



COURS PRIAMS

Cours collectif / Cours à Domicile

Tel : 70 64 74 69 / 65 36 01 70



REVISION GENERALE DE MATHEMATIQUES

Séries : TSE-TSExp-STI

■ ENSEMBLES

- L'ensemble des nombres **entiers naturels** est noté $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$.
 - NB** : Le signe * (**astérisque**) exclu le nombre 0 d'un ensemble. Exemple : $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$.
 - L'ensemble des nombres **entiers relatifs** est noté $\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$.
 - L'ensemble des nombres **décimaux** est noté $\mathbb{D} = \{a \times 10^b \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^*\}$.
 - L'ensemble des nombres **rationnels** est noté $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}\}$.
 - L'ensemble des **nombres réels** noté $\mathbb{R}$, est l'ensemble des **nombres rationnels** et **irrationnels**.
 - Un ensemble qui ne contient pas de nombre s'appelle l'**ensemble vide** et se note $\emptyset$ ou $\{\}$.
- Conclusion** : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

■ QUELQUES SYMBOLES MATHEMATIQUES

Symboles	Signification	Symboles	Signification
$>$	Strictement supérieur à	$<$	Strictement inférieur à
$\geq$	Supérieur ou égal à	$\leq$	Inférieur ou égal à
$\neq$	Différent de	$\in$	Appartient à ou élément de
$\notin$	N'appartient pas à	$\subset$	Inclus dans
$\nsubseteq$	N'est pas inclus dans	$\forall$	Quel que soit ou pour tout
$\cup$	Union	$\cap$	Inter
$\exists$	Il existe	$\exists!$	Il existe un unique
/ ou	Tel que	$-$ ou $\setminus$	Privé de
$\Rightarrow$	Implique	$\Leftrightarrow$	Equivaut à ou Si et seulement si
Σ	Somme	$\prod$	Produit
$\{ \}$	Les accolades	∞	Infini
$[]$	Les crochets	$\cong$	Approximativement égal à

■ QUELQUES LETTRES DE L'ALPHABET GREC

Noms	Alpha	Bêta	Gamma	Delta	Thêta	Lambda	Rhô	Mu	Phi	Omega	Sigma	Pi
Minuscules	α	β	γ	δ	θ	λ	ρ	μ	φ	ω	σ	π
Majuscules	A	B	Γ	Δ	Θ	Λ	P	M	Φ	Ω	Σ	Π

■ OPERATIONS DANS $\mathbb{R}$

➤ Règle des signes

R₁ : Pour additionner deux nombres entiers ou décimaux relatifs de même signe, on gade le signe commun et on fait l'addition.

R₂ : Pour additionner deux nombres entiers ou décimaux relatifs de signe contraire, on gade le signe du plus grand nombre et on fait la soustraction.

R₃ : Le produit (ou le quotient) de deux nombres de même signe, est positif.

R₄ : Le produit (ou le quotient) de deux nombres de signe contraires, est négatif.

➤ Opérations de l'addition et de la multiplication

Soient a, b et c trois nombres réels.

$$a + b = b + a \text{ (Commutativité de +)}$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c \text{ (Associativité de +)}$$

$$a + 0 = 0 + a = a \text{ (0 est l'élément neutre de +)}$$

$$a + (-a) = (-a) + a = 0 \text{ (-a est l'opposé de a)}$$

$$a \times b = b \times a \text{ (Commutativité de la } \times \text{)}$$

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c \text{ (Associativité de la } \times \text{)}$$

$$a \times 1 = 1 \times a = a \text{ (1 est l'élément neutre de la } \times \text{)}$$

$$a \times \left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\right) \times a = 1 \text{ (}\frac{1}{a}\text{ est l'opposé de a)}$$

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \text{ (Distributivité de la } \times \text{ par rapport à +)}$$

➤ Opérations des produits

Signe (-) : $(-a) \times b = a \times (-b) = -ab$; $(-a) \times (-b) = ab$.

Inverse : On dit que deux réels non nuls a et b sont inverses si et seulement si $a \times b = 1$.

Simplification : Si $a \times c = b \times c$ et $c \neq 0$ alors $a = b$.

Produit nul : $(a) \times (b) = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

Produits remarquables :

Pour tous réels a et b , on a :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$



Forme factorisées

Forme développées

➤ Opérations des quotients

Généralité : $\frac{a}{1} = a$; $\frac{0}{a} = 0$; $\frac{a}{0}$ = impossible

Signe (-) : $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$.

Simplification : $\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b}$ avec $b \neq 0$; $k \neq 0$ et $\frac{k+a}{k+b} \neq \frac{a}{b}$.

Egalité : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \times d = c \times b \Rightarrow a = \frac{c \times b}{d}$ ou $b = \frac{a \times d}{c}$ ou $c = \frac{a \times d}{b}$ ou $d = \frac{c \times b}{a}$.

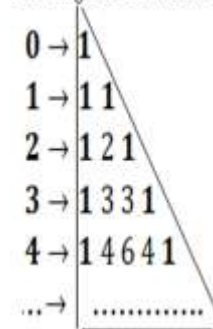
$$\frac{a}{b} = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ et } b \neq 0.$$

Addition : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + b \times c}{b \times d}$; $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{a \times d \times f + c \times b \times f + e \times b \times d}{b \times d \times f}$ et $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ avec $b \neq 0$; $d \neq 0$; $f \neq 0$.

Multiplication : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ et $a \times \frac{c}{b} = \frac{a \times c}{b}$ avec $b \neq 0$; $d \neq 0$.

Division : $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ et $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$.

Le triangle de Pascal sert à développer $(a + b)^n$ et $(a - b)^n$ avec $n \geq 2$.



- La puissance de a diminue et celle de b augmente.
- Pour $(a - b)^n$, on fait alterner les signes (+) et (-).

Exemples

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a - b)^4 = 1a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + 1b^4$$

■ PUISSANCE

➤ Définition

Soit a un nombre réel et n un entier naturel non nul.

On appelle a puissance n , noté a^n , le nombre réel défini par : $a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$.

Par convention : $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.

➤ Propriétés

Pour tous nombres relatifs m, n et pour tous nombres réels a et b non nuls, on a :

$$\blacksquare a^n \times a^m = a^{n+m} \quad \blacksquare (a^n)^m = a^{n \times m} \quad \blacksquare (a \times b)^n = a^n \times b^n \quad \blacksquare \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \blacksquare \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\blacksquare a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \blacksquare a^n = \frac{1}{a^{-n}} \quad \blacksquare (-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ -a^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\blacksquare a^n = b^n \Leftrightarrow a = b \text{ avec } a > 0 ; b > 0 \quad \blacksquare a^n = a^m \Leftrightarrow n = m$$

■ LES RADICAUX

➤ Racine carrée

Définition

Soit a un réel positif. La **racine carrée de a** notée $\sqrt{a}$ ou $\sqrt[2]{a}$, est le nombre réel positif dont le carré est a .

Exemples : $\sqrt{4} = 2$ car $2^2 = 4$; $\sqrt{144} = 12$ car $12^2 = 144$

Propriétés

Soient a et b deux réels positifs, on a :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} ; \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ avec } b \neq 0 ; (\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n} ; \sqrt{a \times b} \neq \sqrt{a} \times \sqrt{b}.$$

$$(\sqrt{a})^{2n} = \sqrt{a^{2n}} = a^n ; (\sqrt{a})^{2n+1} = \sqrt{a^{2n+1}} = a^n \sqrt{a}.$$

NB :

Si a est un nombre réel, alors $\sqrt{a^2} = |a|$.

Si a est un nombre réel positif, alors $\sqrt{a^2} = a$.

Résolution de l'équation : $x^2 = a$.

Si $a > 0$ alors $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.

Si $a < 0$ alors l'équation n'admet pas de solution réelle.

Si $a = 0$ alors $x = 0$.

➤ Racine n^{ième}

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $a \in \mathbb{R}_+$.

On appelle **racine n^{ième} de a** , le nombre réel positif x tel que : $x^n = a$.

On note $x = \sqrt[n]{a}$ ou $x = (a)^{\frac{1}{n}}$.

Exemple : $\sqrt[3]{8} = (8)^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2$.

Propriétés

La **racine n^{ième}** possède les mêmes propriétés que la racine carrée.

■ VALEUR ABSOLUE

Définition

Soit a un nombre réel.

Le plus grand des deux nombres réels a et $-a$ est appelé **valeur absolue** de a , notée $|a|$ est défini par :

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Propriétés

Pour tous nombres réels a , b et tout réel $r > 0$ on a :

$$\blacksquare |a| \geq 0 \quad \blacksquare |a \times b| = |a| \times |b| \quad \blacksquare \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \text{ avec } b \neq 0 \quad \blacksquare \sqrt{a^2} = |a| \quad \blacksquare |a| = |-a|$$

$$\blacksquare |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad \blacksquare |a| = |b| \Leftrightarrow a = b \text{ ou } a = -b \quad \blacksquare |a + b| \leq |a| + |b| \text{ (Inégalité triangulaire)}$$

$$\blacksquare |a - b| = |b - a| \quad \blacksquare |a| \leq r \Leftrightarrow -r \leq a \leq r \quad \blacksquare |a| \geq r \Leftrightarrow a \leq -r \text{ ou } r \leq a$$

■ INTERVALLES DANS $\mathbb{R}$

Intervalles	Inégalités	Représentation
$x \in [a; b]$	$a \leq x \leq b$	
$x \in [a; b[$	$a \leq x < b$	
$x \in]a; b]$	$a < x \leq b$	
$x \in]a; b[$	$a < x < b$	
$x \in [a; +\infty[$	$x \geq a$	
$x \in]a; +\infty[$	$x > a$	
$x \in]-\infty; a]$	$x \leq a$	
$x \in]-\infty; a[$	$x < a$	

Si $a \leq x \leq b$ alors a est une valeur approchée par défaut et b par excès.

■ ORDRE DANS $\mathbb{R}$

- Si $a \leq x \leq b$ alors $a \pm c \leq x \pm c \leq b \pm c$
- Si $c > 0$ et $a \leq x \leq b$ alors $a \times c \leq x \times c \leq b \times c$
- Si $c < 0$ et $a \leq x \leq b$ alors $b \times c \leq x \times c \leq a \times c$ (le sens de l'inégalité s'inverse)
- Si $a \leq x \leq b$ alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$ avec a et b de même signe et ($a \neq 0$) (le sens de l'inégalité s'inverse)
- Si $a \leq x \leq b$ alors $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{b}$ avec a et b de signe contraire et ($b \neq 0$)
- Si $a \leq x \leq b$ alors $a^2 \leq x^2 \leq b^2$ (ou Si $a \leq x \leq b$ alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{b}$) avec a et b positifs
- Si $a \leq x \leq b$ alors $b^2 \leq x^2 \leq a^2$ avec a et b négatifs (le sens de l'inégalité s'inverse)
- Si $a \leq x \leq b$ alors $0 \leq x^2 \leq \max\{a^2, b^2\}$ avec a et b de signe contraire ***
- Si $a \leq x \leq b$ alors $|a| \leq |x| \leq |b|$ avec a et b positifs
- Si $a \leq x \leq b$ alors $|b| \leq |x| \leq |a|$ avec a et b négatifs (le sens de l'inégalité s'inverse)
- Si $a \leq x \leq b$ alors $0 \leq |x| \leq \max\{|a|, |b|\}$ avec a et b de signe contraire ***
- Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ alors $a + c \leq x + y \leq b + d$
- Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ alors $a - d \leq x - y \leq b - c$

■ ARRONDI D'ORDRE n

➤ Arrondi à l'entier

On tient compte du 1^{er} chiffre après la virgule

- S'il est compris entre 0 et 4 on ne modifie pas la partie entière
- S'il est compris entre 5 et 9 on ajoute 1 à la partie entière

Exemple : 13, 284 = 13 ; 15, 751 = 16

➤ Arrondi d'ordre 1 ou à 10^{-1} près (un chiffre après la virgule)

On tient compte du 2^{ème} chiffre après la virgule

- S'il est compris entre 0 et 4 on ne modifie pas le 1^{er} chiffre après la virgule
- S'il est compris entre 5 et 9 on ajoute 1 au 1^{er} chiffre après la virgule

Exemple : 12,6284 = 12,6 ; 125,2651 = 125,3

➤ Arrondi d'ordre 2 ou à 10^{-2} près (deux chiffres après la virgule)

On tient compte du 3^{ème} chiffre après la virgule

- S'il est compris entre 0 et 4 on ne modifie pas le 2^{ème} chiffre après la virgule
- S'il est compris entre 5 et 9 on ajoute 1 au 2^{ème} chiffre après la virgule

Exemple : 10,1258 = 10,13 ; 1,25151 = 1,25

■ RESOLUTION D'EQUATIONS

➤ Equation du premier degré dans $\mathbb{R}$

Soit une équation du premier degré : $ax + b = 0$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}. \text{ Donc } S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$$

➤ Equation du second degré dans $\mathbb{R}$

Soit une équation du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

Pour résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$; on calcule le **discriminant** Δ avec $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta > 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Donc $S = \{x_1; x_2\}$

Si $\Delta = 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une racine double dans $\mathbb{R}$: $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Donc $S = \{x_0\}$

Si $\Delta < 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution réelle. Donc $S = \emptyset$.

Recettes

Si $a + b + c = 0$ alors $x_1 = 1$ et $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Si $a + c = b$ alors $x_1 = -1$ et $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Si $c = 0$ alors $x_1 = 0$ et $x_2 = -\frac{b}{a}$.

NB :

Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2 alors la somme $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

et le produit $P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

De plus : $x^2 - Sx + P = 0$; $x^2 + y^2 = S^2 - 2P$; $x^3 + y^3 = S^3 - 3PS$; $x^4 + y^4 = S^4 + 2P^2 - 4PS^2$

➤ Système d'équations dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

■ Système de deux équations à deux inconnues

On appelle système de deux équations du premier degré à deux inconnues, tout système de la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ avec } a, b, c, a', b' \text{ et } c' \text{ des réels.}$$

Pour résoudre ce système, nous disposons des méthodes suivantes : **méthode d'addition, méthode de substitution, méthodes des déterminants (ou méthode de Cramer) etc...**

■ Système de trois équations à trois inconnues

On appelle système de trois équations du premier degré à trois inconnues, tout système de la forme :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases} \text{ avec } a, b, c, d, a', b', c', a'', b'', c'' \text{ et } d'' \text{ des réels.}$$

Pour résoudre ce système, nous disposons des méthodes suivantes : **méthode de substitution, méthodes des déterminants, méthode de Pivot de GAUSS (système triangulaire).**

➤ Equations irrationnelles

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes.

Equation de la forme : $\sqrt{P(x)} = Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) = [Q(x)]^2 \end{cases}$

Equation de la forme : $\sqrt{P(x)} = \sqrt{Q(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) = Q(x) \end{cases}$

Equation de la forme : $\sqrt{P(x)} = k \ (k \in \mathbb{R}^*)$

Si $k < 0$, alors cette équation n'admet pas de solution.

Si $k > 0$, alors on a : $\sqrt{P(x)} = k \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ P(x) = k^2 \end{cases}$

■ RESOLUTION D'INEQUATIONS

➤ Inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}$

On obtient l'ensemble solution d'une inéquation du 1^{er} degré en utilisant le tableau de signe de son polynôme associé $f(x) = ax + b$.

Posons $f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	signe de $(-a)$	0	signe de a

➤ Inéquation du second degré dans $\mathbb{R}$

On obtient l'ensemble solution d'une inéquation du 2^e degré en utilisant le tableau de signe de son polynôme associé $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Pour étudier le signe de $P(x)$, on calcule le **discriminant** Δ avec $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation $P(x) = 0$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2 avec $(x_1 < x_2)$.

On utilise donc le tableau suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	0	Signe de $(-a)$	0	Signe de a

- Si $\Delta = 0$ alors l'équation $P(x) = 0$ admet une racine double x_0 .

On utilise donc le tableau suivant :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	0	Signe de a

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation $P(x) = 0$ n'admet pas de solution réelle $S = \emptyset$.

On utilise donc le tableau suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	

➤ Inéquations irrationnelles

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes.

$$\text{Inéquation de la forme : } \sqrt{P(x)} \leq Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) \leq [Q(x)]^2 \end{cases}$$

$$\text{Inéquation de la forme : } \sqrt{P(x)} \leq \sqrt{Q(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) \leq Q(x) \end{cases}$$

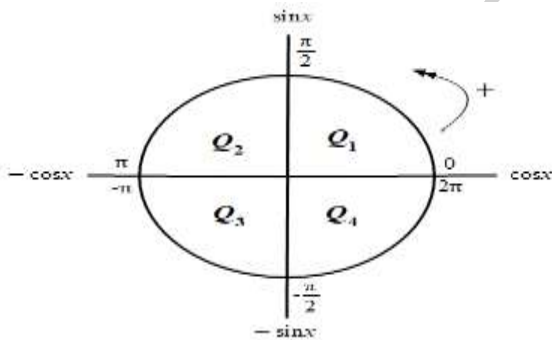
$$\text{Inéquation de la forme : } \sqrt{P(x)} \geq Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} Q(x) \leq 0 \\ P(x) \geq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) \geq [Q(x)]^2 \end{cases}$$

$$\text{Inéquation de la forme : } \sqrt{P(x)} \geq k \ (k \in \mathbb{R}^*) \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ P(x) \geq k^2 \end{cases}$$

■ TRIGONOMETRIE

➤ Cercle trigonométrique

On appelle **cercle trigonométrique**, le cercle de centre 0 et de rayon 1.



- Au 1^{er} quadrant Q_1 : $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$
- Au 2^e quadrant Q_2 : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right], \begin{cases} \cos x \leq 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$
- Au 3^e quadrant Q_3 : $\forall x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right], \begin{cases} \cos x \leq 0 \\ \sin x \leq 0 \end{cases}$
- Au 4^e quadrant Q_4 : $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right], \begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin x \leq 0 \end{cases}$

➤ Mesure principale

Définition

On appelle **mesure principale** de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$, l'unique réel $\alpha \in]-\pi; \pi]$ tel que :

$$\text{mes}(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}.$$

Remarque : La mesure principale α d'un angle $x = k\pi \text{ rad}$ ($k \in \mathbb{Z}$) est : $\begin{cases} \alpha = 0 \text{ si } k \text{ est pair} \\ \alpha = \pi \text{ si } k \text{ est impair} \end{cases}$

Détermination de la mesure principale

Déterminer la mesure principale α d'un angle orienté dont une mesure θ est connue, consiste à :

- Calcule le quotient $\frac{\theta}{2\pi}$.
- Détermine l'entier k le plus proche du quotient.
- Puis détermine α à l'aide de l'égalité $\alpha = \theta - 2k\pi$.

Exemple 1 : Détermine la mesure principale de $\theta = \frac{15\pi}{4}$

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{\frac{15\pi}{4}}{2\pi} = \frac{15}{8} = 1,875 \Rightarrow k = 2$$

$$\alpha = \frac{15\pi}{4} - 2 \times 2\pi = \frac{15\pi}{4} - 4\pi = \frac{15\pi - 16\pi}{4} \text{ donc } \alpha = -\frac{\pi}{4}$$

Exemple 2 : Détermine la mesure principale de $\theta = \frac{21\pi}{8}$

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{\frac{21\pi}{8}}{2\pi} = \frac{21}{16} = 1,3125 \Rightarrow k = 1$$

$$\alpha = \frac{21\pi}{8} - 2\pi = \frac{21\pi - 16\pi}{8} \text{ donc } \alpha = \frac{5\pi}{8}$$

Les angles remarquables

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cotan \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

➤ Formules trigonométriques

Relation fondamentale de la trigonométrie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos x \leq 1 \text{ et } -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall k \in \mathbb{Z}, \cos(x + 2k\pi) = \cos x ; \sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ et } \cotan x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Formules d'addition

Pour tous réels a et b , on a :

$$\blacksquare \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\blacksquare \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\blacksquare \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\blacksquare \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\blacksquare \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\blacksquare \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Formules de duplication

Pour tous réels a , on a :

$$\blacksquare \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\blacksquare \sin(2a) = 2 \cos a \sin a$$

Formules de linéarisation

Pour tous réels a , on a :

$$\blacksquare \cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\blacksquare \sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

Transformation de produit en somme

Pour tous réels a et b , on a :

$$\blacksquare \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$\blacksquare \sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a + b) - \cos(a - b)]$$

$$\blacksquare \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

$$\blacksquare \cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)]$$

Transformation de somme en produit

Pour tous réels p et q , on a :

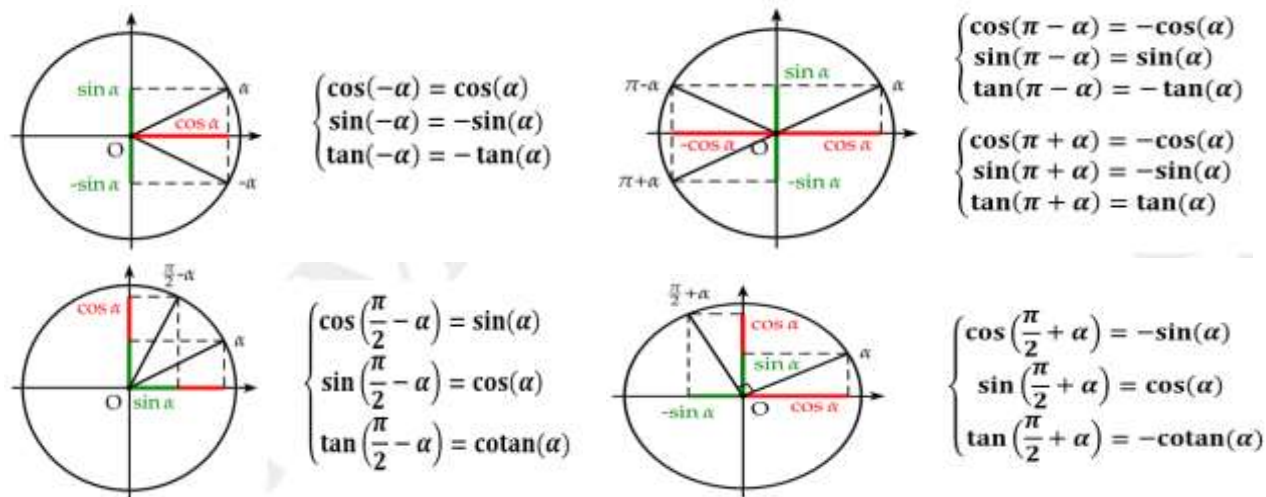
$$\blacksquare \cos p + \cos q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\blacksquare \cos p - \cos q = -2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\blacksquare \sin p + \sin q = 2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\blacksquare \sin p - \sin q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

Les angles associés



➤ Equations trigonométriques

Equations du type : $\cos \alpha = a$; $\sin \alpha = a$; $\tan \alpha = a$

Pour résoudre de telles équations, on distingue deux cas :

Si $a \notin [-1; 1]$, alors $S = \emptyset$.

Si $a \in [-1; 1]$, alors il existe un réel β tel que : $\cos \beta = a$; $\sin \beta = a$; $\tan \beta = a$

$$\cos \alpha = \cos \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin \alpha = \sin \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\tan \alpha = \tan \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Remarque :

$$\cos \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0 + 2k\pi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 + k\pi = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Equations du type : $a \cos x + b \sin x = c$

Pour résoudre une équation du type : $a \cos x + b \sin x = c$, on procède de la manière suivante :

- On calcule le réel $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Si $\frac{c}{r} \notin [-1, 1]$, alors l'équation $a \cos x + b \sin x = c$, n'admet pas de solutions.
- Si $\frac{c}{r} \in [-1, 1]$, alors il existe un réel α tel que : $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{r} \\ \sin \alpha = \frac{b}{r} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \dots$ et l'équation équivaut à $\cos(x - \alpha) = \frac{c}{r}$.

