

NOMBRES COMPLEXES

FICHE 1 — DÉFINITION, FORME ALGÈBRIQUE $a+bi$, OPÉRATIONS

I. DÉFINITION

On appelle nombre complexe tout nombre de la forme :

$$z = a + bi$$

où a et b sont des réels, et i est un nombre tel que $i^2 = -1$.

a est appelé partie réelle de z , notée $\text{Re}(z)$.

b est appelé partie imaginaire de z , notée $\text{Im}(z)$.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

On a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (un réel est un complexe de partie imaginaire nulle).

Si $a=0$, $z=bi$ est dit imaginaire pur.

III. ÉGALITÉ DE DEUX COMPLEXES

$$a+bi = c+di \iff a=c \text{ et } b=d$$

III. SOMME

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

IV. PRODUIT

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

(on développe normalement puis on remplace i^2 par -1)

V. QUOTIENT

Pour diviser, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur. (voir fiche 2).

VI. EXEMPLE

Soit $z_1 = 3+2i$ et $z_2 = 1-i$.

Somme :

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (3+1) + (2-1)i \\ &= 4 + i \end{aligned}$$

Produit :

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= (3+2i)(1-i) \\ &= 3 - 3i + 2i - 2i^2 \\ &= 3 - i + 2 \\ &= 5 - i \end{aligned}$$

Quotient :

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3+2i}{1-i} \\ &= \frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{3+3i+2i+2i^2}{1-i^2} \\ &= \frac{3+5i-2}{1+1} \\ &= \frac{1+5i}{2} \\ &= 0,5 + 2,5i \end{aligned}$$

RÉSULTATS

$$z_1 + z_2 = 4 + i$$

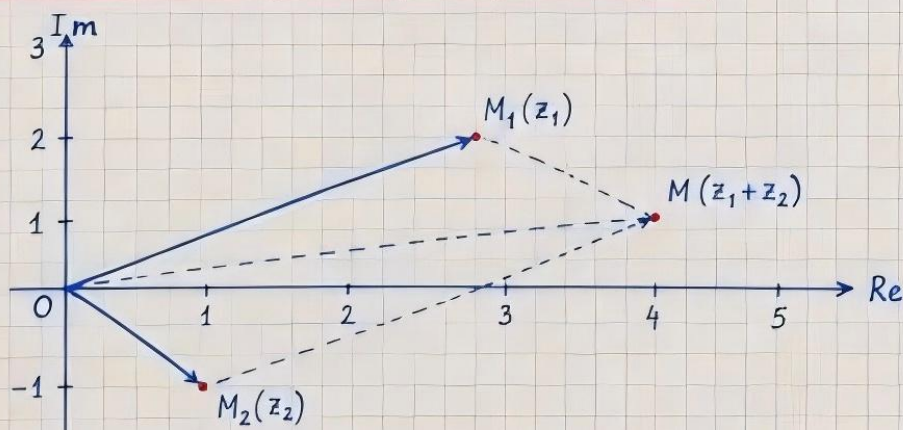
$$z_1 \times z_2 = 5 - i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 0,5 + 2,5i$$

À RETENIR

Un nombre complexe se manipule comme une expression algébrique classique, en utilisant simplement $i^2 = -1$ à chaque simplification.

Représentation sur le plan complexe (somme $z_1 + z_2$)



NOMBRES COMPLEXES

FICHE 2 — CONJUGUÉ ET MODULE : DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

I. CONJUGUÉ

Le conjugué de $z = a + bi$ est le nombre complexe :

$$\bar{z} = a - bi$$

Propriétés :

- $z + \bar{z} = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2bi$
- $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$ (toujours réel positif)
- $\overline{\bar{z}} = z$
- $(z_1 + z_2)^- = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $(z_1 \times z_2)^- = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$

II. MODULE

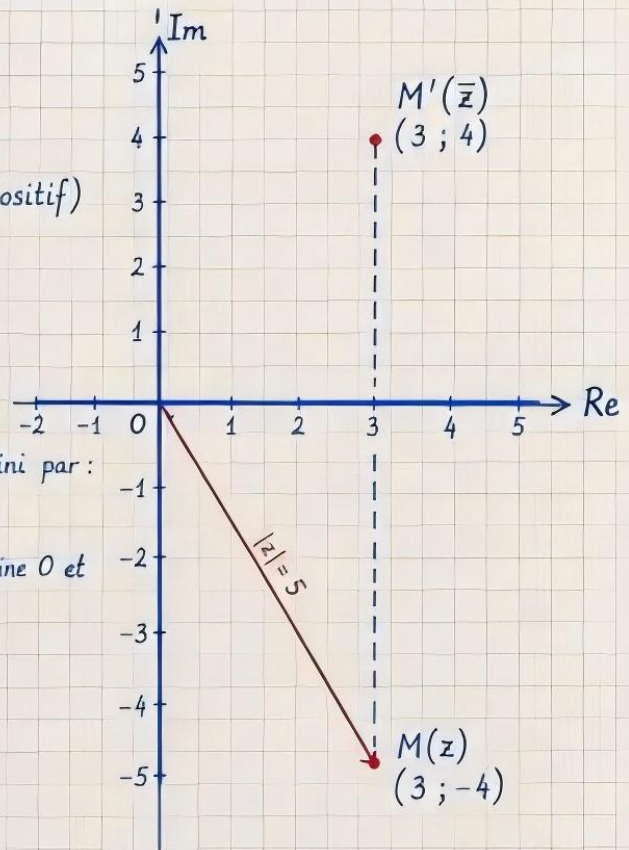
Le module de $z = a + bi$, noté $|z|$, est défini par :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Le module représente la distance entre l'origine O et le point z dans le plan complexe.

Propriétés :

- $|z|^2 = z \times \bar{z}$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$
- $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ($z_2 \neq 0$)



III. UTILISATION POUR DIVISER

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \times \bar{z}_2}{z_2 \times \bar{z}_2} = \frac{z_1 \times \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

IV. EXEMPLE

Soit $z = 3 - 4i$.

Conjugué : $\bar{z} = 3 + 4i$

$$\begin{aligned} \text{Vérification : } z \times \bar{z} &= (3 - 4i)(3 + 4i) = 9 - 16i^2 \\ &= 9 + 16 = 25 \end{aligned}$$

Module :

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{Vérification : } |z|^2 = 25 = z \times \bar{z} \quad \checkmark$$

RÉSULTATS

$$\bar{z} = 3 + 4i$$

$$|z| = 5$$

À RETENIR

La relation $|z|^2 = z \times \bar{z}$ est la plus utile de toutes : elle permet de calculer un module rapidement, ou de diviser par un complexe en multipliant par son conjugué.

NOMBRES COMPLEXES

FICHE 3 — AFFIXE D'UN POINT ET D'UN VECTEUR — INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

I. AFFIXE D'UN POINT

À tout point $M(x;y)$ du plan, on associe le nombre complexe $z = x + iy$, appelé affixe de M .

Réciproquement, à tout complexe $z = x + iy$ correspond un unique point $M(x;y)$, appelé image de z .

II. AFFIXE D'UN VECTEUR

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, où A a pour affixe z_A et B pour affixe z_B , est :

$$z(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A$$

III. DISTANCE

La distance AB est donnée par :

$$AB = |z_B - z_A|$$

IV. MILIEU D'UN SEGMENT

L'affixe du milieu I du segment $[AB]$ est :

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

V. INTERPRÉTATION DES OPÉRATIONS

- L'addition $z + z_0$ correspond à une translation de vecteur d'affixe z_0 .
- La somme des affixes de deux vecteurs correspond à l'affixe du vecteur somme.

VI. EXEMPLE

Soit $A(1;2)$ et $B(4;6)$, d'affixes $z_A = 1 + 2i$ et $z_B = 4 + 6i$.

Affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

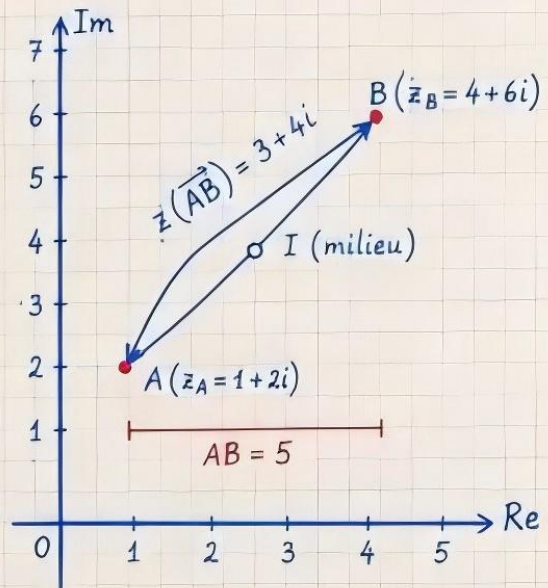
$$z(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A = (4 + 6i) - (1 + 2i) = 3 + 4i$$

Distance AB :

$$AB = |z(\overrightarrow{AB})| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Affixe du milieu I :

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{5 + 8i}{2} = 2,5 + 4i$$



RÉSULTATS

$$z(\overrightarrow{AB}) = 3 + 4i$$

$$AB = 5$$

$$z_I = 2,5 + 4i \text{ (soit } I(2,5; 4))$$

À RETENIR

Toute propriété géométrique (distance, milieu, alignement) se traduit directement en calcul sur les affixes : les nombres complexes sont un outil puissant de géométrie plane.

NOMBRES COMPLEXES

FICHE 4 — LIEUX GÉOMÉTRIQUES : CERCLES, MÉDIATRICES, DROITES

I. PRINCIPE

Un lieu géométrique est l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie une condition donnée. On traduit cette condition en langage géométrique connu (cercle, droite, demi-droite).

II. CERCLE

$$|z - a| = r \quad (r > 0)$$

représente l'ensemble des points M situés à distance r du point A d'affixe a : c'est le cercle de centre A et de rayon r .

III. MÉDIATRICE

$$|z - a| = |z - b|$$

représente l'ensemble des points M équidistants de $A(a)$ et $B(b)$: c'est la médiatrice du segment $[AB]$.

IV. DEMI-DROITE (argument constant)

$$\arg(z - a) = \theta \quad (\theta \text{ fixé, modulo } 2\pi)$$

représente la demi-droite d'origine A , faisant un angle θ avec l'axe des réels (notion développée en fiche 10).

V. EXEMPLE 1 — CERCLE

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 2 - i| = 3$.

On identifie $a = 2 + i$, $r = 3$.

C'est le cercle de centre $A(2;1)$ et de rayon 3.

VI. EXEMPLE 2 — MÉDIATRICE

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 1| = |z - 3i|$.

On identifie $A(1;0)$ et $B(0;3)$.

C'est la médiatrice du segment $[AB]$.

RÉSULTATS

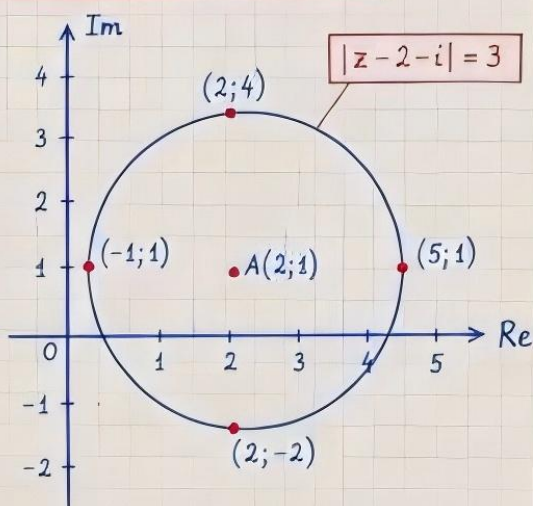
Exemple 1 : cercle de centre $A(2;1)$, rayon 3

Exemple 2 : médiatrice de $[AB]$, avec $A(1;0)$ et $B(0;3)$

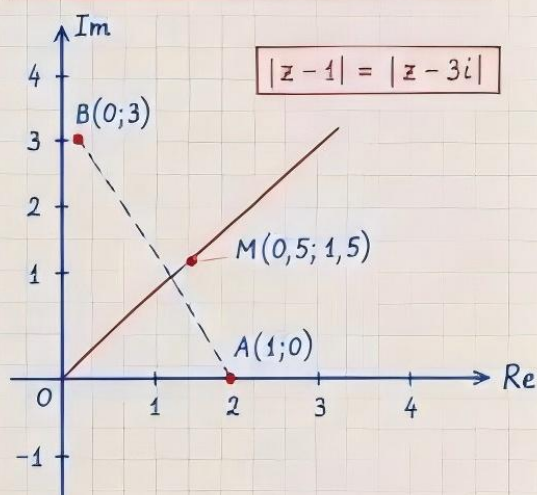
À RETENIR

Toujours identifier la forme $|z - a|$ en repérant le point fixe A d'affixe a : c'est la clé pour reconnaître un cercle ou une médiatrice.

1. Cercle : $|z - 2 - i| = 3$



2. Médiatrice : $|z - 1| = |z - 3i|$



NOMBRES COMPLEXES

FICHE 5 — FORME ALGÈBRIQUE : EXERCICES CORRIGÉS (1-2)

EXERCICE 1

Soit $z_1 = 2+3i$ et $z_2 = 1-4i$.

Calculer, sous forme algébrique : $z_1 + z_2$, $z_1 \times z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$.

CORRECTION

Somme : $z_1 + z_2 = (2+1) + (3-4)i = 3 - i$

Produit :
$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= (2+3i)(1-4i) \\ &= 2 - 8i + 3i - 12i^2 \\ &= 2 - 5i + 12 \\ &= 14 - 5i \end{aligned}$$

Quotient :
$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2+3i}{1-4i} = \frac{(2+3i)(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)} \\ &= \frac{2+8i+3i+12i^2}{1-16i^2} \\ &= \frac{2+11i-12}{1+16} \\ &= \frac{-10+11i}{17} = -\frac{10}{17} + \frac{11}{17}i \end{aligned}$$

EXERCICE 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(2+i)z = 3-i$, et donner z sous forme algébrique.

CORRECTION

$$z = \frac{3-i}{2+i}$$

On multiplie par le conjugué du dénominateur :

$$\begin{aligned} z &= \frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{6-3i-2i+i^2}{4-i^2} \\ &= \frac{6-5i-1}{4+1} = \frac{5-5i}{5} = 1-i \end{aligned}$$

RÉSULTATS

Exercice 1 : $z_1 + z_2 = 3 - i$; $z_1 \times z_2 = 14 - 5i$;

$$\frac{z_1}{z_2} = -\frac{10}{17} + \frac{11}{17}i$$

Exercice 2 : $z = 1-i$

À RETENIR

Pour résoudre une équation du type $az = b$, il suffit de diviser b par a en multipliant par le conjugué de a .

NOMBRES COMPLEXES

FICHE 6 — CONJUGUÉ ET MODULE : EXERCICES CORRIGÉS (3-4)

EXERCICE 3

Soit $z = 5 - 12i$.

1. Calculer $\bar{z}$.
2. Calculer $|z|$.
3. Vérifier que $z \times \bar{z} = |z|^2$.

CORRECTION

1. $\bar{z} = 5 + 12i$
2. $|z| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$
3. $z \times \bar{z} = (5 - 12i)(5 + 12i) = 25 - 144i^2 = 25 + 144 = 169$
 $|z|^2 = 13^2 = 169$
On a bien $z \times \bar{z} = |z|^2 = 169 \quad \checkmark$

EXERCICE 4

Soit $z_1 = 3 + 4i$ et $z_2 = 1 - i$.

1. Calculer $|z_1|$ et $|z_2|$.
2. Calculer $z_1 \times z_2$, puis $|z_1 \times z_2|$.
3. Vérifier que $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$.

CORRECTION

1. $|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
 $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
2. $z_1 \times z_2 = (3 + 4i)(1 - i)$
 $= 3 - 3i + 4i - 4i^2$
 $= 3 + i + 4$
 $= 7 + i$
 $|z_1 \times z_2| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
3. $|z_1| \times |z_2| = 5 \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
On a bien $|z_1 \times z_2| = 5\sqrt{2} = |z_1| \times |z_2| \quad \checkmark$

RÉSULTATS

Exercice 3 : $\bar{z} = 5 + 12i$; $|z| = 13$; $z \times \bar{z} = 169$

Exercice 4 : $|z_1| = 5$; $|z_2| = \sqrt{2}$; $z_1 \times z_2 = 7 + i$; $|z_1 \times z_2| = 5\sqrt{2}$

À RETENIR

La propriété $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$ est très utile pour vérifier un calcul ou pour éviter de développer un produit complet quand seul le module est demandé.

NOMBRES COMPLEXES

FICHE 7 — AFFIXES ET INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE : EXERCICES CORRIGÉS (5-6)

EXERCICE 5

Soit $A(2;-1)$ et $B(5;3)$ deux points du plan complexe.

1. Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Calculer la distance AB .
3. Déterminer l'affixe du milieu I de $[AB]$.

CORRECTION

$$z_A = 2 - i ; \quad z_B = 5 + 3i$$

$$1. \quad z(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A = (5 + 3i) - (2 - i) = 3 + 4i$$

$$2. \quad AB = |z(\overrightarrow{AB})| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$3. \quad z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{7 + 2i}{2} = 3,5 + i$$

EXERCICE 6

Soit A d'affixe $z_A = 1 + 2i$, B d'affixe $z_B = 4 + 3i$, C d'affixe $z_C = 2 - i$.

Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

CORRECTION

Dans un parallélogramme $ABCD$, les côtés $[AB]$ et $[DC]$ sont parallèles et de même longueur, donc :

$$\text{vecteur } \overrightarrow{AB} = \text{vecteur } \overrightarrow{DC}$$

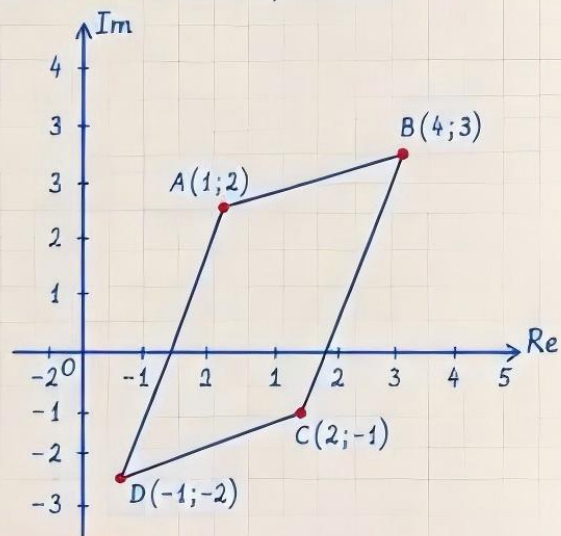
$$z_B - z_A = z_C - z_D$$

$$z_D = z_C - z_B + z_A$$

$$z_D = (2 - i) - (4 + 3i) + (1 + 2i)$$

$$z_D = (2 - 4 + 1) + (-1 - 3 + 2)i$$

$$z_D = -1 - 2i$$



RÉSULTATS

Exercice 5 : $z(\overrightarrow{AB}) = 3 + 4i$; $AB = 5$; $z_I = 3,5 + i$

Exercice 6 : $z_D = -1 - 2i$, soit $D(-1;-2)$

À RETENIR

Pour un parallélogramme $ABCD$, la condition vecteur $\overrightarrow{AB} = \text{vecteur } \overrightarrow{DC}$ (ou l'égalité des milieux des diagonales) se traduit immédiatement en une équation sur les affixes.

NOMBRES COMPLEXES

FICHE 8 — LIEUX GÉOMÉTRIQUES (CERCLES) : EXERCICES CORRIGÉS (7-8)

EXERCICE 7

Déterminer et décrire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$|z - 1 - 2i| = 4$$

CORRECTION

On identifie $a = 1 + 2i$, donc $A(1; 2)$, et $r = 4$.

L'ensemble cherché est le cercle de centre $A(1; 2)$ et de rayon 4.

EXERCICE 8

Déterminer et décrire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$|2z + 4 - 6i| = 10$$

CORRECTION

On factorise par 2 à l'intérieur du module :

$$|2z + 4 - 6i| = |2(z + 2 - 3i)| = 2 \times |z + 2 - 3i|$$

L'équation devient :

$$2 \times |z + 2 - 3i| = 10$$

$$|z + 2 - 3i| = 5$$

$$|z - (-2 + 3i)| = 5$$

On identifie $a = -2 + 3i$, donc $A'(-2; 3)$, et $r = 5$.

L'ensemble cherché est le cercle de centre $A'(-2; 3)$ et de rayon 5.

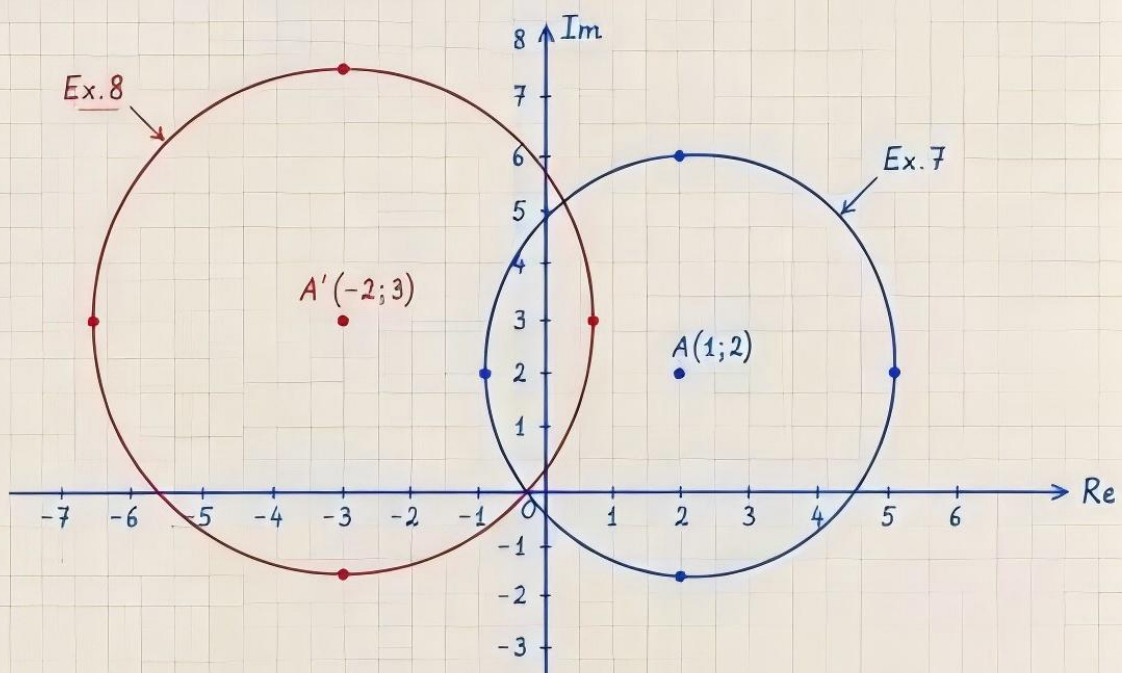
RÉSULTATS

Exercice 7 : cercle de centre $A(1; 2)$, rayon 4

Exercice 8 : cercle de centre $A'(-2; 3)$, rayon 5

À RETENIR

Quand un coefficient multiplie z à l'intérieur du module, il faut toujours le factoriser pour se ramener à la forme $|z - a| = r$.



NOMBRES COMPLEXES

FICHE 9 — LIEUX GÉOMÉTRIQUES (DROITES, MÉDIATRICES) : EXERCICES CORRIGÉS (9-10)

EXERCICE 9

Déterminer et décrire l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ tels que :

$$|z - 2| = |z - 4i|$$

CORRECTION

On identifie $A(2;0)$ et $B(0;4)$.

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[AB]$.

Déterminons son équation cartésienne. On pose $z = x + iy$:

$$|z - 2| = |(x-2) + iy| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

$$|z - 4i| = |x + i(y-4)| = \sqrt{x^2 + (y-4)^2}$$

En élevant au carré :

$$(x-2)^2 + y^2 = x^2 + (y-4)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2 - 8y + 16$$

$$-4x + 4 = -8y + 16$$

$$8y = 4x + 12$$

$$y = 0,5x + 1,5$$

EXERCICE 10

Déterminer et décrire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$|z + 1| = |z - 3 + 2i|$$

CORRECTION

On identifie $A(-1;0)$ et $B(3;-2)$.

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[AB]$.

$$\text{Milieu de } [AB] : I = \left(\frac{-1+3}{2} ; \frac{0-2}{2} \right) = (1; -1)$$

$$\text{Coefficient directeur de } (AB) : \frac{-2-0}{3-(-1)} = \frac{-2}{4} = -0,5$$

Coefficient directeur de la médiatrice (perpendiculaire) : 2

Équation de la médiatrice passant par $I(1;-1)$ avec coefficient directeur 2 :

$$y - (-1) = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 3$$

RÉSULTATS

Exercice 9 : médiatrice de $[AB]$, $A(2;0)$, $B(0;4)$, équation $y = 0,5x + 1,5$

Exercice 10 : médiatrice de $[AB]$, $A(-1;0)$, $B(3;-2)$, équation $y = 2x - 3$

À RETENIR

Pour retrouver l'équation cartésienne d'une médiatrice à partir de $|z - a| = |z - b|$, on pose $z = x + iy$ et on élève au carré les deux membres : les termes en x^2 et y^2 s'éliminent toujours, ne laissant qu'une équation de droite.

