# Athénée royal Jules Delot, Ciney

# Mécanique

« Toutes les choses sont placées dans le temps comme un ordre de succession et dans l'espace comme une ordre de situation. »
**Issac Newton**

« ...Faites avancer le bateau à l'allure qui vous palira, pour autant que la vitesse soit uniforme et ne fluctue pas de part et d'autre. Vous ne verrez pas le moindre changement dans aucun des effets mentionnés et même aucun d'eux ne vous permettra de dire si le bateau est en mouvement ou à l'arrêt... »
**Galilée**
*Dialogue convernant des deux plus grands systèmes du monde.*

« Une théorie est bonne lorsqu'elle est belle. »
**Henri Poincarré.**

## Physique 5ème Générale
## 3h/semaine

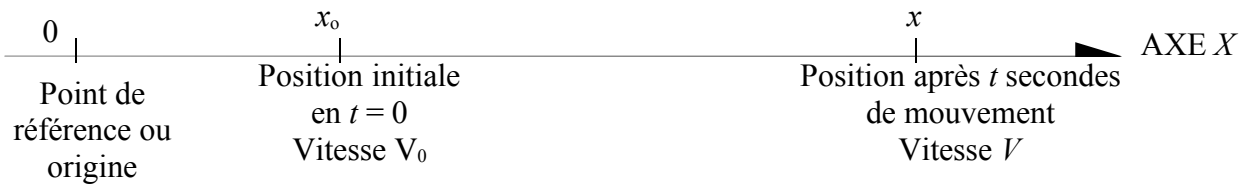
Ir Jacques COLLOT

# MECANIQUE

## 1. Rappels de mécanique

***Le mouvement est rectiligne si sa trajectoire est une droite.***

Repère




### 1.1 MRU

***Le mouvement est uniforme si sa vitesse est constante.***

Le déplacement $d = x_o - x$

La vitesse moyenne $V = \frac{d}{t}$ ***est constante*** en km/h ou m/s

La vitesse est obtenue en calculant la pente du graphe $x = f(t)$

### 1.2 MRUV

L'accélération est définie comme la variation par unité de temps du vecteur vitesse $V$

$$a = \frac{V - V_o}{t} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$ ***est constante*** en m/s²

L'accélération est obtenue en calculant la pente du graphe $v = f(t)$

MRUA → a positive, MRUD → a négative

**Formules du MRUV**

| | |
|---|---|
| **Distance parcourue** | $d = V_o.t + \frac{a.t^2}{2}$ |
| **Vitesse** | $V = V_o + a.t$ |

### 1.3 Chute libre (sans frottements)

Un corps en chute libre est en MRUA avec une accélération $a = g$ = 10 m/s²

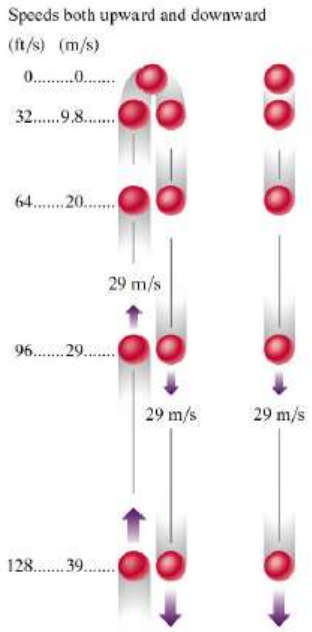
$$h = \frac{g.t^2}{2}$$
$$V = g.t$$

## 1.4 Corps lancé vers le bas

Un corps lancé vers le bas est également en chute libre mais avec une vitesse initiale $V_0$.

$$h = V_0\, t + \frac{g\,.t^2}{2}$$
$$V = V_0 + g\,.t$$

## 1.5 Corps lancé vers le haut




Un corps lancé vers le haut est en MRUD avec une accélération $g = -9.81$ m/s².

En chute libre, la direction de l'accélération est toujours strictement verticale et orientée vers le bas. Si un objet est jeté vers le haut verticalement, il restera sur une trajectoire verticale. En montant, l'objet sent une accélération négative, $a = -g$. Sa vitesse diminuera jusqu'à l'arrêt momentané au sommet de sa trajectoire. La descente est la même que pour un objet lâché du sommet: il subit l'accélération $a = +g$ à partir de $v_0 = 0$.

## 1.6 Lois de Newton

**1ere loi : principe d'inertie**

Un objet ne subissant aucune force (résultante des forces égale à zéro) se déplace en MRU.
Autrement dit, si la résultante des forces appliquées à un corps est nulle alors la vitesse de ce corps ne change pas. En particulier, s'il est immobile, il reste immobile.

**2eme loi : loi fondamentale de la dynamique**

Si la résultante Σ F des forces agissant sur un corps de masse m est constante, alors le corps voit sa vitesse changer. Il est alors accéléré et son mouvement est un MRUV avec une accélération a qui est telle que : $\Sigma \vec{F} = m.\vec{a}$

## 1.7 Travail - puissance – énergie

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Travail d'une force** | | $W = F.d.\cos\alpha$ | en joule |
| **Puissance** | | $P = \frac{W}{t}$ | en Watt |
| **Energie** | **potentielle** | $E_P = mgh$ | en joule |
| | **Cinétique** | $E_C = \frac{1}{2}mv^2$ | en joule |
| | **Mécanique** | $E = E_P + E_C$ | en joule |

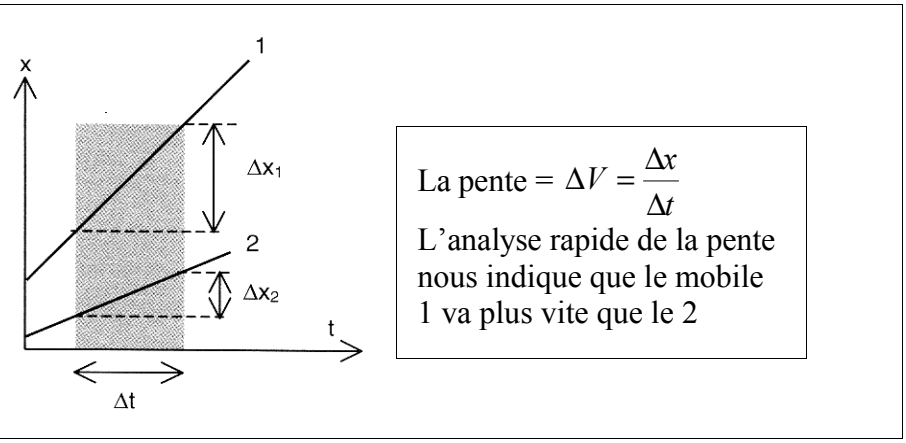
# 2. Les grandeurs instantanées

## 2.1 La vitesse instantanée

Nous connaissons déjà la notion de vitesse instantanée comme étant la vitesse du mobile à un instant précis $V(t)$.

### 2.1.1 Cas d'un mouvement uniforme

Nous savons que pour un MRU, le graphe de la position en fonction du temps $x = f(t)$ est une droite oblique.
La vitesse instantanée est constante et elle peut se déterminer en calculant la pente du graphe $x = f(t)$




La pente = $\Delta V = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

L'analyse rapide de la pente nous indique que le mobile 1 va plus vite que le 2

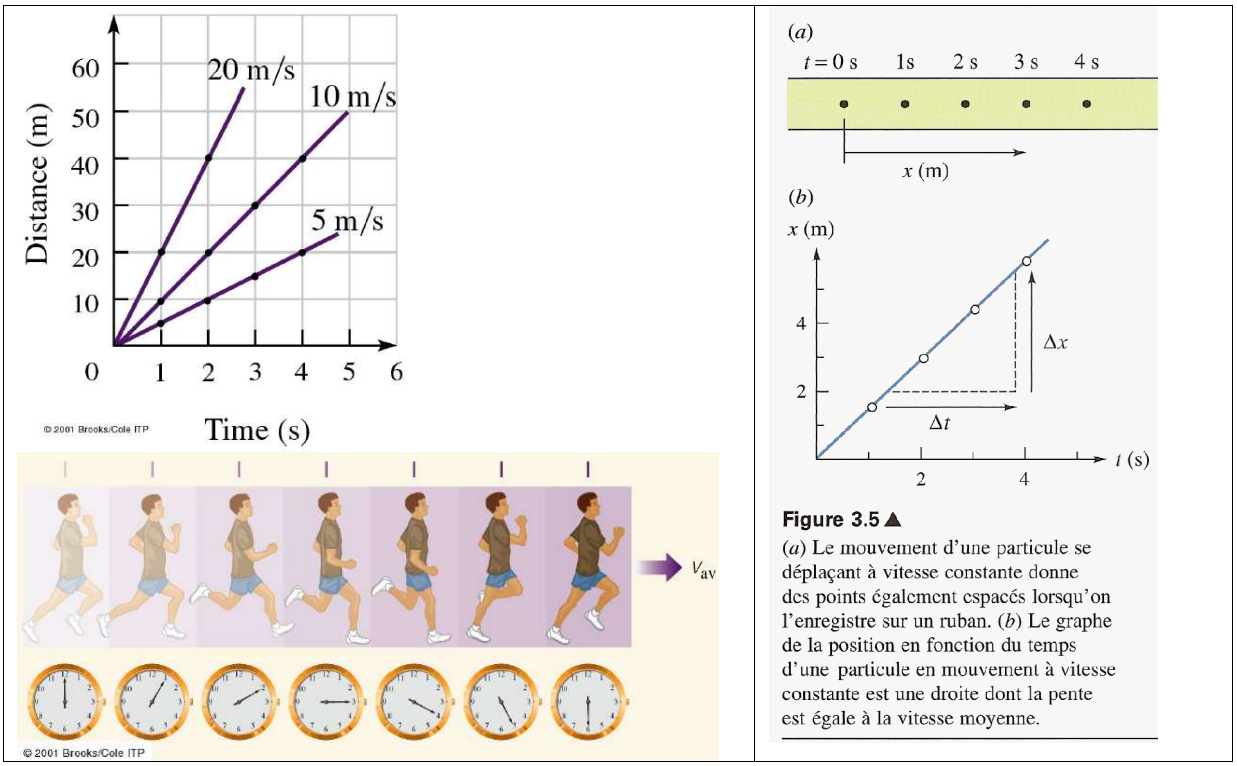



**Figure 3.5 ▲**
(*a*) Le mouvement d'une particule se déplaçant à vitesse constante donne des points également espacés lorsqu'on l'enregistre sur un ruban. (*b*) Le graphe de la position en fonction du temps d'une particule en mouvement à vitesse constante est une droite dont la pente est égale à la vitesse moyenne.

### 2.1.2 Cas d'un mouvement non uniforme ou varié

La vitesse d'un mobile varie dans la plupart des mouvements quotidiens. Elle peut augmenter, diminuer et même changer de signe. La vitesse peut changer à tout instant.
***La vitesse est une fonction du temps et <u>le graphe x =f(t) n'est plus une droite</u>***

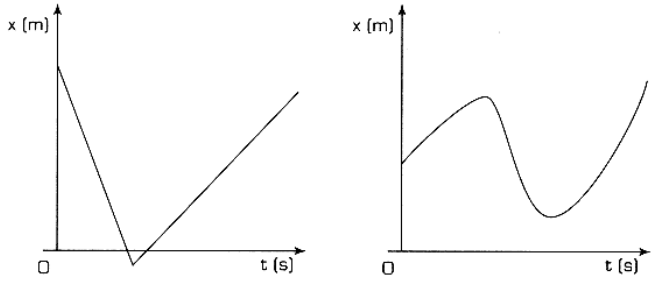
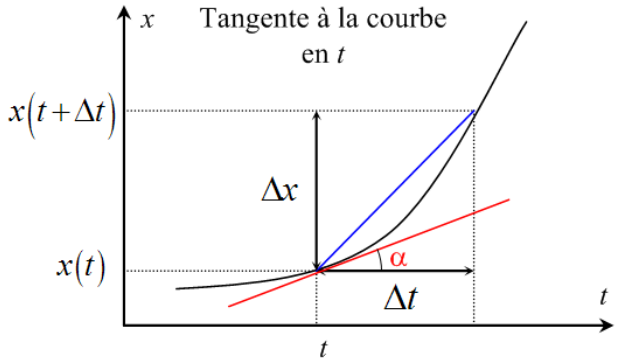



Figure 1.20
**Graphe x = f(t) pour des mouvements variés**

Nous devons donc être capables de déterminer la vitesse du mobile à un instant t quelconque du mouvement
***Pour calculer la vitesse instantanée v(t) à l'instant t, l'idée consiste à déterminer la vitesse moyenne pendant un intervalle de temps [t, t+Δt] et de prendre des Δt de plus en plus petits.***

***De cette façon, la vitesse moyenne calculée est d'autant plus proche de la vitesse à l'instant t que Δt est petit.***




Pour comprendre ce principe analysons un graphe $x = f(t)$ <u>quelconque</u>
Partons du calcul de la vitesse moyenne entre les instants $t$ et $t + \Delta t \rightarrow V_m = \dfrac{\Delta X}{\Delta t}$

***Considérons des Δt de plus en plus petits, la vitesse moyenne ainsi calculée va tendre vers une valeur qui indiquera la valeur de la vitesse au temps t donc V(t)***

On écrira $V(t) = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ quand $\Delta t$ devient très petit
Les mathématiciens utilisent le symbole suivant pour exprimer cette idée :

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

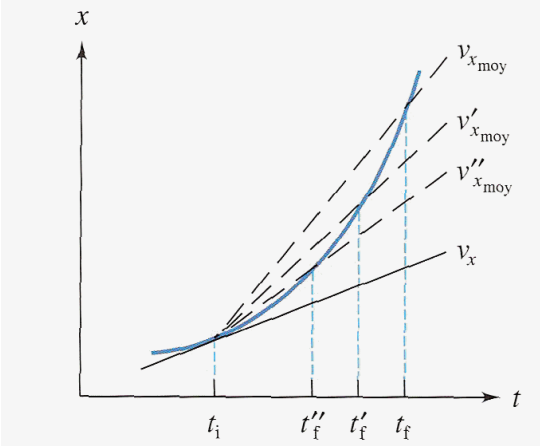



**Figure 3.7 ▲**
La vitesse instantanée $v_x$ à l'instant $t_i$ est la pente de la tangente à la courbe en $t_i$.

Le **<u>segment de droite</u>** qui joint les extrémités de l'intervalle finit par se confondre avec la **<u>tangente à la fonction</u>** au point où nous désirons connaître la vitesse soit $V(t)$.

Or la pente d'une telle droite dans un graphique x = f(t) nous donne la vitesse du mobile à l'instant considéré.
***Pour déterminer la vitesse V(t) à l'instant t, on trace la tangente à la courbe x : f(t) à l'instant t. On détermine ensuite cette tangente.***

***V((t) ⇒ pente de la tangente à la courbe x(t) à l'instant t***

## 2.2 Accélération instantanée

L'accélération instantanée représente l'accélération du mobile à un instant précis a(t).

### 2.2.1 Cas du mouvement uniformément varié

Nous savons que pour un MRUV, le graphe de la vitesse en fonction du temps $V = f(t)$ est une droite oblique.
L'accélération instantanée est constante et elle peut se déterminer en calculant la pente du graphe $V = f(t)$

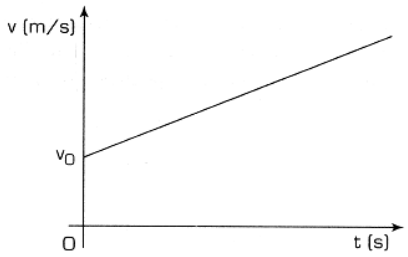



Figure 1.27a
**Graphe v = f(t) pour un MRUA**

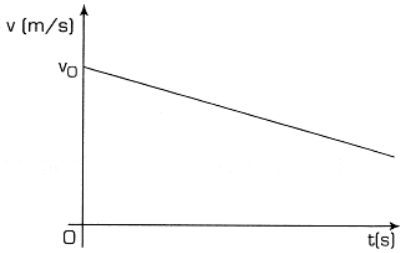



Figure 1.27b
**Graphe v = f(t) pour un MRUD**

La pente ΔV / Δt de ces graphes donne la valeur de l'accélération a du mobile

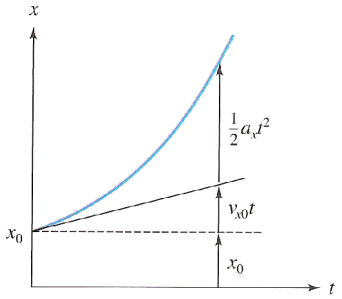



**Figure 3.17 ▲**
Le graphe de $x$ en fonction de $t$ pour une accélération constante (positive) est une parabole. La pente de la tangente en $t = 0$ est égale à la vitesse initiale $v_{x0}$.

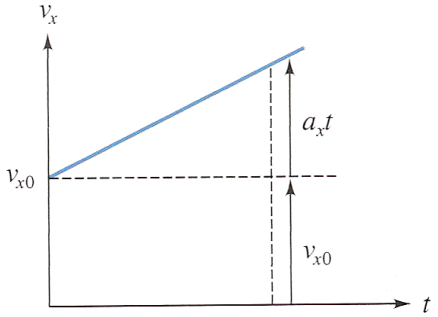
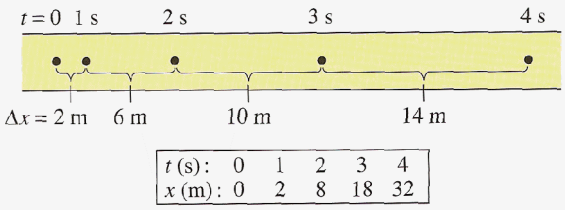



**Figure 3.16 ▲**
Le graphe de $v_x$ en fonction de $t$ pour une accélération constante (positive).

**Figure 3.11 ▶**
Un relevé des positions d'une particule soumise à une accélération constante. Au cours d'intervalles de temps successifs, le déplacement augmente d'une quantité constante, ici égale à 4 m.

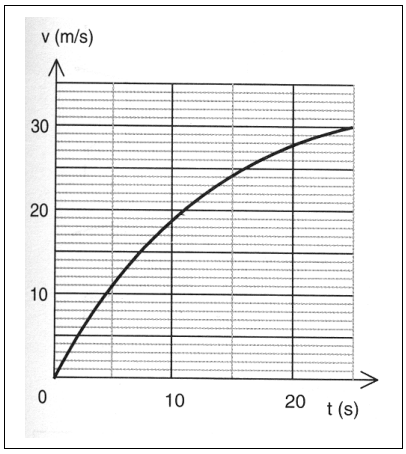


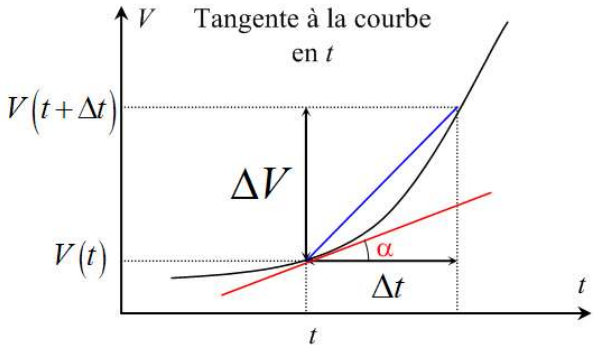
### 2.2.1 Cas du mouvement non uniformément varié

En pratique, les mouvements des corps sont tels que la vitesse varie (augmente ou diminue) mais d'une manière non uniforme. L'accélération qui en découle n'est alors plus constante et elle évolue à chaque instant.

Voici le graphe $V = f(t)$ d'une voiture qui démarre.

On se propose alors de déterminer l'accélération à chaque instant soit $a(t)$ .




Le principe est le même que pour le calcul de la vitesse instantanée sinon que l'on travaille sur un graphe $V = f(t)$

En fait, pour calculer $a(t)$ , nous utilisons l'accélération moyenne pendant un intervalle de temps [t, t+Δt]. Ensuite, on fait tendre Δt vers 0. De sorte que cette accélération moyenne va représenter l'accélération à l'instant t si Δt est petit.

Par un raisonnement identique à celui fait pour la vitesse instantanée, l'accélération instantanée

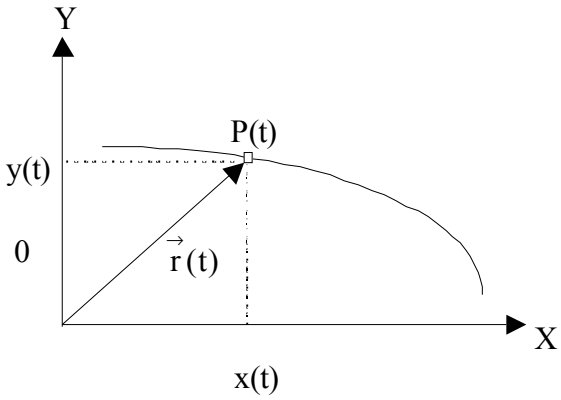
***a (t) = pente de la tangente à la courbe dans le graphique V(t) à l'instant t***

# 3. Les grandeurs vectorielles

## 3.1 Vecteur position

Le système de référence doit dans le cas d'un mouvement plan comporter deux axes que nous choisirons orthogonaux et munis de la même unité (de longueur).On les note X et Y

***Le vecteur <u>position</u> est un vecteur dont l'origine est l'origine O du système d'axes et dont l'extrémité est le point matériel.***
***Il caractérise la position du point P par rapport à l'origine du repère.***



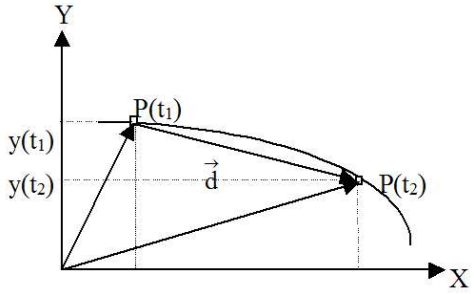

Le vecteur position a deux composantes:

$\vec{r}(t) = \{x(t), y(t)\}$

La **<u>valeur</u>** ou la grandeur de $\vec{r}(t)$ est donnée par : $r(t) = \sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2}$

## 3.2 Vecteur déplacement

Considérons l'intervalle de temps [$t_1$, $t_2$]

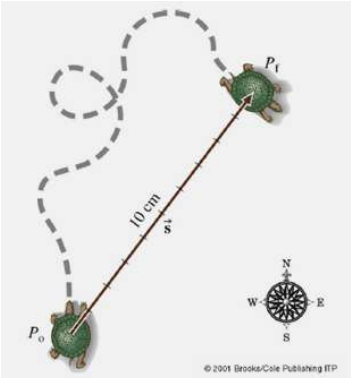



Regardons uniquement la position à l'instant $t_1$ et la position à l'instant $t_2$. Le corps a effectué un déplacement représenté par un vecteur $\vec{d}$ qui a 2 composantes { $dx$, $dy$ }

Le déplacement $\vec{d}$ est le vecteur $\overrightarrow{P(t_1)P(t_2)}$ dont les 4 caractéristiques sont :

- une origine: $P(t_1)$
- une direction: celle qui comprend les points $P(t_1)$ et $P(t_2)$ un sens: de $P(t_1)$ vers $P(t_2)$
- une valeur: $d$

***Le vecteur <u>déplacement</u> $\vec{d}$ entre deux positions (ou deux instants) indique le changement global de position du mobile, <u>sans tenir compte de la trajectoire</u> suivie entre ces deux positions.***

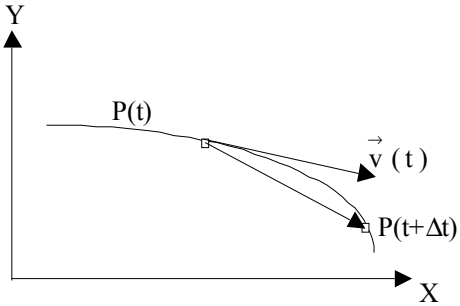



Le déplacement de la tortue est ici représenté par le vecteur *s* quelque soit le chemin réelle parcouru entre les positions $P_0$ et $P_f$

## 3.3 Vecteur Vitesse

En physique, la vitesse est une grandeur vectorielle notée $\vec{v}(t)$ et définie par :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{moyenne} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{d}}{\Delta t}$$




Considérons l'intervalle de temps [t, t+ Δt].

**<u>Remarque sur la direction</u>** de $\vec{v}(t)$

Lorsque l'on fait tendre Δt vers 0, la direction du vecteur déplacement $\vec{d}$ tend ***vers la direction de la tangente à la trajectoire au point P(t).***

***<u>Le vecteur vitesse V(t) est donc un vecteur tangent à la trajectoire</u>***

Les composantes de la vitesse instantanée $\vec{v}(t)$ sont données par $v_x(t), v_y(t)$

La grandeur $v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2}$

Sa seule composante $v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{d_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$

***Si nous faisons tendre Δt vers 0, x(t+Δt)-x(t) tend également vers 0, mais le rapport va tendre vers la dérivée de x(t) que nous noterons*** $\dot{x}(t)$

*(voir cours de math. 5G sur les dérivées)*

Le vecteur vitesse instantanée s'écrit : $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$

## 3.4 Accélération instantanée

L'accélération instantanée $\overrightarrow{a(t)}$ est également un vecteur définit par :

$$\overrightarrow{a(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{moyenne} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$$

et possédant deux composantes $a_x$ et $a_y$

De sorte que sa norme se calcule par $a = \sqrt{ax^2 + ay^2}$

***Dans le cas d'un mouvement rectiligne, l'accélération a une seule composante:***

$$a_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}$$

***Si nous faisons tendre $\Delta t$ vers 0, $v_x(t+\Delta t)-v_x(t)$ tend également vers 0, mais le rapport va tendre vers la <u>dérivée</u> de $v_x(t)$ que nous noterons :*** $\dot{v}_x(t)$

Le vecteur accélération instantanée s'écrit : $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}_x(t)$

*(voir cours de math. 5G sur les dérivées)*

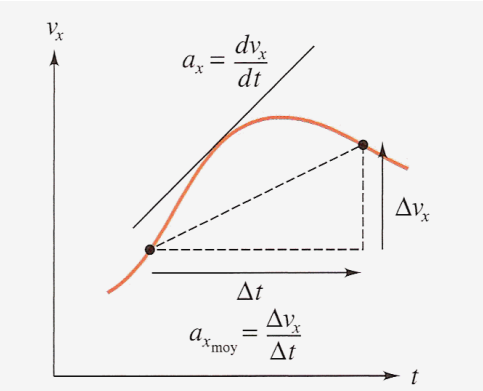



**Figure 3.10 ▲**
Sur un graphe de la vitesse en fonction du temps, la pente de la droite joignant deux points de la courbe est l'accélération moyenne sur l'intervalle de temps correspondant. L'accélération instantanée à un instant donné est la pente de la tangente à la courbe à cet instant.

**Tableau 3.2 ▼**

| Source d'accélération | $a$ ($g$) | Durée (s) |
|---|---|---|
| Ascenseurs | 0,2 | 3 |
| Automobile (arrêt brutal) | 1 | 3 |
| Atterrissage en parachute | 2-6 | 0,2-0,3 |
| Catapulte | 5 | 0,1 |
| Ouverture d'un parachute | 8-30 | 0,2-0,4 |
| Siège éjectable | 15-20 | 0,2 |
| Chute dans un filet de pompier | 20 | 0,1 |
| Accident d'automobile ou d'avion (éventuellement non mortel) | 20-100 | 0,02-0,1 |
| Capsule d'entraînement | 45 | 0,2-0,4 |
| Atterrissage de chute libre (non mortel) | 150 | 0,02 |
| Accident d'automobile ou d'avion (mortel) | 150-1000 | 0,01-0,001 |

**Tableau 3.3 ▼**

| Accélération ($g$) | Effets sur le corps humain |
|---|---|
| | Longitudinale positive ($a_L$) |
| 2,5 | Difficulté à se lever |
| 3-4 | Incapacité de se lever, vision trouble après 3 s |
| 6 | Syncope en 5 s, suivie d'une perte de connaissance, faute d'entraînement ou de vêtement anti-$g$ |
| | Longitudinale négative ($a_L$) |
| −1 | Congestion désagréable du visage |
| −2 à −3 | Congestion prononcée du visage, maux de tête lancinants, vision brouillée |
| −5 | Rarement tolérée |
| | Transversale positive ($a_T$) |
| 2-3 | Augmentation de pression abdominale, accommodation difficile |
| 4-6 | Respiration difficile, douleurs thoraciques |
| 6-12 | Respiration très difficile et douleurs thoraciques prononcées. Immobilisation des bras et jambes à 8$g$ |

(Source : J. F. Parker Jr. et V. R. West, *Bioastronautics Data Books*, 2e édition, NASA SP-3006, 1973.)

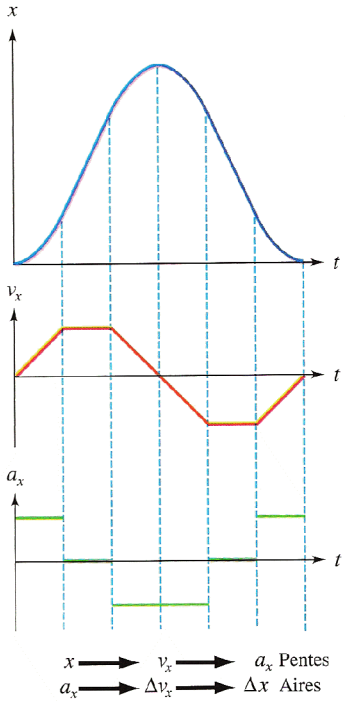



**Figure 3.31 ▲**
La relation entre les graphes de $x$ en fonction de $t$, de $v_x$ en fonction de $t$ et de $a_x$ en fonction de $t$, pour diverses accélérations constantes.

## 3.4.1 Accélérations normale et tangentielle

***- Lorsque seule la valeur de la vitesse change, alors l'accélération est tangente à la trajectoire. (Voir mouvements rectilignes).***
***- Lorsque seule la direction de la vitesse change, alors l'accélération est normale à la trajectoire. (Voir mouvement circulaire)***

### 3.4.1.1 Illustration : Le mouvement circulaire uniforme ( MCU )

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, la valeur de la vitesse est constante

$$v(t+\Delta t) = v(t) = v$$

***<u>Le vecteur vitesse change par le fait que sa direction varie au cours du temps</u>***. On dit qu'il y a une accélération mais on va voir qu'elle n'est plus // au vecteur $\vec{v}$ mais elle lui est perpendiculaire

Sur une circonférence de centre *O*, et de rayon *R*, $P(t)$ (correspondant au vecteur $\vec{r}(t)$ ) et $P(t+\Delta t)$ (correspondant au vecteur $\vec{r}(t+\Delta t)$ ) sont deux positions du mobile au temps *t* et *t* + Δ*t*.

Pour simplifier l'écriture, appelons *M* la position $P(t)$ et *M'* la position $P(t+\Delta t)$

Pendant le temps Δ*t,* le mobile parcourt un arc de cercle Δ*s*, correspondant à une distance Δ*c* = *MM'* (corde). Au point *M*, portons le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ et en *M'*, portons le vecteur $\vec{v}(t+\Delta t)$ . Ces deux vecteurs sont de **même grandeur** mais de **direction différente**. Il y a donc une **variation** de la vitesse. Reportons maintenant en *M*, le vecteur $\vec{v}(t+\Delta t)$ . La variation de la vitesse pendant l'intervalle de temps [ $t, t+\Delta t$ ] est $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t) = \overrightarrow{AB}$ et donc l'accélération moyenne est $\vec{a}_{moyenne} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\Delta t}$.

Les angles $\widehat{M'OM}$ et $\widehat{BMA}$ sont égaux car ce sont des angles côtés perpendiculaires. Les triangles *OMM'* et *OAB* sont donc des triangles isocèles semblables :

$$\rightarrow \frac{OM}{MA} = \frac{MM'}{AB} \rightarrow \frac{R}{v} = \frac{\Delta c}{\Delta v} \rightarrow AB = \Delta v = v\frac{\Delta c}{R}$$

Lorsque Δ*t* tend vers 0, l'accélération moyenne tend vers l'accélération instantanée et la corde tend vers l'arc de cercle. Ce que l'on écrit :

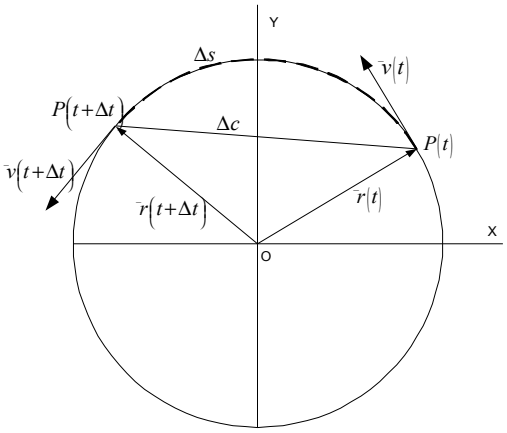
$$\Delta t \longrightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_{moyenne} \longrightarrow \vec{a} \\ \Delta\vec{c} = \overrightarrow{MM'} \longrightarrow \Delta\vec{s} \end{cases}$$

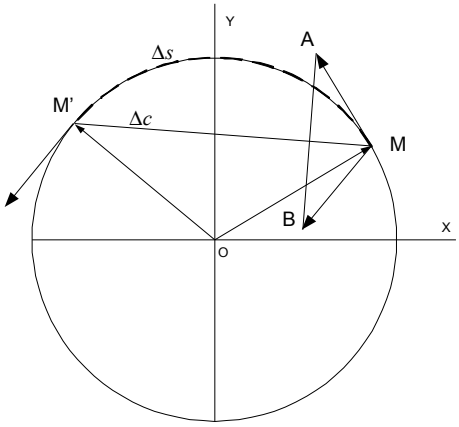
On a alors :

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{R}.\frac{\Delta c}{\Delta t} = \frac{v}{R}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta c}{\Delta t} = \frac{v}{R}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} \text{ car } v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

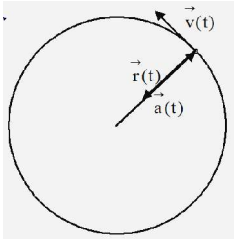
Notons de plus que *MB* étant perpendiculaire à *OM'*, on a $\widehat{OM'M} + \widehat{M'MB} = \dfrac{\pi}{2}$, mais comme les angles *OM'M* et *ABM* sont égaux : $\widehat{ABM} + \widehat{M'MB} = \dfrac{\pi}{2}$. Autrement dit, $\overrightarrow{AB} \perp \Delta\vec{c}$.

On en conclut que quand Δt→0, $\Delta\vec{v}$ et donc $\vec{a}$ seront perpendiculaires à $\Delta\vec{s}$, c'est-à-dire également à $\vec{v}(t)$



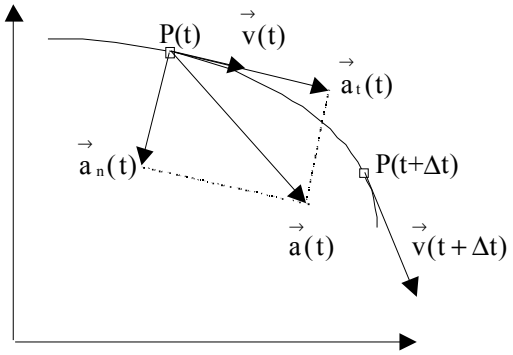

***<u>La direction du vecteur accélération instantanée est donc normale à la trajectoire et son sens le dirige vers le centre de la circonférence et sa grandeur vaut :</u>***




$$a = \frac{v^2}{R}$$

D'une manière générale, $\vec{a}(t)$ possède pour une trajectoire courbe, 2 composantes

- ***une <u>composante tangentielle</u>*** $\vec{a}_t(t)$ ***à la vitesse qui fait varier la valeur de la vitesse***
- ***une <u>composante normale</u>*** $\vec{a}_n(t)$ ***à la vitesse qui fait varier la direction de la vitesse.***




$$\vec{a}(t) = \vec{a}_n(t) + \vec{a}_t(t)$$

# 4. Les mouvements rectilignes

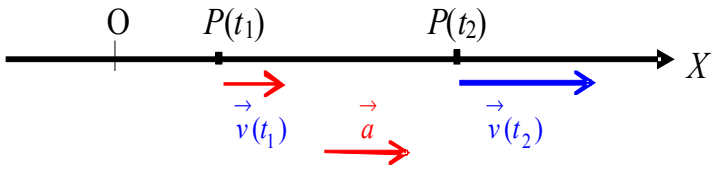
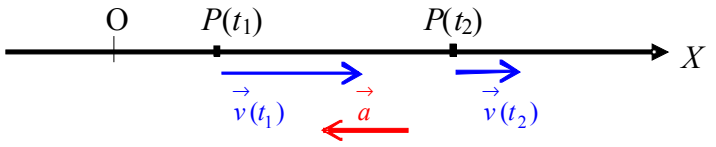
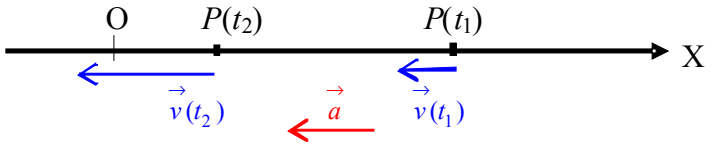
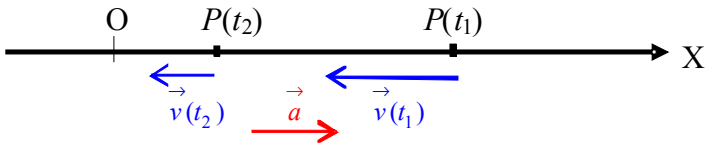
Les notions vectorielles de position, de déplacement, de vitesse et d'accélération définies pour des mouvements paraboliques (2 dimensions) sont évidemment applicables aux mouvements rectilignes (1 dimension).
Nous ne les développerons donc pas. Toutefois, il est intéressant de reprendre les notions vectorielles de l'accélération et de la vitesse afin de mettre en évidence ***<u>l'importance de l'orientation de l'axe de référence ainsi que l'orientation des vecteurs.</u>***

Voici quelques exemples de MRUV

Rappelons que dans ce cas $\vec{a} = \dfrac{\overrightarrow{V(t2)} - \overrightarrow{V(t1)}}{\Delta t}$

Le sens de $\vec{a}$ est celui de la différence $(\overrightarrow{V(t2)} - \overrightarrow{V(t1)})$

Pour une question de clarté, dans les dessins suivants, les vecteurs vitesse et accélération n'ont pas comme origine la position du mobile à l'instant considéré.

| | |
|---|---|
| ***Mouvement accéléré.*** L'accélération et la vitesse ont le même sens : $a_x$ et $v_x$ ont le même signe. |   |
| ***Mouvement décéléré.*** L'accélération et la vitesse sont de sens contraires : $a_x$ et $v_x$ sont de signes contraires. |   |
| ***Mouvement accéléré.*** L'accélération et la vitesse ont le même sens : $a_x$ et $v_x$ ont le même signe. |   |
| ***Mouvement décéléré.*** L'accélération et la vitesse sont de sens contraires : $a_x$ et $v_x$ sont de signes contraires. |   |

***Conclusion***
***Le mouvement est :***

| | | |
|---|---|---|
| ***MRUA*** | ***ssi le produit*** | ***a .V est positif*** |
| ***MRUD*** | ***ssi le produit*** | ***a . V est négatif*** |

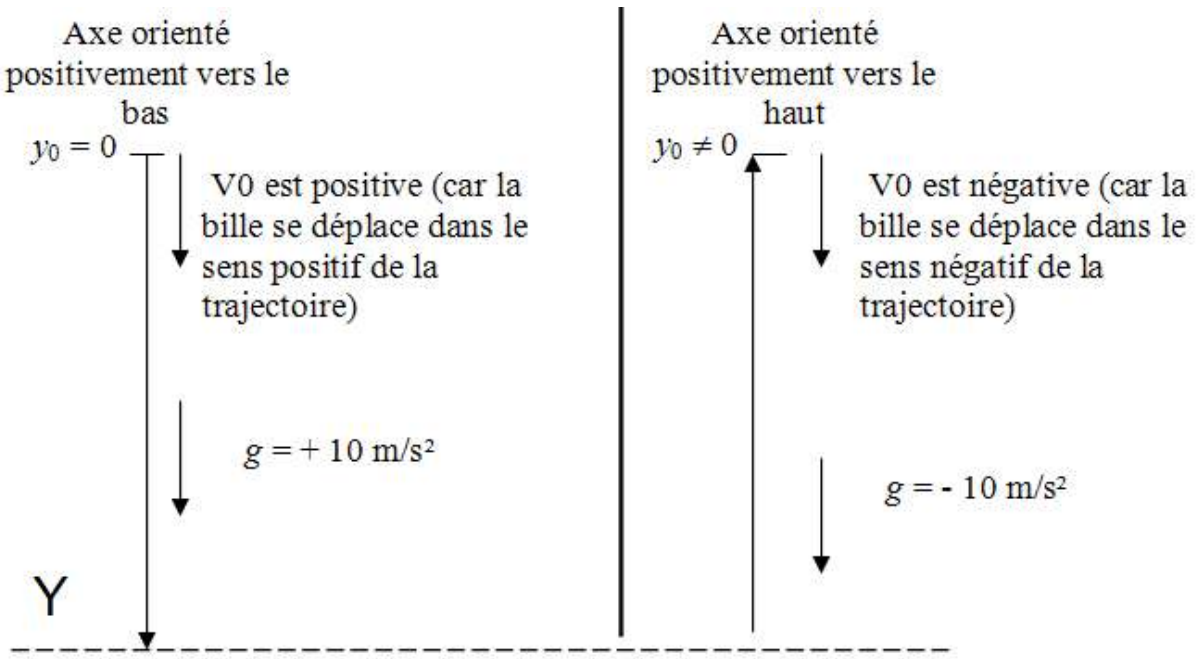
## Cas des corps lancés vers le haut ou vers le bas

L'étude de tels mouvements peut se faire suivant un axe vertical orienté vers le haut ou vers le bas. Bien que les équations de départ soient différentes, le résultat final de l'étude du problème ne dépend absolument pas de l'orientation de l'axe vertical.

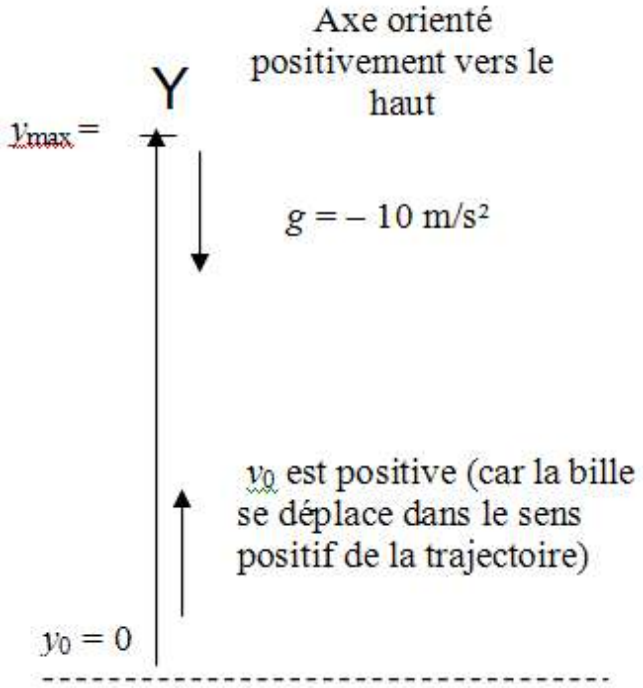
**Equations**

$$y = y_o + v_o t + \frac{gt^2}{2}$$

$$v = v_0 + gt$$




**Corps lancé vers le haut**




**Equations**

$$y = y_o + v_o t + \frac{gt^2}{2}$$

$$v = v_0 + gt$$

# Lecture

En première approximation, on considère le corps humain comme un objet à demi solide (os et muscles) dans lequel les fluides (le sang) peuvent circuler. Pour de brèves accélérations, durant moins de 0,2 s, les limites de contrainte des os, des vertèbres et des organes internes sont importantes. Pour des accélérations soutenues durant plus de 0,2 s, le déplacement de la masse sanguine entraîne un flux sanguin excessif ou insuffisant dans certaines parties de l'organisme. Bien entendu, c'est dans le cas d'une accélération longitudinale positive que ces effets sont les plus graves. La diminution de pression sanguine dans la tête entraîne rapidement une perte de vision, puis la perte de connaissance.

Le tableau 3.2 donne la liste de plusieurs sources d'accélération et leur intensité. L'organisme humain peut supporter une accélération de 45$g$ pendant 0,1 s sans effets néfastes. Pour une période de 1 s, le seuil de tolérance tombe à 10$g$. Une accélération de 100$g$ durant 0,1 s s'occasionne des blessures graves, voire fatales. Dans un accident d'automobile ou d'avion, une ceinture de sécurité et un harnais bien ajusté donne au passager la même accélération que le véhicule, peut-être 100$g$ environ pendant 0,03 s. S'il n'était pas retenu, le corps subirait une accélération beaucoup plus importante (500$g$) en heurtant un obstacle comme un pare-brise.

Le tableau 3.3 donne la liste de quelques réactions physiologiques provoquées par des accélérations soutenues. Les pilotes de combat sont parfois soumis à des accélérations de 6$g$ lors de certaines manœuvres. Pour élever leur seuil de syncope, on les entraîne à crisper leurs muscles en grimaçant, ce qui réduit l'effet de l'accélération d'environ 0,5$g$. Les « vêtements anti-$g$ », composés de bandes ou de poignets gonflables évitant l'afflux de sang dans les jambes et l'abdomen, réduisent l'accélération apparente de 1,5$g$ environ. Le seuil de tolérance est voisin de 7$g$ pendant 15 s.

Nous nous sommes surtout intéressés à l'accélération ; les ingénieurs chargés des études de sécurité examinent également le taux de variation de l'accélération, c'est-à-dire $da/dt$. On estime que cette quantité, appelée secousse, a des effets encore plus importants.

(a)

(b)

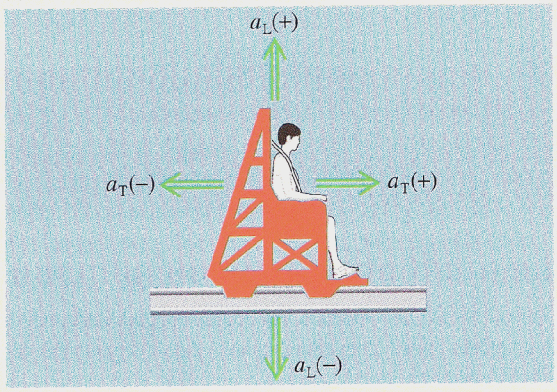


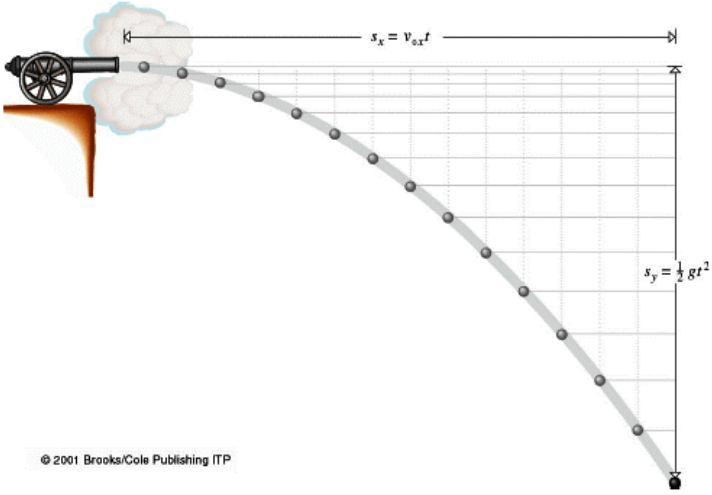

**Figure 3.30 ▲**
(a) Le colonel John Stapp soumis à une forte accélération dans une capsule d'entraînement. (b) L'accélération subie par le corps humain est soit longitudinale (selon un axe allant de la tête aux pieds), soit transversale (selon un axe avant-arrière).

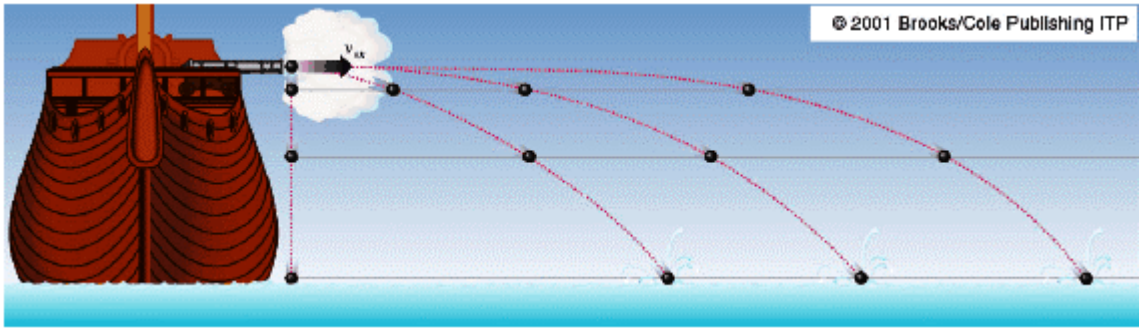
# 5. Les mouvements paraboliques : trajectoire

## 3.5 Exemples de mouvements paraboliques

### 3.5.1 Corps lancé horizontalement

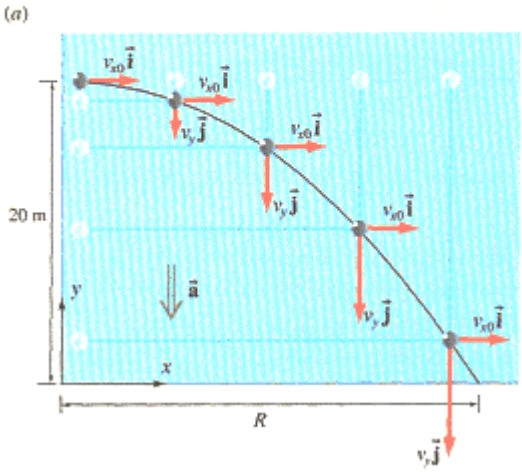
Ce mouvement est la combinaison d'un MRU suivant X et d'un MRUA vers le bas suivant Y
En effet, il n'agit aucune force horizontalement. En vertu du principe d'inertie, le mouvement horizontal est donc un MRU
Verticalement, la force de la pesanteur agit. En vertu de la deuxième loi de Newton, le mouvement vertical est donc un MRUA




**Exemple**

Une balle est projetée horizontalement à 15 m/s d'une falaise haute de 20 m. Déterminer : (a) la durée de sa trajectoire dans l'air ; (b) sa portée horizontale $R$, qui correspond au déplacement horizontal séparant le point de départ du point d'impact au sol.



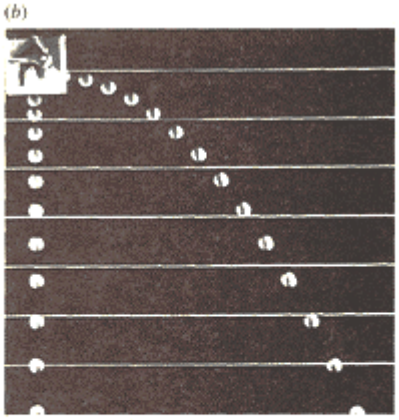




**Figure 4.12**
(a) Les positions de la balle sont séparées par des intervalles de temps égaux. Le mouvement horizontal d'une balle est à vitesse constante alors que le mouvement vertical est à accélération constante (à condition que la résistance de l'air soit négligeable). (b) La composante verticale du mouvement d'une balle lancée horizontalement est la même que celle d'une balle qu'on laisse simplement tomber.

**Solution**

À la figure 4.12*a*, nous avons choisi comme origine le pied de la falaise. On remarque que la trajectoire (ligne pleine) correspond au tracé de $y$ en fonction de $x$, et non de $y$ en fonction de $t$.

On voit sur la figure que les déplacements horizontaux durant des intervalles de temps égaux sont égaux, c'est-à-dire que $v_x = v_{x0}$ = constante. À tout instant, la coordonnée $y$ et la composante verticale de la vitesse sont les mêmes que si l'on avait simplement laissé tomber la balle sans lui donner de vitesse horizontale (figure 4.12*b*).■

*Données*: $x_0 = 0$; $y_0 = 20$ m; $v_{x0} = 15$ m/s; et $v_{y0} = 0$. Les coordonnées à un instant ultérieur sont données par les équations 4.9 et 4.11 :

$$x = 15t \qquad \text{(i)}$$

$$y = 20 - 4{,}9t^2 \qquad \text{(ii)}$$

(a) Lorsque la balle touche le sol, sa coordonnée verticale est nulle, c'est-à-dire que $y = 0$. De l'équation (ii), on tire alors la durée de la trajectoire dans l'air :

$$0 = 20 - 4{,}9t^2$$

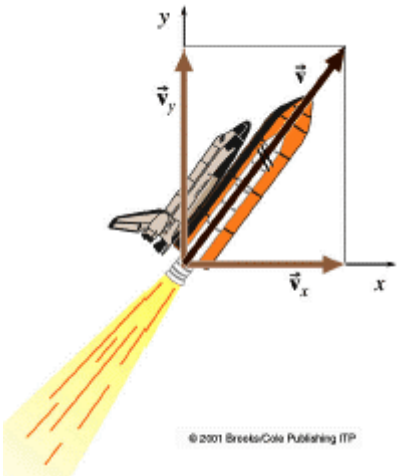
Donc, $t = -2{,}02$ s ou 2,02 s. Nous rejetons la solution négative, puisque nous avons supposé que la balle était lancée à $t = 0$. La durée de la trajectoire ne dépend pas de la valeur de la composante horizontale de la vitesse initiale. Une balle qu'on laisserait simplement tomber de cette hauteur toucherait également le sol au bout de 2,02 s.

(b) Pour trouver la portée horizontale, on remplace $t$ par la durée de la trajectoire dans l'équation (i). On a donc

$$R = 15t = 30{,}3 \text{ m}$$

## 3.5.2 Corps lancé vers le haut avec une inclinaison α

***Il apparaît que le mouvement suivant l'axe X et le mouvement suivant l'axe Y sont complètement indépendants l'un de l'autre.***




Le mouvement parabolique (corps lancé vers le haut avec une inclinaison par rapport à l'horizontal) est la composition de 2 mouvements rectilignes

Le corps est lancé avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ qui fait un angle α avec l'axe *X*

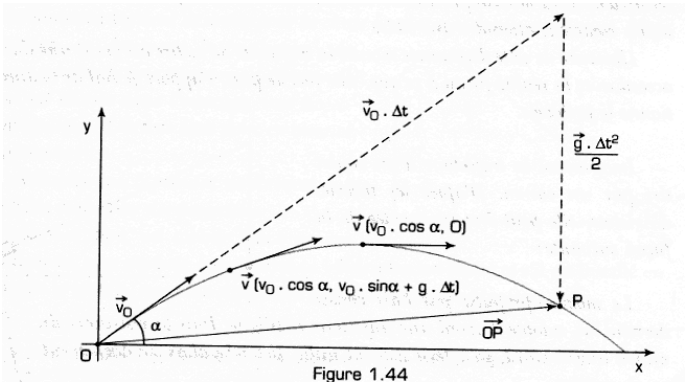


Figure 1.44

La vitesse étant un vecteur, on peut le décomposer en deux composantes :

Une // à l'axe X : $v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha$

Une // à l'axe Y : $v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$

L'étude du corps lancé avec un angle α se ramène alors à l'étude :

Suivant X d'un MRU avec une vitesse $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$

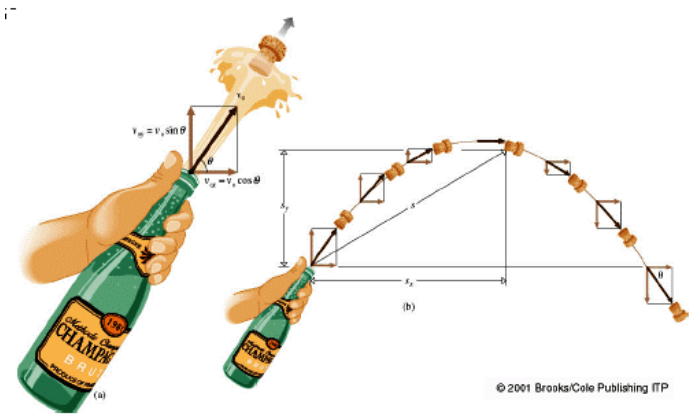
Suivant Y d'un corps lancé vers le haut avec une vitesse $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$

***Chaque mouvement obéit à ses propres équations et ce dans la direction suivant laquelle il se produit.***

***Etude de la trajectoire***

***La trajectoire de l'objet est une courbe***. Comment déterminer l'équation de cette trajectoire ?

***Prendre les équations de x = f(t) et y = f(t) et les combiner pour éliminer t.***
***Comme le temps est le même pour les 2 équations, celles-ci décrivent le mouvement d'un seul corps et non celui de deux corps différents. (Voir exercices)***




## Exemple 1

Un projectile est lancé vers le haut à partir du sol avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ selon un angle $\theta_0$ par rapport à l'horizontale (angle de projection). Déterminer : (a) la durée de sa trajectoire ; (b) la portée horizontale $R$ ; (c) la forme de sa trajectoire qui correspond à la fonction $y = f(x)$ reliant la coordonnée $y$ à la coordonnée $x$.

### Solution

Le système de coordonnées et les composantes de la vitesse en divers points sont représentés à la figure 4.13. D'après les équations 4.9 et 4.11, les coordonnées à l'instant $t$ sont

$$x = (v_0 \cos \theta_0)t \qquad \text{(i)}$$

$$y = (v_0 \sin \theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad \text{(ii)}$$

(a) Pour trouver la durée de la trajectoire, on remarque que $y = 0$ au départ et à l'arrivée. D'après l'équation (ii), on trouve deux solutions : $t = 0$ (au point de départ) et

$$t = \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g} \qquad \text{(iii)}$$

qui correspond au second instant où $y = 0$.

(b) Pour trouver la portée horizontale, on remplace l'expression (iii) dans l'équation (i) : $R = (v_0 \cos \theta_0)(2v_0 \sin \theta_0)/g$. En utilisant l'identité trigonométrique $\sin 2\theta_0 = 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0$, on obtient

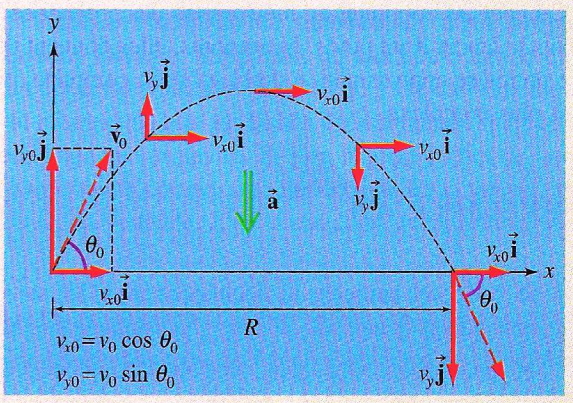



**Figure 4.13 ▲**
Sans la résistance de l'air, la trajectoire d'un projectile est une parabole. La trajectoire est symétrique par rapport à son point le plus élevé, à condition que la particule atterrisse au même niveau que celui où elle a été projetée.

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \qquad \text{(iv)}$$

Soulignons que l'équation (iv) est valable *seulement* si le projectile revient à sa hauteur initiale, c'est-à-dire si $\Delta y = 0$. Pour un module de vitesse initiale donné $v_0$, la portée est maximale lorsque $\sin 2\theta_0 = 1$, c'est-à-dire lorsque $\theta_0 = 45°$. En général, pour des

valeurs données de $R$ et de $v_0$, il y a deux valeurs possibles de $\theta_0$. Par exemple, si $v_0 = 20$ m/s et $R = 30$ m, alors $\sin 2\theta_0 = Rg/v_0^2 = 0{,}735$. Donc $\theta_0 = 23{,}7°$ ou $66{,}3°$. On remarque que $\theta_0 = 45° \pm \alpha$, avec $\alpha = 21{,}3°$ (figure 4.14).

(c) Pour trouver la forme de la trajectoire, nous devons exprimer $y$ en fonction de $x$. Pour ce faire, nous tirons $t = x/(v_0 \cos \theta_0)$ de l'équation (i) et nous remplaçons cette valeur dans l'équation (ii). Cela nous donne

$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{g}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} x^2 \qquad \text{(v)}$$

Cette équation est de la forme $y = Ax^2 + Bx$, qui est l'équation d'une parabole.

Galilée fut le premier à démontrer que, sans la résistance de l'air, la trajectoire d'un projectile est parabolique. Il fut également le premier à montrer que, pour des angles initiaux de $45° \pm \alpha$, les portées sont identiques.■

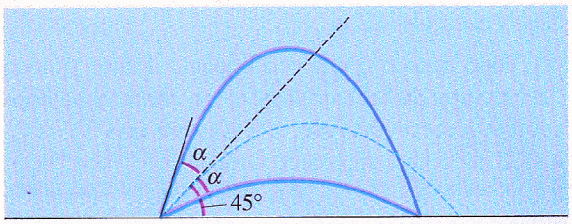



**Figure 4.14 ▲**
La portée maximale d'un projectile qui atterrit au niveau initial correspond à un angle de projection de 45°. Galilée a démontré que les portées horizontales sont égales pour des angles de projection de $45° - \alpha$ et $45° + \alpha$.

## Exemple 2

On lance une balle à 21 m/s suivant un angle d'élévation de 30° d'un toit haut de 16 m (figure 4.15). Trouver : (a) la durée de la trajectoire de la balle ; (b) sa portée horizontale ; (c) sa hauteur maximale ; (d) l'angle d'impact de la balle sur le sol ; (e) sa vitesse lorsqu'elle est à 2 m au-dessus du toit.

### Solution

L'origine et le système de coordonnées sont représentés à la figure 4.15. *Données* : $x_0 = 0$ ; $y_0 = 16$ m ; $v_0 = 21$ m/s et $\theta_0 = 30°$. Donc, $v_{x0} = v_0 \cos \theta_0 = 18{,}2$ m/s et $v_{y0} = v_0 \sin \theta_0 = 10{,}5$ m/s. D'après les équations 4.9 et 4.11, on a

$$x = 18{,}2t \qquad \text{(i)}$$

$$y = 16 + 10{,}5t - 4{,}9t^2 \qquad \text{(ii)}$$

(a) La trajectoire prend fin lorsque $y = 0$. D'après l'équation (ii), on a donc

$$t = \frac{10{,}5 \pm \sqrt{10{,}5^2 + 64 \times 4{,}9}}{9{,}8} = 3{,}17 \text{ s} ; -1{,}03 \text{ s}$$

La durée de la trajectoire est donc de 3,17 s, car nous rejetons $t = -1{,}03$ s. Il est intéressant de noter que ce deuxième temps correspond à celui que mettrait [illegible]ée *vers le* [illegible] nous avons

$$0 = (10{,}5)^2 - 2(9{,}8)(H - 16)$$

Donc $H = 21{,}6$ m.

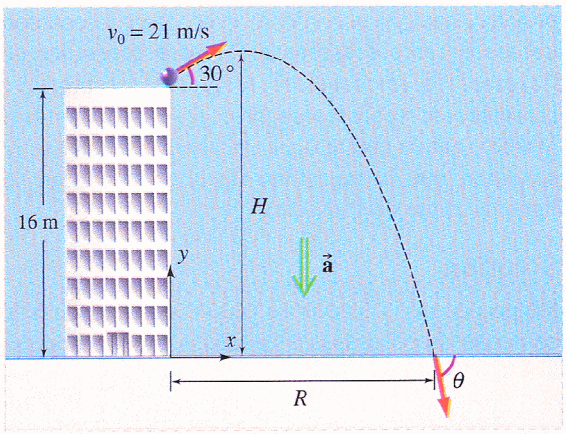



**Figure 4.15 ▲**
Lorsque le point d'atterrissage est plus haut ou plus bas que le point initial, la trajectoire n'est pas symétrique par rapport au point le plus élevé. L'angle d'impact est donné par $\tan \theta = v_y/v_x$.

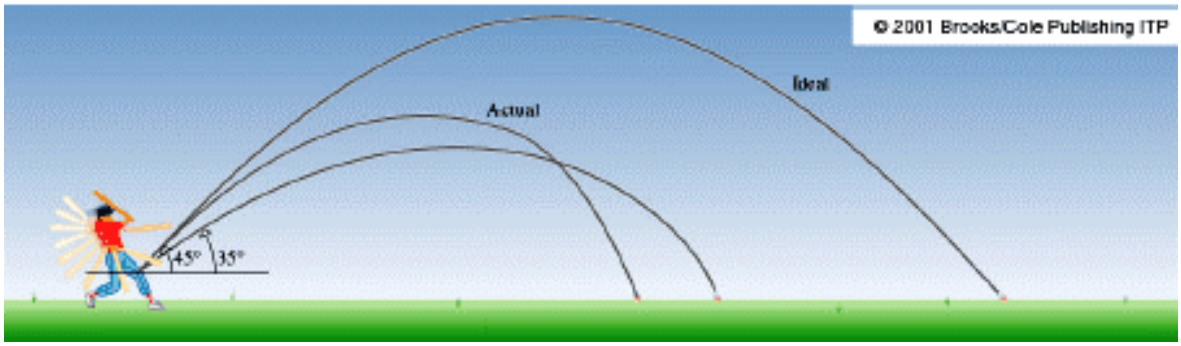
(b) En utilisant $t = 3{,}17$ s dans (i), on trouve la portée $R = (18{,}2 \text{ m/s})(3{,}17 \text{ s}) = 57{,}7$ m.

(c) Lorsque la balle atteint sa hauteur maximale $H$, nous savons que $v_y = 0$. D'après l'équation 4.12, [illegible] la balle à atteindre le sol si elle était lan[illegible] *bas* avec le même angle. On aurait alors :

$$y = 16 - 10{,}5t - 4{,}9t^2 = 0$$

qui donne $t = 1{,}03$ s et $-3{,}17$ s.

**Remarque :** Dans la réalité, la résistance de l'air est loin d'être négligeable surtout pour des vitesses élevées. La portée réelle est alors nettement plus courte et le maximum est atteint pour un angle proche de 35°.




# 6 Exercices de mécanique

## 6.1. Exercices résolus

1. Un train effectue normalement un trajet entre une ville *A* et une ville *B* en 4 heures (pour respecter son horaire).
Un incident à mi-parcours provoque l'arrêt du convoi durant 5 minutes. Pour arriver à l'heure normalement prévue à l'horaire, le conducteur doit augmenter la vitesse du train de *10 km/h* pour le reste du trajet.
Déterminer la longueur totale *d* du trajet et la vitesse *v* normalement prévue à l'horaire, si on suppose pour chaque cas que le train circule à vitesse constante sans s'arrêter et que l'on ne tient pas compte, pour le calcul, des phases d'accélération ni de freinage du convoi..
*Suggestions*
Soit $v_2$ la vitesse du train pendant la deuxième partie du trajet
Soit $t_1$ le temps de la première partie du trajet
Soit $t_2$ le temps de l'arrêt. Que vaut $t_2$ ?
Soit $t_3$ le temps de la deuxième partie du trajet.

1) En temps normal, quelle relation relie *v* et *d* ?
2) Que vaut $v_2$ en fonction de *v* ?
3) Exprimer $t_1$ en fonction de *d* et *v*
4) Exprimer $t_3$ en fonction de *d* et $v_2$
5) Que vaut $t_1 + t_2 + t_3$ ?
6) Vous pouvez conclure

<u>Solution</u>

1) En temps normal : $4 = \frac{d}{v} \rightarrow d = 4v$

2) La vitesse pendant la deuxième moitié est : $v_2 = v + 10$

3) $t_1$ est le temps pour faire la première moitié du trajet : $t_1 = \frac{d}{2v}$.

4) $t_3$ est le temps pour faire la deuxième moitié à la vitesse $v_2$ : $t_3 = \frac{d}{2v_2} = \frac{d}{2(v+10)}$

5) Le temps total doit être égal à 4h. L'arrêt $t_2$ étant égal à 5 min ou $\frac{1}{12}h$

$\rightarrow t_1 + t_2 + t_3 = 4$

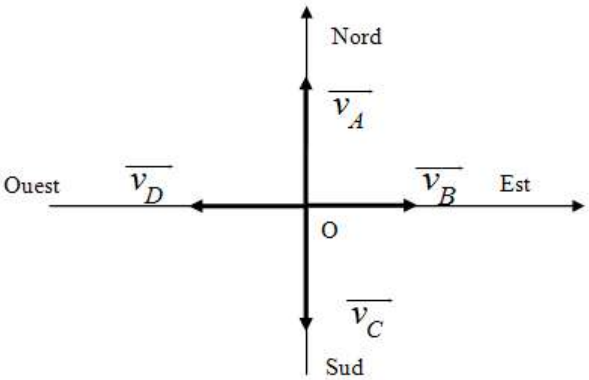
6) On remplace $t_1$, $t_2$ et $t_3 \rightarrow \frac{d}{2v} + \frac{1}{12} + \frac{d}{2(v+10)} = 4$

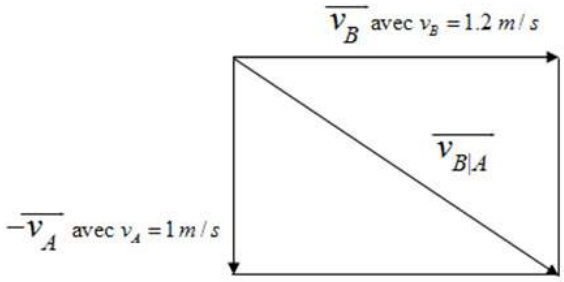
Or : $d = 4v \rightarrow 2 + \frac{1}{12} + \frac{2v}{v+10} = 4 \rightarrow \frac{2v}{v+10} = \frac{23}{12} \rightarrow 24v = 23v + 230 \rightarrow v = 230\ km/h$

et $d = 4v = 4 \times 230 = 920\ km$

2. Quatre personnes sont réunies en un point *O*. A l'instant $t = 0$, *A* se met en route vers le Nord à la vitesse de 1 m/s, *B* vers l'Ouest à la vitesse de 1.2 m/s, *C* vers le Sud à la vitesse de 0.8 m/s et *D* vers l'Est à la vitesse de 1.4 m/s.

a) Faire un dessin de la situation.
b) Calculer la vitesse **relative** de *B, C* et *D* par rapport à *A*. On déterminera
   a. La grandeur de la vitesse (Module)
   b. La direction et le sens de la vitesse, c'est-à-dire l'angle entre la direction de la vitesse et la direction Sud-Nord
c) Après combien de temps, *A* et *B* seront-ils éloignés de 100 m ?




Pour la vitesse **relative** de *B* par rapport à *A*, il faut considérer $-\overrightarrow{v_A}$. En effet, *B* **s'éloigne** de *A*. De même, pour *C* et *D*

<u>Solution</u>

Représentons par $\left|\overrightarrow{v_{B|A}}\right|$ le module de la vitess e de *B* par rapport à *A* :

$\overrightarrow{v_A}$ et $\overrightarrow{v_B}$ ont des directions perpendiculaires . On applique Pythagore

$$\left|\overrightarrow{v_{B|A}}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{v_A}\right|^2 + \left|\overrightarrow{v_B}\right|^2} = \sqrt{1.2^2 + 1^2} = 1.562\ m/s$$

De même : $\left|\overrightarrow{v_{D|A}}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{v_A}\right|^2 + \left|\overrightarrow{v_D}\right|^2} = \sqrt{1.4^2 + 1^2} = 1.72\ m/s$

$\overrightarrow{v_A}$ et $\overrightarrow{v_C}$ ont même direction mais sont de sen s contraire $\rightarrow \left|\overrightarrow{v_{C|A}}\right| = \left|\overrightarrow{v_A}\right| + \left|\overrightarrow{v_C}\right| = 1 + 0.8 = 1.8\ m/s$

Considérons le sens trigonométrique comm e sens positif

Par rapport à la direction Ouest Est, $\overrightarrow{v_{B|A}}$ e st orienté d'un angle

$$\tan \alpha_{B|A} = \frac{-\left|\overrightarrow{v_A}\right|}{\left|\overrightarrow{v_B}\right|} = -\frac{1}{1.2} \rightarrow \alpha_{B|A} = -39.8°$$

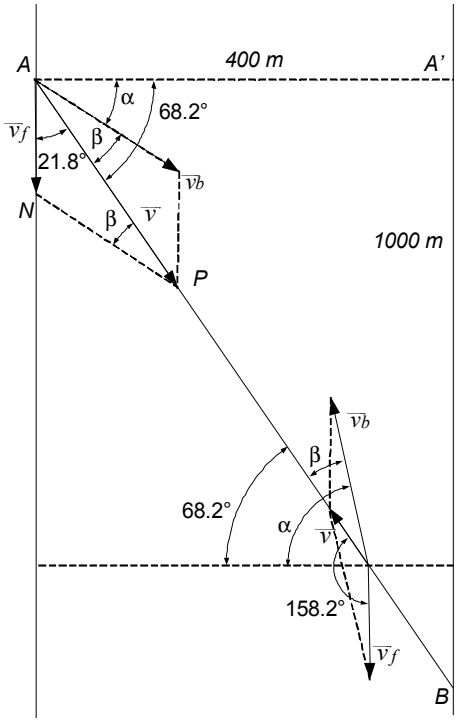
Par rapport à la direction Sud Nord: $\alpha_{B|A} = -39.8 - 90 = -129.8°$

De même : tan $\alpha_{B|A} = \dfrac{-\left|\overrightarrow{v_A}\right|}{-\left|\overrightarrow{v_D}\right|} = \dfrac{1}{1.4} \rightarrow \alpha_{B|A} = 35.5°$

Par rapport à la direction Sud Nord: $\alpha_{B|A} = 35.5° + 90 = 125,5°$

Enfin, $A$ et $B$ seront éloignés de 100 $m$ après $t_{B|A} = \dfrac{100}{1.562} = 64\ s$

3. Un bateau traverse un fleuve de 400 m de large. Il doit rejoindre un point B situé à 1000 m plus bas sur l'autre rive. Le courant du fleuve est de 2 m/s et le bateau navigue à la vitesse de 5 m/s.
Quel est le cap (c'est-à-dire l'angle avec la ligne perpendiculaire aux rives) que le capitaine doit suivre pour assurer le parcours le plus court. Quel sera le temps de parcours.
Mêmes questions pour le voyage de retour.




Solution

Il s'agit d'un problème de composition de vitesse.
Soit $\vec{v}_f$ la vitesse du fleuve avec $\left|\vec{v}_f\right|$=2 m/s.
Soit $\vec{v}_b$ la vitesse du bateau avec $\left|\vec{v}_b\right|$=5 m/s.

ALLER

Le bateau doit naviguer selon la direction $AB$ qui fait un angle égal à $\arctan \dfrac{1000}{400} = 68.2°$ avec la ligne $AA'$. Par conséquent l'angle entre $\vec{v}_f$ et $AB$ est de 21.8°.
Le vecteur $\vec{v} = \vec{v}_f + \vec{v}_b$ doit être orienté selon $AB$.
Résolvons le triangle $ANP$ :

$$NP^2 = AN^2 + AP^2 - 2.AN.AP.\cos 21,8$$

$$\rightarrow \left|\vec{v}_b\right|^2 = \left|\vec{v}_f\right|^2 + \left|\vec{v}\right| - 2.\left|\vec{v}_f\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos 21.8$$

$$\rightarrow 5^2 = 2^2 + \left|\vec{v}\right| - 2.2.\left|\vec{v}\right|.\cos 21.8 \rightarrow \left|\vec{v}\right|^2 - 3.714.\left|\vec{v}\right| - 21 = 0$$

Cette équation a pour solutions –3.087 m/s (A rejeter car négative) et 6.801 m/s. Ceci représente donc la vitesse réelle du bateau.

L'angle β s'obtient par : $\cos\beta = \dfrac{\left|\vec{v}\right| + \left|\vec{v}_b\right| - \left|\vec{v}_f\right|}{2.\left|\vec{v}\right|.\left|\vec{v}_b\right|} = \dfrac{6.801^2 + 5^2 - 2^2}{2 \times 6.801 \times 5} = 0.9889 \rightarrow \beta = 8.55°$

Le cap cherché est alors α = 68.2 – 8.55= 59.65°
On obtient le temps de traversée
Soit par

$$t = \frac{\text{largeur du fleuve}}{\text{composante horizontale de la vitesse du bateau}} = \frac{AA'}{\left|\vec{v}_b\right|.\cos\alpha} = \frac{4000}{50.\cos 59.65} = \boxed{158\ s}$$

Ou bien par : $t = \dfrac{\text{Longueur } AB}{\left|\vec{v}\right|} = \dfrac{\sqrt{400^2 + 1000^2}}{6.801} = \boxed{158\ s}$

RETOUR

On refait le même raisonnement *mutatis mutandis* [1]

Vitesse réelle : $5^2 = 2^2 + \left|\vec{v}\right|^2 - 2.2.\left|\vec{v}\right|\cos 158.2 \rightarrow \left|\vec{v}\right|^2 + 3.774\left|\vec{v}\right| - 21 = 0$

$\rightarrow \left|\vec{v} = 3.06\ m/s\right|$

$\cos\beta = \dfrac{5^2 + 3.06^2 - 2^2}{2\times 5\times 3.06} = 0.992 \rightarrow \beta = 7.13°$

$\rightarrow \alpha = 68.2 + 7.13 = \boxed{75.33°}$

$\rightarrow t = \dfrac{400}{5\cos 75.33} = \boxed{316\ s}$

4) Une pierre est lâchée du haut d'un puit. Du haut du puit, on entend le bruit de la pierre frapper le sol 6.5 s plus tard. Sachant que la vitesse du son est de 340 m / s, calculer la hauteur du puit. Note : le son se déplace à une vitesse constante.

*Suggestions*

1) Soit $t_1$ le temps de descente de la pierre. Calculer la hauteur $h$ en fonction de $t_1$
2) Soit $t_2$ le temps de remontée du son. Calculer la hauteur $h$ en fonction de $t_2$
3) Que pouvez-vous dire au sujet de la somme de $t_1$ et $t_2$ ? Exprimer par exemple $t_1$ en fonction $t_2$
4) Vous pouvez maintenant conclure.

Solution

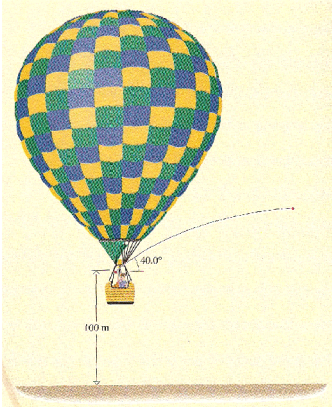
Soit $t_1$ le temps de chute de la pierre, et $t_2$ le temps mis par le son pour remonter.

$$\begin{cases} h = \dfrac{gt_1^2}{2} \\ h = 340\,t_2 \\ t_1 + t_2 = 6.5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{9.81\,t_1^2}{2} = 340\,t_2 \\ t_2 = 6.5 - t_1 \end{cases} \rightarrow \quad 9.81\,t_1^2 + 2\times 340\times t_1 - 2\times 6.5\times 340 = 0$$

$$\rightarrow t_1 = \frac{-340 \pm \sqrt{340^2 + 2\times 6.5\times 340\times 9.81}}{9.81} = \begin{cases} 5.983 \\ -75.3 \text{ A rejeter} \end{cases}$$

$$\rightarrow t_1 = 5.983\ s \quad \rightarrow \quad t_2 = 0.5165\ s \quad \rightarrow \quad \boxed{h = 175.61\ m}$$

[1] Expression latine signifiant « En changeant ce qui doit être changé »)




5) Une personne dans la nacelle d'un ballon situé à 100 m de haut lance une balle à une vitesse de 20,0 m/s sous 40,0° vers le haut. Quelle est la hauteur maximale atteinte ? A quelle distance de la verticale passant par le ballon tombe-t-elle ? Quelle est la vitesse de la balle au moment de l'impact sur le sol, ainsi que l'angle d'arrivée (par rapport à l'horizontale) ?

Solution

Vitesse horizontale : $V_H = V\cos\alpha = 20\cos 40 = 15.32\ m/s$

Vitesse verticale : $V_V = V\sin\alpha = 20\sin 40 = 12.86\ m/s$

Hauteur atteinte au-dessus du ballon : $h = \frac{V_V^2}{2g} = \frac{12.86^2}{2g} = 8.43\ m$

Hauteur maximale atteinte : $H = 100 + h = 108.43\ m$

Temps de montée : $t_m = \frac{V_V}{g} = \frac{12.86}{g} = 1.31\ s$

Temps de descente : $t_d = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2\times 108.43}{g}} = 4.7\ s$

Temps total de vol : $t_{vol} = t_m + t_d = 1.31 + 4.7 = 6.01\ s$

Portée : $d = t_{vol} V_H = 6.01 \times 15.32 = 92.07\ m$

Vitesse verticale à l'arrivée au sol : $V_a = \sqrt{2gH} = \sqrt{2g\times 108.43} = 46.12\ m/s$

Vitesse à l'arrivée : $V_i = \sqrt{V_a^2 + V_H^2} = \sqrt{46.12^2 + 15.32^2} = 48.6\ m/s$

Angle d'arrivée par rapport à l'horizont ale :

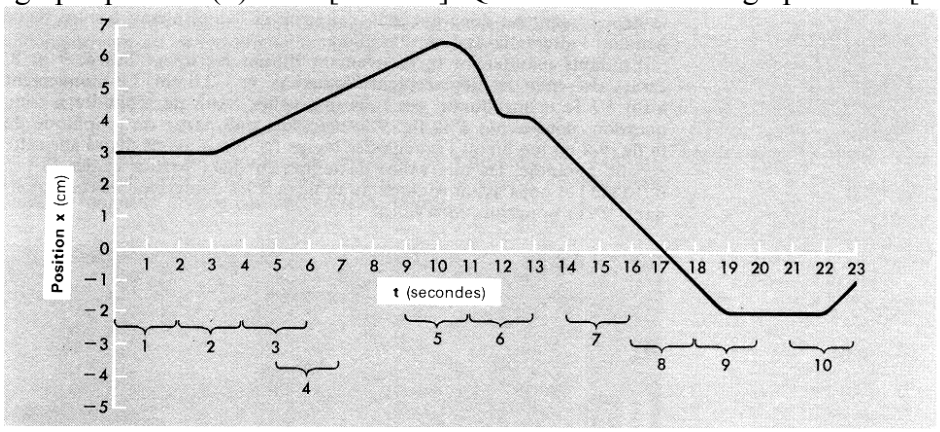
$$\tan\beta = \frac{V_a}{V_H} = \frac{46.12}{15.32} \rightarrow \beta = 71.6°$$

## 6.1. Exercices non-résolus

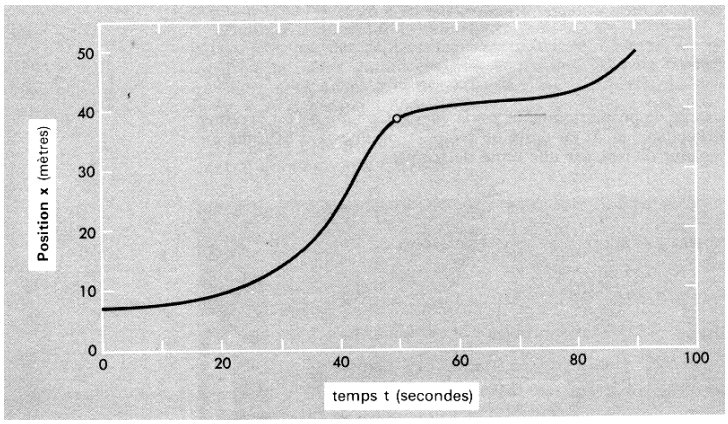
Voici quelques graphiques position en fonction du temps x = f(t)

1. Calculer la vitesse du mobile en t = 2 , t = 6, t = 10.5 , t = 12.5 , t = 15 , t = 20 s

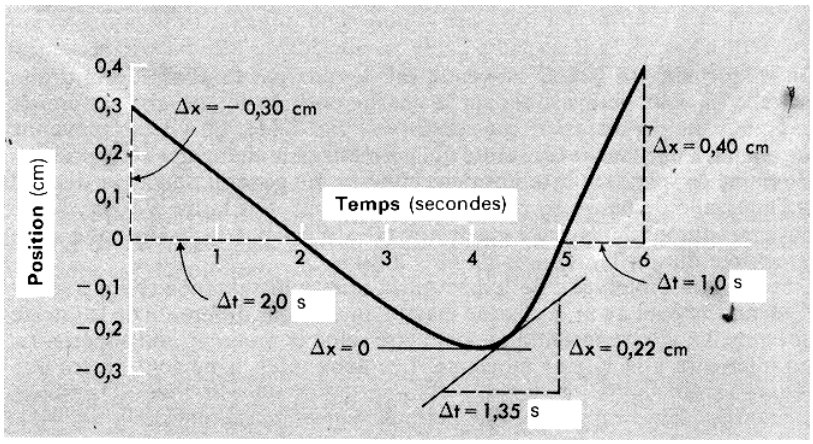
Réaliser le graphique v = f( t) entre [0 et 23s]. Quelle est l'allure du graphe entre [10et 12s] ?



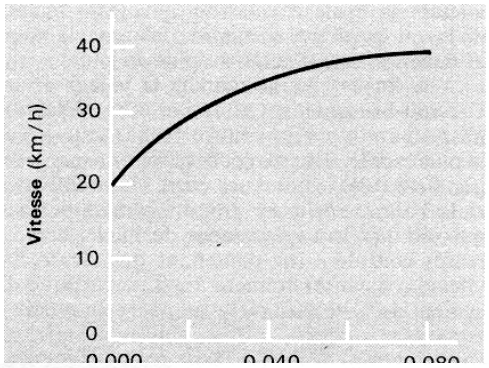
2. Calculer la vitesse en du mobile en t = 20s et t = 40s et t = 50s



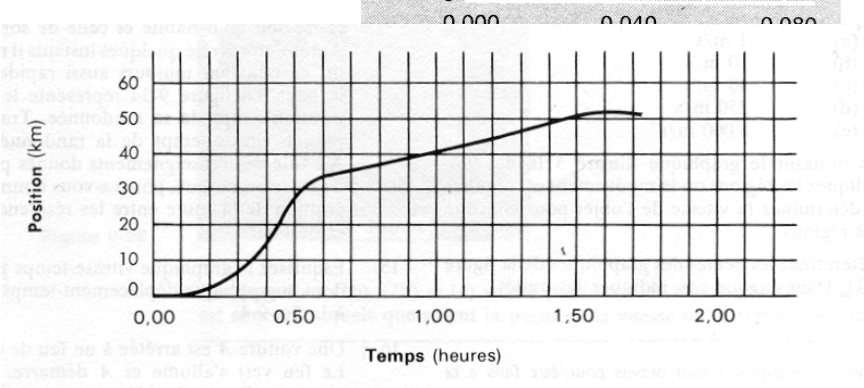

3. A partir du graphique $x = f(t)$, réaliser de 0 à 6s, le graphique $v = f(t)$




2. Voici le graphique $v = f(t)$ pour une voiture.
L'accélération est-elle constante ? Calculez-la pour $t$ = 0.02 s et en $t$ = 0.06s et en $t$ = 0.08s
Quelle serait l'allure du graphique $a = f(t)$ ?




5. A partir du graphique $x = f(t)$ ci-dessous,
A quel moment la voiture a-t-elle la plus grande vitesse et quelle est sa valeur ?
Quelle est sa vitesse en $t$ = 0.7h ?
Quelle est sa vitesse moyenne entre 0h et 0.7 h ?



## Composition de 2 MRU

1. Un nageur traverse un cours d'eau de 100 m de large. Il nage perpendiculairement au fleuve en direction de la berge opposée à la vitesse de 1 m/s. Mais le courant l'entraîne à droite de son objectif avec une vitesse de 0,4 m/s.
   Représentez graphiquement la situation puis calculez:
   a) l'endroit où se retrouve le nageur sur l'autre rive
   b) l'angle entre sa trajectoire réelle et celle qu'il aurait sans courant
   c) la durée de sa traversée.

(Rép : 40m / 21,8° / 1min40s )

2. Un avion vole pendant 3 heures. Il atteint un point situé 600 km au Nord et 800 km à l'Est de son point de départ.
   a) Déterminez la direction et la grandeur de sa vitesse moyenne.
   b) Calculez la grandeur du déplacement.

(Rép : 53,13° d'angle nord , nord-est / 333 km/h / 1000 km )

3. Un nageur pouvant se déplacer avec une vitesse propre de 40 m/min veut traverser une rivière large de 75 m en mettant à profit le courant qui a une vitesse constante, en partant d'un endroit de la rive droite pour aboutir à un point précis de la rive gauche situé 30 m en aval du premier.
Il sait qu'en nageant perpendiculairement à la rive il atteindra exactement son objectif.
Déterminez graphiquement et algébriquement:
   a) la vitesse du courant
   b) la distance réellement parcourue par le nageur
   c) l'angle entre sa trajectoire et la rive
   d) la durée de la traversée.

(rép : 0,27 m/s / 80,8m / 68,2° / 1min 52s )

## Exercices de chute libre et de lancé vertical

1. Une balle est lâchée d'une fenêtre située à 19,6 m au-dessus du sol.
Combien de temps lui faut-elle pour atteindre le sol ?
Quelle est sa vitesse au sol ? (rép : 2s / 19,6 m/s )

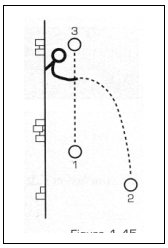
2. De la hauteur d'un pont, on lance un caillou verticalement vers le bas avec une vitesse initiale de 10 m/s. Le caillou atteint le sol après 2s.
Trouver la hauteur du pont et la vitesse du caillou au sol. (rép : 29,6 m/s / 39,6 m)

3. Quelle doit être la vitesse initiale d'une balle lancée vers le haut pour atteindre la hauteur de 40m ( rép : 28 m/s )

4. Une balle est lancée vers le haut avec une vitesse initiale de 10 m/s.
A quelle vitesse et dans quel sens se déplace-t-elle après 0,5 s et après 2s ?
Quelles sont ses positions à ces différents instants ?
( rép : 5,1 m/s vers le haut à une hauteur de 3,775 m et 9,6 m/s vers le bas à une hauteur de 0,4m )

5. Un canon tire un obus verticalement avec une vitesse initiale de 490 m/s. Calculer la hauteur maximale atteinte et le temps pour atteindre cette hauteur
Après combien de temps atteindra-t-il la hauteur de 7840 m
( rép : 12.250 m / 50 s / 20 et 80 s ).

**Exercices sur les mouvements paraboliques**




6. A partir d'une fenêtre située à une hauteur de 3 m, un élève lance une balle successivement de 3 façons différentes. D'abord vers le bas, ensuite vers l'avant et enfin vers le haut. A chaque fois, il donne au ballon la même vitesse initiale de 2 m/s. Combien de temps met la balle pour arriver au sol dans les 3 cas.
(Rép : 0.6s / 0.77s /1s )

6. Un obus est lancé horizontalement du haut d'une falaise de 90 m avec une vitesse de 350 m/s.
a . Dans combien de temps atteindra-t-il le sol ?
b . A quelle distance du pied de la falaise touchera-t-il le sol ? (rép : 1500m)
c. Avec quelle vitesse frappera-t-il le sol ?
d. Ecrire l'équation de la trajectoire
(Rép : 4.3s / 1500m / 353m/s / $y = 90-0.00004X^2$ )

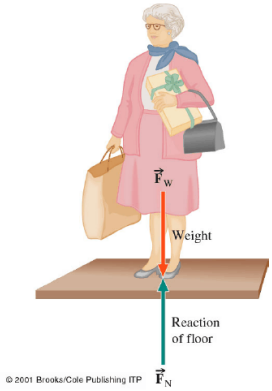
7. Un projectile est lancé avec une vitesse initiale de 300 m/s dans une direction faisant un angle de 30° avec l'horizontale.
A quelle distance du point de départ retombera-t-il ? Quelle est la hauteur maximale atteinte ?
Ecrire l'équation de la trajectoire
(rép : 8125m / 1245m / $y = 0.58X-0.00007X^2$ )

8. Trouver la portée d'un canon qui lance un obus avec une vitesse initiale $V_0$ faisant un angle $\alpha$ avec l'horizontale.
Trouver l'inclinaison à donner au canon qui lance un obus de 400 m/s pour toucher une cible placée à 5000m plus loin. (Rép : 4,5°)

# 7. Les forces

## 7.1 Introduction

Une force est une grandeur vectorielle qui représente l'action qu'un corps peut subir ou exercer sur un autre corps.
Elle se mesure avec un dynamomètre et son unité est le Newton (N)




## 7.2 La force poids ou force de pesanteur

Le poids d'un corps de masse m est la grandeur de la force d'attraction exercée par la Terre sur ce corps.

Le poids est un vecteur noté $\vec{G}$ dont :

le point d'application = centre de gravité du corps
la direction = la verticale (matérialisée par le fil à plomb)
le sens = du centre de gravité du corps vers le centre de la Terre
la valeur est liée à la masse *m* du corps par la relation $G = m \cdot g$

Avec *m* = masse en kg $g = 9,81$ N / kg (dans nos régions) $G$ = poids en N

## 7.3 Loi de l'attraction universelle ou de la gravitation universelle

**(formulée par Newton et abordée en 4G)**

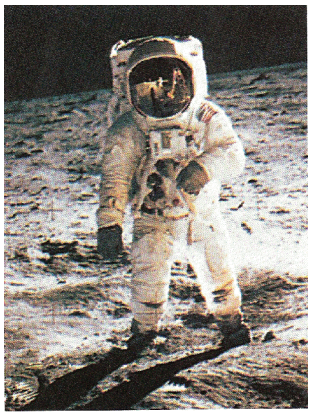
***Deux corps de masse $M_1$ et $M_2$ s'attirent mutuellement avec une force dont la grandeur est proportionnelle à chacune des masses et inversement proportionnelle au carré de la distance d qui les sépare.***

$$F = G\frac{M_1.M_2}{d^2}$$

$G$ = constante = 6,67. $10^{-11}$ N.m² / kg² (déterminée expérimentalement)
$d$ = distance en m
$M_1$ = masse du corps 1en kg , $M_2$ = masse du corps 2 en kg

### Remarques.

A. Tous les corps matériels exercent une force gravifique les uns sur les autres, quelle que soit la nature de ces corps. Cette loi est donc valable pour toute masse mais devient importante si une des masses est une planète.
 En particulier masse de la terre $M = 6.10^{24}$ kg, $d$ = rayon de la terre = 6400km
B. La grandeur de la force d'attraction décroît fortement lorsque la distance d entre les corps augmente. (loi en $1/d^2$)
C. La loi de la gravitation est valable partout dans l'Univers et elle s'exerce même à travers le vide.



Sur la Lune, Edwin Aldrin Jr. pesait à peu près six fois moins que sur la Terre, alors que sa masse n'avait pas changé.

### Exemple

Les sondes Voyager 1 et Voyager 2 avaient pour mission d'explorer le système solaire. La masse de chaque sonde était de 815 kg. Le 5 mars 1979, Voyager 1 s'approcha de Jupiter à l'altitude $z_1$ = 278 000 km et mesura une force gravitationnelle $F_1$ = 845 N. Quelques mois plus tard, Voyager 2 ne s'approcha qu'à l'altitude $z_2$ = 650 000 km et mesura une force gravitationnelle $F_2$ = 198 N.
Quel est le rayon et quelle est la masse de Jupiter ?

Résolution

Il suffit d'appliquer la loi de Newton. Soit $M_J$ la masse de Jupiter et $M_S$ la masse d 'une sonde

$$\begin{cases} F_1 = G\dfrac{M_J M_S}{d_1^2} \text{ avec } d_1 = R + z_1 \\ F_2 = G\dfrac{M_J M_S}{d_1^2} \text{ avec } d_2 = R + z_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_1(R+z_1)^2 = GM_J M_S \\ F_2(R+z_2)^2 = GM_J M_S \end{cases} \rightarrow F_1(R+z_1)^2 = F_2(R+z_2)^2$$

On développe et on réarrange pour arrive r à :

$$\left(1-\frac{F_2}{F_1}\right)R^2 + 2\left(z_1 - z_2\frac{F_2}{F_1}\right)R + z_1^2 - z_2^2\frac{F_2}{F_1} = 0$$

Dans notre cas, on a :

$$\left(1-\frac{198}{845}\right)R^2+2\left(278000-650000\frac{198}{845}\right)R+278000^2-650000^2\frac{198}{845}=0$$

$$0.766\,R^2+251384,6R-2.171.10^{11}=0\rightarrow R=71005\ km$$

En bon accord avec les chiffres réels : $R_{équatorial}=71492\ km$

La masse s'obtient facilement à partir d e

$$M_J=\frac{F_1.d_1^2}{G.M_S}=\frac{845\left(278000+71005\right)^2 10^6}{6.67\,10^{-11}.845}=1.89\,10^{27}\ kg$$

Aussi en très bon accord avec les chiffr es officiels.

## 7.4 Les forces de frottement entre deux solides

Pour pouvoir mettre un corps en mouvement sur un plan, nous devons appliquer sur ce corps une force $\vec{F}$ qui doit être supérieure à une force minimale $\vec{F}_0$.

Puisque le mobile reste au repos, on doit admettre que la force $\vec{F}$ appliquée est équilibrée par une force de même grandeur et d'orientation opposée. **C'est la force de frottement** $\vec{F}_f$.

Elle est // au plan et sa grandeur peut augmenter jusqu'à la valeur critique $F_o$

***Les forces de frottement ne sont jamais des forces motrices mais elles sont toujours dirigées dans le sens opposé à celui du mouvement.***
***Ces forces de frottement s'expliquent en partie par le fait que les aspérités des deux surfaces s'agrippent mutuellement.***

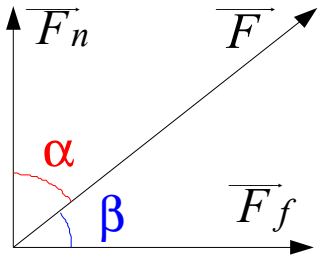
Les expériences montrent que cette force de frottement

- dépend de la nature des 2 surfaces en contact
- est proportionnelle à l'intensité de la force $F_n$ pressant le solide sur le plan
- est quasiment indépendante de l'aire de la surface de contact

On écrira :

$$F_f=\mu.F_n$$

$F_f$ : force de frottements
$\mu$ : Coefficient de frottement des deux surf aces en contact
$F_n$ : force normal




On voit immédiatement que :

$$\mu=\frac{F_f}{F_n}=\tan\alpha=\frac{1}{\tan\beta}$$

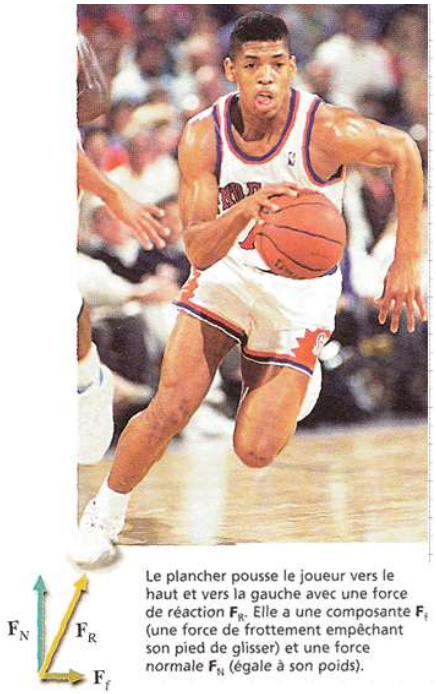
**Exemples**

1. Calculer la force minimale qu'il faut produire pour traîner une table en bois de 50 kg sur un parquet en bois ( prendre $\mu = 0.4$ )
2. Un véhicule de 1200 kg présente via ses roues, une force de frottement par pneu égale à 0,5 % du poids du véhicule. Calculer la force de frottement totale due aux pneus sur la route. (rép : 240N)

3. Sachant que pour déplacer une plaque métallique de 2 kg sur une table en bois lisse et horizontale, il faut produire une force de 10 N, calculer le coefficient de frottement entre ces 2 matériaux (rep : 0,5)

**TABLEAU 5.3 Coefficients de frottement**

| Matériaux | $\mu_s$ |
|---|---|
| Acier sur glace | 0,1 |
| Acier sur acier - sec | 0,6 |
| Acier sur acier - graissé | 0,1 |
| Corde sur bois | 0,5 |
| Téflon sur acier | 0,04 |
| Chaussure sur glace | 0,1 |
| Bottes de montagne sur rocher | 1,0 |
| Semelles de cuir sur tapis | 0,6 |
| Semelles de cuir sur bois | 0,3 |
| Semelles de caoutchouc sur bois | 0,9 |
| Pneus de voiture sur béton sec | 1,0 |
| Pneus de voiture sur béton mouillé | 0,7 |
| Pneus de voiture sur béton verglacé | 0,3 |
| Caoutchouc sur asphalte | 0,60 |
| Téflon sur téflon | 0,04 |
| Bois sur bois | 0,5 |
| Glace sur glace | 0,05-0,15 |
| Verre sur verre | 0,9 |




Le plancher pousse le joueur vers le haut et vers la gauche avec une force de réaction $F_R$. Elle a une composante $F_f$ (une force de frottement empêchant son pied de glisser) et une force normale $F_N$ (égale à son poids).

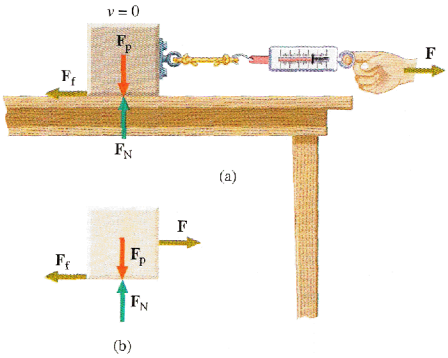



**Figure 5.25** (a) Une force horizontale $F$ agissant par l'intermédiaire d'un dynamomètre sur un bloc immobile de poids $F_p$. Le frottement statique s'oppose au démarrage du mouvement avec une force $F_f$ qui peut atteindre $F_f(\max) = \mu_s F_N$. (b) La représentation de corps isolé indique qu'il n'y a aucune accélération tant que $F < F_f$.

## 7.5 Les frottements entre un solide et un fluide

***Tout corps se déplaçant dans un fluide ( air , eau , ...) subit une force de frottement appelée résistance du fluide et notée aussi $F_f$***

Les expériences réalisées en soufflerie ont permis de déterminer les caractéristiques de cette force.
Cette force de frottement dépend :

* du maître-couple $S$ du corps.
  $S$ = surface présentée ⊥ment au mouvement
* de la forme aérodynamique du corps $C_x$
* de la masse volumique ρ du **fluide**
* de la vitesse du corps $V$

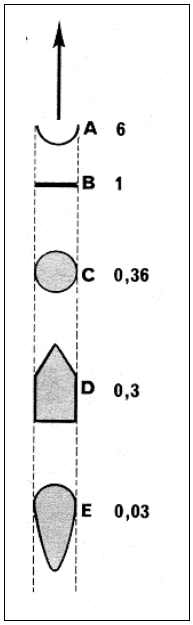
Pour des vitesses comprises entre 1m/s < $V$ < 200 m/s alors :

$$F_f = C_x \cdot \rho \cdot S \cdot \frac{v^2}{2}$$

$F_f$ : Force de frottement, en $N$
$C_x$ : Coefficient arodynamique (sans dimensi on)
$\rho$ : Masse volumique du fluide, en $kg/m^3$
$S$ : Maître couple = surface présentée perpendiculairement au mouvem ent, en $m^2$
$v$ : Vitesse du corps, en $m/s$ ($1\,m/s \leq v \leq 200\,m/s$

Remarques:

* masse volumique de l'air = 1,3 kg / m³ , de l'eau = 1000 kg/m³
* $v$ s'exprime en m/s
* $C_x$ coefficient d'aérodynamisme du corps. c'est un nombre sans dimension




Un ensemble d'objets ayant le même maître couple $S$, mais des formes différentes auront des entrées différentes dans l'air.
Valeur de $C_x$ : disque : 0.6 / parachute : 0.75 / sphère : 0.1 / fuseau : 0.02.

Si on prend pour unité la résistance offerte par un disque plan B, alors la résistance est :

6 pour A (½ sphère creuse à concavité tournée vers l'avant)
0,36 pour C (sphère pleine)
0,30 pour D (cylindre, pointe conique en avant)
0,03 pour E (volume profilé)

| Type d'objet | $C_x$ |
|---|---|
| Vieille voiture style Ford T | 0,7 - 0,9 |
| Voiture moderne Toyota Prius | 0,26 |
| Voiture type Vectra (class C) | 0.29 (0.3-0.5) |
| Train de passagers | 1,8 |
| Vélo | 1,1 |
| Vélo de course | 0,88 |
| Camion (semi-remorque) | 0,96 |
| Dauphin | 0,0036 |
| Oiseau | 0,4 |
| Parachute | 1.0 |
| Fils et câbles | 1.0 - 1.3 |
| Avion de ligne(Subsonique) | 0.012 |
| Chasseur supersonique, M=2.5 | 0.016 |
| Personne (position droite) | 1.0 - 1.3 |
| Sauteur à ski | 1.2 - 1.3 |
| Aile profilée | 0.04-0.045 |
| Balle de revolver | 0.295 |
| Plaque, écoulement laminaire (Re<10⁶) | 0.001 |
| Plaque, écoulement turbulent (Re>10⁶) | 0.005 |
| Sphère | 0.36 (0.15 – 0.5) |

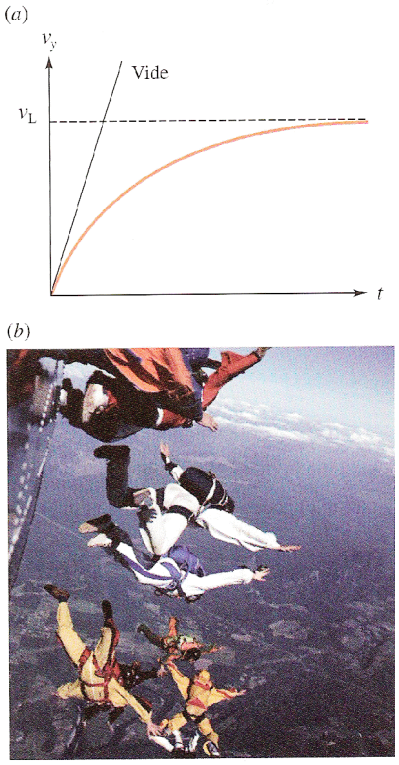



**Figure 3.29 ▲**
(a) En présence de la résistance de l'air, la vitesse de chute d'un objet atteint une valeur limite $v_L$. (b) Cette vitesse limite est de 200 km/h environ pour une personne dans la position du saut de l'ange.

**Exemples**

1. Calculer la résistance de l'air appliquée sur une auto de maître-couple de 2.5 m² roulant à 120 km/h et ayant un Cx de 0.45 ($\rho$ = 1.22 kg/m³ ) (rep : 762 N)
2. Une automobile a les caractéristiques suivantes : $C_x$ = 0.4 , S = 2 m² , $\rho$ = 1.22 kg/m³.Tracer sur un graphique $F_f$ en fonction de V pour 0km/h < V <120 km/h

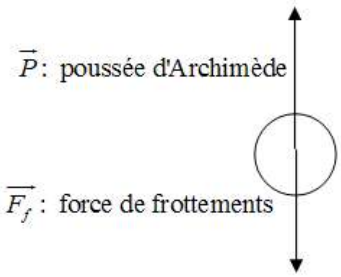
**Exemple résolu**

Un plongeur se trouve à une profondeur de 3 m. En expirant, il génère des bulles d'air de diamètre moyen *R*.

a) Etablir un schéma montrant les forces en jeu
b) Etablir la formule donnant le temps *t* que mettent les bulles pour remonter à la surface ?
c) Appliquer votre formule pour le cas suivant : $R$ = 1 cm, $\rho_{air}$ = 1.33 Kg/m$^3$, $\rho_{eau}$ = 1000 Kg/m$^3$, $h$ = 2 m, $C_x$ = 0.36

Notes :

a) On néglige l'effet de la pression due à la profondeur sur la taille des bulles.
b) Vu que la masse volumique de l'air est petite, on pourra négliger le poids des bulles.
c) Pour rappel. Le principe d'Archimède énonce que tout corps plongé dans un fluide subit une poussée de bas en haut, égale au poids du volume du fluide déplacé, et appliquée au centre de gravité de la partie fluide déplacée




Solution

La poussée d'Archimède est égale au poid s du volume d'eau déplacé

$$\rightarrow P = \rho_{eau} V_{air} g = \rho_{eau} \frac{4\pi R^3}{3} g$$

La force de frottement est : $F = C_x S \rho_{eau} \frac{v^2}{2} = C_x \pi R^2 \rho_{eau} \frac{v^2}{2}$

Puisque l'on néglige le poids des bulles , pendant la remontée on a :

$$P = F \rightarrow \rho_{eau} \frac{4\pi R^3}{3} g = C_x \pi R^2 \rho_{eau} \frac{v^2}{2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{8Rg}{3C_x}}$$

Dans le cas présent : $v = \sqrt{\frac{8\times10^{-2}\times9.81}{3\times0.36}} = 0.85\ m/\ s$

$$\rightarrow t = \frac{d}{v} = \frac{3}{0.85} = 3.5\ s$$

# 7.6 Décomposition de forces

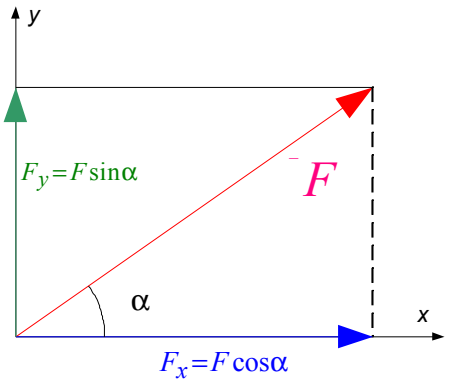
## 7.6.1 Introduction

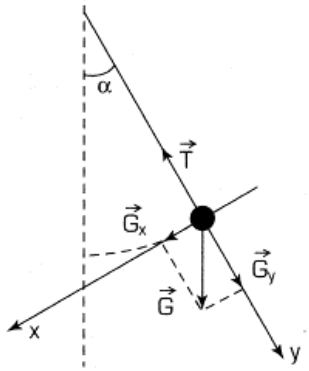
**Composer 2 forces**, c'est trouver la résultante donc la force unique qui mise à la place des 2 autres produirait le même effet physique que ces 2 forces.

**Décomposer une force**, c'est l'opération inverse qui consiste à imaginer 2 forces (prises suivant des axes *X* et *Y* donnés) qui auraient le même effet que la force de départ.

## 7.6.2 Exemples de décomposition de forces

**1. Décomposons F en 2 forces,** l'une // à *X* $\rightarrow F_x =$
et l'autre // à *Y* $\rightarrow F_y =$



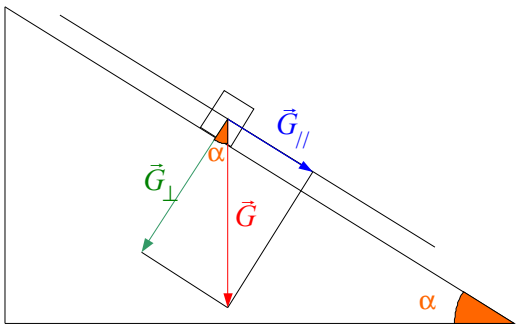




**Cas du pendule simple**
Décomposer la force poids *G* en une composante tangente à la trajectoire $G_x$ et une composante perpendiculaire à la trajectoire $G_y$

**Cas du plan incliné** ☝
Décomposer la force poids *G* en
- une composante // au plan incliné ; $G_{//}$
- une composante ⊥ au plan incliné ; $G_{\perp}$

Les relations dans les triangles montrent que :

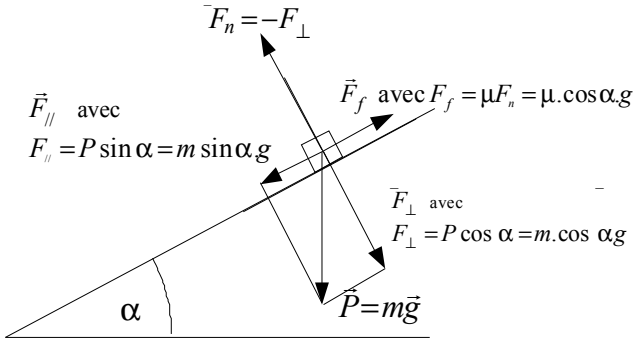
$$G_{//} = G\sin\alpha$$
$$G_{\perp} = G\cos\alpha$$




**Exemple résolu**

Un skieur de masse *m* s'élance du sommet d'une pente d'angle α et de longueur *l*. Les skis ont un coefficient de frottements μ.

a) Faire un schéma représentant les forces en jeu.
b) Calculer la vitesse qui serait atteinte si μ était nul.
c) Calculer la vitesse atteinte par le skieur en bas de la piste, si μ n'est pas nul et si on néglige les *autres* forces de frottements, par exemple l'air.
d) Quelle est la valeur maximale admissible pour μ ? Autrement dit pour quel μ le skieur reste-t-il immobile sur la pente ?
e) Appliquer les formules trouvées dans le cas suivant : *m* = 80 kg, *l* = 100 m, α = 30°, μ = 0.15



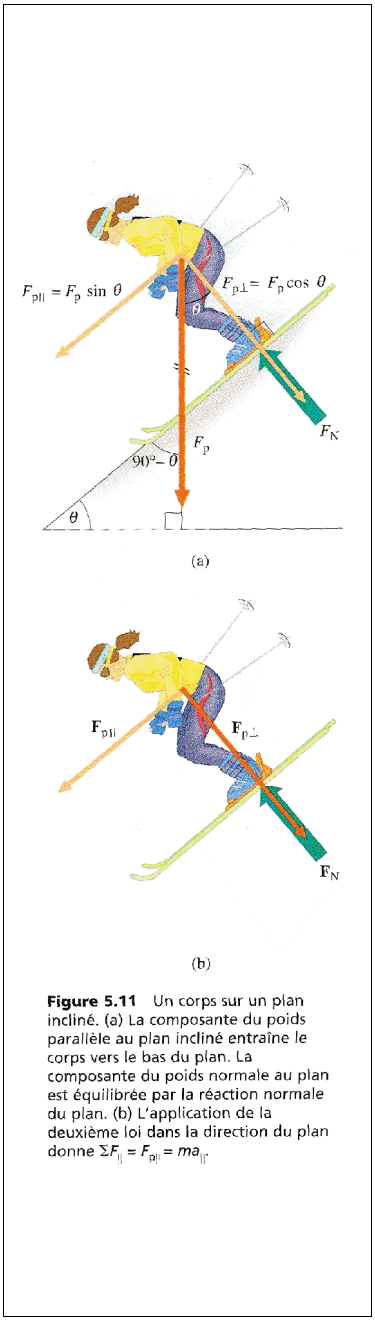




**Figure 5.11** Un corps sur un plan incliné. (a) La composante du poids parallèle au plan incliné entraîne le corps vers le bas du plan. La composante du poids normale au plan est équilibrée par la réaction normale du plan. (b) L'application de la deuxième loi dans la direction du plan donne $\Sigma F_{\parallel} = F_{p\parallel} = ma_{\parallel}$.

Solution

Force aggisant sur le skieur : $F = F_{//} - F_f = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$

L'accélération qui en résulte est : $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$

La vitesse en bas de la pente de longueu r $l$ est :

$$v = \sqrt{2gl(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$$

Et donc dans le cas où $\mu = 0 \rightarrow v_{\mu=0} = \sqrt{2gl\sin\alpha}$

Appliquons :

$$\begin{cases} v_{\mu=0} = \sqrt{2gl\sin\alpha} = \sqrt{2g\times100\times\sin 30} \\ v = \sqrt{2gl(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} = \sqrt{2g\times100(\sin 30 - 0.15\times\cos 30)} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} v_{\mu=0} = 31.3\ m/s = 112\ km/h \\ v = 26.95\ m/s = 97\ km/h \end{cases}$$

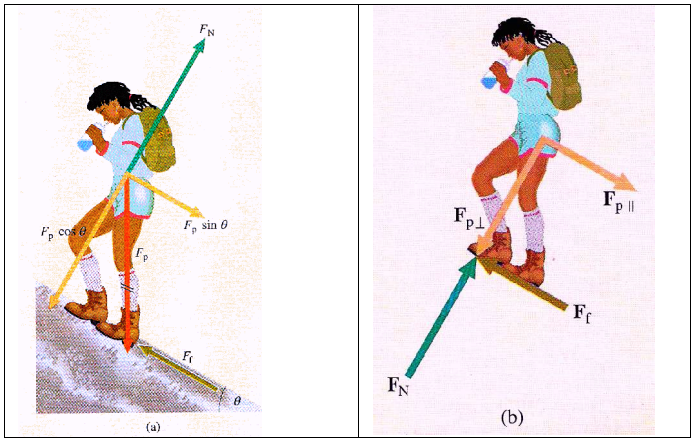
Le skieur sera immobile si les forces qui agissent ont une résultante nulle.

Ce qui sera le cas si : $\sin\alpha - \mu\cos\alpha = 0$

$$\rightarrow \mu = \tan\alpha = \tan 30 = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.577$$

## Exemple résolu

Une alpiniste se tient debout sur la face rocheuse d'une montagne. Les semelles et les talons de ses chaussures ont un coefficient de frottement statique égal à 1.0. (a) Quelle est la plus grande pente sur laquelle elle peut se maintenir sans glisser? (b) Supposant que ses vêtements ont un coefficient de frottement statique de 0.3, que se passe-t-il quand elle s'assoit sur la pente pour se reposer ?



**Solution**

(a) Le poids de l'alpiniste, $\overrightarrow{F_P}$ agit verticalement. La composante normale à la surface rocheuse, $F_{P\perp} = F_P \cos\theta$, est compensée par la force normale $\overrightarrow{F_N}$. La composante parallèle à la surface, $F_{P//} = F \sin\theta$ doit être équilibrée par la force de frottement $F_f$. L'alpiniste est immobile dans les deux directions:

$$\begin{array}{l} \sum F_\perp = 0 = F_N - F_P \cos\theta \rightarrow F_N = F_P \cos\theta \\ \sum F_{//} = 0 = F_f - F_P \sin\theta \rightarrow F_f = F_P \sin\theta \end{array} \rightarrow \frac{F_f}{F_N} = \tan\theta \rightarrow \frac{F_f^{\max}}{F_N} = \tan\theta_{\max} = \mu$$

La pente maximum vaut $\theta_{max} = \arctan \mu$ Pour $\mu = 1{:}0$, on a donc $\theta_{max} = 45°$.

(b) Si l'alpiniste s'assoit et si ses habits ont un coefficient de frottement statique $\mu = 0{:}3$, l'angle maximum se réduit à $\theta_{max} = 17°$. Elle glisse donc pour tout angle plus raide que celui-ci.

# 8. Les lois de Newton

## 8.1 Système de référence d'inertie (ou galiléens) et le principe d'inertie

### 8.1.1 Inertie

On sait que la ***loi d'inertie*** indique que si aucune force n'est appliquée à un objet, c'est à dire si la résultante des forces appliquées est nulle, la vitesse de cet objet ne change pas. En particulier, s'il est immobile, il reste immobile.

***Cette loi est-elle toujours vraie ?***

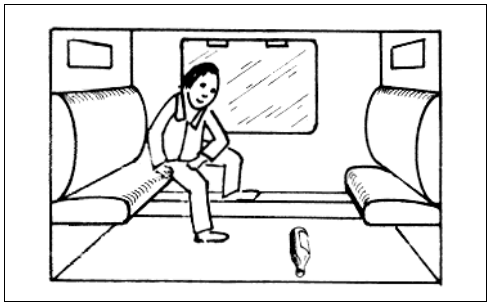
Posons une canette sur la table. Elle subit des forces qui se compensent (poids et le soutien de la table). Elle reste sur la table.
Lançons une bille sur un plan horizontal avec une certaine vitesse $\vec{V}$. La bille est aussi soumise à 2 forces : la force de la pesanteur $\vec{G}$ et la résistance du plan $\vec{R}$.
La résultante des forces appliquées à la bille est bien nulle.

Quel sera le type de mouvement que va prendre la bille ?

En principe, elle s'arrêtera à cause des forces de frottement. Mais supposons que la table soit parfaitement lisse sur plusieurs kilomètres et que l'air soit inexistant.
***Alors, la bille continuerait en ligne droite et à la même vitesse, elle serait en MRU et son accélération serait nulle.***

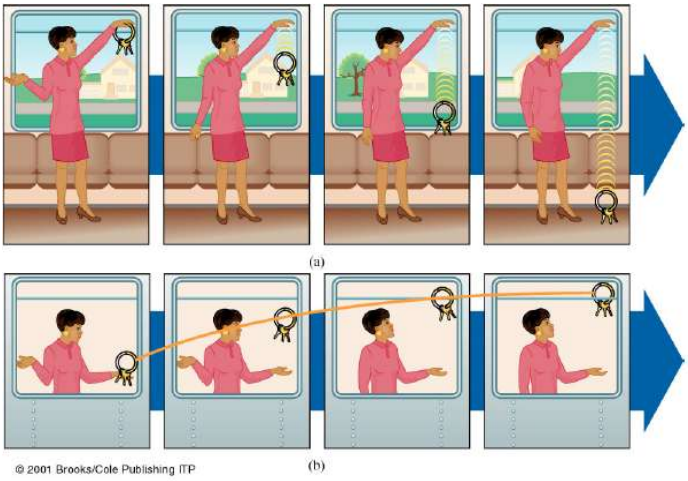
**L'importance du système de référence**

Supposons que la canette ait été placée sur le plancher d'un wagon de train.



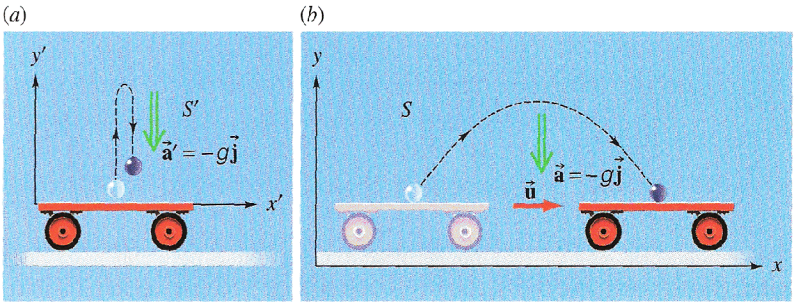
Supposons le train à l'arrêt. Quand le train démarre, la canette se met à rouler vers l'arrière.
Comment expliquer ce mouvement ?
La résultante des forces est bien nulle. Le corps était au repos. Or il ne l'est plus, il roule ! ! !
Pourtant personne ne souffle ou ne l'attire avec un aimant ! !
***La loi d'inertie ne paraît correcte que dans certains systèmes de référence.***

Un train à l'arrêt est un « bon » système de référence. Un train qui démarre ou qui freine est un référentiel dans lequel les objets bougent tout seul…..C'est un « mauvais » système de référence.




Considérons le projectile lancé verticalement dans un train qui roule à **<u>vitesse constante</u>**: Une fois lancé, l'objet garde sa vitesse horizontale uniforme, celle du train. Il tombe verticalement. Vu d'un observateur hors du train, l'objet suit un parcours parabolique, tout comme le projectile du canon. La loi d'inertie est valable dans les référentiels à vitesse relative constante, dits **référentiels d'inertie**.

**Figure 4.34▶**
(*a*) La trajectoire d'une balle lancée verticalement vers le haut par rapport à une plate-forme se déplaçant à la vitesse *u* par rapport au sol. (*b*) La trajectoire de la balle vue par un observateur au sol est une parabole. L'accélération de la balle est la même dans les deux cas.




***Un système de référence dans lequel le principe d'inertie est applicable est appelé <u>système d'inertie</u>.***

***Notre laboratoire, le train au repos, le train en MRU par rapport à la terre semblent être des systèmes d'inertie.***

Un train qui démarre, une voiture qui ralentit, une voiture dans un virage, un avion qui traverse un trou d'air,….. semblent ne pas être des systèmes d'inertie.

➔ ***un système en accélération par rapport à un système d'inertie n'est pas un système d'inertie.***

Le **<u>principe d'inertie</u>** doit se mettre sous la forme suivante :

Quand la résultante R des forces qui agit sur un corps est nulle, alors le corps est en MRU (vitesse constante ou accélération nulle) mais il faut que la vitesse ou l'accélération soit mesurée par rapport à un système d'inertie.

$\vec{R} = \Sigma\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ **par rapport à un système d'inertie**

**Notre laboratoire est-il vraiment un référentiel d'inertie ?**

On sait que la Terre tourne sur elle-même et autour du Soleil. Accroché à la Terre, notre labo tourne avec elle. Il ne devrait donc pas être un système d'inertie ! !
Si la Terre tourne, pourquoi l'eau ne sort-elle pas du verre, pourquoi ne sommes-nous pas expulsés de cette Terre comme sur un manège à la foire, … ?

L'explication est simple.

Imaginons un manège qui ferait un tour sur lui-même en 24 heures. Qui payerait pour y monter ? Aucune sensation forte à espérer.
La rotation de la Terre est extrêmement lente et les effets de cette rotation sont difficiles à détecter.

***Un système de référence lié au sol est un bon système d'inertie***
***Si la loi d'inertie est applicable dans un système de référence alors c'est un système d'inertie.***

## 8.1.2 Applications du principe d'inertie

- arrêt brusque d'un véhicule
- démarrage brusque d'un véhicule
- jockey sur un cheval qui refuse l'obstacle
- emmanchement d'une pioche
- voiture qui dérape dans un virage
- principe de la fronde
- ***vitesse limite de chute d'un corps qui tombe dans l'air***

## 8.1.3 Exercices

1. Un passager de masse = 80 kg, attaché à un parachute de masse = 20 kg, tombe sans vitesse initiale dans l'air. Quelle doit être la valeur du maître-couple S pour que la vitesse limite atteinte soit celle d'un corps tombant de 2m de haut ( dans le vide ) ?
On donne Cx du parachute = 1,23 , masse volumique de l'air = 1, 33 kg/m³ (Rep = + -31m²)

2. Calculer le Cx d'une sphère d'aluminium de rayon = 0,8 cm qui tombant dans l'air atteint une vitesse limite de chute = 34m/s.
Masse volumique de Al = 2700 kg/m³ , volume d'une sphère 4/3 Π R³ (Rep = +- 0,37 )

3. Une voiture de masse = 800 kg , moteur débrayé, descend avec une vitesse constante faible, une pente de 2 % .
a. Calculer la force de frottement totale supposée // au mouvement.
b. Lorsque cette même voiture est sur un plan horizontal, sa vitesse limite est de 126 km/h. Si la puissance de la voiture est de 40 ch ( 1ch = 750W ), calculer le Cx de la voiture. On tiendra compte à cette vitesse des forces de résistance de l'air et des frottements calculés au point a. le maître-couple est de 2,2 m². ( Rep = +- 0,4 )

4. Une voiture atteint départ arrêté une vitesse de 108 km/h sur une distance de 900m. Calculer son l'accélération moyenne.

L'auto roule à cette vitesse sur une route horizontale. A 108 km/h, la puissance du moteur est 21 kW et les frottements des pneus sur la route est de 293 N.
Calculer la force de résistance totale et la force due à la résistance de l'air
Calculer le Cx de l'auto si le maître-couple est de 2,1 m².
( rép : 0,5m/s² / 700N / 407 N / 0,32 )

5. Une masse de 60 kg est posée sur un plan incliné de 30°. Représenter et calculer les composantes // et ⊥ au plan.
Ce corps est au repos sur le plan. Calculer le coefficient de frottement du corps sur le plan.
( rép : $G_{//} = 300$ N , $G_{\perp} = 520$ N , $\mu = 0{,}58$ )

6. Un enfant de 30 kg est tiré sur un plancher à vitesse constante avec une force de 60 N.
Quel est le coefficient de frottement entre la semelle et le sol ?
(rép : 0,2 )

7. Calculer la vitesse limite d'une goutte d'eau de 0,06 g, de 5 mm de diamètre qui tombe d'une hauteur de 500m sachant que le $C_x$ de la goutte est de 0,2
(rép : 15,6 m/s)

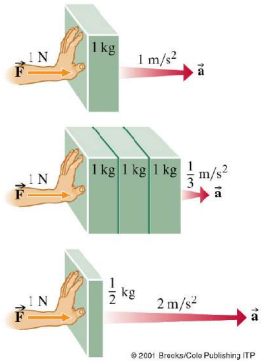
8. Un objet de 5 kg descend à vitesse constante un plan incliné de 10°.Quelle est la force de frottement qui agit dessus ?
( rép : 8,7 N)

9. Le même objet de 5 kg se déplace à vitesse constante en montant le même plan incliné que dans l'exercice 8. Quelle sera la force à produire par le corps si les frottements qui agissent dessus sont les mêmes que dans l'exercice 8 ?
( rép : 57.9 N)

10. Un avion a une masse de 6 tonnes, son maître-couple est de 60 m². En vol horizontal, la résistance de l'air équivaut à une force qui fait un angle de 8° avec la verticale. Le Cx de l'avion est de 0,45.
a. Quelle doit être la vitesse minimale pour décoller ?
b. Quelle est alors la puissance des moteurs ?
c. Quelle vitesse possède l'avion à 6000m d'altitude où la masse volumique de l'air est divisée par deux par rapport au sol ?
d. Comparer la consommation de carburant pour un vol de 1500 km de long?
Quel est l'avantage d'un vol à haute altitude ?

## 8.2 La 2eme loi de Newton ou loi fondamentale de la dynamique

### 8.2.1 Introduction




Dans cette 2eme loi de Newton, on se pose la question de savoir quel mouvement prend un corps soumis à une force constante.
L'expérience quotidienne montre que si un corps est au repos et qu'on lui applique une force $\vec{F}$ , alors ce corps se met en mouvement. Dans chaque cas et à l'instant considéré, la force produit une accélération qui lui est proportionnelle. Tant que la force est appliquée le corps accélère dans la direction de $\vec{F}$ .

### 8.2.2 Formule

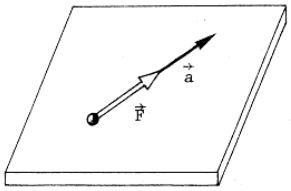
Les expériences sur les plans inclinés de 4eme nous ont montrés que :
L'accélération prise par le corps était :
Proportionnelle à la force $F$ appliquée
Inversement proportionnelle à la masse $m$ de ce corps $\rightarrow \; a = \frac{F}{m} \rightarrow \boxed{\vec{F} = m.\vec{a}}$

**Remarques importantes sur la 2eme loi**

- La 2eme loi est une égalité vectorielle, l'accélération et la force sont des grandeurs vectorielles $\rightarrow$ le vecteur $\vec{a}$ a sera donc parallèle à la force $\vec{F}$
- Si plusieurs forces agissent simultanément sur l'objet, alors F représente la **<u>résultante de toutes ces forces</u>**. $\vec{F} = \Sigma \vec{F}$

( $\Sigma \vec{F}$ signifiant « somme vectorielle des forces appliquées »)

- Le terme $m$ représente la masse totale en mouvement ( voir exercices)

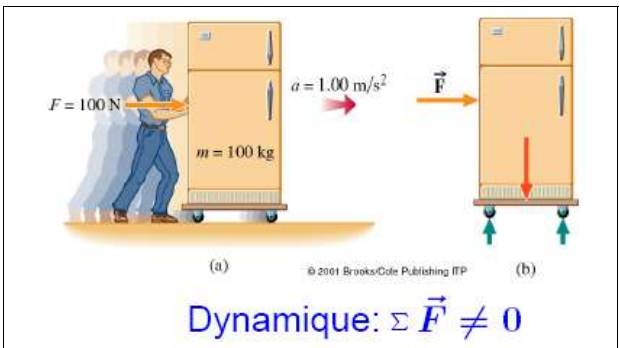



### 8.2.3 Enoncé

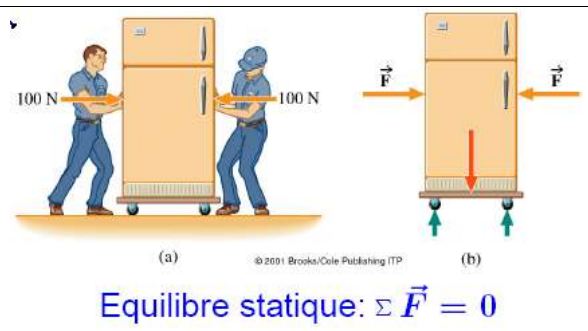
Si sur un corps de masse m agissent un ensemble de forces dont la résultante est constante en grandeur, en sens et en intensité alors ce corps prend un MRUV avec une accélération a constante qui est telle que

$$\Sigma \vec{F} = m.\vec{a}$$

Un **newton** est l'intensité de la force qui communique une accélération de 1 m/s² à un corps d'une masse de 1 kg.




a) Si la seule force horizontale qui agit sur un corps de masse $m$ est $F$, alors il accélère de façon que $F = m.a$. Ce mouvement est indépendant des forces verticales.
b) La représentation de corps isolé montre la force horizontale




a) Cas de deux personnes qui agissent avec deux forces opposées. Parce que la force est une grandeur vectorielle, ces deux forces se contrebalancent et Σ F = 0. Ce qui veut dire que le corps ne peut avoir aucune accélération.
b) Représentation du corps isolé

### 8.2.4 La force poids

Un corps placé au voisinage de la Terre est soumis à une force constante ; son poids $G$.
De plus un corps en chute libre est animé d'un MRUA avec $a = g$

Dans ce cas $F = m \,.\, a$ devient $\boxed{G = m \,.\, g}$ avec $g = 10$ m/s²

### 8.2.5 Exercices

**Sans frottements**

1. Un corps de 10 kg est en MRUA avec une accélération de 5 m/s² .Quelle est la force qui lui est appliquée ? (50N)

2. Une force de 3000N est appliquée à une auto de 1500 kg au repos. Quelle sera son accélération et sa vitesse après 5s d'accélération ? ( 2m/s² et 10m/s).

3. Une auto de 1000 kg passe de 10 m/s à une vitesse de 20 m/s en 5s. Quelle est la force qui lui est appliquée ? (2000N).

4. Sur une table parfaitement lisse, un corps de 12 kg, initialement au repos, est entraîné par une force de 20 N. Calculer la vitesse acquise après 2s.
(rép : 3.3m/s)

5. Une masse m déposée sur une table horizontale parfaitement lisse est sollicité par une force de 2N. Calculer m sachant que la vitesse acquise après 2s est de 0,77 m/s
(rép : 5,2 kg)

6. Calculer la force constante qui agit sur une voiture d'une tonne au repos, sachant que celle-ci atteint une vitesse de 100 km/h en 15 s sur une route horizontale. Calculer l'espace parcouru avant d'atteindre cette vitesse.
(rép : 1852 N / 208m )

7. La masse d'une balle de fusil est de 15g. Elle sort du canon, long de 70cm avec une vitesse de 600 m/s. Calculer la force constante qui expulse la balle et le temps que met la balle pour parcourir le canon de l'arme.
(rép : 3857 N / 0,002 s)

8. Les freins d'une auto de 1,5 tonne peuvent exercer une force de 4000N.
Quel est le temps nécessaire pour ralentir l'auto de 30m/s à 8 m/s ?
Quelle est la distance parcourue pendant ce temps ?
( rép : 8.2s / +- 156 m)

**Avec frottements**

9 Une masse de 10 kg est posée sur une table horizontale. Quelle force constante faut-il lui appliquer pour que la vitesse acquise après 2s soit de 4m/s ? On sait qu'elle part du repos et que les forces de frottement sont évaluées à 4 N dans la direction du mouvement.
(rép : 24N)

10. Une moto roule à la vitesse de 54 km/h et accélère pendant 5 s pour atteindre la vitesse de 72 km/h. Calculer :
la distance parcourue pendant cette accélération.
La force déployée par le moteur de la moto de 200 kg (conducteur compris), si le frottement est négligeable
Que devient cette force si le frottement global est égal à 5 % du poids du mobile ?
(rép : d = 87,5m / F = 200N , F = 300 N)

11. Un skieur commence à dévaler une pente inclinée de 30°. En supposant que le coefficient de frottement = 0,1 , déterminer son accélération et sa vitesse après 6s.
(rép : 4,1 m /s²  /  24m/s)

12. Un dragster doit atteindre une vitesse de 144 km/h après un parcours de 30m sur une route horizontale. Dans ce but son moteur exerce une force moyenne de 80.000 N. Les frottements valent 1000 N. Calculer la masse de dragster.
(rép :2963 kg)

13. Une voiture de 800 kg se trouve sur un plan incliné à 17°.
Rechercher la force que doivent exercer les freins pour maintenir la voiture à l'arrêt
Si les freins cassent, calculer la vitesse après 3s.
Calculer le temps dont dispose le chauffeur pour sauter du véhicule sachant qu'il devient dangereux de sauter d'un véhicule si sa vitesse dépasse 20 km/h.
(rép : 2339N  /  31.6 km/h  /  1,9s)

14. Un bloc de glace de 4kg glisse sans frottement sur une surface de verre horizontale avec une vitesse initiale donnée. Une force de 15 N agit sur lui en sens inverse de son mouvement. Ainsi après avoir parcouru une distance de 11 m sa vitesse est réduite de moitié. Calculer la vitesse initiale du bloc.
(rép : 10,5 m/s )

15. Quelle force constante est nécessaire pour faire passer la vitesse d'un train de 200 tonnes de 0 à 6 m/s² en 10secondes :
quand la voie est horizontale
quand le train gravit une côte dont la déclivité est de 5%
quand le train descend le long de la même voie ?
La résultante des forces de frottements suivant la direction du mouvement est égale à 2% du poids du train.
(rép : 160000 N  /  260000 N  / 60000 N )

16. Un skieur part sans vitesse initiale et descend une pente dont la déclivité est de 10 %, longue de 200m. Les frottements valent 1/10$^{eme}$ du poids du skieur dont la masse est 80 kg. Calculer la force que doit produire le skieur pour arriver en bas avec une vitesse de 90 km/h.
(rép : 125 N)

17. Un camion de 3 tonnes démarre sur une route horizontale en parcourant 250 m en 30s. Les frottements valent une force constante égale à 12 % du poids du véhicule.
Quelle est la force demandée au moteur le long du trajet ?
(rép : 5280 N)

Rappel : ***la déclivité d'un plan incliné d'angle $\alpha$ représente en fait son sinus***
***La pente représente sa tangente.***
***Les indicateurs routiers qui expriment l'inclinaison en % indiquent en fait la déclivité du plan incliné.***
***Si l'inclinaison est de 7 %, ceci signifie que sin$\alpha$ = 0,07***

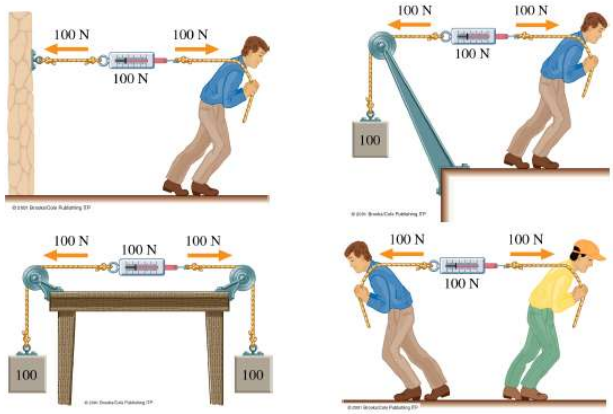
# 9. Forces et équilibre

## 9.1 Equilibre d'un corps en translation

La **statique** est la partie de la physique dans laquelle on traite de l'absence de mouvement. En statique, un corps est en équilibre de translation s'il est au repos dans un système de référence donné.

**D'après le principe d'inertie, si ce corps est au repos c'est que la <u>résultante des forces</u> qui agissent sur lui est <u>nulle.</u>**

Quand la somme vectorielle de toutes les forces est zéro, il n'y a aucun mouvement. On parle alors d'un **équilibre statique**. Mais les forces existent tout de même à l'intérieur du système. Ici elles sont stockées comme force de traction `a l'intérieur de la corde.




Du point de vue de la statique, toutes ces situations sont équivalentes.

### Cas des forces coplanaires

Des forces sont **<u>concourantes</u>** si les droites d'action de ces forces ont un point commun. Elles sont **<u>coplanaires</u>** si elles sont dans un même plan.

***Un système, soumis à des forces concourantes et coplanaires est en équilibre si*** $\Sigma\ \vec{F} = \mathbf{0}$

Un vecteur est nul ssi ses composantes suivant X et Y sont nulles.

**Equilibre de translation** : $\Sigma \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases}$

### Exemple

Etudions la situation représentée à la figure ci dessous. L'anneau est-il en équilibre ?

Solution

Vérifions l'équilibre selon l'axe $x$ . (On note que $\vec{F_3}$ n'a pas de composante selon $x$ )

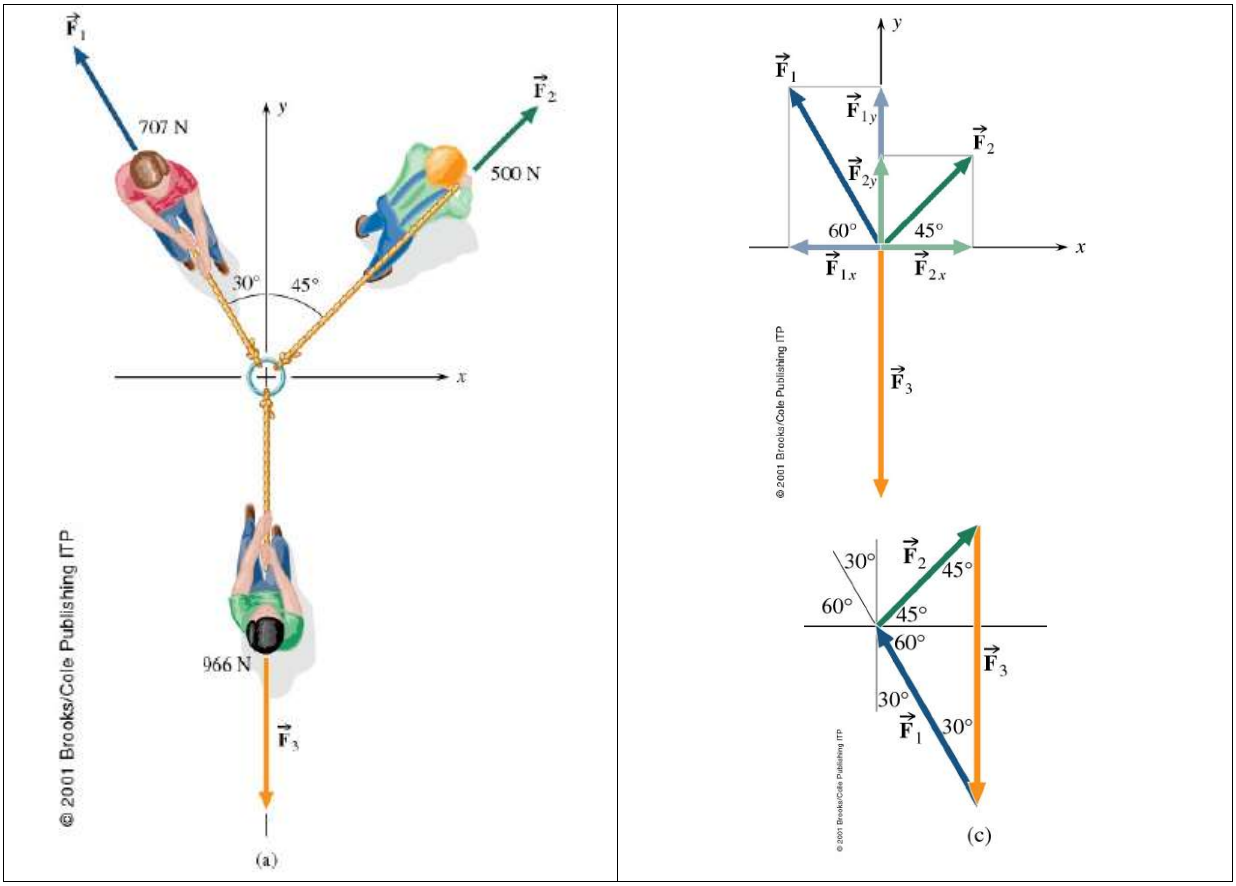
$$\sum \vec{F_x} = \vec{0} \rightarrow \vec{F_{1x}} + \vec{F_{2x}} = \vec{0} \rightarrow F_{1x} - F_{2x} = 0 \rightarrow 707 \times \cos 60 - 500 \times \cos 45 = 0 \quad OK$$

Vérifion l'équilibre selon l'axe $y$ .

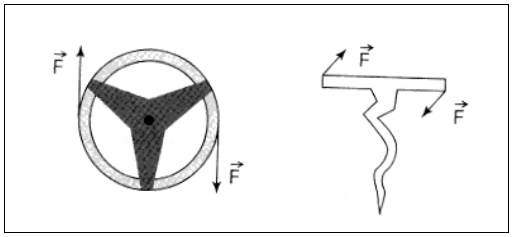
$$\sum \vec{F_y} = \vec{0} \rightarrow \vec{F_{1y}} + \vec{F_{2y}} + \vec{F_{3y}} = \vec{0} \rightarrow F_{1y} + F_{2y} - F_{3y} = 0$$

$$\rightarrow 707 \times \sin 60 + 500 \times \sin 45 - 966 = 0 \quad OK$$

L'anneau est donc bien à l'équilibre et il ne bouge pas.

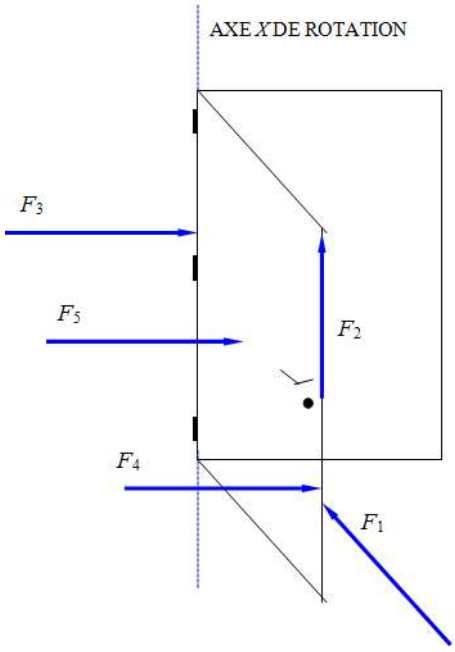



## 9.2 Equilibre de rotation



### 9.2.1 Effet d'une force appliquée sur un système pouvant tourner autour d'un axe

Les exemples qui suivent, montrent que la condition de translation n'est pas suffisante.
Considérons les cas d'un volant et d'un tire-bouchon. Ces corps sont soumis à l'action de 2 forces de même intensité, de même direction et de sens opposés. Leur résultante est donc nulle. Mais les corps ne sont pas en équilibre puisqu'ils peuvent effectuer une rotation autour d'un axe ⊥ au plan formé par ces 2 forces (ces 2 forces forment un couple de forces).




Si les forces peuvent déplacer les objets, elles peuvent aussi les faire tourner sur eux-mêmes.
Les mouvements de rotation que l'on va étudier, sont des mouvements qui se feront autour d'un axe fixe appelé ***axe de rotation*** et noté ***axe X***.

Prenons l'exemple simple d'une porte mobile autour d'un axe vertical.
Appliquons-lui des forces de direction et de sens différents

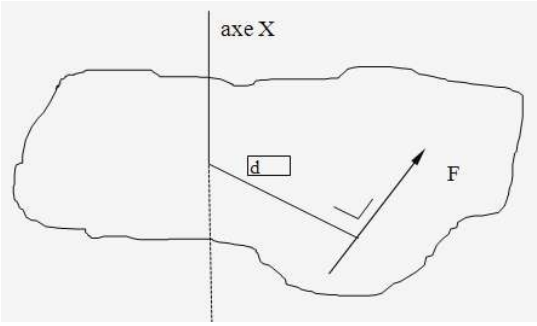
L'expérience montre que les forces $\vec{F}_1$ , $\vec{F}_2$ , $\vec{F}_3$ sont sans effet de rotation sur la porte.
Seules les forces $\vec{F}_4$ et $\vec{F}_5$ permettent le mouvement de rotation de la porte autour de l'axe *X*.

Les forces // à l'axe de rotation ne provoquent aucun effet de rotation ($F_2$ )
Les forces ⊥ à l'axe de rotation et dont la direction coupe l'axe, ne produisent aucune rotation ( $F_1$ et $F_3$ )

***Les forces ⊥ à l'axe de rotation et dont la direction ne passe pas par l'axe produisent une rotation ( $F_4$ et $F_5$ ).***
La rotation est plus efficace pour $F_4$ que pour $F_5$.

***L'effet de rotation dépend de la distance entre la force et l'axe.***

**Rappel** : distance d'un point à une droite : c'est la mesure d de la **perpendiculaire** menée de l'axe *X* à la **direction** de la force *F*.




La notion de distance est très importante en rotation.
En effet, il est plus facile de serrer un boulon avec une clé longue qu'avec une clé courte.
Il est plus facile de faire tourner une porte en poussant loin des charnières que près de l'axe de rotation.
***En conclusion, dans un effet de rotation, il n'y a pas que l'intensité de la force qui compte, mais aussi sa distance à l'axe de rotation***

## 9.2.2 Moment M d'une force F par rapport à un axe X

**Ce moment est défini par le produit de l'intensité de la force F par la distance d qui la sépare de l'axe de rotation X**

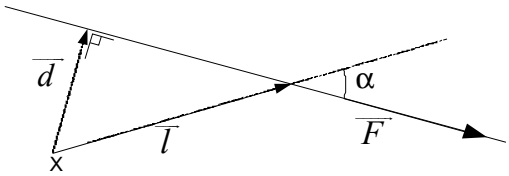
$$M_{F/X} = F \cdot d$$

$M_{F/X}$ Moment de *F* par rapport à *x*, en *N/ m*
*F* Force, en N
*d* Distance, en *m*

Note *d* est souvent appelé bras de levier de la force

**Par convention**, le moment est compté positif s'il tend à faire tourner le système dans un sens et il est compté négatif s'il fait tourner le système dans l'autre sens.

Remarque
Quand on parle de moment, il faut toujours préciser par rapport à quel axe on le détermine.




De façon plus générale

$$M_{F/X} = F \cdot l \cdot \sin\alpha$$

$M_{F/X}$ : moment de la force $\vec{F}$ par rapport au pont *X*; en *N.m*
*F* : Force, en *N*
*l* : Distance de *X* à un point quelconque de la direction de $\vec{F}$, en *m*
α : angle entre la direction de $\vec{F}$ et $\vec{l}$

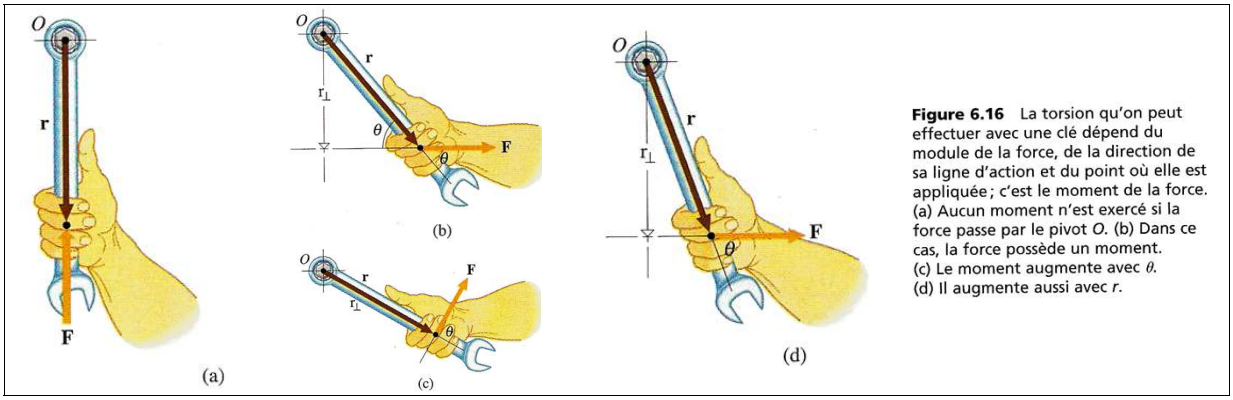



**Figure 6.16** La torsion qu'on peut effectuer avec une clé dépend du module de la force, de la direction de sa ligne d'action et du point où elle est appliquée ; c'est le moment de la force. (a) Aucun moment n'est exercé si la force passe par le pivot *O*. (b) Dans ce cas, la force possède un moment. (c) Le moment augmente avec $\theta$. (d) Il augmente aussi avec *r*.

## 9.2.3 Théorème des moments

**Expérience :**

Soit une barre homogène pouvant tourner autour d'un axe fixe X.
Attachons-y des masses connues et examinons un cas ***d'équilibre***.

Pour la situation d'équilibre ci-dessus, calculons les différents moments des différentes forces.

$M_{F1/X}$ =

$M_{F2/X}$ =

$M_{F3/X}$ =

A l'équilibre de rotation, on a :

Conclusion

***Les moments des forces qui tendent à faire tourner le corps dans un sens sont égaux aux moments des forces qui tendent à faire tourner le corps dans l'autre sens.***

***OU***

***Un solide pouvant tourner autour d'un axe fixe reste en équilibre de rotation si la somme algébrique des moments par rapport à l'axe, des forces qui lui sont appliquées, est nulle.***

**Equilibre de rotation** $\Sigma M_{F/x} = 0$

**Le corps étant en équilibre de rotation, l'axe *X* peut être quelconque (au choix : voir exercices)**

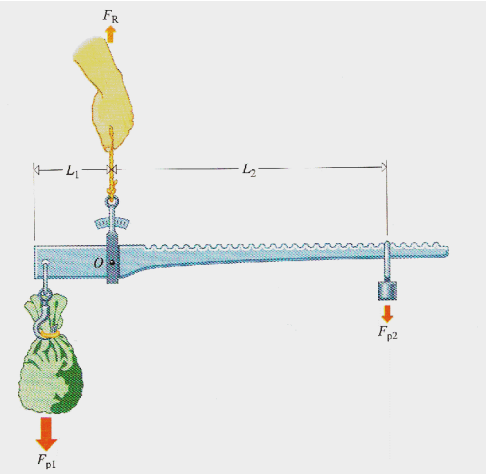



**Figure 6.15** Balance à bras inégaux ou bascule. Le contrepoids peut être déplacé le long du bras jusqu'à atteindre l'équilibre avec l'objet pesé. La bascule équilibrée est un système de forces dont les lignes d'action sont parallèles et donc non concourantes.

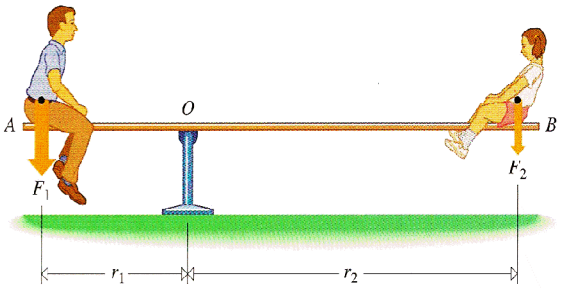


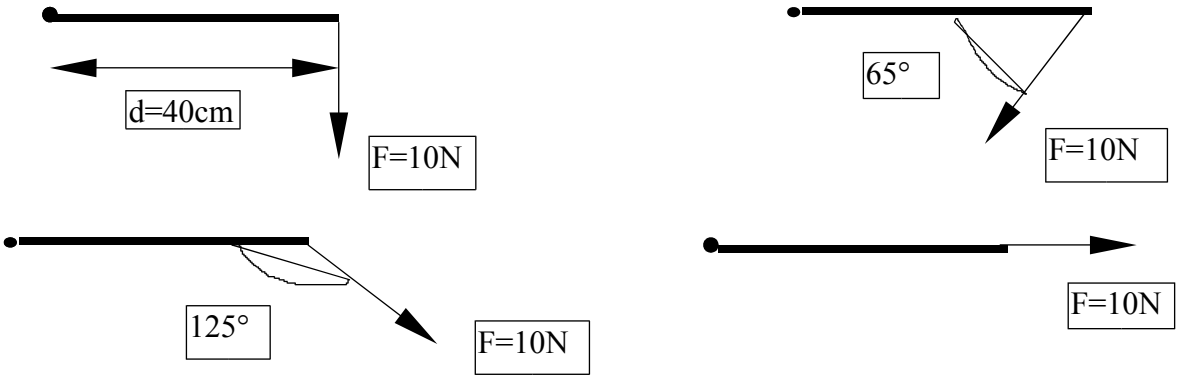

**Figure 6.14** Forces inégales et parallèles agissant à des distances inégales au point de pivotement. Ce système est en équilibre rotationnel.

## 9.2.4 Exercices

### 9.2.4.1 Les moments

1. Calculer le moment des forces par rapport à X dans les cas suivants:

- le point représente l'axe X de rotation



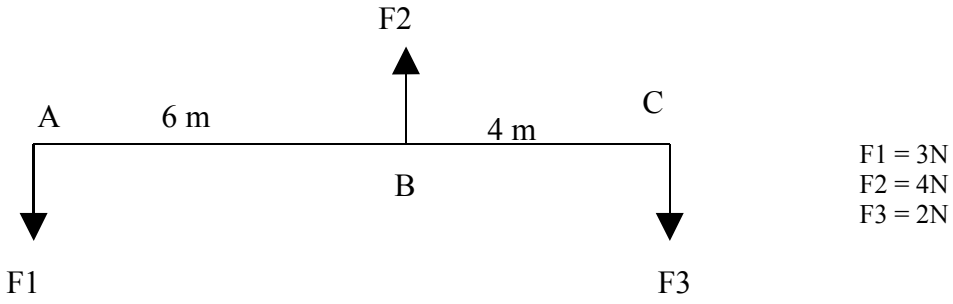

Laquelle de toutes ces rotations est la plus efficace ?

2. Une barre horizontale AC de poids négligeable mesure 10m. Elle est soumise à l'action de 3 forces

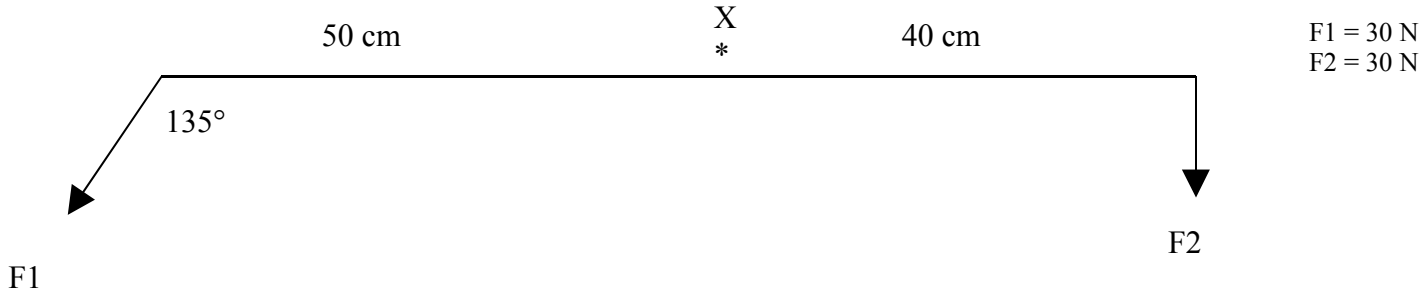
Calculer la somme des moments des forces par rapport :

- à un axe ⊥ placé en A
- à un axe ⊥ placé en B

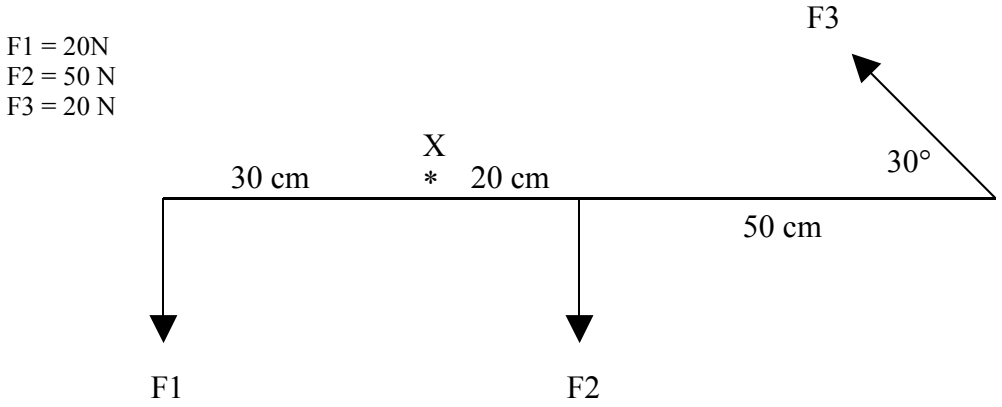
( Réponses : /A : -28 Nm /B : 2 Nm )



3. Trouver la somme des moments des forces par rapport à l'axe X. Dire si la barre est en équilibre de rotation par rapport à cet axe.

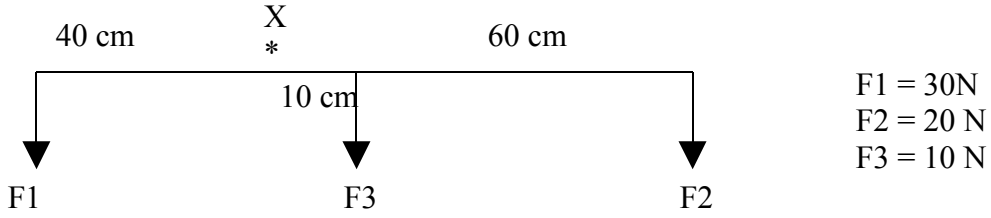



(Réponse : -1,4 Nm : rotation dans le sens de F2)

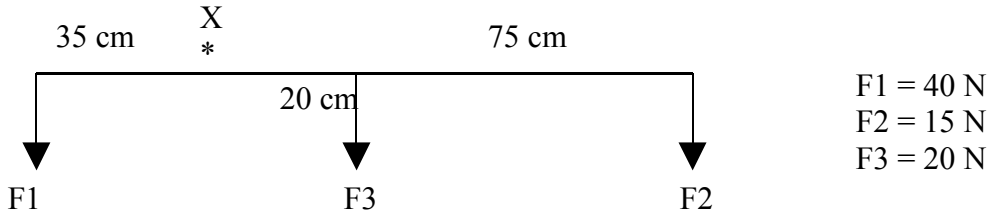



( Réponse : 3 Nm : rotation dans le sens de F1 )

4. Quelle force faut-il rajouter ou soustraire à l'extrémité de F1 pour rétablir l'équilibre ?




( réponse : 2,5 N)

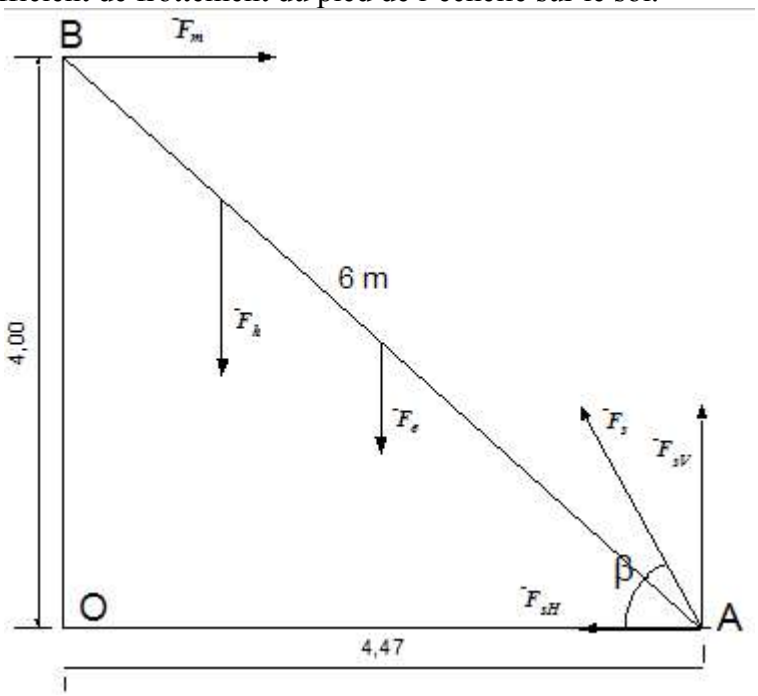



( réponse : 3,57 N)

### 9.2.4.2Exercices résolus

1. Soit un homme de masse 80 kg situé aux trois quarts d'une échelle de 6 m de long, ayant une masse de 20 kg. L'échelle est appuyée, sans frottement, sur un mur à une hauteur de 4 m du sol.
   a) Faire un schéma montrant les forces en présence.
   b) Déterminer ces forces

En déduire le coefficient de frottement du pied de l'échelle sur le sol.




Solution

La distance $OA$ vaut : $OA = \sqrt{4^2 + 6^2} = 4.47\ m$

La somme des moments par rapport à $A$ est nulle :

$$-4F_m + F_h \times 4.47 \times \frac{3}{4} + F_e \times \frac{4.47}{2} = 0$$

$$\rightarrow F_m = \frac{1}{4}\left(\frac{3 \times 4.47 \times 80g}{4} + \frac{4.47 \times 20g}{2}\right) = 78.23g = 767\ N$$

La résultante des forces des nulles

$$\sum \vec{F} = 0 \rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \rightarrow F_m = F_{sH} \rightarrow F_{sH} = 767\ N \\ \sum F_y = 0 \rightarrow F_{sV} = F_h + F_e \rightarrow F_{sV} = 80g + 20g = 981\ N \end{cases}$$

$$\text{or :} \begin{cases} F_{sV} = F_s \sin\beta \\ F_{sH} = F_s \cos\beta \end{cases} \rightarrow \frac{F_s \sin\beta}{F_s \cos\beta} = \frac{981}{767} \rightarrow \tan\beta = 1.29 \rightarrow \beta = 52.2°$$

Le coefficient de frottement est alors : $\mu = \frac{F_{sH}}{F_{sV}} = \frac{1}{\tan\beta} = \frac{1}{1.29} = 0.78$

2. Une enseigne de poids 400 N, est suspendue à l'extrémité d'une barre horizontale de longueur 2,0 m , très légère et fixée à un mur par un pivot. La barre est tenue horizontale par une corde attachée en un point O situé au quart de sa longueur à partir de l'extrémité et faisant un angle de 50° avec la barre.

a) Faire un schéma montrant les forces en présence.
b) Trouver la force de réaction du pivot.

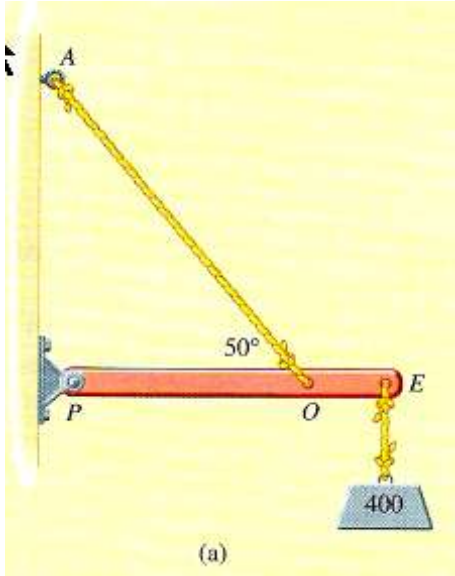
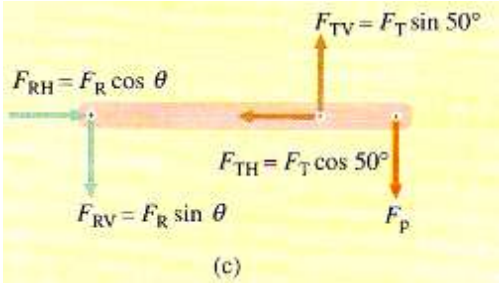
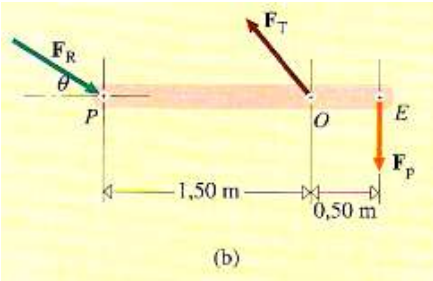



**Figure 6.28** (a) Il s'agit de calculer la réaction en P et la tension de la corde *OA*. Contrairement à la Fig. 6.11, les forces sont ici non-concourantes et les digrammes de corps isolés des points *O* ou *E* ne nous aident pas beaucoup. (b) Comme la barre est en équilibre et toutes les forces inconnues agissent sur elle, nous traçons un diagramme de corps isolé pour la barre. (c) Décomposition des forces en composantes horizontales et verticales.




Solution

La somme des moments par rapport à $P$ doit être nulle :

$$F_{TV} \times 1.5 - F_P \times 2 = 0 \rightarrow F_{TV} = \frac{2}{1.5} F_P = \frac{2 \times 400}{1.5} = 533.3\ N$$

$$\rightarrow F = \frac{F_{TV}}{\sin 50} = \frac{533.3}{\sin 50} = 696\ N$$

La somme des moments par rapport à $E$ doit être nulle :

$$F_{RV} \times 2 - F_{TV} \times 0.5 = 0 \rightarrow F_{RV} = \frac{0.5}{2} F_{TV} = \frac{0.5 \times 533.3}{2} = 133.3\ N$$

La résulante des forces selon l'axe hori zontale est nulle

$$F_{RH} = F_{TH} = F_T \cos 50 = 696 \times \cos 50 = 447.5\ N$$

Donc : $\begin{cases} F_{RV} = F_R \sin \theta = 133.3 \\ F_{RH} = F_R \cos \theta = 447.5 \end{cases} \rightarrow \frac{F_R \sin \theta}{F_R \cos \theta} = \frac{133.3}{447.5} \rightarrow \tan \theta = 0.297 \rightarrow \theta = 16.6°$

$$\rightarrow F_R = \frac{F_{RV}}{\sin \theta} = \frac{133.3}{\sin 16.6} = 467\ N$$

**Exercices non-résolus**

1. Un poids de 100N est tenu en équilibre par deux cordes. L'une exerce une tension horizontale, l'autre tire à 30° par rapport à la verticale. Calculer la tension dans chaque corde.
( rép : hor = 57,5N et ver = 115N )

2. Une charge de 2400N est suspendue à l'extrémité O d'une perche de 4m de longueur dont le talon A est fixé dans le mur et l'extrémité O retenue par un câble OB de 5m, rattaché au mur, 3m au-dessus du point A. trouver la tension du câble OB et la compression exercée par la perche. Négliger le poids de la perche.

3. Une poutre de 2m de long a un poids de 250N attaché à l'une de ses extrémités. A l'autre bout on fixe un poids de 100N. Si le poids de la poutre est négligeable trouver le point d'équilibre de la poutre.
(rép : à 57 cm du coté de la plus grande des masses)

4. Une plate-forme en bois de 3,6m de long est suspendue du toit d'une maison par des cordes fixées à ses extrémités. Un peintre pesant 800N se tient à 1,2m de l'extrémité gauche de la plate-forme dont le poids propre est de 200N. Trouver la tension dans chacune des cordes.
(rép : 367N et 633N)

5. Pour effectuer un plongeon dans une piscine, un nageur se place au point a à l'extrémité de la planche de 3 m de long servant de plongeoir.
Cette planche de 150 kg repose en O sur une barre fixe à une distance de 1m de b (qui fixé au sol). Sachant que le nageur a une masse de 75kg, calculer la réaction au point O et la force exercée en b pour maintenir la planche horizontale.
( rép : 4500N et 2250N)

6. Une échelle de 3,6m de long pesant 250N s'appuie sur un mur sans frottement en un point situé à 3m au-dessus du sol. Quelle est la force exercée par l'échelle sur le sol et sur le mur ?

# 10. Le mouvement circulaire uniforme ( MCU )

## 10.1 Définition

Un mobile est animé d'un mouvement **circulaire** si sa trajectoire est une circonférence de centre *O* et de rayon *R*.
Il est **uniforme** si sa vitesse de rotation est constante.

## 10.2 Caractéristiques

**Période de rotation *T*** : ***durée d'une révolution complète. Elle est mesurée en secondes***

La période est un temps particulier. C'est une caractéristique importante du MCU.
On lui attribue une lettre « T »qui n'est pas à confondre avec la grandeur générale qui est le temps qu'on note « t »

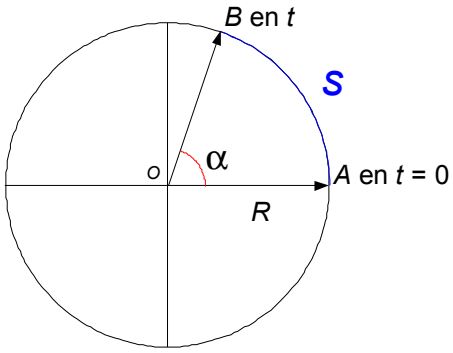
**Fréquence de rotation *f*** : ***nombre de tours effectués par seconde***.

Elle se mesure en hertz Hz. Le hertz représente un tour ou une révolution par seconde.

On montre facilement que $T = \frac{1}{f}$

## 10.3 Position du mobile

A l'instant $t = 0$, la position du mobile est représentée par le vecteur $\overrightarrow{OA}$.
Il est en MCU sur un cercle de rayon $R$.




A l'instant $t$, il a parcouru un **arc de cercle** de longueur $s$. Sa nouvelle position est représentée par le vecteur $\overrightarrow{OB}$.

Le rayon vecteur $R$ a tourné d'un angle α.

Il existe un lien très simple entre ces 3 grandeurs

$$s = R \,.\, \alpha \quad \text{ou} \quad \alpha(\text{rad}) = s / R$$

avec α mesuré en radian, $R$ et $s$ en mètre
Rappel : 360° = 2 π ( radian ) 180° = π( radian ) 90° = π / 2

## 10.4 Vitesse angulaire ω et vitesse linéaire V

La **vitesse angulaire ω** représente l'angle parcouru par seconde $\omega = \frac{\alpha}{t}$

avec α en radian, t en seconde, ω **en rad / s**

En MCU, le mobile parcourt un angle = 2π en un temps = à une période T

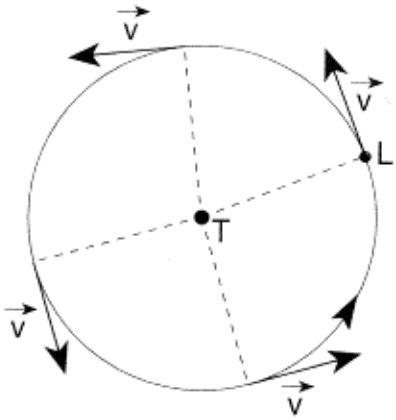
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

La **vitesse linéaire *V*** représente la vitesse réelle du mobile sur sa trajectoire. Autrement dit le nombre de mètres parcourus par seconde sur la circonférence du cercle de rayon R

En MCU, le mobile parcourt un arc de cercle = 2π $R$ en une période $T$

$$V = \frac{2\pi R}{T} = \omega R$$

Connaissant **ω**, on peut déterminer la vitesse ***V*** pour un point quelconque situé à une distance $R$ de l'axe de rotation.




***La partie de cours sur « les mouvements paraboliques » montre que le vecteur V est un vecteur tangent à la trajectoire suivie par le mobile. Donc V est un vecteur ⊥ au rayon R***

**Exemple**

La Lune décrit un MCU autour de la terre en 27 jours et 7 heures, le rayon de sa trajectoire est de 384000 km. Calculer sa vitesse linéaire ou vitesse orbitale.
( rép = 1 km /s )

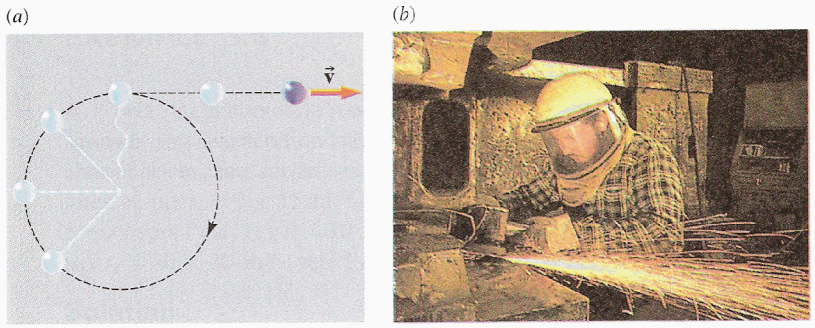



**Figure 4.2** ◀
(*a*) Une particule en mouvement sur une trajectoire circulaire au bout d'une corde. Lorsqu'on lâche la corde, la particule suit la tangente au cercle. (*b*) Les étincelles produites par une meule s'échappent tangentiellement.

# 10.5 Accélération centripète

***La vitesse linéaire du mobile en MCU est un vecteur. Pour un rayon R donné, sa grandeur est constante mais son orientation change continuellement avec le temps.***

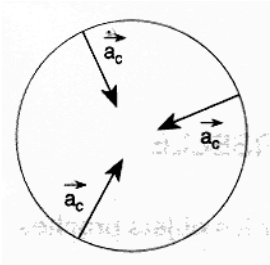
***Il y a donc une <u>variation</u> <u>géométrique</u> du vecteur vitesse. Ceci veut dire qu'il y a une accélération qu'on nomme « accélération centripète : $a_c$ »***

## 10.5.1 Accélération centripète

| Accélération tangentielle | Accélération centripète |
|---|---|
| Lors de l'étude du MRUV, on a vu que le vecteur vitesse V change en grandeur mais pas en sens, ni en direction.<br>Ceci résulte d'une accélération a qui est // au vecteur vitesse $V$ : on dit que l'accélération est tangentielle.<br>**Accélération tangentielle ⇔ modification de la grandeur de $V$** | Lors de l'étude du MCU, on a vu que le vecteur vitesse $V$ change en sens, en direction mais pas en grandeur.<br>Ceci résulte d'une accélération particulière qui est ⊥ au vecteur vitesse $V$ : on dit que l'accélération est normale ou centripète.<br>**Accélération centripète ⇔ modification de la direction de V** |

## 10.5.2 Direction et orientation de l'accélération centripète

Démonstration : voir « Le mouvement circulaire uniforme ( MCU ) » Page 10
L'accélération dans un MCU est un vecteur dont la direction est perpendiculaire à la direction de la vitesse et son sens est dirigé vers le centre de la circonférence.

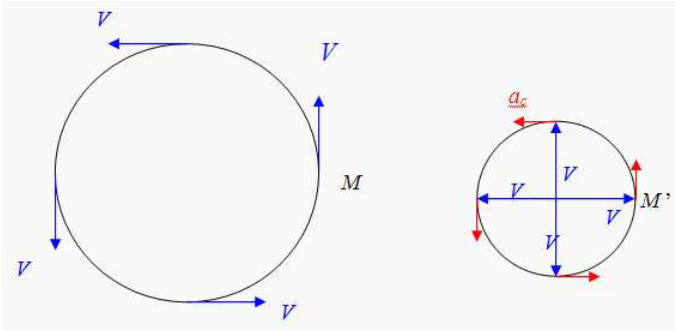



## 10.5.3 Grandeur de l'accélération centripète

***Démonstration***

En un point menons des vecteurs équipollents aux vecteurs « vitesse » en différents points.

Puisque $V$ est contant en grandeur, l'extrémité du vecteur $V$ décrit une circonférence de centre $P$ et de rayon $R' = \omega R$ ( noter que la grandeur de $R' = V$)
Les mouvements des points M et M'ont la même vitesse angulaire ω
Leur vitesse est proportionnelle au rayon de leur trajectoire.




Pour $M$ $\qquad V = \omega.R$

Pour $M'$

$$V' = \omega R' = = \omega V' = \omega^2 R = \frac{V^2}{R}$$

Le mouvement du point $M'$ est un MCU et sa vitesse $V'$ représente la vitesse avec laquelle la vitesse de point $M$ varie.

La vitesse de la vitesse n'est en fait rien d'autre que l'accélération d'un mobile.

***Donc la vitesse du point M' n'est rien d'autre que <u>l'accélération du point M</u>***
Le vecteur « accélération » étant reporté sur la trajectoire du point M, on voit tout de suite que ce vecteur est dirigé vers le centre de trajectoire **(ce qu'on savait déjà)**

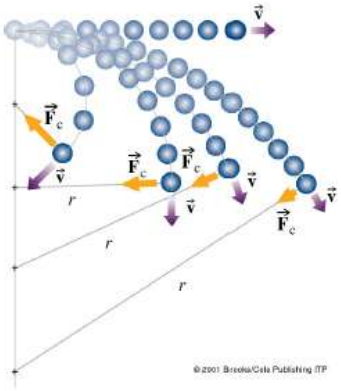
La grandeur de l'accélération centripète se calcule par la formule :

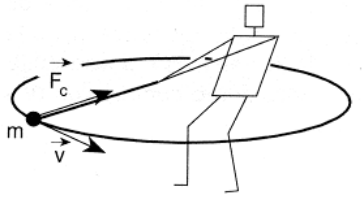
$$a_c = \frac{V^2}{R} = \omega V = \omega^2 R$$

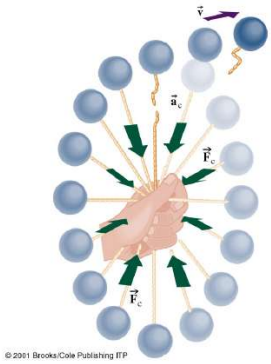
| | |
|---|---|
| $a_c$ | Accélération centripède, en $m/s^2$ |
| $V$ | Vitesse, en $m/s$ |
| $R$ | Rayon de courbure, en $m$ |
| ω | Vitesse angulaire, en $rad/s$ |

## 10.6 Force centripète

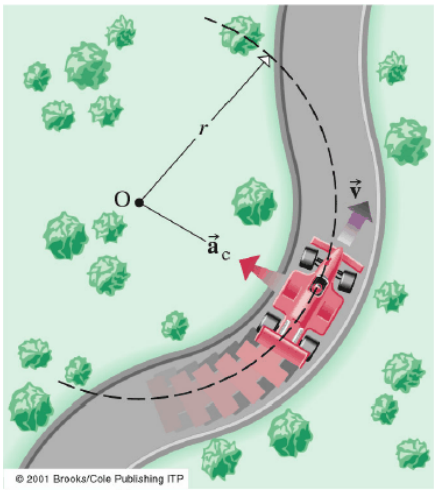
***Si un corps qui tourne en MCU est soumis à une accélération centripète dirigée vers le centre de la trajectoire, d'après la seconde loi de Newton, cette accélération ne peut être produite que par une force qui a la même direction et le même sens que l'accélération en question.***
**Pour cette raison, un corps en MCU sera constamment soumis à une force dite force centripète dirigée vers le centre de la trajectoire.**



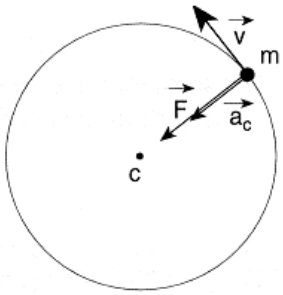
Ainsi, si on désire mettre une fronde en mouvement en MCU par l'intermédiaire d'une corde tenue à la main, il faut sans cesse tirer la balle vers soi. La force que la main produit sur la balle par l'intermédiaire de la corde, a pour effet de courber sa trajectoire.
D'après le principe d'inertie, si on ne lui appliquait aucune force, la balle continuerait en ligne droite : c'est ce qui se passerait si la corde cassait




Lorsqu'une voiture aborde un virage, c'est la route (par l'intermédiaire des forces de frottement de l'asphalte sur les pneus) qui fournit la force centripète nécessaire pour que la voiture tourne.

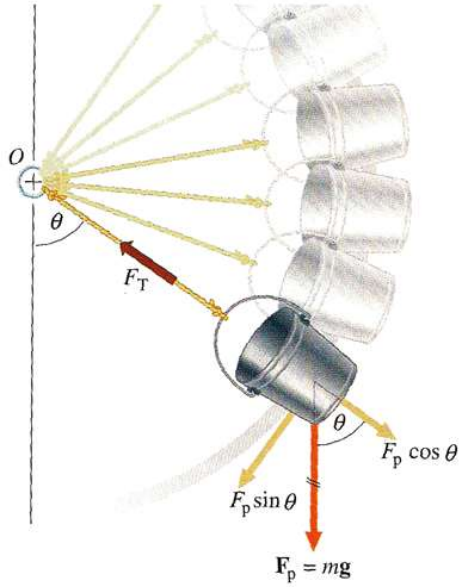
Un autre exemple de MCU est celui d'un train qui s'engage dans un tournant. Ce sont les rails qui le font tourner. Ils exercent en effet une force de résistance qui empêche le train de
continuer en ligne droite.

***Pour qu'un corps de masse m soit en MCU sur un cercle de rayon R avec une vitesse V, il faut qu'il soit soumis à une force centripète Fc d'expression :***




$$F_c = \frac{m \cdot V^2}{R} = m.\omega^2 R$$

***Si plusieurs forces agissent en même temps, il faut que la résultante de toutes les forces ait les caractéristiques d'une force centripète***



Les cabines d'un manège d'une fête foraine utilisent la pesanteur pour fournir la force centripète.

**Figure 5.24** Les forces s'exerçant sur un seau en rotation dans un plan vertical. La tension de la corde dépend de $\theta$ et de la vitesse $v$ à cet instant. Si vous faites cette expérience avec un seau plein d'eau, prenez vos précautions pour que $v > \sqrt{rg}$ au sommet ($\theta$ =180°), sinon vous risquez de vous faire arroser.

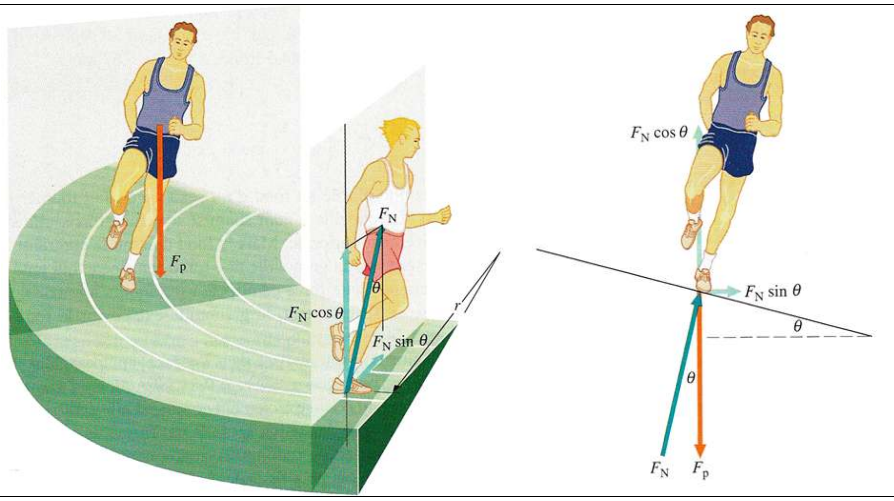



**Figure 5.21** Coureur sur un virage relevé. La réaction normale $F_N$ est toujours perpendiculaire à la route; tandis que le poids $F_p$ est vertical vers le bas. La force normale a une composante radiale ou horizontale, $F_N \sin\theta$, qui peut être rendue égale à $F_c$.

# 10.7 Exercices résolus

**<u>Avertissement</u> : Les exercices suivants sont donnés à titre d'exemples. Certains sont difficiles, voir très difficiles. Le lecteur n'hésitera donc pas à demander des explications supplémentaires.**

## Exemple 1

On place une petite pièce de monnaie sur le bord de la platine d'un tourne-disque de rayon 15 cm qui tourne à 30 tr/min. Trouver le coefficient minimal de frottement pour que la pièce reste sur la platine.

### Solution

Dans ce type de problème, il est important de faire un schéma ayant la bonne perspective. Une vue d'en haut ne nous permettrait pas de représenter le poids ni la force normale sur la pièce. Une vue de côté (figure 6.9) représente les trois forces agissant sur la pièce. L'accélération étant orientée vers le centre, nous plaçons l'axe des $x$ positifs selon cette orientation. La force centripète nécessaire est donnée par la force de frottement $\vec{\mathbf{f}}$. C'est un frottement statique puisque la pièce ne glisse pas sur la platine. Sous la forme vectorielle, la deuxième loi de Newton s'écrit

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{N}} + \vec{\mathbf{f}} + m\vec{\mathbf{g}} = m\vec{\mathbf{a}}$$

Ses composantes sont

$$\sum F_x = f = \frac{mv^2}{r}$$

$$\sum F_y = N - mg = 0$$

Nous cherchons le coefficient minimal de frottement. Dans ces conditions, la pièce est tout juste sur le point de glisser. On peut donc supposer que la force de frottement statique a sa valeur maximale. Ainsi, $f = f_{s(\max)} = \mu_s N = \mu_s mg$. En insérant ce résultat dans l'expression en $x$, on trouve

$$\mu_s mg = \frac{mv^2}{r}$$

ou

$$\mu_s = \frac{v^2}{rg}$$

C'est le coefficient minimal de frottement statique pour que la pièce ne glisse pas. On remarque que la masse de la pièce n'intervient pas. Comme la platine fait 30 tours par minute, la période (temps requis pour faire un tour) est $T = 2$ s. (Il faut faire attention de ne pas confondre le symbole de la période avec le symbole du module de la force de tension !) Le module de la vitesse de la pièce est donné par le rapport entre la circonférence de sa trajectoire et la période : $v = 2\pi r/T$. En reportant cette expression dans l'équation précédente, on trouve $\mu_s = 4\pi^2 r/(T^2 g) = 4\pi^2 \times 0{,}15/(2^2 \times 9{,}8) = 0{,}151$.

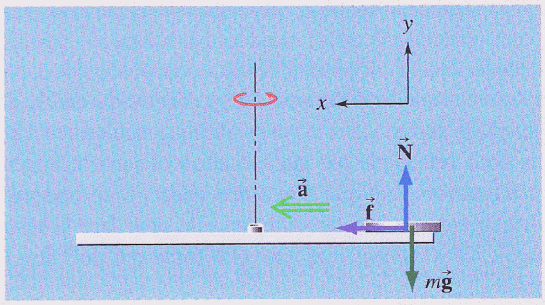



**Figure 6.9 ▲**
Une pièce de monnaie posée sur un tourne-disque. Le frottement est la seule force horizontale. Il doit agir *vers l'intérieur* pour fournir la force centripète.

## Exemple 2

Dans le manège de parc d'attractions appelé le « rotor », les gens se tiennent debout sur un plancher rétractable à l'intérieur d'un grand cylindre qui tourne autour d'un axe vertical. Lorsque le cylindre atteint une vitesse de rotation suffisante, le plancher se rétracte et disparaît. Trouver le coefficient minimal de frottement pour que les gens ne tombent pas le long de la paroi. On suppose le rayon égal à 2 m et la période égale à 2 s.

### Solution

La figure 6.10 représente un schéma avec les forces agissant *sur* une personne. (Nous ne nous intéressons pas à la force exercée sur le cylindre par la personne.)

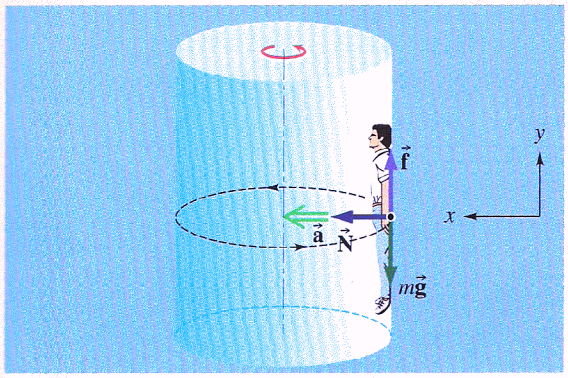



**Figure 6.10 ▲**
Une personne dans le « rotor » d'un parc d'attractions. La force de frottement équilibre le poids. La force centripète est fournie par la force normale $\vec{N}$.

On remarque que les rôles de la force normale $\vec{N}$ et de la force de frottement $\vec{f}$ sont intervertis par rapport à l'exemple 6.4. Dans le cas présent, $\vec{N}$ fournit la force centripète alors que $\vec{f}$ empêche le glissement vertical. ■

Sous forme vectorielle, la deuxième loi de Newton s'écrit

$$\sum \vec{F} = \vec{N} + \vec{f} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Les composantes sont

$$\sum F_x = N = \frac{mv^2}{r}$$

$$\sum F_y = f - mg = 0$$

Puisque nous cherchons le coefficient minimal de frottement pour que la personne ne glisse pas, la force de frottement est statique et a sa valeur maximale ; ainsi, $f = f_{s(max)} = \mu_s N = \mu_s(mv^2/r)$. En insérant ce résultat dans les expressions précédentes, on trouve

$$\mu_s \frac{mv^2}{r} = mg$$

ou

$$\mu_s = \frac{rg}{v^2}$$

La période $T = 2$ s est le temps mis pour faire un tour ; par conséquent, $v = 2\pi r/T$. En utilisant cette valeur dans l'expression précédente, on trouve $\mu_s = T^2 g/(4\pi^2 r) = 2^2 \times 9{,}8/(4\pi^2 \times 2) = 0{,}496$.

## Exemple 3

Dans un parc d'attractions, une jeune femme de 50 kg se trouve sur la grande roue de rayon 9 m qui tourne dans un plan vertical à raison de 6 tr/min. Quel est le module de la force résultante qu'exercent sur elle le siège et le dossier lorsqu'elle se trouve à mi-chemin vers le haut ?

### Solution

La jeune femme est soumise à trois forces (figure 6.11). La force verticale $\vec{N}_1$ due au siège ne fait que compenser son poids puisqu'elle n'est pas en accélération dans la direction verticale. La force normale horizontale $\vec{N}_2$, due au dossier du siège, fournit l'accélération centripète. Sous forme vectorielle, la deuxième loi de Newton s'écrit

$$\sum \vec{F} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + m\vec{g} = m\vec{a}$$

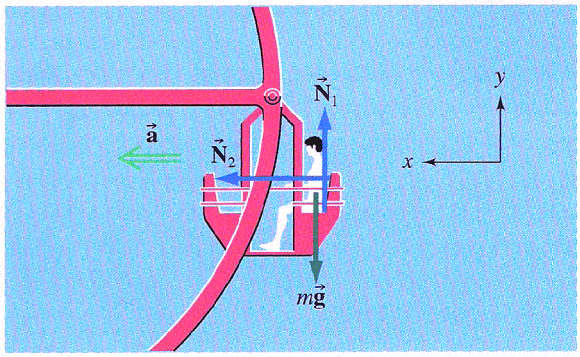



**Figure 6.11 ▲**
Sur une grande roue, la passagère décrit un cercle vertical.

Les composantes sont

$$\sum F_x = N_2 = \frac{mv^2}{r}$$

$$\sum F_y = N_1 - mg = 0$$

On constate que $N_1 = mg = 50\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{N/kg} = 490\ \text{N}$. Comme la roue fait 6 tours par minute, $T = 10\ \text{s}$ et $v = 2\pi r/T = (2\pi)(9\ \text{m})/2\ \text{s} = 5{,}65\ \text{m/s}$.

Par conséquent, $N_2 = mv^2/r = 178\ \text{N}$. La force résultante exercée par le siège et le dossier est $\vec{\mathbf{N}}_1 + \vec{\mathbf{N}}_2$, et son module s'écrit

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$$

$$= \sqrt{490^2 + 178^2} = 521\ \text{N}$$

## Exemple 4 : Les virages surélevés TRES IMPORTANT

Sur les autoroutes ou sur les vélodromes, le bord extérieur des virages est surélevé. Ce *relèvement* empêche le véhicule de déraper sur le côté au cas où le frottement qui assure la force centripète serait insuffisant. Une automobile de masse 1000 kg entre dans un virage circulaire de rayon 10 m qui est relevé de 37° par rapport à l'horizontale. La route est glissante et le coefficient de frottement statique n'est que de 0,1. (a) Trouver le module de la vitesse maximale à laquelle l'automobile peut rouler sans risque. (b) Établir une relation entre l'angle d'inclinaison de la route et la vitesse maximale permise, en considérant qu'il n'y a pas de frottement entre la route et les pneus.

### Solution

(a) La figure 6.12*a* représente le virage vu d'en haut. L'automobile se déplace sur un cercle horizontal, ce qui signifie que son accélération est également horizontale. Comme nous voulons que l'un des axes pointe vers le centre de la trajectoire circulaire, nous allons définir un axe des *x horizontal* orienté vers l'intérieur de la courbe (figure 6.12*b*). ■

Puisque la force de frottement empêche le véhicule de déraper vers le haut du plan incliné, c'est-à-dire vers le bord extérieur du cercle, elle doit être orientée vers le bas du plan (comparer la figure 6.12*b* avec la figure 6.9). Sous forme vectorielle, la deuxième loi de Newton s'écrit

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{N}} + \vec{\mathbf{f}} + m\vec{\mathbf{g}} = m\vec{\mathbf{a}}$$

D'après le diagramme des forces de la figure 6.12*c*, on voit que les composantes sont

$$\sum F_x = N \sin\theta + f \cos\theta = \frac{mv^2}{r} \qquad \text{(i)}$$

$$\sum F_y = N \cos\theta - f \sin\theta - mg = 0 \qquad \text{(ii)}$$

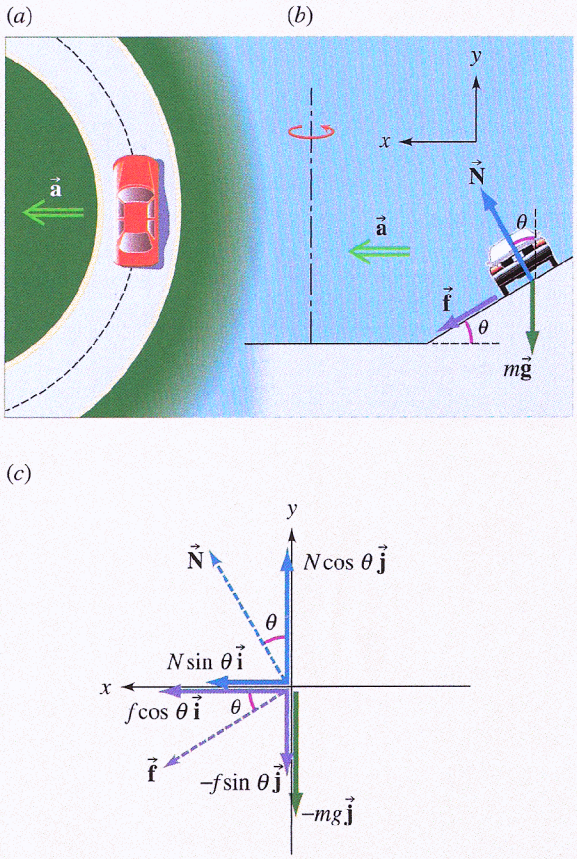



**Figure 6.12 ▲**
(*a*) Une automobile dans un virage relevé. (*b*) Les forces agissant sur l'automobile. On remarquera que la force normale a été dessinée au milieu de la voiture : elle est la combinaison des 4 forces normales qui s'exercent sur chacun des pneus. Si l'automobile ne dérape pas sur le côté, l'accélération est horizontale. (*c*) Le diagramme des forces pour l'automobile. On remarquera l'orientation des axes.

Puisque la voiture est à la limite du dérapage, la force de frottement est statique et a sa valeur maximale, ainsi, $f = \mu_s N = 0{,}1N$. Sachant que cos 37° = 0,8 et sin 37° = 0,6, les équations (i) et (ii) deviennent :

$$0{,}6N + 0{,}08N = 100v_{max}^2 \qquad \text{(iii)}$$

$$0{,}8N - 0{,}06N - 9800 = 0 \qquad \text{(iv)}$$

D'après l'équation (iv), $N = 9800/(0{,}74) = 1{,}32 \times 10^4$ N. En utilisant cette valeur dans (iii), on trouve $v_{max} = 9{,}5$ m/s.

(b) Il serait possible qu'une voiture réussisse à négocier la courbe en l'absence de tout frottement si l'angle de relèvement du virage était approprié. Pour une voiture de masse et de vitesse données dans une courbe de rayon connu, on trouve facilement la valeur de l'angle requis en éliminant les termes $f \cos \theta$ et $f \sin \theta$ des équations (i) et (ii). (Voir l'exercice 31 à la fin de ce chapitre.)

Note : Si $f = 0$. Les équations (i) et (ii), deviennent

$$\begin{matrix} N\sin\theta = \dfrac{mv^2}{r} \\ N\cos\theta = mg \end{matrix} \rightarrow \frac{\cancel{N}\sin\theta}{\cancel{N}\cos\theta} = \frac{\frac{\cancel{m}v^2}{r}}{\cancel{m}g} \rightarrow \boxed{\tan\theta = \frac{v^2}{rg}}$$

## Exemple 5 : Difficile – Pour information

Une pierre attachée à l'extrémité d'une corde se déplace selon un cercle vertical sous la seule influence de la gravité et de la tension de la corde. Établir une expression pour le module de la tension de la corde aux points suivants : (a) au point le plus bas ; (b) au point le plus haut ; (c) lorsque la corde fait un angle $\theta$ par rapport à la verticale.

### Solution

Puisque la corde est flexible, elle ne peut exercer de force perpendiculaire à sa longueur (contrairement à une tige). L'accélération n'est constante ni en module ni en orientation. La pierre est soumise à deux forces, de sorte que la forme vectorielle de la deuxième loi de Newton s'écrit

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{T}} + m\vec{\mathbf{g}} = m\vec{\mathbf{a}} \qquad \text{(i)}$$

(a) Au point le plus bas (figure 6.13*a*), l'accélération est verticale et orientée vers le haut. Si $\vec{\mathbf{v}}_b$ est la vitesse au point le plus bas et si on choisit l'axe $y$ pointant vers le centre du cercle, alors

$$\sum F_y = T - mg = \frac{mv_b^2}{r} \qquad \text{(ii)}$$

Donc, $T = mv_b^2/r + mg$. La tension compense le poids et fournit en plus la force centripète.

(b) Au point le plus haut (figure 6.13*b*), $\vec{\mathbf{T}}$ et $m\vec{\mathbf{g}}$ contribuent toutes deux à l'accélération centripète, qui est verticale et orientée vers le bas. Si on choisit l'axe $y$ pointant vers le centre du cercle, alors

$$\sum F_y = T + mg = \frac{mv_h^2}{r} \qquad \text{(iii)}$$

où $\vec{\mathbf{v}}_h$ est la vitesse au point le plus haut. On trouve $T = mv_h^2/r - mg$. Dans le cas particulier où $v_h = \sqrt{rg}$, $T = 0$, ce qui veut dire que le poids seul est suffisant pour donner la force centripète.

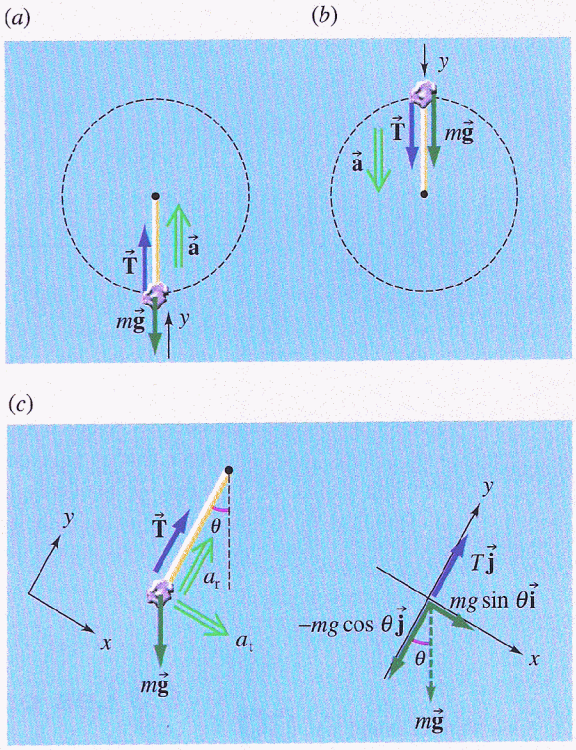



**Figure 6.13 ▲**
Une pierre en mouvement sur un cercle vertical. Les forces et l'accélération lorsque la pierre est (a) au point le plus bas, (*b*) au point le plus haut et (*c*) en un point quelconque.

(c) Lorsque la corde fait un angle $\theta$ par rapport à la verticale (figure 6.13*c*), la pierre a une accélération tangentielle à sa trajectoire parce que la force de gravité a une composante dans cette direction. Les composantes tangentielle et radiale (centripète) de l'équation (i) sont

$$\sum F_x = mg \sin \theta = ma_t \qquad \text{(iv)}$$

$$\sum F_y = T - mg \cos \theta = \frac{mv^2}{r} \qquad \text{(v)}$$

Donc, $a_t = g \sin \theta$ et $T = mv^2/r + mg \cos \theta$. Les relations (ii) et (iii) sont des cas particuliers de la relation (v) pour $\theta = 0°$ et $\theta = 180°$.

## Exemple 6 : Difficile – Pour information

Un skieur se déplace sans frottement sur une surface horizontale puis rencontre une bosse hémisphérique d'un rayon de 2 m (figure 6.14). Quelle est la vitesse maximale à laquelle il peut passer sur le sommet de la bosse sans que ses skis ne quittent le sol ?

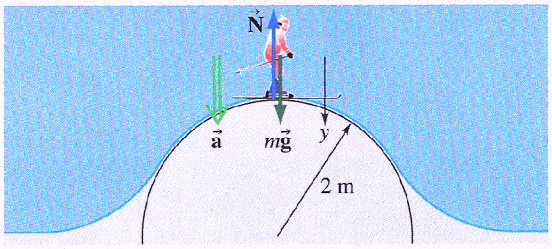



**Figure 6.14 ▲**
Un skieur au sommet d'une bosse hémisphérique d'un rayon de 2 m.

### Solution

Avant d'évaluer dans quelles conditions les skis quittent le sol, examinons la situation où le skieur passe sur la bosse en restant en contact avec le sol. Au sommet de la bosse, seules deux forces agissent sur le skieur : son poids vers le bas et la normale vers le haut. Puisque le skieur suit une portion de trajectoire circulaire, il est utile de placer un axe $y$ qui pointe vers le centre du cercle, donc vers le bas. Selon cet axe, la deuxième loi de Newton prend la forme suivante :

$$\sum F_y = mg - N = mv^2/r$$

On en déduit que $N = mg - mv^2/r$.

Lors du passage sur la bosse, le poids apparent $N$ du skieur est de module inférieur au poids réel $mg$. Plus le skieur arrive sur la bosse à une grande vitesse, plus le module de son poids apparent est faible. À la vitesse critique, le poids apparent devient nul ($N = 0$). ■

On trouve

$$mg = mv^2/r$$

d'où on tire $v = \sqrt{rg} = 4{,}43$ m/s.

Si le skieur arrive sur le sommet de la bosse à une vitesse supérieure à cette valeur, la force gravitationnelle que la Terre exerce sur lui ne suffit pas à le maintenir sur la trajectoire circulaire définie par la surface de la bosse : les skis cessent d'être en contact avec le sol et le skieur se trouve sur une trajectoire parabolique de chute libre dans les airs.

# 10.8 Exercices (MCU)

1. Un point matériel est situé à 50 cm d'un axe de rotation. Calculer sa vitesse linéaire et sa vitesse angulaire sachant qu'il effectue 30 tours par minute ( Rep: 5,6 km/h / 3,14 rad/s )
2. Calculer la période d'un MCU sachant que l'accélération est de 1 m/s et le rayon de la circonférence 10cm. ( Rep : 2s )
3. Calculer la vitesse linéaire et l'accélération centripète d'un point situé à l'équateur et un point situé à 45° de latitude.

   On donne période de rotation de la Terre : 23h56min et rayon de la Terre : 6350 km.
   ( Rep : 1667km/h / 1179 km/h / 0,03m/s² / 0.02m/s² )
4. Calculer la vitesse linéaire d'un point de la jante d'un volant de 25 cm de rayon tournant à 1800 tours/min
   ( Rep : 47,1 m/s )
5. Calculer la force centripète d'une masse de 5g décrivant une circonférence de 40 cm de rayon en MCU sachant qu'il effectue 4 tours en 5s. (Rep : 0,05N)

6. Un virage a un rayon de courbure de 30m. On veut incliner la route de manière à ce qu'une auto voyageant à 12m/s puisse prendre le virage sans dépendre des frottements des pneus. Trouver l'inclinaison de la route.
   ( Rep: 26,1° )
7. Quelle est la force centripète nécessaire pour maintenir sur sa trajectoire un patineur de 80 kg décrivant un cercle de 6m de rayon à la vitesse de 3 m/s. (Rep : 122.5N)

**Exercices supplémentaires sur MCU**

1. Une auto parcourt à 40 km/h une route horizontale où le coefficient de frottement des pneumatiques sur la chaussée est de 0,8.
   Trouver le rayon minimum du virage que peut effectuer cette auto
   ( rép : 15,7 m)

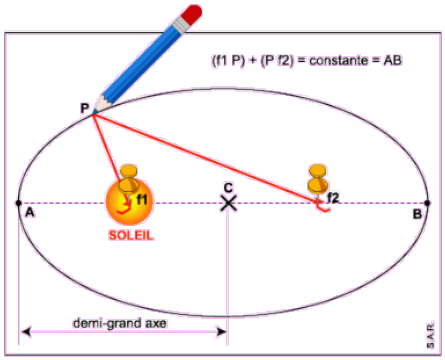
2. Trouver l'angle de relèvement du virage nécessaire à une auto circulant à 50 km/h si elle veut effectuer un virage de 300m de rayon en l'absence de frottement.
   ( rép : 3,7° )

3. Un cyclomoteur se met à déraper quand il effectue un virage de 15m de rayon à la vitesse de 12 m/s. Quelle est la vitesse maximale à laquelle il peut réaliser un virage de 30 m de rayon sur la même route ?
   ( rép : 61 km/h)

4. La planète Mars possède un satellite Phobos gravitant sur une orbite de rayon voisin de 9500 km avec une période T = 7h 37 min .
   Calculer :
   la vitesse linéaire du satellite
   l'accélération centripète et la masse de Mars
   ( rép : 2,18 km/s / 0,5 m/s² / $6{,}76.10^{23}$ kg )

# 11 Lois de Kepler

Les lois de Kepler décrivent le mouvement des planètes autour du Soleil.
Ce sont des lois empiriques basées sur l'observation.

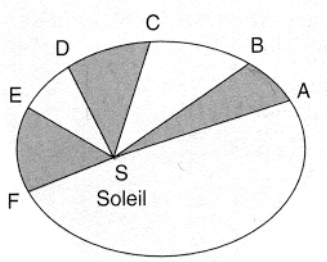



## 11.1 Première loi

Elle caractérise la trajectoire des planètes

***La trajectoire décrite par chaque planète est une ellipse dont le Soleil est un des foyers***

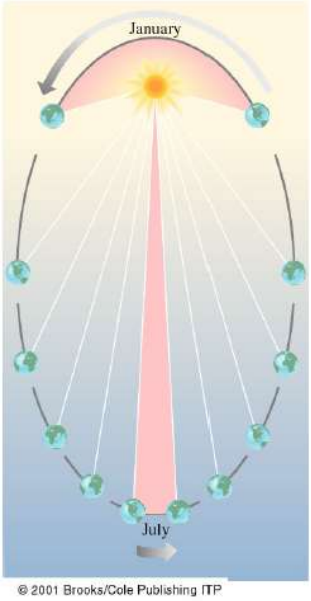
## 11.2 Deuxième loi




Elle précise la variation de la vitesse de la planète tout au long de sa trajectoire
**Les aires balayées en des durées égales par le segment [Soleil-Terre], sont égales**

Si les portions de trajectoire AB , CD et EF sont parcourues en des durées égales, alors les aires SAB , SCD et SEF sont égales.

***En conséquence, plus la planète est loin du Soleil, plus sa vitesse est petite***



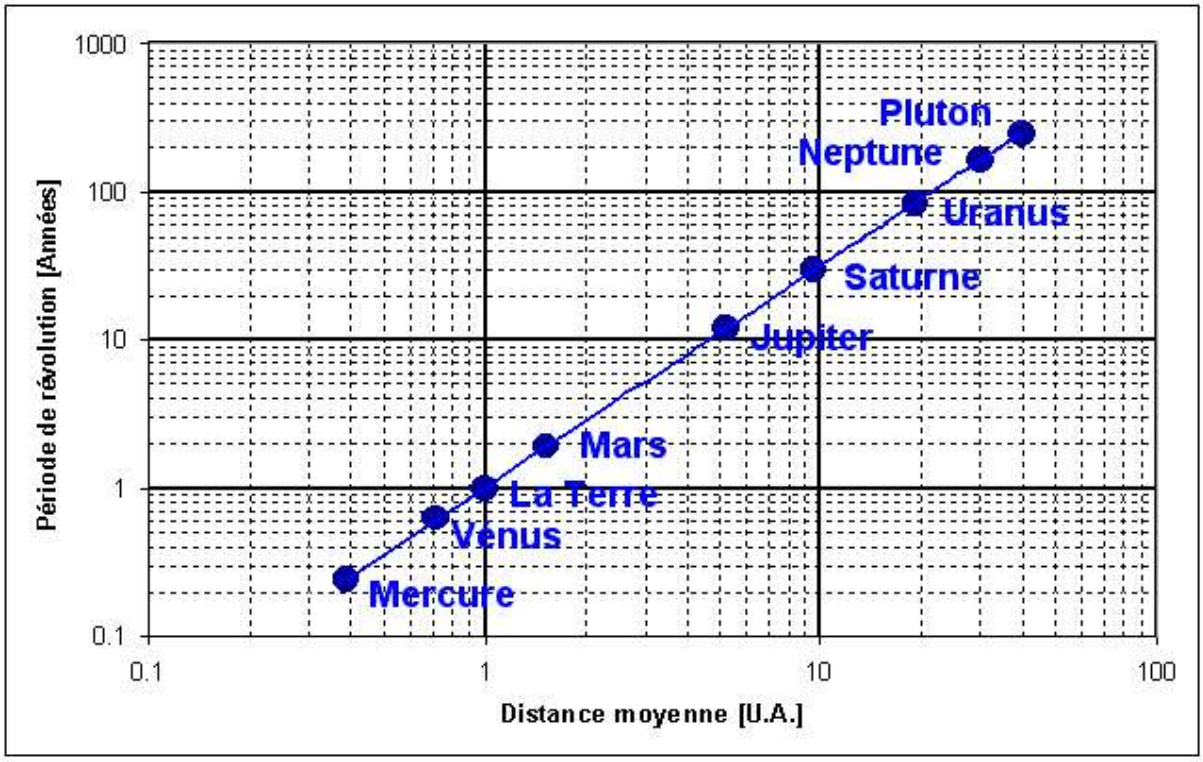

## 11.3 Troisième loi

Elle compare les périodes des différentes planètes

**Le carré de la période *T* de révolution d'une planète est proportionnel au cube du demi-grand axe de son ellipse.**

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constante}$$

Comme la trajectoire d 'une planète est quasiment un cercle, $a = R$ le rayon de la trajectoire du cercle.
Note : cette loi ce démontre facilement à partir de la loi de la gravitation universelle qui est l'objet du chapitre suivant.



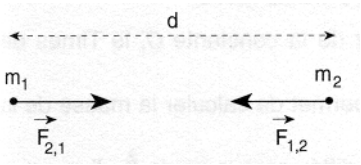
# 12 Loi de la Gravitation Universelle

## 12.1 Enoncé

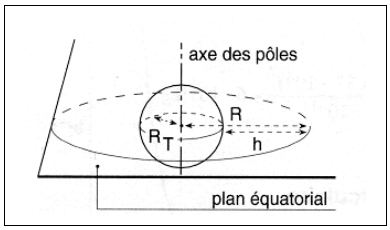
***Deux corps ponctuels s'attirent mutuellement avec une force***
***dont la direction est celle de la droite joignant les deux corps***
***dont l'intensité est proportionnelle au produit des masses des deux corps et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare.***

$$F_{\text{attraction}} = G\frac{M_1 . M_2}{d^2}$$

G = constante de la gravitation universelle = $6{,}61.10^{-11}$ N m² kg$^{-2}$
*( détermination de la constante G : voir feuille annexe)*



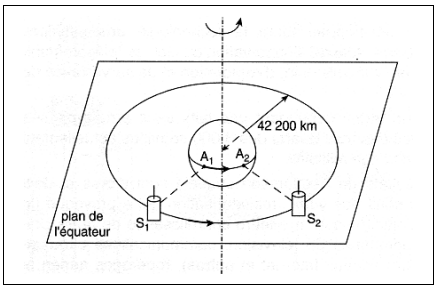

## 12.2 Applications (voir feuille : données astronomiques)




La découverte de la loi de la gravitation universelle a permis entre autre de

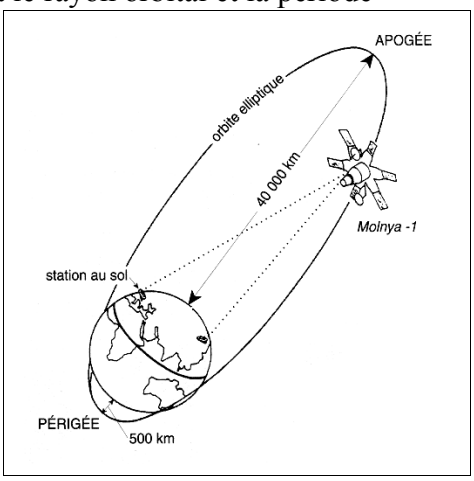
- ***Déterminer la masse de la Terre connaissant les valeurs de G, g , Rt***

  Pour cela exprimer le poids G d'un corps de masse m situé à la surface de la Terre dont la masse est Mt et dont le rayon est Rt



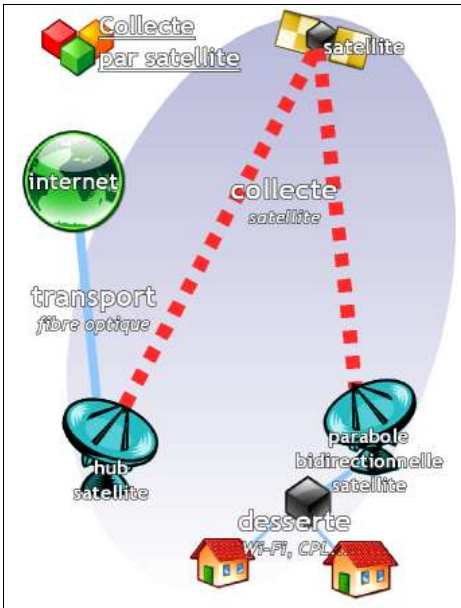

- ***Déterminer la masse du Soleil connaissant Mt , G , la période de rotation de la Terre autour du Soleil et la distance [Terre-Soleil]***

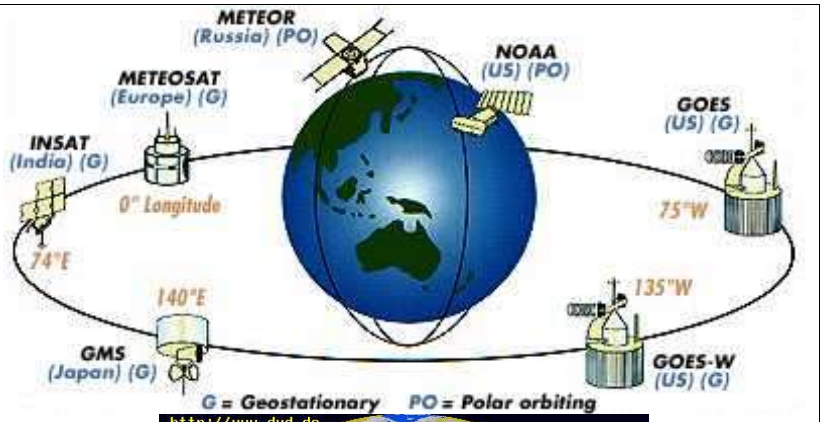
  Il est possible de déterminer la masse d'un astre connaissant le rayon orbital et la période d'un objet gravitant autour de lui en MCU.

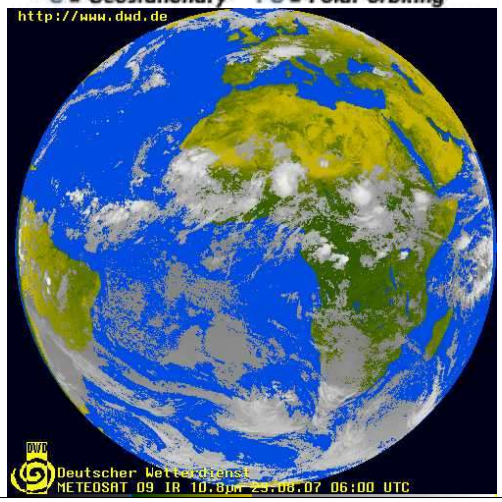



- ***Calculer la distance [Terre-Lune] connaissant la période de rotation de la Lun, Mt et la distance [Terre-Lune]***
- ***Exprimer la vitesse orbitale d'un satellite en rotation autour de la Terre en fonction de G, Mt et de la distance[Terre-satellite]***
- ***Calculer cette vitesse si h = 200 km et donner la période de rotation correspondante***
- ***Calculer h (altitude) et V d'un satellite en orbite géostationnaire***

***Un satellite géostationnaire est un satellite gravitant sur une orbite équatoriale circulaire de rayon R et dont la période T est la même que celle de la Terre soit 23 h 56 min 4s. Il est en permanence à l'altitude h et son rayon orbital R est égal à la somme du rayon terrestre et de l'altitude h.***




Ci-dessus transfert de données par satellite. Ci contre le réseau des satellites météorologique et vue de la Terre prise par Meteostat.

La résolution de la plupart de ces exercices est basée sur le principe qu'un satellite de masse $M_1$ est en mouvement circulaire uniforme autour d'un corps de masse $M_2$

Un corps de masse $M_1$ en MCU est soumis à une force centripète

$$F_c = \frac{M_1.V^2}{R}$$

$R$ étant le rayon orbital

Or dans l'espace, la seule force qui puisse agir sur le satellite est la force d'attraction universelle exercée par le corps de masse $M_2$ (à condition de négliger les attractions de toutes les autres masses)

$$F_{attr} = G\,\frac{M_1.M_2}{d^2}$$

Donc la seule force responsable du fait que le satellite tourne, c'est la force d'attraction qui doit donc être égale à la force centripète responsable du MCU

$$Fc = Fattr \quad \Rightarrow \quad \frac{M_1.V^2}{R} = G\,\frac{M_1.M_2}{d^2}$$

Attention $R$ et $d$ représente la même distance. Donc : $V^2 = G\,\frac{M_2}{R} \rightarrow M_2 = \frac{V^2 R}{G}$

A partir de la simple connaissance de la période de révolution du satellite et du rayon de l'orbite on peut calculer la masse de l'astre central. En effet,

$$V = \frac{2\pi R}{T} \rightarrow M_2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} = K\frac{R^3}{T^2}$$ avec $K$ = constante de Kepler = 6.92 $10^{11}$ $s^2 \cdot kg.m^{-3}$

(On retrouve au passage la loi de Kepler)

Vérifions pour la Terre. La période de révolution de la lune est de 27.32 jours = 2.36 $10^6$ s. Le rayon de l'orbite est de 384 000 km = 3.845 $10^8$. On remplace.

$$M_2 = \frac{5.92 \times 3.845^3}{2.36^2} 10^{11+24-12} = 6.04\,10^{24}\ kg$$ (valeur réelle : 5.98 $10^{24}$ $kg$)

**LE SOLEIL ET LES 16 OBJETS PLANÉTAIRES PRINCIPAUX DU SYSTÈME SOLAIRE**

| | $r$ (Terre = 1)* | $m$ (Terre = 1)** | $\rho$ (kg/m³) | $g_{surface}$ (N/kg) | $v_{lib}$ (km/s) | $a$ (UA)*** | $T_{révolution}$ (a)*** | $T_{rotation}$ (jours) | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| SOLEIL | 109 | $330 \times 10^3$ | 1410 | 274 | 618 | — | — | 25,7 | — |
| Mercure | 0,387 | 0,056 | 5440 | 3,72 | 4,3 | 0,387 | 0,24 | 59 | 0,206 |
| Vénus | 0,95 | 0,82 | 5240 | 8,85 | 10,4 | 0,723 | 0,615 | 234 | 0,007 |
| Terre | 1 | 1 | 5500 | 9,81 | 11,2 | 1 | 1 | 1 | 0,017 |
| Lune | 0,27 | 0,012 | 3360 | 1,57 | 2,4 | 0,002 57 | 0,0748 | 27,32 | 0,055 |
| Mars | 0,53 | 0,11 | 3940 | 3,72 | 5,0 | 1,524 | 1,88 | 1,03 | 0,093 |
| Jupiter | 11,2 | 318 | 1310 | 24,8 | 60 | 5,203 | 11,86 | 0,41 | 0,048 |
| Io | 0,28 | 0,014 | 3550 | 1,8 | 2,6 | 0,002 82 | 0,005 | 1,76 | 0,000 |
| Europe | 0,24 | 0,008 | 3040 | 1,4 | 2,0 | 0,004 49 | 0,010 | 3,55 | 0,000 |
| Ganymède | 0,41 | 0,024 | 1930 | 1,5 | 3,6 | 0,007 16 | 0,020 | 7,16 | 0,002 |
| Callisto | 0,38 | 0,018 | 1830 | 1,2 | 2,4 | 0,012 3 | 0,046 | 16,70 | 0,007 |
| Saturne | 9,3 | 95 | 700 | 10,5 | 36 | 9,54 | 29,46 | 0,44 | 0,056 |
| Titan | 0,40 | 0,021 | 1900 | 1,37 | 2,7 | 0,008 17 | 0,044 | 15,96 | 0,029 |
| Uranus | 4,0 | 15 | 1300 | 9,0 | 21,2 | 19,19 | 84,04 | 0,72 | 0,046 |
| Neptune | 3,9 | 17 | 1660 | 11,0 | 23,6 | 30,06 | 164,8 | 0,67 | 0,010 |
| Triton | 0,21 | 0,004 | 2000 | 0,6 | 1,5 | 0,002 37 | 0,016 | 5,88 | 0,000 |
| Pluton | 0,18 | 0,002 | 2000 | 1,0 | 1,0 | 39,44 | 247,7 | 6,39 | 0,248 |

* Rayon de la Terre = 6380 km = $6{,}38 \times 10^6$ m.
** Masse de la Terre = $5{,}98 \times 10^{24}$ kg.
*** Pour les planètes, les données orbitales se rapportent à l'orbite autour du Soleil; pour les satellites, à l'orbite autour de la planète mère.

## Détermination de la valeur G

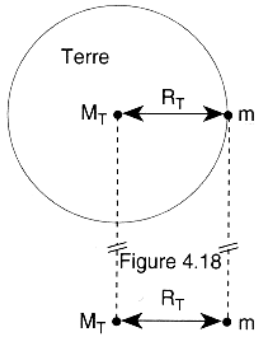



Figure 4.19

Sans dispositif expérimental adéquat, NEWTON estima la valeur de la constante de gravitation universelle à partir des connaissances de l'attraction terrestre.

NEWTON considéra la Terre comme un corps sphérique homogène et démontra que la résultante des forces d'attraction que subit un corps de masse $m$, ponctuel, extérieur à la Terre, de la part de chaque partie du volume sphérique homogène est équivalente à la force d'attraction entre le corps de masse $m$ et un corps de masse $M_T$ supposé placé au centre de la Terre (fig. 4.18 et fig. 4.19).

Nous savons que le poids $P$ est donné par :

$$P = mg$$

La loi d'attraction universelle permet d'exprimer la même force $P$ :

$$P = G\frac{m\,M_T}{R_T^2} \quad \text{où}$$

$m$ : masse du corps
$M_T$ : masse de la Terre
$R_T$ : rayon terrestre.

Égalons les deux expressions de $P$ :

$$mg = G\frac{m\,M_T}{R_T^2} \quad \text{d'où} \quad G = \frac{R_T^2\,g}{M_T}$$

Comme la Terre est considérée comme une sphère homogène de volume $V$ et de masse volumique ρ, nous pouvons écrire que :

$$M_T = \rho V$$

L'expression de la masse $M_T$ de la Terre est :

$$M_T = \rho\frac{4}{3}\pi R_T^3$$

L'expression de $G$ devient :

$$G = \frac{gR_T^2}{M_T} = \frac{gR_T^2}{\rho\frac{4}{3}\pi R_T^3} = \frac{3g}{4\rho\pi R_T}$$

Il reste à estimer la masse volumique moyenne de la Terre ρ. Pour cela, Newton examina les différents éléments connus à la surface terrestre ($\rho_{eau} = 1\,000\ kg/m^3$; $\rho_{plomb} = 11\,000\ kg/m^3$) et choisit une valeur moyenne comprise entre 5 000 et 6 000 $kg/m^3$.

Il obtint une valeur de $G$ comprise entre :

$$G = \frac{3 \cdot 9{,}81}{4 \cdot 5\,000 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6} = 7{,}3 \cdot 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2}$$

et

$$G = \frac{3 \cdot 9{,}81}{4 \cdot 6\,000 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6} = 6{,}1 \cdot 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2}$$

Dès lors, deux étudiants, de 50 kg chacun, placés à 1 m de distance, s'attirent avec une force dont l'intensité est comprise entre $1{,}5 \cdot 10^{-7}\ N$ et $1{,}7 \cdot 10^{-7}\ N$. Cette force d'attraction est extrêmement faible. Il est donc tout à fait normal que les deux étudiants de 50 kg chacun ne ressentent pas les effets de cette force.

**Références** : Livres conseillés pour les élèves qui envisagent de poursuivre des études à caractère scientifique (Médecine, pharmacie, sciences économiques, etc)
Physique, Mécanique. Harris BENSON. Edition De Boeck. ISBN ERPI 2-7613-1457-3
Physique. Eugène HECHT. Edition De Boeck. ISBN 2-7445-0018-6