

LE PLAN D'UN PROBLEME

Partie A : Etude de la fonction auxiliaire g .

- ✓ La détermination de D_g .
- ✓ Le calcul des limites aux bornes de D_g .
- ✓ Le calcul de la dérivée de g .
- ✓ Le sens de variation et le tableau de variation de g .
- ✓ Le commentaire de la bijection (montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α).
- ✓ Le signe de g .

Partie B : Etude de la fonction principale f .

- ✓ La détermination de D_f .
- ✓ L'étude de la continuité et dérivabilité.
- ✓ Le calcul des limites aux bornes de D_f .
- ✓ L'interprétation graphique des résultats des limites et étude de branches infinies.
- ✓ Le calcul de la dérivée de f . (ici $f'(x)$ s'exprime en fonction de $g(x)$).
- ✓ Le sens de variation et le tableau de variation de f .
- ✓ La démonstration classique $f(\alpha)$.
- ✓ Axe ou centre de symétrie.
- ✓ Les points particuliers.
- ✓ Démonstration de la présence d'une asymptote oblique à la courbe.
- ✓ Etude de la position relative de la courbe par rapport à l'asymptote oblique.
- ✓ Equation de la tangente à la courbe en un point donné.
- ✓ Tracé de la courbe, de l'asymptote ou de la tangente éventuelle.

Partie C :

- ✓ Etude de la bijection réciproque de la restriction de f sur un intervalle donné.
 - ✓ Le calcul d'aire d'une zone délimitée par la courbe, l'asymptote et certaines droites.
- On peut avoir aussi : une partie sur les suites, les équations différentielles, les intégrales etc...

Question 1 : Détermine l'ensemble ou le domaine de définition d'une fonction f .**Réponse 1 :** Soient p et g deux fonctions polynômes et soit u une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- $f(x) = p(x) \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$.
- $f(x) = \frac{p(x)}{g(x)} \Rightarrow D_f = \{x/x \in \mathbb{R}, g(x) \neq 0\}$.
- $f(x) = \sqrt{p(x)} \Rightarrow D_f = \{x/x \in \mathbb{R}, p(x) \geq 0\}$.
- $f(x) = \frac{\sqrt{p(x)}}{g(x)} \Rightarrow D_f = \{x/x \in \mathbb{R}, p(x) \geq 0 \text{ et } g(x) \neq 0\}$.
- $f(x) = \frac{p(x)}{\sqrt{g(x)}} \Rightarrow D_f = \{x/x \in \mathbb{R}, g(x) > 0\}$.
- $f(x) = \frac{\sqrt{p(x)}}{\sqrt{g(x)}} \Rightarrow D_f = \{x/x \in \mathbb{R}, \frac{p(x)}{g(x)} \geq 0 \text{ et } g(x) \neq 0\}$.
- $f(x) = |u(x)| \Rightarrow D_f = D_u$.
- $f(x) = \ln(u(x)) \Rightarrow D_f = \{x/x \in \mathbb{R}, u(x) > 0\}$.
- $f(x) = \ln|u(x)| \Rightarrow D_f = \{x/x \in \mathbb{R}, u(x) \neq 0\}$.
- $f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow D_f = D_u$.

Remarque : pour les signes ($<$, $>$, $\leq$ et $\geq$), on fait un tableau de signes.

Question 2 : Calcule la limite d'une fonction.

Réponse 2 :

- Les formes indéterminées : $0 \times \infty$; $+\infty - \infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$.
 - Mnémotechnique : **ORO** de **IRI** est **ROI** de **RIO** a tué **IOI** et **OIO**.
 - Méthodes de calcul d'une limite : Utilisation d'une factorisation, utilisation de l'expression conjuguée, utilisation du changement d'écriture, utilisation du changement de variable, utilisation d'un taux de variation, utilisation de la comparaison (le théorème des gendarmes), la règle de l'Hospital etc...
- La limite d'une fonction polynôme en ∞ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle en ∞ est égale à la limite des termes de plus haut du numérateur et du dénominateur.
- Les limites de références :

– Fonctions trigonométriques

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

– Fonctions $\ln x$

$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

– Fonctions $\exp(x)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$		

Question 3 : Interprète la limite d'une fonction f .

Réponse 3 :

- Si $\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = \infty$, alors la droite d'équation $x = \ell$ est une asymptote verticale à (C) .
- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell$, alors la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à (C) en ∞ .
- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - y] = 0$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (C) en ∞ .
- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors (C) admet une branche parabolique de direction (OI).
- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, alors (C) admet une branche parabolique de direction (OJ).

Question 4 : Etudie la position relative de (C) par rapport à (D) .

Réponse 4 :

Il s'agit d'étudier le signe $[f(x) - y]$ et conclure avec :

- Si $f(x) - y > 0$, alors (C) est au-dessus de (D) .
- Si $f(x) - y < 0$, alors (C) est en-dessous de (D) .
- Si $f(x) - y = 0$, alors (C) et (D) se coupent.

Cggr4h

Gvcgh4rğy

Question 5 : Etudie la parité et la périodicité d'une fonction f .

Réponse 5 :

f est paire si $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.

f est impaire si $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

f est périodique de période T si $\forall x \in D_f, (x+T) \in D_f$ et $f(x+T) = f(x)$.

Remarque : toute fonction impaire admet un centre de symétrie et toute fonction paire admet un axe de symétrie

Question 6 : Montre que la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de (C) .

Réponse 6 :

Il s'agit de montrer que $\forall x \in D_f$, on a $(2a-x) \in D_f$ et $f(2a-x) = f(x)$.

Question 7 : Montre que le point $I(a; b)$ est un centre de symétrie de (C) .

Réponse 7 :

Il s'agit de montrer que $\forall x \in D_f$, on a $(2a-x) \in D_f$ et $f(2a-x) + f(x) = 2b$.

Question 8 : Etudie la continuité d'une fonction f en un point x_0 .

Réponse 8 :

Il s'agit de prouver que : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Et si la fonction se définit par intervalle, on prouve alors que : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Remarque :

– Les fonctions polynômes, $\cos x$ et $\sin x$ sont continue sur $\mathbb{R}$.

– Les fonctions rationnelles, irrationnelles sont continues sur leur domaine de définition.

Question 9 : Démontre qu'une fonction f admet un prolongement par continuité en point x_0 .

Réponse 9 :

Il s'agit de prouver que $x_0 \notin D_f$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Soit g ce prolongement par continuité, défini par : $\begin{cases} \forall x \in D_f, g(x) = f(x) \\ g(x_0) = \ell \end{cases}$.

Question 10 : Donne les formules des dérivées.

Réponse 10 :

Fonction	Fonction dérivée
$(a = \text{Cte})$	0
ax	a
x^2	$2x$
x^n	$n x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
af	af'
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

Fonction	Fonction dérivée
$f + g$	$f' + g'$
$f \times g$	$f'g + fg'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - g'f}{g^2}$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$
f^n	$n f' f^{n-1}$
$g \circ f$	$f' \times g'[f]$

Fonction	Fonction dérivée
$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$
$\cos(ax+b)$	$-a \sin(ax+b)$
$\sin(ax+b)$	$a \cos(ax+b)$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
e^u	$u' e^u$

NB : $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Question 11 : Etudie la dérivabilité d'une fonction f en point x_0 .

Réponse 11 :

Il s'agit de calculer $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - (x_0)} = f'(x_0)$; $f'(x_0)$ le coefficient directeur ou la pente ou nombre dérivé.

– Si $f'(x_0) = \ell \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en x_0 . Conséquence graphique : (C) admet une tangente au point d'abscisse x_0 d'équation : $(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

– Si $f'(x_0) = \infty$ alors f n'est pas dérivable en x_0 .

Remarque :

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0 .

Si f n'est pas continue en x_0 alors f n'est pas dérivable en x_0 .

➤ Et si la fonction se définit par intervalle, on prouve alors que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - (x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - (x_0)} = \ell \text{ ou } f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = \ell.$$

Question 12 : Interprète la dérivabilité d'une fonction.

Réponse 12 :

- Si $f'(x_0) = 0 \Rightarrow (C)$ admet une **tangente horizontale** au point $A(x_0; f(x_0))$.
 - Si $f'_g(x_0) = 0 \Rightarrow (C)$ admet une **demi-tangente horizontale à gauche** au point $A(x_0; f(x_0))$.
 - Si $f'_d(x_0) = 0 \Rightarrow (C)$ admet une **demi-tangente horizontale à droite** au point $A(x_0; f(x_0))$.
- Si $f'(x_0) = \infty \Rightarrow (C)$ admet une **tangente verticale** au point $A(x_0; f(x_0))$.
 - Si $f'_g(x_0) = +\infty \Rightarrow (C)$ admet une **demi-tangente verticale à gauche** au point A dirigée vers le bas.
 - Si $f'_g(x_0) = -\infty \Rightarrow (C)$ admet une **demi-tangente verticale à gauche** au point A dirigée vers le haut.
 - Si $f'_d(x_0) = +\infty \Rightarrow (C)$ admet une **demi-tangente verticale à droite** au point A dirigée vers le haut.
 - Si $f'_d(x_0) = -\infty \Rightarrow (C)$ admet une **demi-tangente verticale à droite** au point A dirigée vers le bas.
- Si $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0) \Rightarrow (C)$ admet en A un **point anguleux formé par deux-tangentes** d'équations :
 - $((T_g): y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0))$
 - $((T_d): y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0))$

Question 13 : Etudie le sens de variation d'une fonction f .

Réponse 13 :

Le sens de variation d'une fonction dépend du signe de sa fonction dérivée.

- Si $\forall x \in I, f'(x) > 0$, alors f est **strictement croissante** sur I .
- Si $\forall x \in I, f'(x) < 0$, alors f est **strictement décroissante** sur I .
- Si $\forall x \in I, f'(x) = 0$, alors f est **constante ou stationnaire** sur I .

Question 14 : Dresse le tableau de variation d'une fonction f .

Réponse 14 :

Il s'agit d'utiliser le tableau de signe sa fonction dérivée, en ajoutant un tableau de la fonction en question, dont on précisera :

- Son domaine de définition.
- Ses variations (croissante et décroissante).
- Ses limites.
- Ses extremums (maximum et minimum).

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$						

$$\text{➤ } D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

➤ -2 est le maximum relatif de f et 2 est le minimum relatif de f .

$$\text{➤ } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

Remarque : pour étudier les variations d'une fonction on étudie la fonction jusqu'au tableau de variation.

Question 15 : Démontre que l'équation $g(x) = k$ admet une solution unique α .

Réponse 15 :

Pour démontrer que l'équation $g(x) = k$ admet une solution unique α , deux (2) cas peuvent se présenter :

1^{er} cas : g est strictement croissante.

x	a	b
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$g(a)$	$g(b)$

D'après le tableau de variation de g .

Sur $]a; b[$, g est continue et strictement croissante, elle réalise donc une bijection de $]a; b[$ vers $]g(a); g(b)[$, comme $k \in]g(a); g(b)[$. Alors l'équation $g(x) = k$ admet une unique solution $\alpha \in]a; b[$.

2^e cas : g est strictement décroissante.

x	a	b
$g'(x)$	-	
$g(x)$	$g(a)$	$g(b)$

D'après le tableau de variation de g .

Sur $]a; b[$, g est continue et strictement décroissante, elle réalise de une bijection de $]a; b[$ vers $]g(b); g(a)[$, comme $k \in]g(b); g(a)[$. Alors l'équation $g(x) = k$ admet une unique solution $\alpha \in]a; b[$.

Question 16 : Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $a < \alpha < b$.

Réponse 16 :

D'après le tableau de variation de g .

g est continue et strictement croissante(ou décroissante) sur $]a; b[$. De plus $g(a) \times g(b) < 0$.

Alors l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $a < \alpha < b$.

Remarque : on peut utiliser la **réponse 16**, pour justifier que $\alpha \in]a; b[$ ou $a < \alpha < b$.

Question 17 : Donne un encadrement de α par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2.

Réponse 17 :

On utilise soit la méthode par balayage ou par dichotomie. Soit $\alpha \in]0; 1[$.

La méthode par balayage

1^{ère} étape : encadrement de α par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Signe de $f(x)$	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-

On déduit du tableau ci-dessus que : $0,5 < \alpha < 0,6$

2^{ème} étape : encadrement de α par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2

x	0,5	0,51	0,52	0,53	0,54	0,55	0,56	0,57	0,58	0,59	0,6
Signe de $f(x)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-

On déduit du tableau ci-dessus que : $0,59 < \alpha < 0,60$

La méthode par dichotomie

On calcule $f(x_0)$ avec $x_0 \in]a; b[$. On prend $x_0 = \frac{a+b}{2}$.

Si $f(x_0) > 0$ alors $a < \alpha < x_0$.

Si $f(x_0) < 0$ alors $x_0 < \alpha < b$.

a	b	$\frac{a+b}{2}$	Signe de $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$	Encadrement de α
0	1	0,5	+	$0,5 < \alpha < 1$
0,5	1	0,75	-	$0,5 < \alpha < 0,75$
0,5	0,75	0,62	-	$0,5 < \alpha < 0,62$
0,5	0,62	0,56	+	$0,56 < \alpha < 0,62$
0,56	0,62	0,59	+	$0,59 < \alpha < 0,62$
0,59	0,62	0,60	-	$0,59 < \alpha < 0,60$

On déduit du tableau ci-dessus que : $0,59 < \alpha < 0,60$

Question 18 : Démontre que $f(\alpha) = \dots$

Réponse 18 :

On se sert généralement de $g(x)$ et $f(x)$.

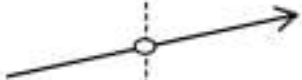
On remplace α dans $f(x)$, puis on cherche l'expression commune entre les deux $f(\alpha)$, à partir de l'équation $g(\alpha) = 0$. On remplace cette expression de $f(\alpha)$, puis on termine la démonstration.

Question 19 : Détermine le signe d'une fonction suivant les valeurs de x .

Réponse 19 :

Pour déterminer le signe d'une fonction, quatre (4) cas peuvent se présenter :

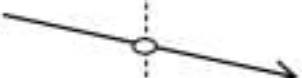
1^{er} cas : g est strictement croissante.

x	a	α	b
$g'(x)$		+	
$g(x)$			
signe de $g(x)$	-	0	+

On en déduit que :

$$\begin{cases} \forall x \in]a; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; b[, g(x) > 0 \end{cases}$$

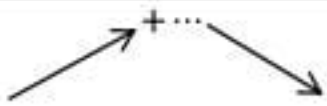
2^e cas : g est strictement décroissante.

x	a	α	b
$g'(x)$		-	
$g(x)$			
signe de $g(x)$	+	0	-

On en déduit que :

$$\begin{cases} \forall x \in]a; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; b[, g(x) < 0 \end{cases}$$

3^e cas : g admet un maximum absolu positif

x	a	x_0	b
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$			
signe de $g(x)$	+		

On en déduit que :

$$\forall x \in]a; b[, g(x) > 0$$

4^e cas : g admet un minimum absolu négatif

x	a	x_0	b
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			
signe de $g(x)$	-		

On en déduit que :

$$\forall x \in]a; b[, g(x) < 0$$

Question 20 : Trace la courbe représentative d'une fonction f .

Réponse 20 :

➤ On utilise un tableau de valeurs de la fonction f .

x	...	...	...	...
$f(x)$	...	...	...	...

➤ On se sert du tableau de variation de la fonction pour représenter la courbe de la fonction en précisant les asymptotes, les tangentes et les points particuliers.

NB : il faut d'abord représenter les asymptotes, les tangentes et les points particuliers avant de représenter la courbe. La courbe représentative d'une fonction ne doit pas couper les asymptotes horizontales en ∞ et verticales.

Question 21 : Démontre qu'une fonction f réalise une bijection de $]a; b[$ vers un intervalle J .

Réponse 21 :

D'après le tableau de variation de f .

f est continue et strictement croissante(ou décroissante) sur $]a; b[$, elle réalise donc une bijection de $]a; b[$ vers $]g(a); g(b)[= J$ (ou $]g(b); g(a)[= J$).

Question 22 : Démontre qu'une fonction f admet une bijection réciproque f^{-1} .

Réponse 22 :

Si f réalise une bijection, alors elle admet une bijection réciproque f^{-1} .

Son tableau de variation

Si $f: A \rightarrow B$, alors $f^{-1}: B \rightarrow A$

Retenons : f et f^{-1} ont toujours le même sens de variation.

Exemple :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	3	5

x	3	5
$(f^{-1})'(x)$		+
$(f^{-1})x$	$-\infty$	$+\infty$

La représentation de f^{-1}

Soit (C') sa représentation graphique.

Leurs représentations (C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

NB : Si on demande la bijection réciproque f^{-1} , il faut résoudre l'équation $f(x) = b$; puis remplacer b par x .

Tu on obtient enfin $f^{-1}(x)$.

Question 23 : Calcule $(f^{-1})'(\beta)$.

Réponse 23 :

- On détermine x tel que $f(x) = \beta$.
- On calcule $f'(x)$ et on vérifie si $f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable au point β .
- On conclue $(f^{-1})'(\beta) = \frac{1}{f'(x)}$.

Question 24 : Détermine les coordonnées du point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

Réponse 24 :

On résout l'équation $f(x) = 0$. (il faut savoir que $y = 0$).

Question 25 : Détermine les coordonnées du point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées.

Réponse 25 :

On calcule $f(0)$. (il faut savoir que $x = 0$).

Question 26 : Détermine les coordonnées du point A de (C) où la tangente est parallèle à (D) .

Réponse 26 :

Soit la droite (D) d'équation : $y = ax + b$.

Il s'agit de résoudre l'équation $f'(x) = a$, puis remplacer cette valeur dans $f(x)$ pour avoir la valeur de y .

Question 27 : Détermine les coordonnées du point A de (C) où la tangente est perpendiculaire à (D) .

Réponse 27 :

Soit la droite (D) d'équation : $y = ax + b$.

Il s'agit de résoudre l'équation $f'(x) = -\frac{1}{a}$, puis remplacer cette valeur dans $f(x)$ pour avoir la valeur de y .

Question 28 : Montre que le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion.

Réponse 28 :

Il s'agit de prouver que f'' s'annule en a en changeant de signe.

Question 29 : Montre qu'une fonction f est concave et convexe sur un intervalle I.

Réponse 29 :

- Si f'' est strictement positive sur I, alors f est convexe sur I.
- Si f'' est strictement négative sur I, alors f est concave sur I.

Question 30 : En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontre que...

Réponse 30 :

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$. S'il existe deux nombres réels m et M tels que :
 $\forall x \in [a; b], m \leq f'(x) \leq M$, alors on a : $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.
- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$. S'il existe un nombre réel M tels que :
 $\forall x \in [a; b], |f'(x)| \leq M$, alors on a : $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Question 31 : Donne les formules des primitives.

Réponse 31 :

Fonction	Fonction primitive
0	k (Cte)
a	ax
x	$\frac{x^2}{2}$
x^n ($n \neq -1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
e^x	e^x
e^{nx} ($n \neq 0$)	$\frac{e^{nx}}{n}$
af	aF
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$f \times g' [f]$	$g \circ f$

Fonction	Fonction primitive
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln \cos x $
$\sin(ax+b)$ ($a \neq 0$)	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$ ($a \neq 0$)	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$u'\cos u$	$\sin u$
$u'\sin u$	$-\cos u$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cotan x$
$\frac{u'}{\cos^2 u}$	$\tan u$
$\frac{u'}{\sin^2 u}$	$-\cotan u$
$u'\tan u$	$-\ln \cos u $

Fonction	Fonction primitive
$f+g$	$F+G$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
$\frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
$\frac{u'}{u} (n \neq -1)$	$\ln u $
$u'u^n$ ($n \neq -1$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$u'e^u$	e^u
$\frac{a}{ax+b}$	$\ln ax+b $
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$(ax+b)^n$ ($n \neq -1$)	$\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}$ (Hors programme)
$\frac{k}{(ax+b)^n}$ ($n \neq 1$)	$-\frac{k}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}}$ (Hors programme)

Question 32 : Montre que F est une primitive de f sur un intervalle I.

Réponse 32 :

Il s'agit de prouver que $F'(x) = f(x)$.

Question 33 : Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$; que représente F pour f ?

Réponse 33 :

Il suffit d'écrire que F est la primitive de f qui s'annule en a.

Question 34 : Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$; montre que F est dérivable et calcule sa dérivée.

Réponse 34 :

Il suffit d'écrire que F étant la primitive de f qui s'annule en a, alors F est dérivable et $F'(x) = f(x)$.

Question 35 : Calcule l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Réponse 35 :

➤ Cas où (C) est au-dessus de l'axe des abscisses sur $[a; b]$: $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$. Donc $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx$. UA.

➤ Cas où (C) est au-dessous de l'axe des abscisses sur $[a; b]$: $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$. Donc $\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)dx$. UA.

Avec UA = $OI \times OJ$. Unité d'aire en cm^2 .

Question 36 : Calcule l'aire du domaine limité par (C), la droite (D) d'équation : $y = mx + p$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Réponse 36 :

➤ Cas où (C) est au-dessus de (D) sur $[a; b]$: $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ mx + p \leq y \leq f(x) \end{cases}$. Donc $\mathcal{A} = \int_a^b (f(x) - y)dx$. UA.

➤ Cas où (C) est au-dessous de (D) sur $[a; b]$: $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq mx + p \end{cases}$. Donc $\mathcal{A} = -\int_a^b (f(x) - y)dx$. UA.

Question 37 : Donne une interprétation graphique de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.

Réponse 37 :

Il suffit d'écrire que $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire en unité d'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.