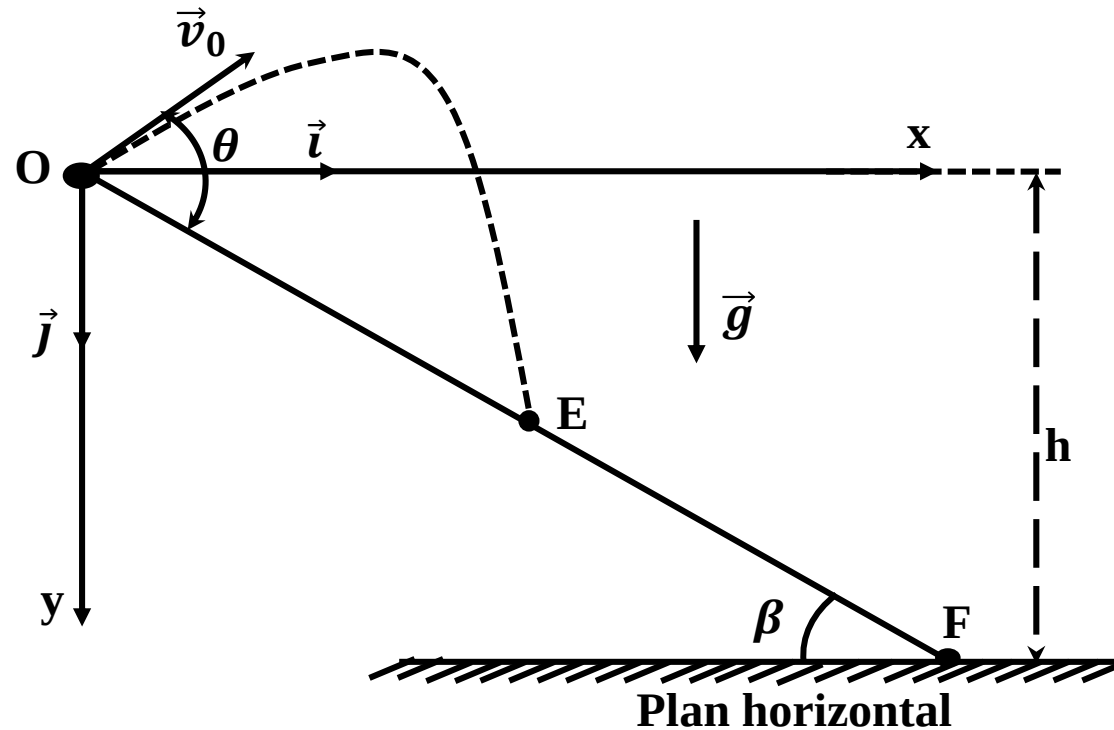


Problème mécanique : Lancement d'un projectile

Du haut d'une colline dont le versant a la forme d'un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale, on lance un projectile supposé ponctuel, de masse m , à partir d'un point O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant un angle θ avec le plan incliné ($\theta > \beta$). L'origine des dates $t_0 = 0$ est prise au moment du lancer du projectile en O .

L'étude du mouvement est rapportée au repère d'espace (Ox, Oy) muni des vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ pris dans le plan vertical contenant $\vec{v}_0$ et la ligne de plus grande pente du plan incliné (voir figure ci-dessous).



ANNEE SCOLAIRE : 2025/2026

DYNAMIQUE PARTIE 10

On néglige l'action de l'air sur le projectile.

Données : $m = 2kg$ et $g = 9,8m.s^{-2}$.

Problème mécanique : Lancement d'un projectile

1- Etablir les équations horaires du mouvement du projectile.

2- Le projectile tombe sur le plan incliné au point E. Montrer que la durée de chute t_E peut se mettre sous la forme :

$$t_E = \frac{2v_0}{g \cos \beta} \sin \theta$$

3- On pose $d = OE$ (portée sur le plan incliné), montrer que cette portée peut se mettre sous la forme :

$$d = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos(\theta - \beta)}{g \cos^2 \beta}$$

4- On effectue des tirs avec des vitesses initiales de même valeur v_0 .

a) Etablir, en fonction de β , l'expression de la valeur θ_0 de l'angle θ pour laquelle la portée prend une valeur maximale d_{max} .

b) En déduire l'expression de cette portée d_{max} en fonction de β, v_0 et g .

5- On considère un lancer de vitesse initiale $v_0 = 12 \text{ m.s}^{-1}$ avec $\beta = 60^\circ$.

a) Calculer θ_0 et d_{max} .

b) Calculer le temps mis par le projectile pour tomber sur le plan incliné pour $\theta = \theta_0$.

c) En réalité le projectile arrive au point E à la date $t_E = 4,85 \text{ s}$ et il continue sa course jusqu'au point F. La durée totale mise par ce projectile pour atteindre le sol horizontale est de $9,5 \text{ s}$. Les forces de frottement exercées par la piste sur le projectile sont équivalentes à une force $\vec{f}$ parallèle à la trajectoire et d'intensité $f = 4 \text{ N}$.

Calculer la dénivellation h .

1- Etablir les équations horaires du mouvement du projectile.

Le projectile est soumis dans le référentiel galiléen à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$

T.C.I : $m\vec{g} = m\vec{a} \implies \vec{a} = \vec{g}$

Projetons cette relation dans la base (Ox, Oy) : $\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \text{ (M.R.U)} \\ a_y = g \text{ (M.R.U.V)} \end{array} \right.$

Soit α , l'angle que fait le vecteur vitesse $\vec{v}_0$ suivant l'horizontal.

On trouve : $\alpha = \theta - \beta$

$$\vec{v}_0 \left| \begin{array}{l} v_{0x} = v_0 \cos(\theta - \beta) \\ v_{0y} = -v_0 \sin(\theta - \beta) \end{array} \right. ; \overrightarrow{OM_0} \left| \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{array} \right.$$

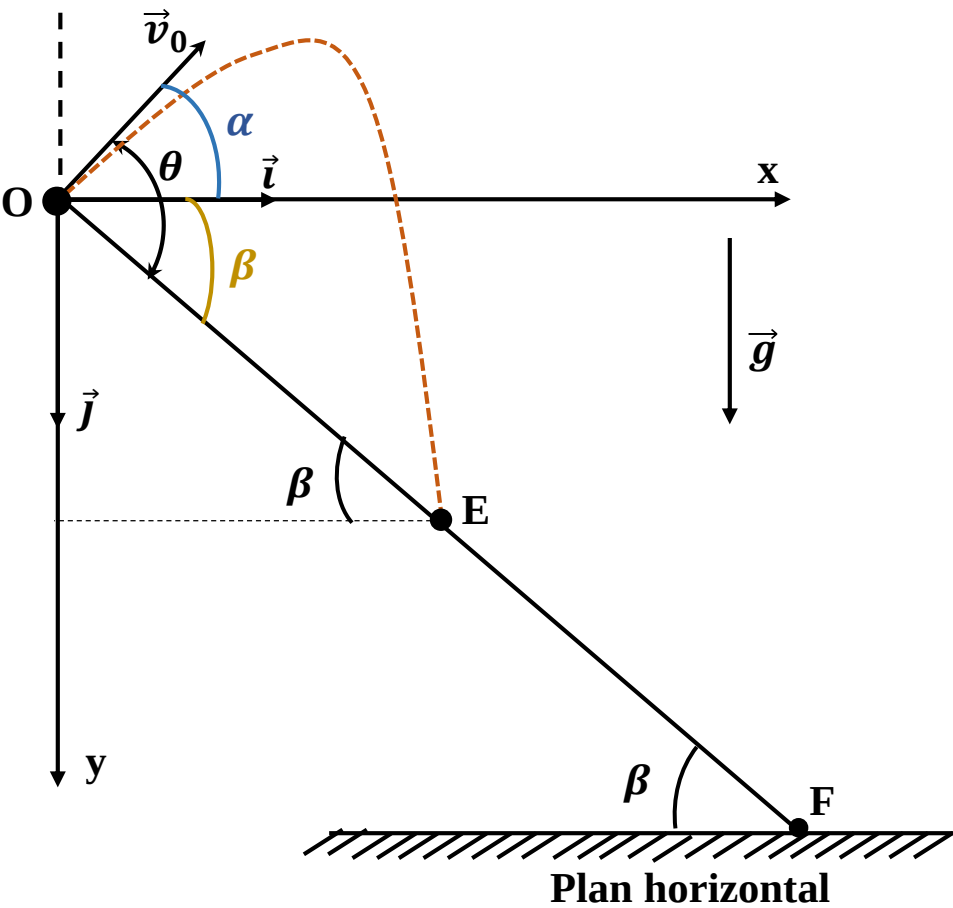
On trouve : $\vec{v} \left| \begin{array}{l} v_x = v_0 \cos(\theta - \beta) \\ v_y = gt - v_0 \sin(\theta - \beta) \end{array} \right. \text{ et } \overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} x = (v_0 \cos(\theta - \beta))t \\ y = \frac{1}{2}gt^2 - (v_0 \sin(\theta - \beta))t \end{array} \right.$

2- Montrer que la durée de chute t_E peut se mettre sous la forme : $t_E = \frac{2v_0}{g \cos \beta} \sin \theta$

$$\overrightarrow{OE} \left| \begin{array}{l} x_E = (v_0 \cos(\theta - \beta))t_E \\ y_E = \frac{1}{2}gt_E^2 - (v_0 \sin(\theta - \beta))t_E \end{array} \right.$$

La droite (OE) a pour équation $y = ax$ avec a le coefficient directeur :

$$a = \tan \beta = \frac{y_E}{x_E} = \frac{\frac{1}{2}gt_E^2 - (v_0 \sin(\theta - \beta))t_E}{(v_0 \cos(\theta - \beta))t_E}$$



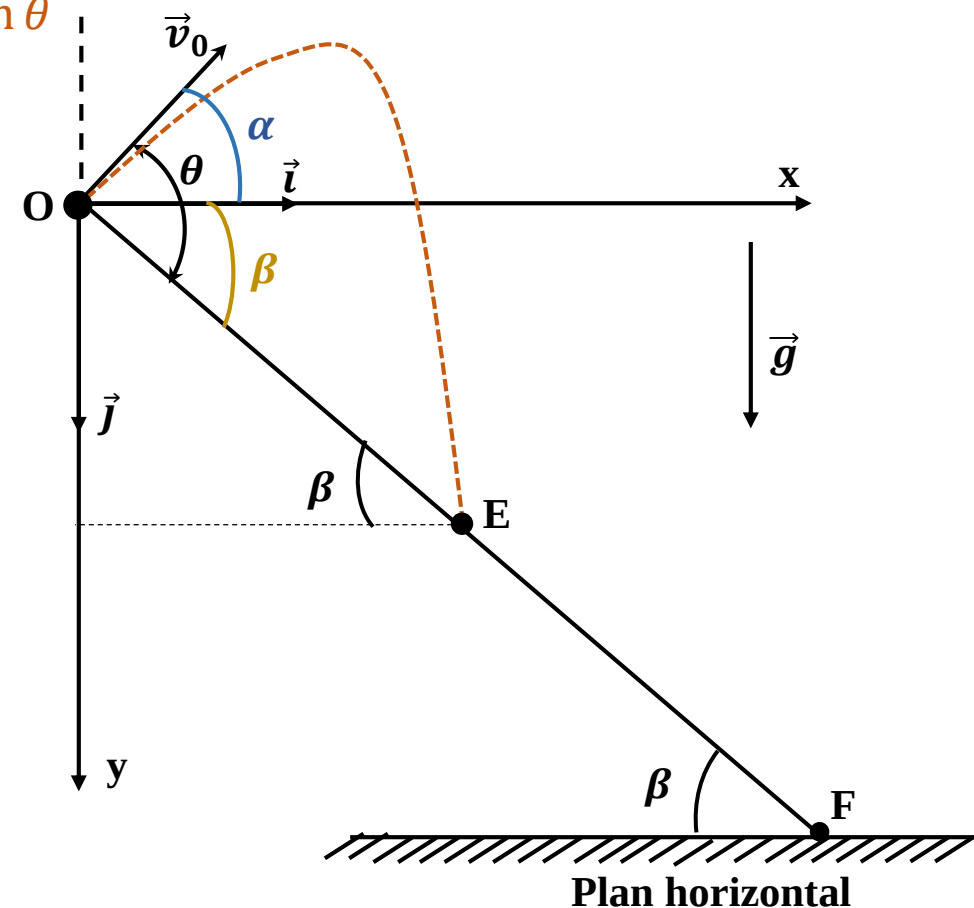
2- Montrer que la durée de chute t_E peut se mettre sous la forme : $t_E = \frac{2v_0}{g \cos \beta} \sin \theta$

La droite (OE) a pour équation $y = ax$ avec a le coefficient directeur :

$$\begin{aligned}
 a = \tan \beta &= \frac{y_E}{x_E} = \frac{\frac{1}{2}gt_E^2 - (v_0 \sin(\theta - \beta))t_E}{(v_0 \cos(\theta - \beta))t_E} \\
 \Rightarrow \tan \beta &= \frac{g}{2(v_0 \cos(\theta - \beta))}t_E - \frac{(v_0 \sin(\theta - \beta))}{(v_0 \cos(\theta - \beta))} \\
 \Rightarrow \frac{g}{2(v_0 \cos(\theta - \beta))}t_E &= \tan \beta \frac{(v_0 \sin(\theta - \beta))}{(v_0 \cos(\theta - \beta))} \\
 \Rightarrow t_E &= \frac{2v_0}{g} (\cos(\theta - \beta) \cdot \tan \beta + \sin(\theta - \beta)) \\
 \Rightarrow t_E &= \frac{2v_0}{g} \left(\cos(\theta - \beta) \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta} + \sin(\theta - \beta) \right) \\
 \Rightarrow t_E &= \frac{2v_0}{g \cos \beta} (\sin \beta \cdot \cos(\theta - \beta) + \cos \beta \cdot \sin(\theta - \beta))
 \end{aligned}$$

Or $\sin a \cos b + \cos a \sin b = \sin(a + b) \Rightarrow \sin \beta \cdot \cos(\theta - \beta) + \cos \beta \cdot \sin(\theta - \beta) = \sin(\beta + (\theta - \beta))$

D'où :
$$t_E = \frac{2v_0}{g \cos \beta} \sin \theta$$



3- Montrer que la distance $OE = d = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos(\theta - \beta)}{g \cos^2 \beta}$

Méthode 1 : Méthode directe

Connaissant la durée du saut t_E , on peut la remplacer dans l'équation $x(t)$ afin de déterminer l'abscisse du point E.

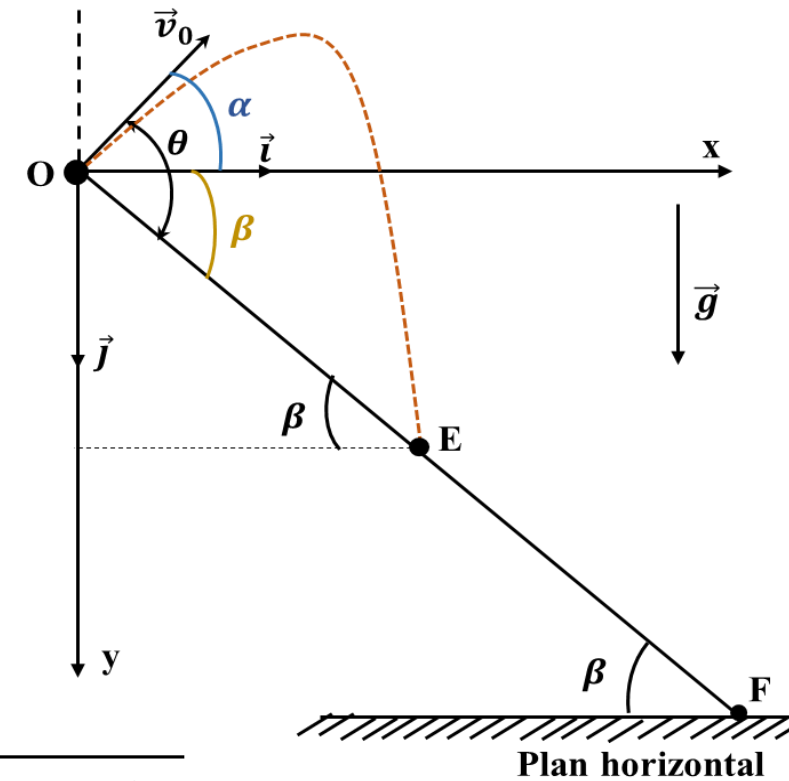
$$x_E = (v_0 \cos(\theta - \beta))t_E = v_0 \cos(\theta - \beta) \times \frac{2v_0}{g \cos \beta} \sin \theta = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos(\theta - \beta)}{g \cos \beta}$$

$$\text{Or } \tan \beta = \frac{y_E}{x_E} \Rightarrow y_E = x_E \tan \beta = x_E \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos(\theta - \beta)}{g \cos \beta} \times \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$$

$$y_E = \frac{2v_0^2 \sin \theta \sin \beta \cos(\theta - \beta)}{g \cos^2 \beta} \quad \text{or} \quad OE = \sqrt{x_E^2 + y_E^2}$$

$$OE = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos(\theta - \beta)}{g \cos \beta} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta}} \Rightarrow OE = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos(\theta - \beta)}{g \cos \beta} \sqrt{\frac{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta}}$$

$$\text{Or } \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \quad D' \text{ où : } d = OE = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos(\theta - \beta)}{g \cos^2 \beta}$$



Méthode 2 : méthode simplifiée

$$\cos \beta = \frac{x_E}{d} \Rightarrow d = \frac{x_E}{\cos \beta} = \frac{(v_0 \cos(\theta - \beta))t_E}{\cos \beta} \Rightarrow d = \frac{(v_0 \cos(\theta - \beta))}{\cos \beta} \times \frac{2v_0}{g \cos \beta} \sin \theta = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos(\theta - \beta)}{g \cos^2 \beta}$$

4.a) Expression de θ_0 pour que la portée prend une valeur d_{max}

$$d = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos(\theta - \beta)}{g \cos^2 \beta} \quad \text{La portée est maximale si et seulement sa dérivée par rapport à } \theta \text{ est nulle.}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(d)}{d\theta} = 0 &\Leftrightarrow \frac{d}{d\theta} \left[\frac{2v_0^2 \sin \theta \cos(\theta - \beta)}{g \cos^2 \beta} \right] = 0 \Rightarrow \frac{2v_0^2}{g \cos^2 \beta} \frac{d}{d\theta} [\sin \theta \cos(\theta - \beta)] = 0 \\ \Rightarrow \frac{2v_0^2}{g \cos^2 \beta} (\cos \theta \cos(\theta - \beta) - \sin \theta \sin(\theta - \beta)) &= 0 \quad \text{Or } \frac{2v_0^2}{g \cos^2 \beta} \neq 0 \Rightarrow \cos \theta \cos(\theta - \beta) - \sin \theta \sin(\theta - \beta) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Or } \cos \theta \cos(\theta - \beta) - \sin \theta \sin(\theta - \beta) = \cos (\theta + (\theta - \beta)) = \cos (2\theta - \beta)$$

$$\cos (2\theta - \beta) = 0 \Leftrightarrow \cos (2\theta - \beta) = \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow 2\theta - \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta_0 = \frac{4\beta + 2\pi}{8}$$

4. b) Expression de la portée maximale d_{max}

$$d_{max} = \frac{2v_0^2 \sin \theta_0 \cos(\theta_0 - \beta)}{g \cos^2 \beta} \quad \text{Or } 2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$$

$$\Rightarrow 2 \sin \theta_0 \cos(\theta_0 - \beta) = \sin(2\theta_0 - \beta) + \sin \beta = \sin \left(\left(\beta + \frac{\pi}{2} \right) - \beta \right) + \sin \beta = 1 + \sin \beta$$

D'où :

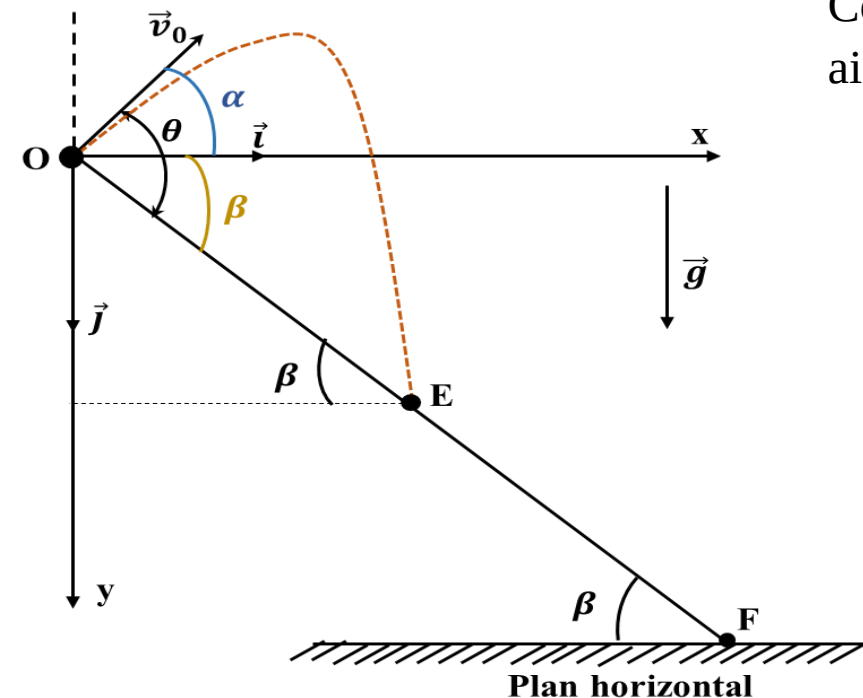
$$d_{max} = \frac{v_0^2}{g \cos^2 \beta} (1 + \sin \beta)$$

5. Application numérique e $v_0 = 12m.s^{-1}$ avec $\beta = 60^\circ$.

a) Calcul de θ_0 et d_{max} : $\theta_0 = \frac{4\beta + 2\pi}{8} = \frac{4 \times \frac{\pi}{3} + 2\pi}{8} = \frac{5\pi}{12}$ soit $\theta_0 = 75^\circ$ et $d_{max} = \frac{12^2}{9,8 \cos^2 60^\circ} (1 + \sin 60^\circ) = 109,7m$

b) Calcul de t_E pour $\theta = \theta_0$ $t_E = \frac{2v_0}{g \cos \beta} \sin \theta_0 = \frac{2 \times 12}{9,8 \cos 60^\circ} \sin 75^\circ = 4,73s$

c) En réalité le projectile arrive au point E à la date $t_E = 4,85s$ et il continue sa course jusqu'au point F. La durée totale mise par ce projectile pour atteindre le sol horizontale est de 9,5s. Les forces de frottement exercées par la piste sur le projectile sont équivalentes à une force $\vec{f}$ parallèle à la trajectoire et d'intensité $f = 4N$. Calculer la dénivellation h.



Connaissant la durée réelle du saut, on peut déterminer la valeur réelle de l'angle θ ainsi que celle de la vitesse du projectile au point E.

$$\sin \theta = \frac{t_E g \cos \beta}{2v_0} = \frac{4,85 \times 9,8 \cos 60}{2 \times 12} = 0,990 \quad \text{soit } \theta = 82^\circ$$

Cordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}_E$

$$v_E = \sqrt{11,12^2 + 43^2} = 44 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\vec{v}_E \left| \begin{array}{l} v_{Ex} = v_0 \cos(\theta - \beta) \\ v_{Ey} = gt - v_0 \sin(\theta - \beta) \end{array} \right. \Rightarrow \vec{v}_E \left| \begin{array}{l} v_{Ex} = 12 \cos(82 - 60) = 11,12 \\ v_{Ey} = 9,8 \times 4,85 - 12 \sin(82 - 60) = 43 \end{array} \right.$$

Déduisons la valeur réelle de la portée d :

$$d = OE = \frac{2 \times 12^2 \sin 82^\circ \cos(82 - 60)}{9,8 \cos^2 60} = \mathbf{107,93m}$$

c) En réalité le projectile arrive au point E à la date $t_E = 4,85s$ et il continue sa course jusqu'au point F. La durée totale mise par ce projectile pour atteindre le sol horizontale est de 9,5s. Les forces de frottement exercées par la piste sur le projectile sont équivalentes à une force $\vec{f}$ parallèle à la trajectoire et d'intensité $f = 4N$. Calculer la dénivellation h .

Sur la piste EF le projectile est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction normale $\vec{R}_N$ et à la force de frottement $\vec{f}$.

$$\text{T.C.I : .C.I : } \sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f} = m\vec{a}$$

$$\text{Suivant } x'x : mg \sin \beta - f = ma \Rightarrow a = g \sin \beta - \frac{f}{m}$$

$$\text{A.N : } a = 9,8 \times \sin 60^\circ - \frac{4}{2} = 6,5m.s^{-2}$$

$$\text{La loi horaire du mouvement est : } x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_E t \Rightarrow x(t) = 3,25t^2 + 44t$$

La durée totale mise par le projectile est $t_{OF} = 9,5s$

$$t_{OF} = t_{OE} + t_{EF} \text{ soit } t_{EF} = 9,5 - 4,85 = 6,64 s$$

Détermination de la distance EF

$$EF = x(t_{EF}) = 3,25 \times 6,64^2 + 44 \times 6,64 = 274,87m$$

Soit L la longueur de la pente, alors : $L = OE + EF = 107,93 + 274,87 = 382,8m$

$$h = L \sin \beta = 382,8 \times \sin 60^\circ = 331,5m$$

