{27}{2} - 9 \text{ Log } 4.$$

L'unité de surface étant 4 cm^2 , on obtient :

$$\mathcal{A} = 54 - 36 \text{ Log } 4 \approx 4,09 \text{ cm}^2.$$

7 *Fonction* $F : x \mapsto x + 1 + \frac{2 \text{ Log } |x|}{x}$

Soit F la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = x + 1 + \frac{2 \text{ Log } |x|}{x}.$$

- Déterminer l'ensemble de définition de F .
- Montrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote D à la courbe représentative C de F .
Déterminer les points d'intersection de la courbe C et de cette asymptote D , ainsi que la position de C par rapport à cette asymptote.
- Déterminer la fonction dérivée F' de F .
Soit $v(x) = x^2 + 2 - 2 \text{ Log } |x|$. Étudier les variations de la fonction v . En déduire le signe de $v(x)$, puis le signe de $F'(x)$.
- Étudier les variations de la fonction F et tracer la courbe C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de longueur 1 cm).
- Démontrer que la courbe C possède un centre de symétrie Ω .
- Déterminer la valeur de l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du domaine plan limité par la courbe C , l'asymptote D et la droite d'équation $x = \alpha$ ($\alpha \geq 1$).
Déterminer α , avec la précision permise par les tables pour que $\mathcal{A}(\alpha) = 16$.

1. Ensemble de définition de la fonction F.

La fonction F est définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

2. Étude de l'asymptote D à la courbe C.

Remarquons que $F(x) - (x + 1) = \frac{2 \operatorname{Log} |x|}{x}$.

Quand x tend vers plus ou moins l'infini, $\frac{2 \operatorname{Log} |x|}{x}$ tend vers 0, donc la relation précédente montre que la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à la courbe C.

Les coordonnées des points d'intersection de D et C vérifient le système :

$$\begin{cases} y = x + 1 + \frac{2 \operatorname{Log} |x|}{x} \\ y = x + 1. \end{cases}$$

Donc les abscisses des points d'intersection vérifient l'équation :

$$x + 1 = x + 1 + \frac{2 \operatorname{Log} |x|}{x}$$

soit : $\operatorname{Log} |x| = 0$ donc $x = 1$ ou $x = -1$.

Les points d'intersection de C et D ont pour coordonnées :

$$(-1, 0) \quad \text{et} \quad (1, 2).$$

Pour étudier la position de C par rapport à D, étudions le signe de $\frac{\operatorname{Log} |x|}{x}$:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$\frac{\operatorname{Log} x }{x}$		-	0	+	
		-	0	+	

On en déduit que :

- dans les intervalles $]-\infty, -1[$ et $]0, 1[$ la courbe C est au-dessous de D;
- dans les intervalles $]-1, 0[$ et $[1, +\infty[$ la courbe C est au-dessus de D.

3. Étude de $F'(x)$.

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$F'(x) = 1 + 2 \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \operatorname{Log} |x|}{x^2} = \frac{x^2 + 2 - 2 \operatorname{Log} |x|}{x^2}.$$

soit : $F'(x) = \frac{v(x)}{x^2}.$

Problèmes

La fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$v'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x}$$

soit :

$$v'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

On en déduit le tableau de variation de la fonction v :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$v'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
$v(x)$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$\searrow$	3	$\nearrow$

On en déduit que $v(x)$ est positif sur $\mathbb{R}^*$. Donc $F'(x)$ qui est du signe de $v(x)$ est positif sur $\mathbb{R}^*$.

4. Variations de la fonction F .

Quand x tend vers $+\infty$ ($-\infty$), $\frac{\text{Log } |x|}{x}$ tend vers 0 , donc $F(x)$ tend vers $+\infty$ ($-\infty$).

Quand x tend vers 0 , $\frac{\text{Log } |x|}{x}$ tend vers $-\infty$ si $x > 0$, vers $+\infty$ si $x < 0$, donc $F(x)$

tend vers $-\infty$ si x est positif, $+\infty$ si x est négatif.

Indiquons le tableau de variations de F :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$F'(x)$	$+$	$+$	$+$
$F(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

On en déduit le tracé de la courbe C (fig. 8).

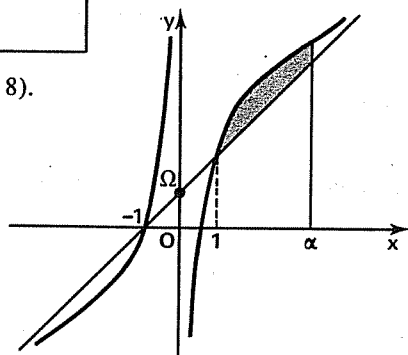


Fig. 8

5. Centre de symétrie de Ω .

Le tracé de la courbe C fait apparaître un centre de symétrie au point $\Omega(0, 1)$ intersection de D avec Oy .

Considérons le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. Si (X, Y) sont les coordonnées d'un point M dans ce repère alors :

$$\begin{cases} x = X \\ y = 1 + Y. \end{cases}$$

Une équation de C dans ce repère est :

$$1 + Y = X + 1 + \frac{2 \operatorname{Log} |X|}{X} \quad \text{soit} \quad Y = X + \frac{2 \operatorname{Log} |X|}{X}.$$

Si f est la fonction : $X \mapsto X + \frac{2 \operatorname{Log} |X|}{X}$,

pour tout X de $\mathbb{R}^*$, $f(-X) = -f(X)$, donc la fonction f est impaire ce qui entraîne que le point Ω est centre de symétrie de C.

6. Calcul de l'aire du domaine plan.

L'aire du domaine plan est :

$$\mathcal{A}(\alpha) = \int_1^\alpha [F(x) - (x + 1)] dx = \int_1^\alpha \frac{2 \operatorname{Log} x}{x} dx$$

$$\mathcal{A}(\alpha) = [(\operatorname{Log} x)^2]_1^\alpha \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{A}(\alpha) = (\operatorname{Log} \alpha)^2.}$$

Si $\mathcal{A}(\alpha) = 16$ alors $\operatorname{Log} \alpha = 4$ ou $\operatorname{Log} \alpha = -4$.

Comme $\alpha > 1$, on en déduit que $\operatorname{Log} \alpha = 4$ donc :

$$\boxed{\alpha = e^4 \approx 54,60.}$$

8 Étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x(\operatorname{Log} x)^2}$

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x telle que :

$$f(x) = \frac{1}{x(\operatorname{Log} x)^2}.$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ; déterminer les limites de f aux bornes de cet ensemble. On admettra que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x(\operatorname{Log} x)^2 = 0$.

Problèmes

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$2 + \text{Log } x > 0.$$

En déduire le signe de l'expression :

$$A = -(2 \text{ Log } x) \text{ Log } x.$$

3. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative C dans un plan muni d'un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$ (unité graphique : 2 cm).

4. Déterminer une équation de la tangente à C au point d'abscisse $x = e$. Tracer cette tangente.

5. On considère la fonction F telle que $F(x) = \frac{1}{\text{Log } x}$.

a) Calculer sa dérivée F' .

b) Soit α un nombre réel supérieur à 3. Calculer, en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du domaine plan, ensemble des points de coordonnées x et y , tels que :

$$3 \leq x \leq \alpha \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq f(x).$$

Donner en cm^2 une valeur approchée de cette aire lorsque $\alpha = 9$.

c) Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\alpha)$.

1. Ensemble de définition de la fonction f .

La fonction $x \mapsto \text{Log } x$ est définie pour tout $x > 0$. D'autre part $\text{Log } x = 0$ si et seulement si $x = 1$. Donc l'ensemble de définition de f est :

$$]0, 1[\cup]1, +\infty[.$$

Quand x tend vers 0, $x(\text{Log } x)^2$ tend vers 0 (par valeurs positives) donc $f(x)$ tend vers $+\infty$.

Quand x tend vers 1, $f(x)$ tend vers $+\infty$.

Quand x tend vers $+\infty$, $x(\text{Log } x)^2$ tend vers $+\infty$, donc $f(x)$ tend vers 0.

2. Signe de l'expression : $-(2 + \text{Log } x) \text{ Log } x$.

L'inéquation $2 + \text{Log } x > 0$ est équivalente à $\text{Log } x > -2$ soit :

$$\text{Log } x > \text{Log } \frac{1}{e^2}.$$

La fonction Log étant strictement croissante, on en déduit $x > \frac{1}{e^2}$.

On en déduit le signe de $A = -(2 + \text{Log } x) \text{ Log } x$.

x	0	$\frac{1}{e^2}$	1	$+\infty$	
$\text{Log } x$	-	-	0	+	
$2 + \text{Log } x$	-	0	+	+	
A	-	0	+	0	-

Sur $]0, \frac{1}{e^2}[$ et sur $]1, +\infty[, A < 0$.

Sur $]\frac{1}{e^2}, 1[$ $A > 0$.

3. Étude des variations de la fonction.

La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition et :

$$f'(x) = -\frac{(\text{Log } x)^2 + 2x(\text{Log } x) \frac{1}{x}}{x^2(\text{Log } x)^4} = -\frac{(\text{Log } x)^2 + 2 \text{Log } x}{x^2(\text{Log } x)^4}.$$

Donc :

$$f'(x) = -\frac{2 + \text{Log } x}{x^2(\text{Log } x)^3}.$$

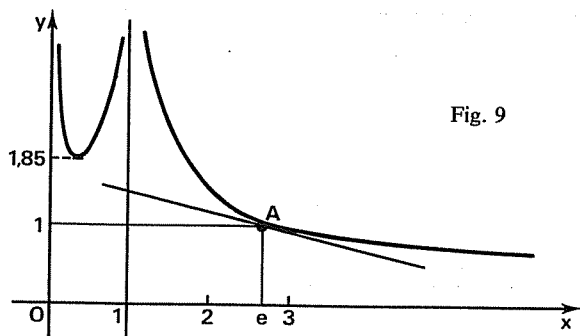
$f'(x) = 0$ si et seulement si $2 + \text{Log } x = 0$ soit $x = \frac{1}{e^2}$.

$f'(x)$ est du signe de $A = -(2 + \text{Log } x) \text{Log } x$. On en déduit le tableau de variations de la fonction.

x	0	$\frac{1}{e^2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$
		m		0

Remarquons que $m = f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{e^2}{4} \approx 1,85$.

On en déduit le tracé de C ; les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$ sont des asymptotes à la courbe (fig. 9).



4. Équation de la tangente à C au point d'abscisse e .

Le coefficient angulaire de la tangente à C au point $A\left(e, \frac{1}{e}\right)$ est :

$$f'(e) = -\frac{3}{e^2}.$$

Une équation de la tangente à C au point A est :

$$y - \frac{1}{e} = -\frac{3}{e^2}(x - e) \quad \text{soit} \quad \boxed{y = -\frac{3}{e^2}x + \frac{4}{e}}.$$

5. Étude de F' et calcul d'aire.

a) La fonction F est dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et

$$F'(x) = -\frac{1}{x(\text{Log } x)^2}.$$

La fonction F est donc une primitive de la fonction $-f$.

b) L'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du domaine plan est :

$$\mathcal{A}(\alpha) = \int_3^\alpha f(x) dx = -[F(\alpha) - F(3)].$$

Donc :

$$\mathcal{A}(\alpha) = \frac{1}{\text{Log } 3} - \frac{1}{\text{Log } \alpha} \text{ (unité).}$$

L'unité de surface étant 4 cm^2 ,

$$\boxed{\mathcal{A}(\alpha) = 4 \left(\frac{1}{\text{Log } 3} - \frac{1}{\text{Log } \alpha} \right) \text{ cm}^2.}$$

Lorsque $\alpha = 9$, $\mathcal{A}(9) = 4 \left(\frac{1}{\text{Log } 3} - \frac{1}{2 \text{Log } 3} \right)$ soit

$$\mathcal{A}(9) = \frac{2}{\text{Log } 3} \approx 1,82 \text{ cm}^2.$$

c) Comme $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{\text{Log } \alpha} = 0$, on obtient :

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = \frac{4}{\text{Log } 3} \approx 3,64.$$

9 Fonctions $x \mapsto k \frac{\text{Log } x}{x}$ et $x \mapsto k \frac{\text{Log } |x|}{x}$.

Les deux parties du problème sont dans une large mesure indépendantes; le repère est orthonormé, l'unité sur chacun des axes $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$ étant 1 cm.

I

1. Étudier, suivant les valeurs de $k \in \mathbb{R}$, les variations de la fonction numérique f_k définie par :

$$f_k(x) = k \frac{\text{Log } x}{x}.$$

Tracer la courbe C_k représentative de f_k dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ pour les deux valeurs $k = e$ et $k = -e$. On précisera les ordonnées des points d'abscisses $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, e$ à 10^{-3} près.

2. Soit la fonction numérique g_k définie par :

$$g_k(x) = k \frac{\text{Log } |x|}{x}.$$

Préciser l'ensemble de définition de g_k . Étudier la parité de g_k ; en déduire une représentation C'_e de g_e dans le même repère que C_k dans le cas particulier $k = e$.

3. Écrire les équations des tangentes à C'_e aux points d'intersection de C'_e et de l'axe $(O, \vec{i})$. Quelle est la position relative de ces tangentes? Le résultat était-il prévisible?

II

On considère la plaque homogène plane P définie par la courbe C_e , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = e$.

1. En remarquant que $f_e(x)$ peut s'écrire sous la forme $f_e(x) = eu(x) \cdot u'(x)$, u' étant la fonction dérivée d'une fonction u que l'on précisera, déterminer une primitive de f_e . En déduire l'aire en cm^2 de P .

2. Calculer la dérivée de $F : x \mapsto F(x) = \frac{1}{2} x^2 \left(\text{Log } x - \frac{1}{2} \right)$. En déduire le moment d'inertie de P par rapport à $y'y$. Exprimer ce moment d'inertie en fonction de la masse M de P .

Problèmes

1. Étude des fonctions f_k définies par $f_k(x) = k \frac{\text{Log } x}{x}$.

La fonction f_k est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

Quand x tend vers 0, $\frac{\text{Log } x}{x}$ tend vers $-\infty$.

Si $k < 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f_k(x) = +\infty$; si $k > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f_k(x) = -\infty$.

Quand x tend vers $+\infty$, $\frac{\text{Log } x}{x}$ tend vers 0, donc $f_k(x)$ tend vers 0.

Sur l'intervalle $]0, +\infty[$ la fonction f_k est dérivable et :

$$f'_k(x) = k \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \text{Log } x}{x^2} \quad \text{soit} \quad f'_k(x) = \frac{k(1 - \text{Log } x)}{x^2}.$$

$f'_k(x) = 0$ si et seulement si $\text{Log } x - 1 = 0$ soit $x = e$.

On en déduit le tableau de variations suivant le signe de k :

$$k < 0$$

x	0	e	$+\infty$
$f'_k(x)$	-	0	+
$f_k(x)$	$+\infty$		0
	$\searrow$ $\frac{k}{e}$ $\nearrow$		

$$k > 0$$

x	0	e	$+\infty$
$f'_k(x)$	+	0	-
$f_k(x)$	$-\infty$		0
	$\nearrow$ $\frac{k}{e}$ $\searrow$		

Remarquons que $f_k(e) = \frac{k}{e}$.

Précisons les coordonnées de certains points des courbes C_e et C_{-e} .

x	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	e
$f_e(x)$	0	0,735	0,942	0,996	1
$f_{-e}(x)$	0	-0,735	-0,942	-0,996	-1

Les courbes C_k admettent pour asymptotes les axes des coordonnées (fig. 10 et 11).

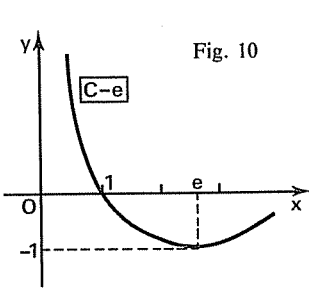


Fig. 10

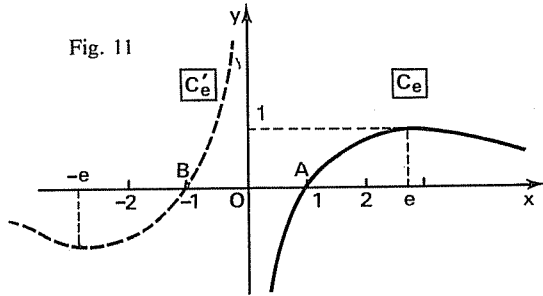


Fig. 11

2. Étude des fonctions g_k définies par $g_k(x) = k \frac{\text{Log } |x|}{x}$.

La fonction $x \mapsto \text{Log } |x|$ est définie pour tout x non nul. On en déduit que l'ensemble de définition de g_k est $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Remarquons que pour tout x réel non nul :

$$g_k(-x) = k \frac{\text{Log } |x|}{-x} = -g_k(x).$$

On en déduit que la fonction g_k est impaire.

La courbe C'_e admet donc le point O comme centre de symétrie.

On en déduit le tracé de C'_e , en effectuant sur C_e une symétrie de centre O (fig. 11).

3. Tangentes à C'_e en certains points.

C'_e coupe $x'Ox$ aux points A(1, 0) et B(-1, 0).

Le coefficient directeur de la tangente à C'_e au point A est :

$$g'_e(1) = f'_e(1) = e.$$

Une équation de la tangente à C'_e au point A est :

$$y = e(x - 1).$$

Comme pour tout x non nul, $g'_k(x) = \frac{k(1 - \text{Log } |x|)}{x^2}$, le coefficient directeur de la tangente à C'_e au point B est :

$$g'_e(-1) = e.$$

Une équation de la tangente à C'_e au point B est :

$$y = e(x + 1).$$

Les tangentes sont parallèles ce qui était prévisible d'après l'existence du centre de symétrie O, milieu de [A, B], de la courbe C'_e .

II

1. Primitive de $f_e : x \mapsto e \frac{\text{Log } x}{x}$.

Soit $f_e(x) = e \cdot \text{Log } x \cdot \frac{1}{x}$.

En posant $u(x) = \text{Log } x$, on obtient $f_e(x) = e \cdot u(x) \cdot u'(x)$.

Donc sur $]0, +\infty[$ une primitive de la fonction f_e est la fonction h définie par :

$$h(x) = \frac{e}{2} (\text{Log } x)^2.$$

L'aire de la plaque est :

$$\mathcal{A} = \int_1^e f_e(x) dx = h(e) - h(1) = \frac{e}{2} (\text{cm}^2) \quad \boxed{\mathcal{A} = 1,359 \text{ cm}^2}.$$

2. Moment d'inertie de la plaque par rapport à $y'y$.

La fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et :

$$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x \left(\text{Log } x - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x}.$$

Soit :

$$\boxed{F'(x) = x \cdot \text{Log } x.}$$

Le moment d'inertie élémentaire d'une bande de largeur Δx , parallèle à Oy et :

$$\Delta I = x^2 \cdot f(x) \cdot \Delta x.$$

Donc, le moment d'inertie de la plaque par rapport à Oy est :

$$I = \int_1^e x^2 \cdot e \frac{\text{Log } x}{x} dx = e \int_1^e x \text{Log } x dx$$

$$I = e(F(e) - F(1))$$

$$\text{avec } F(e) = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^2 = \frac{1}{4} e^2 \quad \text{et } F(1) = -\frac{1}{4}.$$

Donc :

$$I = e \left(\frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} \right) = \frac{e}{4} (e^2 + 1).$$

En supposant que la densité surfacique de la plaque soit égale à 1, $M = \mathcal{A} = \frac{e}{2}$, donc :

$$\boxed{I = \frac{M}{2} (e^2 + 1).}$$

10 Étude de la fonction : $x \mapsto e^{-x} - x + 1$.

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = e^{-x} - x + 1.$$

On désigne par C la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$ (unité graphique : 2 cm).

1. Étudier les variations de la fonction f . On admettra que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

2. Montrer que la droite D d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote de C ; préciser la position de C par rapport à D .

3. Calculer avec l'approximation permise par les tables numériques :

$$f(1), f(1,1), f(1,2), f(1,3), f(3).$$

La courbe C coupe Ox au point A . En déduire un encadrement de l'abscisse de A . Tracer C et déterminer une équation de la tangente à C en son point d'intersection avec Oy .

4. Sachant que λ est un réel supérieur à 2, calculer en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine plan, ensemble des points de coordonnées x et y qui vérifient :

$$2 \leq x \leq \lambda \quad \text{et} \quad f(x) \leq y \leq 0.$$

Pour $\lambda = 5$, donner une valeur approchée de cette aire en cm^2 à 10^{-2} près.

5. Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$ admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $]-\infty, 2]$.

1. Variations de la fonction $f : x \mapsto e^{-x} - x + 1$.

La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, e^{-x} tend vers 0, donc $f(x)$ tend vers $-\infty$.

D'autre part $f(0) = 2$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = -e^{-x} - 1.$$

Pour tout x réel, $f'(x) < 0$, donc la fonction f est strictement décroissante.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

Problèmes

2. Asymptote à la courbe C.

La relation $f(x) - (-x + 1) = e^{-x}$ montre que $f(x) - (-x + 1)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Donc la courbe C admet pour asymptote la droite D d'équation :

$$y = -x + 1.$$

D'autre part, $f(x) - (-x + 1) > 0$ sur $\mathbb{R}$ dont la courbe C est située au-dessus de la droite D.

3. Intersection de C avec Ox.

$$f(1) = e^{-1} - 1 + 1 = 0,36788$$

$$f(1,1) = e^{-1,1} - 1,1 + 1 = 0,33287 - 0,1 = 0,23287$$

$$f(1,2) = e^{-1,2} - 1,2 + 1 = 0,30119 - 0,2 = 0,10119$$

$$f(1,3) = e^{-1,3} - 1,3 + 1 = 0,27253 - 0,3 = -0,02747$$

$$f(3) = e^{-3} - 3 + 1 = 0,04979 - 2 = -1,95021.$$

La fonction f est continue sur le segment $[1,2; 1,3]$. Comme $f(1,2) > 0$ et $f(1,3) < 0$ alors la fonction f prend la valeur zéro dans l'intervalle $]1,2; 1,3[$. La courbe C coupe donc Ox au point A d'abscisse a telle que :

$$1,2 < a < 1,3.$$

On en déduit le tracé de la courbe C.

La courbe C coupe l'axe Oy au point B(0, 2). Le coefficient directeur de la tangente à C au point B est :

$$m = f'(0) = -2.$$

Une équation de la tangente à C au point B est :

$$y - 2 = -2x \quad \text{soit} \quad y = -2x + 2.$$

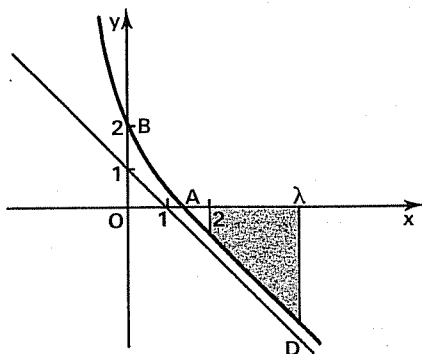


Fig. 12

4. Calcul de l'aire du domaine plan.

Sur le segment $[2, \lambda]$ la fonction f est continue donc intégrable; comme f est négative, l'aire du domaine plan est :

$$\mathcal{A}(\lambda) = - \int_2^\lambda (e^{-x} - x + 1) dx = - \left[-e^{-x} - \frac{x^2}{2} + x \right]_2^\lambda.$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = - \left[\left(-e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2}{2} + \lambda \right) - \left(-e^{-2} - 2 + 2 \right) \right] = e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2} - \lambda - e^{-2} \text{ (unités).}$$

L'unité de surface étant 4 cm^2 ,

$$\mathcal{A}(\lambda) = 4 \left(e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2} - \lambda - e^{-2} \right) \text{ cm}^2.$$

Pour $\lambda = 5$, $\mathcal{A} = 4 \left(e^{-5} + \frac{25}{2} - 5 - e^{-2} \right) = 4(0,00674 + 7,5 - 0,13534).$

Soit :

$$\mathcal{A} \approx 29,49 \text{ cm}^2.$$

5. Existence d'une fonction réciproque.

La fonction f étant continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$, l'image de cet intervalle par f est l'intervalle $]-\infty, 2]$; elle définit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]-\infty, 2]$. Donc elle admet une fonction réciproque, définie, continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 2]$.

Sa représentation graphique s'obtient en prenant le symétrique de l'arc de courbe représentant f sur $[0, +\infty[$, par rapport à la première bissectrice.

II Étude de la fonction : $x \mapsto 2(x+1)e^{-x}$

Soit la fonction numérique f de la variable réelle définie par :

$$f(x) = 2(x+1)e^{-x}.$$

On désigne par C la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$ (unité graphique : 2 cm).

1. f' étant la fonction dérivée de f montrer que l'expression : $\frac{f(x) + f'(x)}{e^{-x}}$ est indépendante de x .

2. Étudier les variations de f . Tracer la courbe C .

(On rappelle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.)

Problèmes

3. Calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de f (on pourra comparer : $f(x)$ et $2e^{-x} - f'(x)$).

Calculer l'aire du domaine plan limité par C , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = 0$. Donner la réponse à 1 mm^2 près par défaut.

4. Intégrer l'équation différentielle $y + y' = 0$.

En déduire la solution de l'équation différentielle :

$$y + y' = 2e^{-x},$$

qui prend pour valeur 1 lorsque $x = 0$.

5. a) Écrire l'équation de la droite D , tangente à C au point M d'abscisse α ; application numérique : $\alpha = 1$.

Calculer l'abscisse du point P , intersection de D et de l'axe des abscisses lorsque α est quelconque; application numérique : $\alpha = 1$.

b) On donne le point P de coordonnées $x = a$, $y = 0$.

Combien de tangentes peut-on mener du point P , à la courbe C ?

Discuter suivant les valeurs de a .

Lorsqu'il existe deux tangentes possibles, les points de tangence M_1 et M_2 ont pour abscisses α_1 et α_2 ; calculer $\alpha_1 \cdot \alpha_2$.

1. Calcul de $f(x) + f'(x)$.

La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$; elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2e^{-x} + 2(x+1)(-e^{-x}) \quad \text{soit} \quad f'(x) = -2xe^{-x}.$$

Donc :

$$f(x) + f'(x) = 2e^{-x}$$

soit :

$$\boxed{\frac{f(x) + f'(x)}{e^{-x}} = 2.}$$

2. Variations de la fonction f .

Quand x tend vers $-\infty$, e^{-x} tend vers $+\infty$, $(x+1)$ tend vers $-\infty$, donc $f(x)$ tend vers $-\infty$.

Quand x tend vers $+\infty$, $\frac{x}{e^x}$ tend vers 0, e^{-x} tend vers 0, donc $f(x) = 2\left(\frac{x}{e^x} + e^{-x}\right)$ tend vers 0.

$f'(x)$ est du signe de $(-x)$. On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	2	0

Indiquons les coordonnées de quelques points de la courbe C.

x	-1	0	1	2	-1,5	-2	4
$f(x)$	0	2	1,47	0,81	-4,48	-14,78	0,18

La courbe C (fig. 13) admet l'axe Ox comme asymptote.

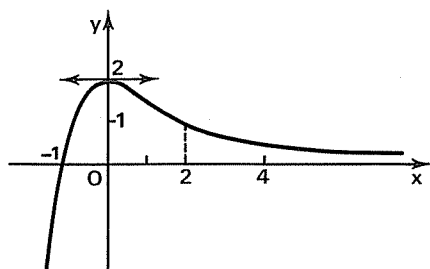


Fig. 13

3. Aire du domaine plan.

Calculons : $2e^{-x} - f'(x) = 2(x+1)e^{-x}$.

Donc : $f(x) = 2e^{-x} - f'(x)$.

Donc si F est une primitive de f alors :

$$F(x) = -2e^{-x} - f(x) + k \quad \text{soit} \quad \boxed{F(x) = -2(x+2)e^{-x} + k.}$$

L'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan est :

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^0 f(x) dx = F(0) - F(-1) = -4 + 2e.$$

L'unité de surface étant 4 cm^2 ,

$$\boxed{\mathcal{A} = 8(e-2) \text{ cm}^2 \approx 5,74 \text{ cm}^2} \quad \text{soit} \quad 574 \text{ mm}^2.$$

4. Intégration de l'équation différentielle $y + y' = 2e^{-x}$.

L'équation différentielle $y + y' = 0$ s'écrit $y' = -y$.

Elle admet pour solution sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des fonctions g telles que :

$$g(x) = Ke^{-x}.$$

Une intégrale particulière de l'équation différentielle

$$y + y' = 2e^{-x} \tag{1}$$

est la fonction f car $f(x) + f'(x) = 2e^{-x}$ (question 1.).

Problèmes

Donc les solutions de l'équation (1) sont les fonctions h telles que :

$$h(x) = Ke^{-x} + 2(x+1)e^{-x}.$$

Pour $x = 0$, $h(0) = K + 2 = 1$ donc $K = -1$.

La solution particulière demandée est la fonction définie par :

$$y = -e^{-x} + 2(x+1)e^{-x} \quad \text{soit} \quad \boxed{y = (2x+1)e^{-x}}.$$

5. Tangentes à la courbe C.

a) Au point M de coordonnées $(\alpha, f(\alpha))$, une équation de la tangente à la courbe C est :

$$\boxed{y - 2(\alpha+1)e^{-\alpha} = -2\alpha e^{-\alpha}(x - \alpha).} \quad (2)$$

Pour $\alpha = 1$, on obtient :

$$y - 4e^{-1} = -2e^{-1}(x - 1)$$

soit :

$$\boxed{y = -2e^{-1}x + 6e^{-1}}.$$

b) Le point P de coordonnées $(a, 0)$ appartient à une tangente à C si et seulement si ses coordonnées vérifient (2) c'est-à-dire :

$$-2(\alpha+1)e^{-\alpha} = -2\alpha e^{-\alpha}(a - \alpha),$$

et, en simplifiant par $2e^{-\alpha}$, on obtient :

$$\alpha^2 + (1-a)\alpha + 1 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = (1-a)^2 - 4 = a^2 - 2a - 3,$$

dont les racines sont $a_1 = -1$ et $a_2 = 3$.

On en déduit les résultats suivants :

— si $a < -1$ ou $a > 3$, deux valeurs distinctes de α , donc deux tangentes issues de P;

— si $a = -1$ ou $a = 3$, une valeur de α , donc une tangente issue de P;

— si $-1 < a < 3$, pas de valeur de α , donc aucune tangente issue de P.

On vérifie, d'après l'équation du second degré en α , que le produit des racines, lorsqu'elles existent est 1 donc :

$$\boxed{\alpha_1 \alpha_2 = 1.}$$

12 Étude de la fonction : $x \mapsto \frac{4e^x}{e^x + 1}$

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x , définie par :

$$f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1}.$$

1. Montrer que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = a + \frac{b}{e^x + 1}$ où a et b sont deux constantes que l'on déterminera.

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. Étudier les variations de la fonction f . Démontrer que le point $\omega(0, 2)$ est centre de symétrie de la courbe représentative C de la fonction f .

Construire la courbe C ainsi que la tangente en $\omega(0, 2)$ à la courbe C dans un repère orthonormé (unité : 1 cm).

3. On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie par $g(x) = e^x + 1$.

Étudier le signe de $[g(x) - f(x)]$, construire sur le graphique précédent la courbe représentative Γ de la fonction g et la tangente à cette courbe au point d'abscisse $x_0 = 0$. Que peut-on en déduire?

4. Déterminer une primitive F de f et une primitive G de g .

Calculer, en centimètres carrés l'aire du domaine plan compris entre les courbes C et Γ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ (on donne $\text{Log}(e + 1) = 1,313$ $\text{Log } 2 = 0,693$).

5. Démontrer que sur $\mathbb{R}$, la fonction g admet une fonction réciproque k .

Déterminer $k(x)$; construire sur le graphique précédent la courbe représentative Γ' de la fonction k .

1. Autre expression de $f(x)$.

Pour tout x réel,

$$f(x) = \frac{4(e^x + 1) - 4}{e^x + 1} = \frac{4(e^x + 1)}{e^x + 1} - \frac{4}{e^x + 1}.$$

Donc :

$$f(x) = 4 - \frac{4}{e^x + 1}.$$

Quand x tend vers $+\infty$, $(e^x + 1)$ tend vers $+\infty$, donc $\frac{4}{e^x + 1}$ tend vers 0.

On en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4.$$

Problèmes

2. Variations de la fonction f .

Pour tout x réel, $e^x + 1$ est strictement positif, donc la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Quand x tend vers $-\infty$, e^x tend vers 0, donc $f(x)$ tend vers 0.

Sur $\mathbb{R}$, f est dérivable :

$$f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

Sur $\mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante.

On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	4

Montrons que le point $\omega(0, 2)$ est centre de symétrie de la courbe.

Si ω est le point de coordonnées $(0, 2)$ déterminons l'équation de C dans le repère $(\omega, \vec{i}, \vec{j})$.

Si (X, Y) sont les coordonnées d'un point M dans ce repère, alors :

$$x = X \quad \text{et} \quad y = 2 + Y.$$

Dans ce repère $(\omega, \vec{i}, \vec{j})$ l'équation de C est définie par :

$$2 + Y = 4 - \frac{4}{e^X + 1} \quad \text{soit} \quad Y = \frac{2(e^X - 1)}{e^X + 1}.$$

Dans ce repère, C représente la fonction h telle que :

$$h(X) = 2 \frac{(e^X - 1)}{e^X + 1}.$$

$$h(-X) = 2 \cdot \frac{e^{-X} - 1}{e^{-X} + 1} = 2 \cdot \frac{1 - e^X}{1 + e^X}.$$

Donc pour tout X réel, $h(-X) = -h(X)$.

La fonction h est impaire; donc ω est un centre de symétrie de C .

Pour tracer la tangente à C au point ω , déterminons son coefficient directeur : $m = f'(0) = 1$.

On en déduit le tracé de la courbe C (fig. 14).

Remarquons que $f(-2) = \frac{4e^{-2}}{e^{-2} + 1} \approx 0,48$; $f(2) = \frac{4e^2}{e^2 + 1} \approx 3,52$.

La courbe C admet pour asymptotes les droites d'équation $y = 0$ et $y = 4$ (fig. 14).

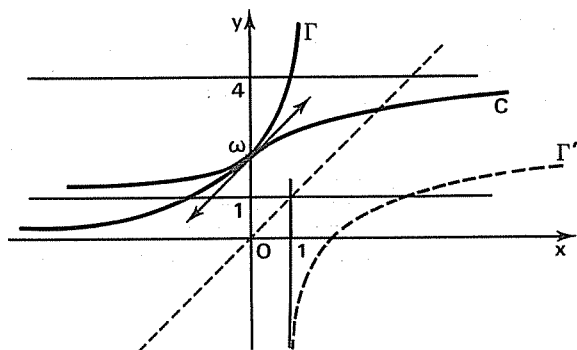


Fig. 14

3. Étude de la fonction $g : x \mapsto e^x + 1$.

La fonction g est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$, donc :

$$g'(x) = e^x.$$

On en déduit que la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Étudions le signe de $g(x) - f(x)$:

$$g(x) - f(x) = e^x + 1 - \frac{4e^x}{e^x + 1} = \frac{(e^x + 1)^2 - 4e^x}{e^x + 1},$$

$$g(x) - f(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{e^x + 1}.$$

Donc, pour tout x réel, $(g(x) - f(x)) \geq 0$.

On en déduit que la courbe Γ est située au-dessus de la courbe C .

Comme $f(0) = g(0) = 2$, C et Γ ont un point commun $\omega(0, 2)$.

En ce point, $f'(0) = g'(0) = 1$. Les tangentes à C et Γ au point ω ayant le même coefficient directeur, elles sont confondues. On dit que les courbes C et Γ sont tangentes au point ω .

4. Calcul de l'aire du domaine plan.

Une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est telle que :

$$F(x) = 4 \operatorname{Log}(e^x + 1).$$

Une primitive G de g sur $\mathbb{R}$ est telle que :

$$G(x) = e^x + x.$$

L'aire du domaine plan est :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 [g(x) - f(x)] dx = G(1) - F(1) - (G(0) - F(0)),$$

$$\mathcal{A} = e + 1 - 4 \operatorname{Log}(e + 1) - 1 + 4 \operatorname{Log} 2 = e - 4 \operatorname{Log}(e + 1) + 4 \operatorname{Log} 2,$$

$$\text{soit } \mathcal{A} \approx 2,718 - 4 \times 1,313 + 4 \times 0,693 \approx 0,238 \text{ cm}^2.$$

Problèmes

5. Fonction réciproque.

La fonction g étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, l'image de $\mathbb{R}$ par g est l'intervalle $]1, +\infty[$; elle définit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]1, +\infty[$. Donc g admet une fonction réciproque k , définie, continue et strictement croissante sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

De la relation $y = e^x + 1$ on déduit $e^x = y - 1$ soit $x = \text{Log}(y - 1)$.

La fonction k est telle que : $k(x) = \text{Log}(x - 1)$.

Sa courbe représentative Γ' se déduit de Γ en effectuant une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

13 Étude de la fonction : $x \mapsto e^x(x^2 - 3)$

1. Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = e^x(x^2 - 3).$$

a) Étudier les variations de cette fonction, et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, d'axes Ox, Oy . (Unité : 2 cm.)

b) Tracer dans ce même repère la courbe représentative Γ de la fonction g , définie dans $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x$. (On rappellera le tableau de variations de g .)

c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B , des courbes C et Γ , E et D , de la courbe C avec l'axe Ox .

On admettra que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x) = 0$.

2. Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes, la variable étant le réel x :

$$F_1 \text{ définie par } F_1(x) = e^x(x^2 - 2x - 1)$$

$$F_2 \text{ définie par } F_2(x) = \frac{e^{2x}}{2} \left(x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 3x + \frac{15}{2} \right).$$

3. Calculer l'aire, en centimètres carrés, du domaine plan limité par les arcs AB des deux courbes C et Γ .

4. Calculer le volume, en centimètres cubes, du solide engendré par la rotation autour de Ox , du domaine plan limité par l'axe Ox et l'arc ED de la courbe C . L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (unité 2 cm). (On utilisera l'un des résultats obtenus au 2.)

1. a) Variations de la fonction f définie par $f(x) = (x^2 - 3)e^x$.

La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, (x^2-3) et e^x tendent vers $+\infty$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Lorsque x tend vers $-\infty$, x^2e^x et $3e^x$ tendent vers 0, donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

La courbe C admet donc Ox pour asymptote.

Sur $\mathbb{R}$, la fonction f , produit de deux fonctions dérivables est dérivable :

$$f'(x) = 2xe^x + (x^2-3)e^x \quad \text{soit} \quad f'(x) = (x^2+2x-3)e^x.$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x^2+2x-3=0 \quad \text{soit} \quad x=1, \quad x=-3.$$

Le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme (x^2+2x-3) . On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			M			$+\infty$
	0	$\nearrow$		$\searrow$	m	$\nearrow$

$$M = f(-3) = 6e^{-3} = 6 \times 0,04979 \approx 0,299.$$

$$m = f(1) = -2e = -2 \times 2,718 \approx -5,437.$$

La courbe C coupe Ox aux points dont les abscisses vérifient l'équation :

$$x^2 - 3 = 0$$

d'où les points :

$$E(-\sqrt{3}, 0); \quad D(\sqrt{3}, 0).$$

On en déduit le tracé de la courbe C (fig. 15).

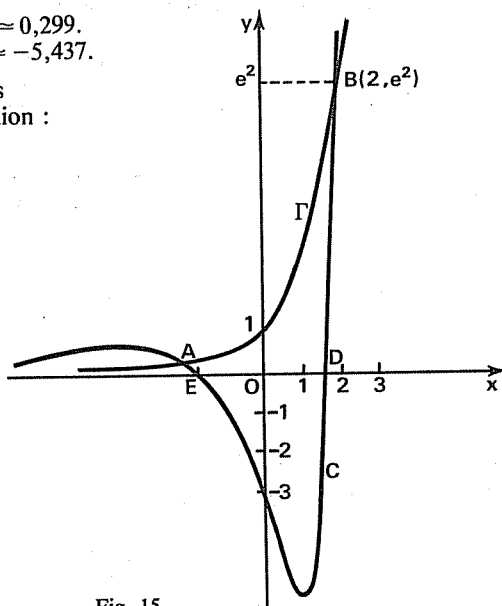


Fig. 15

Problèmes

b et c) Courbes C et Γ .

Rappelons le tableau de variations de la fonction $g : x \mapsto e^x$.

x	$-\infty$	$+\infty$
e^x	0	$+\infty$

Les courbes C et Γ se coupent aux points dont les coordonnées vérifient le système d'équations :

$$\begin{cases} y = (x^2 - 3)e^x \\ y = e^x \end{cases}$$

Les abscisses des points d'intersection sont les solutions de l'équation :

$$(x^2 - 3)e^x = e^x \quad \text{soit} \quad x^2 - 4 = 0.$$

On obtient donc :

$$A(x = -2; y = e^{-2} \approx 0,135) \quad B(x = 2; y = e^2 \approx 7,389).$$

2. Dérivation des fonctions F_1 et F_2 .

Les fonctions F_1 et F_2 , produit de fonctions dérivables, sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$F_1'(x) = e^x(x^2 - 2x - 1) + e^x(2x - 2) \quad \text{soit} \quad F_1'(x) = (x^2 - 3)e^x$$

$$F_2'(x) = e^{2x}\left(x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 3x + \frac{15}{2}\right) + \frac{e^{2x}}{2}(4x^3 - 6x^2 - 6x + 3)$$

$$F_2'(x) = e^{2x}(x^4 - 6x^2 + 9).$$

Soit :

$$F_2'(x) = (x^2 - 3)^2 e^{2x}.$$

3. Calcul de l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan.

Les deux fonctions f et g continues sur $\mathbb{R}$ sont intégrables sur $[-2; 2]$.

$$\mathcal{A} = \int_{-2}^2 [g(x) - f(x)] dx = [G(x) - F_1(x)]_{-2}^2.$$

$$\text{Or } G(x) - F_1(x) = e^x - (x^2 - 2x - 1)e^x = (-x^2 + 2x + 2)e^x.$$

$$\text{Donc : } \mathcal{A} = (-4 + 4 + 2)e^2 - (-4 - 4 + 2)e^{-2} = 2e^2 + 6e^{-2} \text{ (unités).}$$

L'unité de surface étant 4 cm^2 ,

$$\mathcal{A} = 8(e^2 + 3e^{-2}) \text{ cm}^2$$

$$\text{soit } \mathcal{A} = 8 \cdot (7,389 + 3 \times 0,1353) \quad \text{donc} \quad \mathcal{A} = 62,36 \text{ cm}^2.$$

4. Calcul du volume.

Le volume engendré par la rotation du domaine plan autour de Ox est :

$$V = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \pi [f(x)]^2 dx.$$

Or F_2 est une primitive de la fonction f^2 donc :

$$V = \pi [F_2(\sqrt{3}) - F_2(-\sqrt{3})].$$

$$F_2(\sqrt{3}) = \frac{e^{2\sqrt{3}}}{2} \left(9 - 6\sqrt{3} - 9 + 3\sqrt{3} + \frac{15}{2} \right) = \frac{e^{2\sqrt{3}}}{2} \left(\frac{15}{2} - 3\sqrt{3} \right)$$

$$F_2(-\sqrt{3}) = \frac{e^{-2\sqrt{3}}}{2} \left(9 + 6\sqrt{3} - 9 - 3\sqrt{3} + \frac{15}{2} \right) = \frac{e^{-2\sqrt{3}}}{2} \left(\frac{15}{2} + 3\sqrt{3} \right).$$

$$\text{Donc : } V = \frac{\pi}{2} \left[e^{2\sqrt{3}} \left(\frac{15}{2} - 3\sqrt{3} \right) - e^{-2\sqrt{3}} \left(\frac{15}{2} + 3\sqrt{3} \right) \right] \quad (\text{unités}).$$

L'unité de volume étant 8 cm^3 ,

$$V = 4\pi \left[\frac{15}{2} (e^{2\sqrt{3}} - e^{-2\sqrt{3}}) - 3\sqrt{3} (e^{2\sqrt{3}} + e^{-2\sqrt{3}}) \right].$$

$$\text{Or : } e^{2\sqrt{3}} \approx 31,948; \quad e^{-2\sqrt{3}} \approx 0,031$$

$$V \approx 4\pi [7,5 \times (31,948 - 0,031) - 3 \times 1,732(31,948 + 0,031)] \approx 920 \text{ cm}^3.$$

14. Étude de la fonction $f: x \mapsto (e^x + 1)(e^x - 3)$

Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = (e^x + 1)(e^x - 3)$.

1. Étudier cette fonction et tracer sa courbe représentative C dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé. (Unité de longueur : 2 cm.)

2. Soit A le point de C dont l'abscisse annule $f''(x)$.

a) Quelle est l'équation de la tangente D à C en A ? Soit d la fonction représentée graphiquement par D .

b) Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = f(x) - d(x).$$

$$\text{Montrer que } g(x) = e^{2x} - 2e^x + \frac{x}{2} + \frac{\text{Log } 2}{2} + \frac{3}{4}.$$

c) Étudier les variations de la fonction g .

d) En déduire la position de C par rapport à la droite D .

3. a) Soit B le point d'intersection de la courbe C et de la droite Δ d'équation $y = -3$.

Problèmes

Soit S la surface limitée par la courbe C , la droite Δ , l'axe $y'Oy$ et la parallèle à cet axe passant par B .

Quelle est l'aire $\mathcal{A}$ de S exprimée en cm^2 ?

b) Pour $\lambda < 0$, calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la surface limitée par la courbe C , la droite Δ , l'axe $y'Oy$ et la droite d'équation $x = \lambda$.

c) Quelle est la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ quand λ tend vers $-\infty$?

4. a) Déterminer l'image I_1 de l'intervalle $[0, +\infty[$ par f et l'image I_2 de l'intervalle $]-\infty, 0]$ par f .

b) Soit f_1 la fonction définie de $[0, +\infty[$ dans I_1 par $f_1(x) = f(x)$.

Soit f_2 la fonction définie de $]-\infty, 0]$ dans I_2 par $f_2(x) = f(x)$.

La fonction f admet-elle une application réciproque? Pourquoi?

Mêmes questions pour les fonctions f_1 et f_2 .

c) Soit g_1 la fonction définie par :

$$g_1(x) = \text{Log}(1 + \sqrt{x+4}).$$

Quel est l'ensemble de définition de g_1 ? Montrer que g_1 est la réciproque de f_1 .

1. Étude de la fonction $f : x \mapsto (e^x + 1)(e^x - 3)$

La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Quand x tend vers $-\infty$, $(e^x + 1)$ tend vers 1, $(e^x - 3)$ tend vers -3 , donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3.$$

La droite d'équation $y = -3$ est asymptote à C .

Quand x tend vers $+\infty$, $(e^x + 1)$ et $(e^x - 3)$ tendent vers $+\infty$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

La fonction f , produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = e^x(e^x - 3) + (e^x + 1)e^x \quad \text{soit} \quad f'(x) = 2e^x(e^x - 1).$$

$f'(x) = 0$ pour $x = 0$; $f'(x)$ est du signe de $e^x - 1$. On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	-3	-4	$+\infty$

La courbe C coupe Ox au point dont l'abscisse vérifie $e^x - 3 = 0$, soit le point :

$$E(\text{Log } 3; 0).$$

On en déduit le tracé de la courbe C (fig. 16).

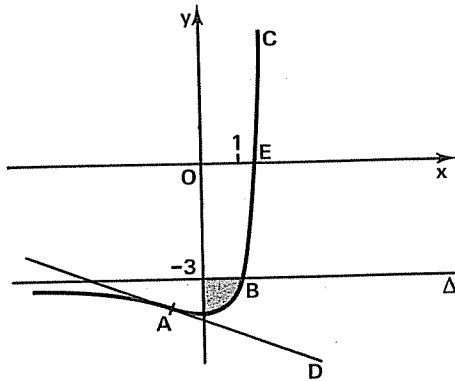


Fig. 16

2. Position de la courbe C par rapport à la droite D.

a) Calcul de $f''(x)$:

$$f''(x) = 2e^x(e^x - 1) + 2e^x \cdot e^x \quad \text{soit} \quad f''(x) = 2e^x(2e^x - 1).$$

$f''(x) = 0$ si et seulement si :

$$2e^x - 1 = 0 \quad \text{soit} \quad e^x = \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad x = -\text{Log } 2.$$

$$f(-\text{Log } 2) = \left(\frac{1}{2} + 1\right)\left(\frac{1}{2} - 3\right) = -\frac{15}{4}.$$

Les coordonnées de A sont $\left(x = -\text{Log } 2; y = -\frac{15}{4}\right)$.

Le coefficient directeur de la tangente à C au point A est :

$$m = f'(-\text{Log } 2) = 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \quad \text{soit} \quad m = -\frac{1}{2}.$$

Une équation de la tangente à C au point A est :

$$y - \left(-\frac{15}{4}\right) = -\frac{1}{2}(x + \text{Log } 2) \quad \text{soit} \quad \boxed{y = -\frac{x}{2} - \frac{15}{4} - \frac{1}{2} \text{Log } 2.}$$

On a donc :

$$d(x) = -\frac{x}{2} - \frac{15}{4} - \frac{\text{Log } 2}{2}.$$

b) $g(x) = f(x) - d(x)$ soit :

$$g(x) = (e^x + 1)(e^x - 3) - \left(-\frac{x}{2} - \frac{15}{4} - \frac{\text{Log } 2}{2}\right).$$

Problèmes

Donc :

$$g(x) = e^{2x} - 2e^x + \frac{x}{2} + \frac{\text{Log } 2}{2} + \frac{3}{4}.$$

c) La fonction g est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$g'(x) = 2e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(4e^{2x} - 4e^x + 1)$$

soit :

$$g'(x) = \frac{1}{2}(2e^x - 1)^2$$

$g'(x)$ est donc positif sur $\mathbb{R}$. On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	$-\text{Log } 2$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	+
$g(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

$$g(-\text{Log } 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{\text{Log } 2}{2} + \frac{\text{Log } 2}{2} + \frac{3}{4} = 0.$$

La fonction g étant continue, on en déduit que :

- pour $x < -\text{Log } 2$, $g(x) < 0$, la courbe C est au-dessous de D ;
- pour $x > -\text{Log } 2$, $g(x) > 0$, la courbe C est au-dessus de D .

3. Étude de l'aire du domaine plan.

a) La droite Δ d'équation $y = -3$ coupe C au point B dont l'abscisse est solution de l'équation :

$$(e^x + 1)(e^x - 3) = -3 \quad \text{soit} \quad e^x(e^x - 2) = 0.$$

Donc :

$$B(x = \text{Log } 2; y = -3).$$

L'aire demandée est :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^{\text{Log } 2} [-3 - (e^x + 1)(e^x - 3)] dx = \int_0^{\text{Log } 2} (2e^x - e^{2x}) dx \\ \mathcal{A} &= \left[2e^x - \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^{\text{Log } 2} = \left(2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \right) - \left(2 - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Soit : $\mathcal{A} = 0,5$ (unités).

L'unité de surface étant 4 cm^2 , $\mathcal{A} = 2 \text{ cm}^2$.

b) L'aire demandée est :

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^0 (2e^x - e^{2x}) dx = \left[2e^x - \frac{1}{2} e^{2x} \right]_{\lambda}^0 = \frac{3}{2} - 2e^{\lambda} + \frac{e^{2\lambda}}{2} \text{ (unités)}$$

soit en cm^2 :

$$\mathcal{A}(\lambda) = 6 - 8e^\lambda + 2e^{2\lambda} \text{ cm}^2.$$

Quand λ tend vers $-\infty$, e^λ et $e^{2\lambda}$ tendent vers 0, donc :

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 6.$$

4. Fonction réciproque.

a) La fonction f étant continue, l'image I_1 par f de l'intervalle $[0, +\infty[$ est l'intervalle $[-4, +\infty[$ et l'image I_2 par f de l'intervalle $]-\infty, 0]$ est l'intervalle $[-4, 3]$.

b) La fonction f n'étant pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$ n'admet pas d'application réciproque.

La fonction f_1 étant continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ admet une fonction réciproque définie sur $[-4, +\infty[$.

La fonction f_2 étant continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ admet une fonction réciproque définie sur $[-4; -3]$.

c) La fonction g_1 telle que $g_1(x) = \text{Log}(1 + \sqrt{x+4})$ est définie sur l'intervalle $[-4, +\infty[$.

La relation $y = \text{Log}(1 + \sqrt{x+4})$ s'écrit $1 + \sqrt{x+4} = e^y$

soit $\sqrt{x+4} = e^y - 1$ donc $x = (e^y - 1)^2 - 4$

d'où $x = (e^y - 3)(e^y + 1)$

g_1 est donc la fonction réciproque de $x \mapsto (e^x - 3)(e^x + 1)$ définie sur $[0, +\infty[$
donc g_1 est l'application réciproque de f_1 .

15 Étude de la fonction : $x \mapsto (x+2) + (x+2)e^{-x}$

A) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = 1 - (x+1)e^{-x}.$$

1. Étudier les variations de f .

2. En déduire, selon les valeurs de x , le signe de $f(x)$.

B) Soit la fonction numérique g de la variable réelle x définie par

$$g(x) = (x+2) + (x+2)e^{-x}.$$

1. Étudier les variations de g (on montrera que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = f(x)$).

2. Soit C la courbe représentative de g dans le plan rapporté au repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$. (Unité : 2 cm.)

Problèmes

- a) Montrer que la droite D d'équation $y = x + 2$ est asymptote à C. Étudier la position de C par rapport à son asymptote.
- b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de C avec $x'x$ et l'équation de la tangente à C en A.
- c) Montrer que C admet une tangente parallèle à D en un point B dont on déterminera les coordonnées.
- d) Tracer la courbe C après avoir construit les tangentes en A et B.

3. On considère les droites D_m passant par A de coefficient directeur m . Discuter, par le calcul, le nombre de points d'intersection de C et de D_m . Retrouver, par le calcul, la valeur de m pour laquelle D_m est tangente à C.

4. a) Soit H la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$H(x) = (ax + b)e^{-x} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Déterminer a et b pour que H soit une primitive de la fonction h définie par

$$h(x) = (x + 2)e^{-x}.$$

- b) Calculer, en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan formé par l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y) vérifient

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ x + 2 \leq y \leq g(x). \end{cases}$$

A

1. Étude des variations de la fonction $f : x \mapsto 1 - (x + 1)e^{-x}$.

La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction f , somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = -e^{-x} + (x + 1)e^{-x} = xe^{-x}.$$

$f'(x)$ est du signe de x ; d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Remarquons que $f(0) = 0$.

2. *Signe de $f(x)$.*

La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$ et admettant un minimum égal à zéro, on en déduit que, sur $\mathbb{R}^*$, $f(x)$ est strictement positif.

B

1. Étude des variations de la fonction $g : x \mapsto (x+2) + (x+2)e^{-x}$.

La fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Quand x tend vers $-\infty$, xe^{-x} tend vers $-\infty$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty.$$

Quand x tend vers $+\infty$, xe^{-x} tend vers 0 (on l'admet) donc $(2+x)e^{-x}$ tend vers 0, d'où :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) = +\infty.$$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$g'(x) = 1 + e^{-x} + (x+2)e^{-x}(-1) = 1 - (x+1)e^{-x}.$$

Donc :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g'(x) = f(x).$$

On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	+
$g(x)$	$-\infty$	4	$+\infty$

2. Étude de la courbe C.

a) On obtient :

$$g(x) - (x+2) = (x+2)e^{-x}.$$

Comme e^{-x} et xe^{-x} tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (x+2)] = 0.$$

La courbe C admet donc une asymptote D d'équation $y = x+2$.

La position de C par rapport à Δ est donnée par le signe de $(x+2)e^{-x}$. Donc :

Si $x > -2$	alors $g(x) > x+2$	donc C est au-dessus de D.
Si $x < -2$	alors $g(x) < x+2$	donc C est au-dessous de D.

b) L'intersection de C avec $x'x$ est le point A dont l'abscisse vérifie :

$$(x+2)(1+e^{-x}) = 0 \quad \text{soit} \quad x = -2.$$

Problèmes

C'est donc le point $A(-2, 0)$.

Le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe C est

$$m = g'(-2) = 1 + e^2.$$

Une équation de la tangente à C au point A est :

$$y = (1 + e^2)(x + 2).$$

c) Pour que la tangente à C soit parallèle à D, il faut et il suffit que $g'(x) = 1$, ce qui équivaut à :

$$1 - (x + 1)e^{-x} = 1 \quad \text{soit} \quad x = -1.$$

Il y a donc un point et un seul par lequel on peut mener à C une tangente parallèle à D; c'est le point **B de coordonnées $(-1; 1 + e)$** .

On en déduit le tracé de C (fig. 17).

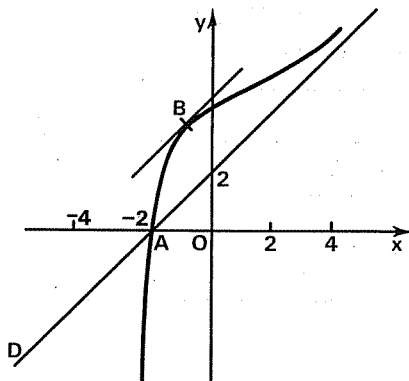


Fig. 17

3. Intersection de C et des droites D_m .

Les droites D_m admettent pour équation : $y = m(x + 2)$.

Les coordonnées des points d'intersection de C et D_m vérifient le système :

$$\begin{cases} y = m(x + 2) \\ y = (x + 2) + (x + 2)e^{-x}. \end{cases}$$

Les abscisses des points d'intersection vérifient donc l'équation :

$$(x + 2) + (x + 2)e^{-x} = m(x + 2)$$

soit :

$$(x + 2)(1 - m + e^{-x}) = 0.$$

On trouve le point A de coordonnées $(x = -2, y = 0)$.

Étudions l'équation :

$$e^{-x} = m - 1.$$

Si $m \leq 1$, cette équation n'a pas de solution;

Si $m > 1$, une solution $x_0 = -\text{Log}(m - 1)$.

En résumé :

Si $m \leq 1$, A est le seul point d'intersection de C et D_m .
 Si $m > 1$, deux points d'intersection A et le point $(x_0, g(x_0))$.

D_m est tangente à C si $x_0 = -2$ soit $-2 = -\text{Log}(m - 1)$ d'où $m - 1 = e^2$. On en déduit $m = 1 + e^2$.

4. Calcul de l'aire du domaine plan.

a) La fonction H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$, si et seulement si,

$$H'(x) = (x + 2)e^{-x}.$$

soit : $e^{-x}(-ax - b + a) = (x + 2)e^{-x}.$

On obtient donc, pour tout x réel :

$$-ax - b + a = x + 2$$

donc : $a = -1$ et $-b + a = 2$

soit : $(a = -1; b = -3)$

d'où : $H(x) = -(x + 3)e^{-x}.$

b) L'aire $\mathcal{A}$ du domaine est :

$$\mathcal{A} = \int_{-2}^0 [g(x) - (x + 2)]dx = \int_{-2}^0 (x + 2)e^{-x} dx$$

$$\mathcal{A} = H(0) - H(-2) = -3 - (-e^2) = e^2 - 3 \text{ (unité).}$$

L'unité de surface étant 4 cm^2 ,

$$\mathcal{A} = 4(e^2 - 3) \text{ cm}^2 \approx 17,56 \text{ cm}^2.$$

16 Fonction $f : x \mapsto \text{Log} \frac{3x + 3}{x + 3}.$

I) On considère la fonction numérique g définie par

$$g(t) = \frac{2}{t^2 + 4t + 3}.$$

Problèmes

1. Préciser l'ensemble de définition de la fonction g et montrer que :

$$\frac{2}{t^2 + 4t + 3} = \frac{a}{t + 3} + \frac{b}{t + 1}$$

a et b étant deux constantes réelles que l'on déterminera.

2. x étant un nombre réel, strictement supérieur à -1 , calculer :

$$I(x) = \int_0^x \frac{2dt}{t^2 + 4t + 3}.$$

II) Soit la fonction numérique f définie par

$$f(x) = \text{Log} \frac{3x + 3}{x + 3}.$$

1. Étudier f .

2. On appelle C la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité : 1 cm.)

a) Déterminer une équation de la tangente à la courbe C au point O . Construire cette tangente.

b) Vérifier que la courbe C admet le point $P(-2, \text{Log } 3)$ comme centre de symétrie.

c) Tracer la courbe C .

III) 1. Montrer que la fonction F définie par

$$F(x) = (x + 1) \text{Log}(3x + 3) - (x + 3) \text{Log}(x + 3)$$

est primitive de f pour $x > -1$.

2. Calculer en cm^2 l'aire A de la portion de plan, ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq f(x). \end{cases}$$

IV) 1. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque que l'on notera f^{-1} et donner l'expression de $f^{-1}(x)$.

2. On appelle Γ la courbe représentative de f^{-1} rapportée au repère précédent $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Quelle est la position relative des courbes C et Γ ? Quelles sont les asymptotes de Γ ? Quel est son centre de symétrie?

b) Construire la courbe Γ (il est souhaitable que les tracés de C et de Γ soient de couleurs différentes).

I

Étude de la fonction $g : t \mapsto \frac{2}{t^2 + 4t + 3}$.

1. Le trinôme $(t^2 + 4t + 3)$ admettant pour racines -1 et -3 , l'ensemble de définition de la fonction rationnelle g est :

$$\mathcal{D}_g =]-\infty, -3[\cup]-3, -1[\cup]-1, +\infty[.$$

Les réels a et b sont tels que, pour tout $x \in \mathcal{D}_g$,

$$a(t+1) + b(t+3) = 2 \quad \text{soit} \quad (a+b)t + a + 3b = 2.$$

a et b vérifient le système :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a + 3b = 2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad (a = -1, b = 1).$$

Donc sur $\mathcal{D}_g$:

$$g(t) = \frac{-1}{t+3} + \frac{1}{t+1}.$$

2. x étant strictement supérieur à -1 , la fonction g est continue sur le segment d'extrémités 0 et x , donc intégrable sur ce segment :

$$I(x) = \int_0^x \left(-\frac{1}{t+3} + \frac{1}{t+1} \right) dt = \int_0^x -\frac{dt}{t+3} + \int_0^x \frac{dt}{t+1}$$

$$I(x) = [-\text{Log}(t+3)]_0^x + [\text{Log}(t+1)]_0^x = -\text{Log}(x+3) + \text{Log } 3 + \text{Log}(x+1)$$

soit :

$$I(x) = \text{Log} \frac{3(x+1)}{x+3}.$$

II

Étude de la fonction $f : x \mapsto \text{Log} \frac{3x+3}{x+3}$.

1. Variations de la fonction f .

La fonction f est définie pour les valeurs de x telles que

$$\frac{3x+3}{x+3} > 0 \quad \text{soit} \quad \frac{x+1}{x+3} > 0.$$

L'ensemble de définition de f est donc :

$$\mathcal{D}_f =]-\infty, -3[\cup]-1, +\infty[.$$

Problèmes

Quand x tend vers $+\infty$, ou $-\infty$, $\frac{3x+3}{x+3}$ tend vers 3, donc

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \text{Log } 3$$

Quand x tend vers -3 , $\frac{3x+3}{x+3}$ tend vers $+\infty$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} f(x) = +\infty$.

Quand x tend vers -1 , $\frac{3(x+1)}{x+3}$ tend vers 0, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$.

La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et :

$$f'(x) = \frac{3(x+3) - (3x+3)}{(x+3)^2} \cdot \frac{x+3}{3x+3} = \frac{2}{(x+3)(x+1)}.$$

On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+	
$f(x)$	Log 3 ↗ $+\infty$		$-\infty$ ↗ Log 3	

2. Tangente au point O.

Au point de coordonnées $(0, 0)$, c'est-à-dire à l'origine, le coefficient angulaire de la tangente à C est

$$m = f'(0) = \frac{2}{3}.$$

Une équation de la tangente à C au point O est donc

$$y = \frac{2}{3}x.$$

3. Centre de symétrie de la courbe C.

Considérons le repère $(P, \vec{i}, \vec{j})$ dont les coordonnées de P sont $(-2, \text{Log } 3)$. Si (X, Y) sont les coordonnées d'un point M de ce repère alors :

$$\begin{cases} x = -2 + X \\ y = \text{Log } 3 + Y. \end{cases}$$

Une équation de C dans ce repère est :

$$Y + \text{Log } 3 = \text{Log } \frac{3(-2+X)+3}{(-2+X)+3} \quad \text{soit} \quad Y + \text{Log } 3 = \text{Log } 3 \left(\frac{X-1}{X+1} \right)$$

donc
$$Y = \text{Log } \frac{X-1}{X+1}.$$

Si h est la fonction : $X \mapsto \text{Log } \frac{X-1}{X+1}$. $\mathcal{D}_h =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. Pour

tout X de $\mathcal{D}_h$, $h(-X) = \text{Log } \frac{-X-1}{-X+1} = \text{Log } \frac{X+1}{X-1} = -h(X)$.

Donc la fonction h est impaire, ce qui entraîne que le point P est **centre de symétrie** de C.

On en déduit le tracé de la courbe C. Elle admet pour asymptotes les droites d'équations $y = \text{Log } 3$, $x = -3$ et $x = -1$.

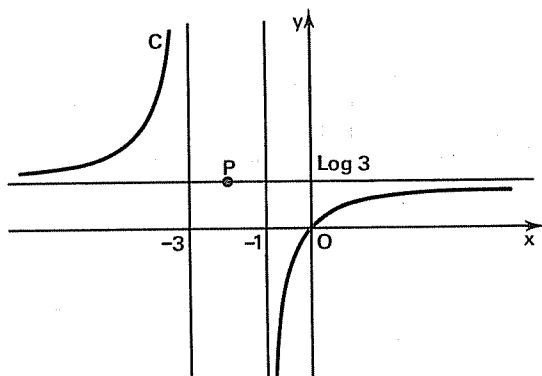


Fig. 18

III

Étude de la fonction $F : x \mapsto (x+1) \text{Log } (3x+3) - (x+3) \text{Log } (x+3)$.

Elle est définie, continue et dérivable sur les intervalles tels que $3x+3 > 0$ et $x+3 > 0$, donc pour $x > -1$.

$$F'(x) = \text{Log } (3x+3) + \frac{3(x+1)}{3x+3} - \left(\text{Log } (x+3) + (x+3) \cdot \frac{1}{x+3} \right)$$

$$F'(x) = \text{Log } \frac{3x+3}{x+3}.$$

Problèmes

La fonction F est donc une primitive de f sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.
L'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan est :

$$\mathcal{A} = \int_0^3 f(x) dx = F(3) - F(0)$$

$$F(3) = 4 \operatorname{Log} 12 - 6 \operatorname{Log} 6 = 4(2 \operatorname{Log} 2 + \operatorname{Log} 3) - 6(\operatorname{Log} 2 + \operatorname{Log} 3)$$

$$\text{Donc } F(3) = 2 \operatorname{Log} 2 - 2 \operatorname{Log} 3$$

$$F(0) = \operatorname{Log} 3 - 3 \operatorname{Log} 3 = -2 \operatorname{Log} 3.$$

Donc

$$\mathcal{A} = 2 \operatorname{Log} 2 \approx 1,386 \text{ cm}^2.$$

IV

La fonction f étant continue et strictement croissante sur les intervalles $]-\infty, -3[$ et $]-1, +\infty[$, l'image par f de l'intervalle $I_1 =]-\infty, -3[$ est $]\operatorname{Log} 3, +\infty[$ et l'image par f de l'intervalle $I_2 =]-1, +\infty[$ est $]-\infty, \operatorname{Log} 3[$.

La restriction de f sur chacun des intervalles, I_1 et I_2 admet donc une application réciproque définie sur $]\operatorname{Log} 3, +\infty[$ et $]-\infty, \operatorname{Log} 3[$.

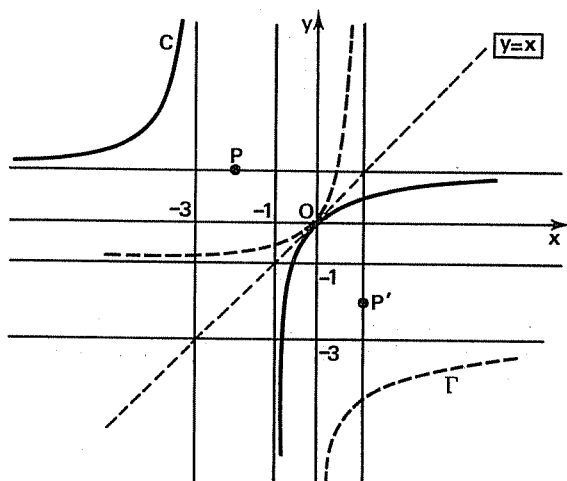


Fig. 19

Remarquons que la relation :

$$y = \text{Log} \frac{3x+3}{x+3} \quad \text{entraîne} \quad \frac{3x+3}{x+3} = e^y$$

$$\text{soit : } x(3 - e^y) = 3e^y - 3 \quad \text{donc} \quad x = \frac{3e^y - 3}{3 - e^y}.$$

On peut donc écrire :

$$f^{-1}(x) = \frac{3e^x - 3}{3 - e^x}$$

f^{-1} étant défini sur $] -\infty, \text{Log } 3[\cup] \text{Log } 3, +\infty[$.

La courbe représentative Γ se déduit de C en effectuant une symétrie par rapport à la première bissectrice (fig. 19).

On en déduit que les asymptotes de Γ ont pour équations :

$$x = \text{Log } 3, \quad y = -1 \quad \text{et} \quad y = -3.$$

Son centre de symétrie est le point $P'(x = \text{Log } 3, y = -2)$.



Formulaire de trigonométrie

$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$	$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$
$\operatorname{cotg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a} = \frac{\cos a}{\sin a}$	$1 + \operatorname{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$

angles (rd)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
angles (d°)	0	30	45	60	90	120	135	150	180
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cotg		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	

$\sin(-a) = -\sin a$ $\cos(-a) = \cos a$ $\operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tg} a$ $\operatorname{cotg}(-a) = -\operatorname{cotg} a$	$\sin(\pi - a) = \sin a$ $\cos(\pi - a) = -\cos a$ $\operatorname{tg}(\pi - a) = -\operatorname{tg} a$ $\operatorname{cotg}(\pi - a) = -\operatorname{cotg} a$	$\sin(\pi + a) = -\sin a$ $\cos(\pi + a) = -\cos a$ $\operatorname{tg}(\pi + a) = \operatorname{tg} a$ $\operatorname{cotg}(\pi + a) = \operatorname{cotg} a$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \operatorname{cotg} a$ $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \operatorname{tg} a$	

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$	$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ $\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$
--	--

$2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$ $2 \cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$ $2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$ $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$	$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$ $\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$ $\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$
---	---

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$ $\sin 2a = 2 \sin a \cos a \quad \operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$ $\cos a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \sin a = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \operatorname{tg} a = \frac{2t}{1 - t^2} \quad \left(t = \operatorname{tg} \frac{a}{2}\right)$ $\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a \quad \sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$
--

Formulaire de trigonométrie

$$A \cos \omega x + B \sin \omega x = \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \omega x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \omega x \right)$$

En posant : $\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ et $\sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$$A \cos \omega x + B \sin \omega x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos (\omega x - \alpha).$$

Équations fondamentales

$$\cos x = a$$

Si $a \in [-1, 1]$ il existe α réel tel que $\cos \alpha = a$
 $x = \alpha + k2\pi$ ou $x = -\alpha + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$$\sin x = a$$

Si $a \in [-1, 1]$ il existe α réel tel que $\sin \alpha = a$
 $x = \alpha + k2\pi$ ou $x = \pi - \alpha + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$$\operatorname{tg} x = a$$

Il existe α réel tel que $\operatorname{tg} \alpha = a$
 $x = \alpha + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).



table des matières

Avant-propos	p. 3
Résumés de cours	p. 5
Exercices	p. 61
Problèmes de synthèse.....	p. 127
Formulaire de trigonométrie	p. 188

ENTRAINEMENT A L'EXAMEN

Afin de permettre une préparation méthodique et efficace à l'examen, cet ouvrage propose un ensemble de documents concrets :

- un résumé du cours illustré par de nombreux exemples
- des exercices d'application et leurs corrigés
- des problèmes de synthèse proches de ceux que l'on rencontre le plus souvent au baccalauréat
- un formulaire de trigonométrie