Term S

Exacte

Manuel Combiné

Maths

Avants - Propos :

Conformément au nouveau programme de mathématiques, Ce présent manuel est le résultat d'un travail réalisé par un comité d'enseignants du secondaire qui répond au souci du Ministère de l'Education Nationale pour la mise en œuvre de **l'approche par compétence (A.P.C)** dans les classes de **TSE** (Terminale Sciences Exactes) au Mali et ayant pour **objectif** d'uniformiser le niveau des élèves venant des classes antérieures afin de leur offrir les mêmes chances dans la poursuite de leurs études universitaires. Il permet en outre d'harmoniser la pédagogie des mathématiques et de mettre à la disposition des élèves l'acquisition d'une formation solide.
Chacun des chapitres recouvrant l'ensemble du programme, est composé de **04** parties :

Situation - Problème :

Une **activité ouverte** permettant d'aborder en grande partie les connaissances nouvelles.

Activités préparatoires :

Les **activités préparatoires,** approches simples des nouvelles notions à partir des connaissances acquises dans les classes antérieures.

Le cours :

Rien que **l'essentiel dans un langage clair et simple** avec des **démonstrations**. Chaque définition ou théorème est suivi d'un exemple simple, court, en situation, pouvant servir de référence et d'aide à la démonstration.

Exercices et problèmes :

- **Les exercices :** Inédits et ordonnés suivant **la progression du cours**, ils contribuent à l'acquisition et à l'assimilation du cours.

- **Les problèmes :** Variés, ce sont des **problèmes de synthèse** ou des problèmes ouverts pour aller plus loin dans l'acquisition de vos connaissances sans aller au-delà du programme en vigueur.

Nous souhaitons donc que l'utilisation de ce livre ne se substitue pas au travail des professeurs en classe, mais qu'il constitue un support efficace, utile aux élèves pour mieux comprendre les mathématiques dans toute sa diversité. A cet effet, nous tenons à remercier **les éditions SAMASSA** et tous ceux qui voudront bien nous faire part de leurs remarques, critiques, suggestions ou autres solutions plus élégantes que les nôtres, que nous publierons dans une future édition.

Les auteurs

SOMMAIRE

Nombres complexes.....1

- Situation problème.
- Activité préparatoire
- Lien entre les chapitres du manuel.
- Rappels et compléments des propriétés dans $\mathbb{R}$.
- Evaluation diagnostique.

6- Définition et propriétés.
7- Opérations dans $\mathbb{C}$.
8- Conjugué d'un complexe.
9- Module et argument d'un complexe.
10- Forme trigonométrique d'un complexe.
11- Forme polaire d'un complexe.
12- Forme exponentielle.
13- Formules de Moivre – Formules d'Euler.
14- Equations dans $\mathbb{C}$.
15- Complexe et configurations géométriques du plan.
16- Complexe et lieux géométriques.
17- Complexe et transformations géométriques du plan.

Arithmétiques.....73

1- Situation problème.
2- Activité préparatoire
3- Introduction et définition.
4- Ensemble d'application.
5- Raisonnement par récurrence.
6- Division Euclidienne dans $\mathbb{N}$.
7- Divisibilité dans $\mathbb{Z}$.
8- Système de numération.
9- Congruence modulo .
10- Congruence et structure d'anneau.
11- Nombre entier naturel premier.
12- PPCM et PGCD de deux entiers naturels a et b.
13- Algorithme d'Euclide.
14- Nombres premiers entre eux.
15- Résolution dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation

Fonctions numériques 128

1- Situation problème.
2- Activité préparatoire
3- Généralité sur les fonctions numériques.
4- Limites.
5- Continuités.
6- Dérivations.
7- Etude de fonctions.

Primitives – Intégrales – Calculs d'aires.....257

1- Situation problème.
2- Activité préparatoire
3- Primitive.
4- Intégrales.
5- Calculs d'aires.

6

Fonctions logarithmes...310

1- Situation problème.
2- Activité préparatoire
3- Définition.
4- Conséquences.
5- Ensemble de définition
6- Propriétés.
7- Limites remarquables.
8- Dérivées remarquables.
9- Primitives remarquables.
10- Etude de la fonction .
11- Etude de la fonction .

7

Fonctions exponentielle.....401

1- Situation problème.
2- Activité préparatoire
3- Définition.
4- Conséquences.
5- Ensemble de définition
6- Propriétés.
7- Limites remarquables.
8- Dérivées remarquables.
9- Primitives remarquables.
10- Etude de la fonction .
11- Etude de la fonction puissance .

Suites numériques.....503

1- Situation problème.
2- Activité préparatoire
3- Généralité sur les suites numériques.
4- Convergence d'une suite
5- Suites majorée ; minorées et bornées.
6- Relation entre les limites.
7- Suites adjacentes.
8- Suites arithmétiques.
9- Suite géométrique.
10- Suites économiques.

Equations différentielles…537

Situation problème.

Activité préparatoire

Définition

Etude des différents cas d'équations différentielles.

Barycentres…571

Situation problème.

Activité préparatoire

Introduction.

Rappels définition et propriétés.

Fonction vectorielle de Leibniz.

Fonction scalaire de Leibniz.

Produit scalaire et médiane d'un triangle.

Applications affines…706

Situation problème.

Activité préparatoire

Définition et propriétés.

Etude des cas de transformation du plan.

Isométrie et similitude du plan.

Matrices.

Nombres complexes

1- Objectifs :

Ce thème vise à :

Définir l'ensemble des nombres complexes et en dégager les règles de calcul ;

- Utiliser les caractérisations complexes pour interpréter des configurations élémentaires du plan ;
- Utiliser les nombres complexes pour Résous des problèmes.

Commentaires

La notion de nombres complexes est nouvelle pour les élèves. La construction de l'ensemble $\mathbb{C}$ n'est pas au programme ; on pourra en faire une présentation historique. Ce nouvel ensemble qui prolonge $\mathbb{R}$ offre un domaine riche d'activités numériques.

On fera ressortir l'intérêt des relations entre propriétés des complexes et celles des configurations géométriques ainsi que celui de l'utilisation de l'outil " nombres complexes" dans la résolution de problèmes géométriques.

Il ne s'agit pas de faire une théorie sur les transformations et leurs écritures complexes, mais d'utiliser ces écritures pour la résolution de problèmes.

2- Savoir et savoir-faire

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Forme algébrique d'un nombre complexe. • Partie réelle (Re), partie imaginaire (Im). • Conjugué d'un nombre complexe, propriétés. •Somme, produit, quotient de deux nombres complexes. • Formule du binôme • Egalité de deux nombres complexes. • Module et argument d'un nombre complexe. • Module et argument du produit, de l'inverse, du quotient et de la puissance entière d'un nombre complexe • Forme trigonométrique. •Affiche d'un point, d'un vecteur • Point image et vecteur image d'un nombre complexe. • Forme exponentielle ($z = re^{i\theta}$).	• Détermine la partie réelle, la partie imaginaire d'un nombre complexe. • Calcule la somme, le produit et le quotient de deux nombres complexes donnés sous forme algébrique. • Développer $(a+b)^n$ • Détermine le conjugué d'un nombre complexe •Détermine le module et un argument d'un nombre complexe non nul donnés sous forme algébrique. • Représenter graphiquement un nombre complexe donné sous forme algébrique. • Calcule le produit et le quotient de deux nombres complexes écrits sous formes trigonométrique. • Passer à la forme trigonométrique à la forme algébrique et inversement.

Remarques et suggestions

Un imaginaire pur est un nombre complexe dont la partie réelle est nulle. (0 est à la fois réel et imaginaire pur).

On s'interdira d'utiliser le symbole √ avec un nombre complexe non réel positif.

L'acquisition des propriétés des nombres complexes pourra être vérifiée par des exercices de ″ méthodes″ dépourvus de lourdeur de calculs.

L'écriture exponentielle sera le plus tôt possible afin d'alléger les expressions dans les calculs.

NOMBRES COMPLEXES ET TRIGONOMETRIE

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
• Formule de Moivre, formule d'Euler	Utiliser les formules de Moivre et d'Euler pour • reTrouve des formules trigonométriques ; • linéariser des puissances de cos$x$ et sin$x$ à l'aide des nombres complexes

Remarques et suggestions

La linéarisation des fonctions trigonométriques sera réinvestie dans le calcul intégral.

Pour la linéarisation des puissances de cosinus et sinus, on se limitera à des exposants peu élevés. Les formules trigonométriques obtenues ne sont pas à apprendre par cœur.

EQUATIONS DANS ℂ

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
• Racines carrées d'un nombre complexe non nul. • Equation du second degré dans ℂ • Racine n^{ième} d'un nombre complexe non nul. •Racine n^{ième} de l'unité ; interprétation graphique	• Détermine les racines carrées d'un nombre complexe écrit sous forme algébrique. • Résous une équation du second degré dans ℂ ou une équation s'y ramenant. • Détermine sous forme trigonométrique les racines n^{ième} d'un nombre complexe et les représenter graphiquement

Remarques et suggestions

La propriété suivante :

" Pour deux complexes z et z', $[z = z'] \Leftrightarrow |z| = |z'|$, Re(z) = $Re(z')$ et Im(z) = $Im(z') \geq 0$ est un outil intéressant pour le calcul des racines carrés d'un nombre complexes.

On pourra intéresser les élèves à Trouve les n racines n^{ième} d'un nombre complexe connaissant une racine et les n racines n^{ième} de l'unité.

NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
•$arg\left(\frac{ZA-ZB}{ZC-ZD}\right)$ est une mesure de $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BA}\right)$• Caractérisations complètes : - D'un cercle ; - D'une droite.	• Détermine que des points sont cocycliques. • Démontre que des points sont alignés. Utiliser les caractérisations complexes pour : - Justifier une priorité géométrique ; - Détermine des lieux géométriques

Remarques et suggestions

A titre d'exercice, on pourra faire Démontre aux élèves que :

A, B, C, D étant quatre points distincts d'affixes respectives $a, b, c\ d,$

A, B, C et D sont cocycliques ou alignés si et seulement si $arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) = arg\left(\frac{d-b}{d-a}\right) + k\pi$ avec k entier relatif.

I- Rappels sur l'ensemble $\mathbb{R}$ et ces sous -ensembles

1) Ensemble des entiers naturels

L'ensemble des entiers naturels est noté : $\mathbb{N}$ tel que : $\mathbb{N} = \{0;\ 1; 2, ; 3; \ldots\}$

L'ensemble des entiers naturels privé de zéro est noté $\mathbb{N}^*$ tel que : $\mathbb{N}^* = \{1;\ 2;\ 3; \ldots\}$

2) L'ensemble des entiers relatifs

L'ensemble des entiers relatifs est noté : $\mathbb{Z}$ tel que : $\mathbb{Z} = \{\ \ldots . -2\ ;\ 0\ ;1\ ;2\ ;\ldots\}$.

L'ensemble des entiers relatifs positifs est noté : $\mathbb{Z}^+$ tel que : $\mathbb{Z}^+ = \{0\ ;\ +1\ ;\ \ldots\}$

L'ensemble des entiers relatifs négatifs est noté : $\mathbb{Z}^-$ tel que : $\mathbb{Z}^- = \{\ldots -2\ ;\ -1 \ldots 0\}$

L'ensemble des entiers relatifs privés de zéro est noté : $\mathbb{Z}^*$ tel que :

$\mathbb{Z}^* = \{\ldots -2\ ;\ -1\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ldots\}$

L'ensemble des entiers relatifs positifs et privés de zéro est noté : $\mathbb{Z}_+^*$ tel que :

$\mathbb{Z}_+^* = \{1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\}$

L'ensemble des entiers relatifs négatifs et privés de zéro est noté : $\mathbb{Z}_-^*$ tel que :

$\mathbb{Z}_-^* = \{\ldots -2\ ;\ -1\}$

3) L'ensemble des nombres rationnels

L'ensemble des nombres rationnels est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire comme quotient de deux entiers relatifs.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$ tel que : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{P}{Q} avec\ P \in \mathbb{Z}\ ;\ q \in \mathbb{Z}^*\right\}$

4) L'ensemble des nombres réels

Certains nombre comme : $\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et π ne peuvent pas s'écrire comme quotient de deux entiers relatifs. Ce sont des nombres irrationnels et l'ensemble des nombres irrationnels et rationnels forment l'ensemble des nombres réels.

L'ensemble des nombres réels est noté : $\mathbb{R}$ tel que : $\mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$

RETENONS : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Activités :

Activité 1:

Consigne : Résous dans $\mathbb{N}$ puis dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x + 7 = 6$. Conclus.

Activité 2:

Consigne : Résous dans $\mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{Q}$ l'équation : $3x = 1$. Conclus.

Activité 3:

Consigne : Résous dans $\mathbb{Q}$ puis dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 2 = 0$. Conclus.

Activité 4:

Consigne : Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 + 1 = 0$. Conclus.

Remarque : quant une équation n'a pas de solutions dans un ensemble, une démarche naturelle (et historique) consiste à en chercher dans un ensemble plus grand que le précédent. Au stade de nos connaissances actuelles, l'ensemble numérique le plus grand que l'on a rencontré est $\mathbb{R}$.

Ainsi un nouvel ensemble pris naissance au XVIème siècle par **JEROME CARDAN (Mathématicien Italien)** afin de Trouve des solutions pour l'équation : $x^2 + a = 0$

$(avec\ a \in \mathbb{R}_+^*)$ou des équations du second degré à discriminant négatif. Cet ensemble s'appellera : **Ensemble des nombres complexes ou ensemble des corps complexes et sera noté** $\mathbb{C}$.

Le principal élément de $\mathbb{C}$ sera noté $\boldsymbol{i}$ ($\boldsymbol{i}$ comme imaginaire).
Le nombre $\boldsymbol{i}$ est tel que $\boldsymbol{i}^2 = -1$. L'équation $x^2 + 1 = 0$ possède alors deux solutions telles que $x^2 - \boldsymbol{i}^2 = 0$ soit $(x - \boldsymbol{i})(x + \boldsymbol{i}) = 0$ donc $x = \boldsymbol{i}$ ou $x = -\boldsymbol{i}$.

II- Définition ; vocabulaire et interprétation graphique

1) Définition :

On appelle nombre complexe, tout couple ordonné de deux nombres réels $\boldsymbol{a}$ *et* $\boldsymbol{b}$ tel que : $\boldsymbol{Z = a + ib}$ où $\boldsymbol{i}$ **est un imaginaire** tel que $\boldsymbol{i^2 = -1}$.

2) Notation et vocabulaire :

Soit Z un nombre complexe tel que $\boldsymbol{Z = a + ib}$.

- l'écriture $\boldsymbol{Z = a + ib}$ est appelée forme algébrique de $\boldsymbol{Z}$.
- le nombre réel $\boldsymbol{a}$ est appelé partie réelle de $\boldsymbol{Z}$ et est noté $\mathrm{Re}(\mathbf{Z})$
- le nombre réel $\boldsymbol{b}$ est appelé partie imaginaire de $\boldsymbol{Z}$ et est noté $\mathrm{Im}(\mathbf{Z})$

NB :

- Si $b = 0$; alors $\boldsymbol{Z} = a$ (**Z est un nombre à la fois réel et complexe**) car $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

- Si $a = 0$; alors $\boldsymbol{Z} = ib$ (**Z est un imaginaire pur**).

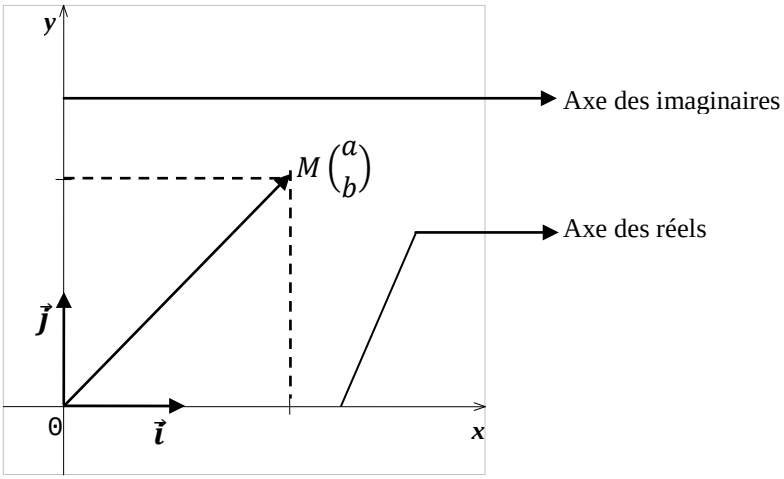
- Si $a = 0$ et $b = 0$; alors $\boldsymbol{Z} = 0$ (**Z est appelé complexe nul**).

3) Interprétation graphique :

A tout point $M\binom{a}{b}$ du plan P, on peut associer un nombre complexe $Z = a + ib$.

- M est le point image et Z l'affixe du point M.
- $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image du nombre complexe $Z = a + ib$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Ainsi on a la représentation graphique du point M comme suit :



III- Operations dans $\mathbb{C}$:

Soient Z et Z' deux nombres complexes tels que : $Z = a + ib$ et $Z' = a' + ib'$.

1) Egalité :

Deux nombres complexe Z et Z' sont égaux si et seulement si $Z = Z' \Leftrightarrow$
$a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$.

2) Somme:

La somme des deux complexes Z et Z' est tel que : $Z + Z' = (a + a') + i(b + b')$.

3) Produit :

Le Produit des deux complexes Z et Z' est tel que :

$Z \times Z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$ **avec** $\boldsymbol{i^2 = -1}$

4) Quotient :

Le quotient de deux complexes Z et Z' est tel que :

$$\frac{Z}{Z'} = \frac{aa' + bb'}{(a')^2 + (b')^2} + i\frac{a'b - ab'}{(a')^2 + (b')^2}$$

N.B : Le nombre $\frac{1}{Z}$ est appelé inverse du complexe Z tel que : $\frac{1}{Z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$

IV- Conjugué d'un nombre complexe :

1) Définition :

Soit Z = $a + ib$ l'expression algébrique d'un nombre complexe.

On appelle conjugué de Z, le nombre complexe noté $\bar{Z}$ tel que $\bar{Z} = a - ib$.

NB : les images des deux nombres complexes Z et $\bar{Z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

2) Propriétés :

Soient Z et Z' deux complexes :

P_1 : Z = $\bar{Z}$ ⇔ Z est un réel

P_2 : Z = $-\bar{Z}$⇔Z est un imaginaire pur

P_3 : $\overline{Z + Z'} = \bar{Z} + \bar{Z'}$

P_4 : $\overline{Z \times Z'} = \bar{Z} \times \bar{Z'}$

P_5: $\overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)} = \frac{\bar{Z}}{\bar{Z'}}\ (avec\ Z' \neq 0)$

P_6 : $\overline{\left(\frac{a}{Z}\right)} = \frac{a}{\bar{Z}}\ (avec\ Z' \neq 0\ et\ a \in \mathbb{R})$

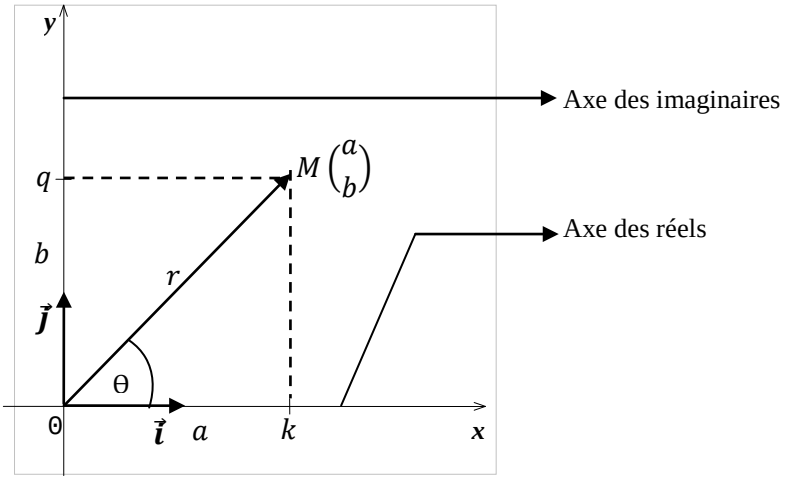
P_7 : $\overline{Z^n} = (\bar{Z})^n$

P_8 : $R_e(Z) = \frac{Z + \bar{Z}}{2}$ et $I_m(Z) = \frac{Z - \bar{Z}}{2i}$

V- Module et argument d'un nombre complexe :

1) Module :

Dans le plan rapporté à un repère (o ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$); plaçons le point M de Z dont l'affixe est $Z = a + ib$ => $M\binom{a}{b}$



D'après la figure ci-dessus, on a : $\overline{Ok} = a$; $\overline{Oq} = b$ et $\overline{OM} = r$

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OkM, on a :

$OM^2 = OM^2 + OM^2 \Leftrightarrow r^2 = a^2 + b^2 => r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ou $\left|\overrightarrow{OM}\right| = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

a- Définition :

Soit Z = $a + ib$ un nombre complexe. On appelle module de Z, le nombre réel positif ou nul noté : $|\boldsymbol{Z}|$ ou $\boldsymbol{r}$ tel que $|\boldsymbol{Z}| = \sqrt{\boldsymbol{a^2 + b^2}}$

Si M est le point image de Z alors $|Z| = \boldsymbol{d(O\,;\,M)} = \sqrt{\boldsymbol{a^2 + b^2}}$

b- Propriétés :

P₁ : $|Z|$ est toujours positif ; **P₅** : $|Z + Z'| \leq |Z| + |Z'|$ $(Inégalité\ triangulaire)$

P₂ : $|Z| = |\bar{Z}|$; **P₆**: $\left|\frac{Z}{Z'}\right| = \frac{|Z|}{|Z'|}\,(avec\ Z' \neq 0)$;

P₃ : $|Z| = 0 \Leftrightarrow Z = 0$; **P₇**: $\left|\frac{a}{Z}\right| = \frac{a}{|Z|}\,(avec\ Z \neq 0\ et\ a \in \mathbb{R})$;

P₄ : $|Z \times Z'| = |Z| \times |Z'|$; **P₈**: $|Z^n| = |Z|^n$ $(avec\ n \in \mathbb{N}^*)$

2) Argument :

a- Définition :

En observant la figure ci-dessus représentant un triangle rectangle d'angle θ, on a :

$$\begin{cases} Cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ Sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

Soit $\boldsymbol{Z}$ est un nombre complexe de module $|\boldsymbol{Z}|$ ($avec\ |\boldsymbol{Z}| \neq 0$). On appelle argument de $\boldsymbol{Z}$, le nombre réel noté $\boldsymbol{\theta}$ ou $\boldsymbol{arg(Z)}$ tel que : $\begin{cases} Cos\theta = \dfrac{a}{|\boldsymbol{Z}|} \\ et \\ Sin\theta = \dfrac{b}{|\boldsymbol{Z}|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ Sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$

Propriétés :

Soient Z et Z' deux nombres complexes d'arguments respectifs $arg(Z)$ et $arg(Z')$

$\mathbf{P_1}$: $arg(Z \times Z') = arg(Z) + arg(Z')$; $\mathbf{P_4}$: $arg\left(\frac{a}{Z}\right) = -arg(Z)$ $(avec\ Z \neq 0)$

$\mathbf{P_2}$: $arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = arg(Z) - arg(Z')$; $\mathbf{P_5}$: $arg(\bar{Z}) = -arg(Z)$

$\mathbf{P_3}$: $arg(Z^n) = n\arg(Z)$ $(avec\ n \in \mathbb{N}^*)$

VI- Forme trigonométrique d'un nombre complexe :

1) Définition :

Soit $Z = a + ib$ un nombre complexe de module $\boldsymbol{r}$ et d'argument θ. On appelle forme trigonométrique de Z toute écriture de la forme $\boldsymbol{Z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)}$ **avec** $\boldsymbol{r} = \sqrt{a^2 + b^2}$ et

$\theta \in [-\pi\ ;\ \pi[$ tel que : $\begin{cases} Cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ Sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$

2) Propriétés :

Soient Z et Z' deux complexe tels que $Z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $Z' = r'\,(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$\mathbf{P_1}$: $Z \times Z' = r \times r'[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')]$

$\mathbf{P_2}: \frac{Z}{Z'} = \frac{r}{r'}\,[\mathrm{Cos}(\theta - \theta') + i\mathrm{sin}(\theta - \theta')]$

$\mathbf{P_3}: Z^n = r^n[\mathrm{Cos}(n\theta) + i\mathrm{sin}(n\theta)]$

NB : si $r = 1$, on a : $Z^n = [\mathrm{Cos}(n\theta) + i\mathrm{sin}(n\theta)]$ (**formule de Moivre**)

VII- Forme polaire d'un nombre complexe

1) Définition :

Soit Z un nombre complexe de module r et d'argument θ. On appelle forme polaire de Z toute écriture de Z de la forme $\boldsymbol{Z = [r\ ;\ \theta\ ]}$

2) Propriétés :

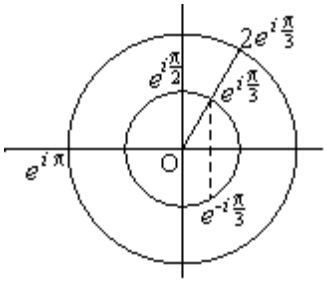
Soient Z et Z' deux complexe tels que $Z = [r\ ;\ \theta]$ et $Z' = [r'\ ;\ \theta']$

$\mathbf{P_1}: Z \times Z' = [r \times r'\ ;\ \theta + \theta']$; $\mathbf{P_2}: \frac{Z}{Z'} = \left[\frac{r}{r'}\ ;\ \theta - \theta'\right]$; $\mathbf{P_3}$: $Z^n = [r^n\ ; n\theta]$

VIII- Forme exponentielle d'un nombre complexe :

1) Définition :

Soit Z un nombre complexe de module $\boldsymbol{r}$ et d'argument $\boldsymbol{\theta}$. On appelle forme exponentielle d'un nombre complexe Z, toute écriture de Z se ramenant sous la forme $\boldsymbol{Z = re^{i\theta}}$ où son conjugué est $\boldsymbol{\bar{Z} = re^{-i\theta}}$



2) Propriétés :

Soient Z et Z' deux nombres complexes de formes exponentielles respectives :

$Z = re^{i\theta}$ et $Z' = r'e^{i\theta'}$. On a les propriétés suivantes :

$\mathrm{P_1}: Z \bullet Z' = r \bullet r'e^{i(\theta+\theta')}$; $\mathrm{P_2}: \frac{Z}{Z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$; $\mathrm{P_3}: Z^n = r^n e^{in\theta}$

$\mathrm{P_4}: Z \bullet \bar{Z} = r^2 e^{i(\theta-\theta)} = r^2 e^{i(0)} = r^2 \bullet 1 = r^2$ (Avec $e^0 = 1$)

P_5 : Formule d'Euler $\begin{cases} cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$ et $\begin{cases} e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2cos(n\theta) \\ e^{in\theta} - e^{-in\theta} = 2isin(n\theta) \end{cases}$

IX- Formules de Moivre et formules d'Euler:

1) Formules de Moivre

a- Définition :

Soit Z un nombre complexe **de module 1 et d'argument θ .** On appelle formule de **Moivre** toute écriture de Z se ramenant sous la forme $\boldsymbol{Z^n = [cos(\theta) + isin(\theta)]}$ **avec ($n \in \mathbb{N}^*$)**

b- Application de la formule de Moivre :

Soit Z un nombre complexe de module 1 et d'argument θ tel que :

$Z = cos\theta + isin\theta$ et $\bar{Z} = cos\theta - isin\theta$

- **Recherche de : $Z + \bar{Z}$ et $cos\theta$**

$$\begin{cases} Z = cos\theta + isin\theta \\ \text{et} \\ \bar{Z} = cos\theta - isin\theta \end{cases}$$

$Z + \bar{Z} = 2cos\theta \Rightarrow cos\theta = \frac{Z+\bar{z}}{2}$

- **Recherche de : $Z - \bar{Z}$ et $sin\theta$**

$$\begin{cases} Z = cos\theta + isin\theta \\ \text{et} \\ \bar{Z} = cos\theta - isin\theta \end{cases}$$

$Z - \bar{Z} = 2isin\theta \Rightarrow sin\theta = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

- **Recherche de : $Z \times \bar{Z}$**

$$\begin{cases} Z = cos\theta + isin\theta \\ \text{et} \\ \bar{Z} = cos\theta - isin\theta \end{cases}$$

$Z \times \bar{Z} = (cos\theta + isin\theta)(cos\theta - isin\theta) = cos^2\theta + sin^2\theta = 1$

De façons générales on a :

$Z^n + \bar{Z}^n = 2cos(n\theta)$; $Z^n - \bar{Z}^n = 2isin(n\theta)$ et $Z^n \times \bar{Z}^n = 1$

2) Formules d'Euler

a- Définition :

Soit *Z* un nombre complexe **de module 1 et d'argument.** On appelle formule de **d'Euler** toute écriture de *Z* se ramenant sous la forme $\boldsymbol{Z^n = e^{in\theta}}$ **avec** $(\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*)$

b- Application de la formule d'Euler

En posant $\boldsymbol{Z = e^{i\theta}}$ et $\boldsymbol{\overline{Z} = e^{-i\theta}}$, on a :

$$\boldsymbol{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} = 2cos\theta \Rightarrow cos\theta = \frac{\boldsymbol{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}}{2}$$

$$\boldsymbol{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = 2isin\theta \Rightarrow sin\theta = \frac{\boldsymbol{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}}{2i}$$

$$\boldsymbol{e^{i\theta} \times e^{-i\theta}} = 1$$

De façons générales on a :

$$\boldsymbol{e^{in\theta} + e^{-ni\theta}} = 2cos(n\theta)$$

$$\boldsymbol{e^{in\theta} - e^{-in\theta}} = 2isin(n\theta)$$

$$\boldsymbol{e^{in\theta} \times e^{-in\theta}} = 1$$

3) Linéarisation : de $\boldsymbol{cos^n\theta}$ et $\boldsymbol{sin^n\theta}$

Pour **Linéariser $\boldsymbol{cos^n\theta}$ et $\boldsymbol{sin^n\theta}$ ($\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$)** ; on peut utiliser le procédé suivant, mettant en jeu les formules **(d'Euler ou de Moivre)** et du **(binôme de Newton ou du triangle de Pascal).**

Méthode :

- Développer et réduire : $cos^n\theta = \frac{(z+\bar{z})^n}{2^n}$ ou $sin^n\theta = \frac{(z-\bar{z})^n}{(2i)^n}$ **(Moivre)**

  Ou encore $cos^n\theta = \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n}{2^n}$ ou $sin^n\theta = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^n}{(2i)^n}$ **(Euler)**

- Regrouper deux à deux les termes d'exposants opposés et Exprime chacun deux en fonction des termes de la forme **Cos$\boldsymbol{kx}$** et **Sin$\boldsymbol{kx}$.**

X- Equations dans $\mathbb{C}$

1) Equation du premier degré :

a) Définition :

On appelle équation du premier degré dans $\mathbb{C}$; toute équation de la forme $\boldsymbol{aZ + b = 0.}$

Avec ($\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^*$)

b) Résolution :

L'ensemble solution de l'équation $\boldsymbol{aZ + b = 0}$ **est** $\mathbf{S} = \left\{-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\right\}$

2) Racines carrées d'un nombre complexe :

a) Définition :

On appelle racines carrées de Z, tout nombre complexe z tel que $Z = z^2$.

b) Résolution du cas général :

Si $Z = a + ib$ et $z = x + iy$. On dit que z est une racine carrée de **Z** si et seulement si

$$\begin{cases} z^2 = Z \\ |z^2| = |Z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+iy)^2 = a + ib \\ \left|\sqrt{x^2+y^2}\right|^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2ixy - y^2 = a + ib \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$$

NB : D'une manière plus concrète, les racines carrée du complexe $Z = a + ib$ sont données par :

$$\delta_1 = -\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\frac{b}{\sqrt{2\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}} \quad \text{et} \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\frac{b}{\sqrt{2\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}}$$

3) Equation du second degré :

a) Définition:

On appelle équation du second degré dans $\mathbb{C}$, toute équation de la forme :

$\boldsymbol{aZ^2 + bZ + c = 0}$ (**où** $\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$ **et** $\boldsymbol{c}$ **sont tous des compexes avec** $\boldsymbol{a \neq 0}$)

b) Résolution :

La résolution de telles équations nécessite d'abords le calcul du discriminant associé Δ tel que $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$.

- Si $\Delta > 0$; on a : $Z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$; on a : $Z_1 = Z_2 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$; on a : $Z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $Z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.
- Si $\Delta = x + iy$; on a : $Z_1 = \frac{-b + \delta_1}{2a}$ et $Z_2 = \frac{-b + \delta_2}{2a}$.

  Où δ_1 et δ_2 sont les racines carrées de Δ.

4) Racines $n^{ième}$ d'un nombre complexe :

a) Définition :

On appelle **racine $n^{ième}$** de Z tout nombre complexe z tel que : z^n =Z .

b) Résolution :

Soit Z un complexe de forme polaire : $Z = [r\ ;\ \theta]$.

et z un complexe de forme polaire: $z = [r'\ ;\ \theta']$.

$z^n = Z \Leftrightarrow [r'\ ;\ \theta']^n = [r\ ;\ \theta] \Leftrightarrow [(r')^n\ ;\ n\theta'] = [r\ ;\ \theta]$.

Par identification, on a :

$$\begin{cases} (r')^n = r \\ n\theta' = \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r' = \sqrt[n]{r} \\ \theta' = \frac{\theta}{n}\left[\frac{2k\pi}{n}\right] = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases} \quad \text{Avec } k \in [0\ ;\ n-1]$$

Ainsi les racines $n^{ièmes}$ de Z sont données par la formule : $z = [r'\ ;\ \theta'] \Leftrightarrow$

$Z_k = \left[\sqrt[n]{r}\ ;\ \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right]$ ou $Z_k = \sqrt[n]{r}\ \left[cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$

Avec $k \in [0\ ;\ n-1]$

5) Racines $n^{ièmes}$ de l'unité :

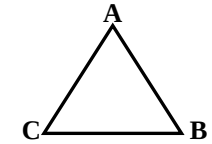
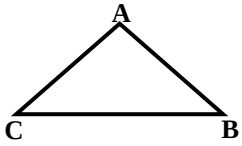
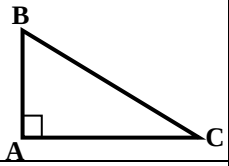
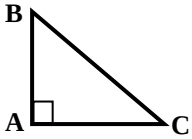
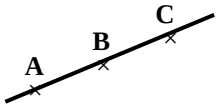
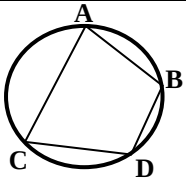
Soit Z un nombre complexe tel que Z = 1.

Les racines de $n^{ièmes}$ Z c'est-à-dire 1, sont obtenues en utilisant la formule qui suit :

$Z_k = \left[1\ ;\ \frac{2k\pi}{n}\right]$

XI- Complexe et configurations géométriques du plan :

Dans le tableau ci-dessous sont caractérisées certaines configurations géométriques à l'aide des complexes :

Configurations géométriques	Figures	Caractérisations géométriques	Caractérisations complexes
Triangle ABC isocèle en A.		$arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \alpha$ Avec $\alpha \in [\,0\,;\,\pi]$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\alpha}$ Avec $\alpha \in [\,0\,;\,\pi]$
Triangle ABC équilatéral.		$arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{\pi}{3}\ ou\ -\frac{\pi}{3}$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Triangle ABC rectangle en A.		$arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = ib$ ou $-ib$ Avec $b \in \mathbb{R}^* - \{1\}$
Triangle ABC rectangle et isocèle en A.		$arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ et $\lvert Z_B - Z_A\rvert = \lvert Z_C - Z_A\rvert$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = i$ ou $-i$
Points A, B, C alignés		$arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = 0 + k\boldsymbol{\pi}$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = a$ $(a \in \mathbb{R}^*)$
Points A, B, C, D cocycliques		$mes(\hat{C}) \neq 0 + k\pi$ Ou $mes(\hat{C}) = mes(\hat{D}) + k\pi$	$\frac{\frac{Z_C - Z_B}{Z_C - Z_A}}{\frac{Z_D - Z_B}{Z_D - Z_A}} \in \mathbb{R}^*$

XII- Complexe et lieux géométriques :

1) Distance entre deux points A et B :

Soient A et B, deux points d'affixes respectives Z_A et Z_B

$d(A,B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = |Z_B - Z_A|$

2) Cercle de centre A et de rayon r :

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ d'affixe Z_M et A d'affixe Z_A.

$d(A,M) = r \Leftrightarrow |Z_M - Z_A| = r$

3) Médiatrice d'un segment :

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ d'affixe Z_M ; A d'affixe Z_A et B d'affixe Z_B.

M appartient à la médiatrice du segment [A, B] si $d(A,M) = d(B,M) \Leftrightarrow$

$|Z_M - Z_A| = |Z_M - Z_B|$

4) Droite passant par un point A et faisant un angle α avec l'horizontale

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ d'affixe Z_M ; A un point d'affixe Z_A et (D) une droite du plan.

(D) passe par A et fait un angle α avec l'horizontale si $arg(Z_M - Z_A) = \alpha + k\pi$

NB :

- **Equation cartésienne d'un cercle :** $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
- **Equation réduite d'un cercle :** $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$

XIII- Complexe et transformations géométriques du plan

1) Translation :

La traduction complexe d'une translation est : $\boldsymbol{f(Z) = Z + q}$ **(avec** $\boldsymbol{q} \in \mathbb{C}$**)**

Ainsi la translation qui transforme un point A d'affixe $Z_A = a + ib$ en un point B d'affixe $Z_B = a' + ib'$est : $f(Z_A) = Z_B \Leftrightarrow (a + ib) + q = (a' + ib') \Rightarrow q = (a' + ib') - (a + ib)$

Ainsi on remplace q par sa valeur dans $f(Z) = Z + q$ pour Trouve la traduction complexe.

2) Homothétie :

La traduction complexe d'une homothétie de rapport k et de centre ω est :

$f(Z) = kZ + q$ (avec $q \in \mathbb{C}$) ou $\overrightarrow{\Omega M'} = K\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow Z' - \omega = k(Z - \omega)$ avec :

- Z' : image de Z
- k : le rapport
- ω : le centre d'affixe Ω

Ainsi l'homothétie de rapport k qui transforme un point A d'affixe $Z_A = a + ib$ en un point B d'affixe $Z_B = a' + ib'$ est : $f(Z_A) = Z_B \Leftrightarrow k(a + ib) + q = (a' + ib') \Leftrightarrow$

$q = (a' + ib') - k(a + ib)$.

Ainsi on remplace q par sa valeur dans $f(Z) = kZ + q$ pour Trouve la traduction complexe.

3) Rotation :

La traduction complexe d'une rotation d'angle θ et de centre ω est :

$\boldsymbol{f(Z) = Ze^{i\theta} + q}$ **(avec** $\boldsymbol{q \in \mathbb{C}}$**) ou** $\boldsymbol{\overrightarrow{\Omega M'} = e^{i\theta}\overrightarrow{\Omega M}}$ $\boldsymbol{Z' - \omega = e^{i\theta}(Z - \omega)}$ avec :

- Z' : image de Z
- Θ : l'angle
- ω : le centre d'affixe Z_Ω

Ainsi la rotation d'angle θ qui transforme un point A d'affixe $Z_A = a + ib$ en un point B d'affixe $Z_B = a' + ib'$ est : $f(Z_A) = Z_B \Leftrightarrow (a + ib)e^{i\theta} + q = (a' + ib') \Leftrightarrow$

$q = (a' + ib') - (a + ib)e^{i\theta} \Leftrightarrow q = -(a + ib)(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Ainsi on remplace q par sa valeur dans $f(Z) = Ze^{i\theta} + q$ pour Trouve la traduction complexe.

4) Similitude du plan :

Expression complexe :

Soit S une similitude directe du plan qui a tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que :

- **Cas d'une similitude directe** :

$Z' = aZ + b$ (où a et b sont des complexes). Ces éléments caractéristiques sont :

- Son rapport $k = |a|$
- Son angle $\theta = arg(a)$

- Son centre Z_Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ avec $a \neq 1$

- **Cas d'une similitude indirecte ou inverse :**

$Z' = a\bar{Z} + b$ (où a et b sont des complexes). Ces éléments caractéristiques sont :

- Son rapport $k = |a|$
- Son axe (D) : $y = px + q$. avec $p = \frac{I_m(a)}{|a|+R_e(a)}$ $(Coéfficient\ directeur)$
- Son centre Z_Ω d'affixe $\omega = \frac{b+a\bar{b}}{1-a\bar{a}}$

5) <u>Caractérisation des transformations</u>

<u>Soit f la transformation : $z' = az + b$</u>

- $si\ a = 1$, alors f est une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'affixe b.
- si $a = -1$, alors f est la symétrie centrale de centre Z_Ω d'affixe $w = \frac{1}{2}b$.
- $si\ a \in \mathbb{R}^* - \{-1\ ;1\}$, alors f est une homothétie de rapport $k = |a|$ et de centre Z_Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.
- $si\ a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = 1\ alors\ f$ est une rotation d'angle α, d'argument $\theta = arg(a)$ et de centre Z_Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.
- $si\ a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| \neq 1\ alors\ f$ est une similitude directe de rapport $k = |a|$, d'angle α ,d'argument $\theta = arg(a)$ et de centre Z_Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.

<u>Soit f la transformation : $z' = a\bar{z} + b$</u>

- Si $|a| = 1$, alors f est une symétrie orthogonale d'axe l'ensemble des solutions de $z' = a\bar{z} + b$.
- Si $|a| \neq 1\ alors\ f$ est une similitude indirecte de rapport $k = |a|$, d'angle, θ= arg(a) , $d'\ axe\ (\Delta) : y = px + q$ et de centre Z_Ω d'affixe $\omega = \frac{b+a\bar{b}}{1-a\bar{a}}$

Exercices

Forme algébrique

1 Ecris sous forme algébrique les nombres complexes donnés puis en déduis la partie réelle et imaginaire de chacun d'eux :

a) $Z = (-1-i)^3$; **b)** $Z = i^5$; **c)** $Z = \frac{i}{(1+i)(3-2i)}$; **d)** $Z = \left(1+\frac{2}{i}\right)(3-2i)$

2 On donne les nombres complexes suivants : $Z_1 = 1-2i$ et $Z_2 = 3+i$.

Ecris sous forme algébrique : $Z_1 + Z_2$; $Z_1 - Z_2$; $Z_1 \times Z_2$; Z_1^2 ; $\frac{1}{Z_2}$; $\frac{Z_2}{Z_1}$

Forme trigonométrique - Forme exponentielle

3 Détermine les formes trigonométriques et exponentielles des nombres complexes suivants :

a) $Z = -i$; **b)** $Z = \sqrt{3}+i$; **c)** $Z = \frac{-1-i}{2}$; **d)** $Z = -1+i\sqrt{3}$; **e)** $Z = -1-i$

f) $Z = \left(-\sqrt{3}-i\right)^3$; **g)** $Z = \frac{-\sqrt{3}-i}{1+i}$; **h)** $Z = (1+i)(-2-2i)$; ***i)*** $Z = (-1+i)e^{i\frac{-5\pi}{6}}$

j) $Z = -cos\alpha + isin\alpha$; **k)** $Z = = -cos\alpha - isin\alpha$ ***l)*** $Z = = cos\alpha - isin\alpha$

4 Complète le tableau suivant :

Forme algébrique	$-5(1-i\sqrt{3})$		
Forme trigonométrique			$2\left[cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right)+isin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right]$
Forme exponentielle		$e^{-\frac{5i\pi}{4}}$	

5 On pose : $A = 5\sqrt{2}(1+i)$; $B = -5(1+i\sqrt{3})$

1) Détermine le module et un argument de : A ; B ; $\bar{A}$; $\frac{B}{A}$; A×B et $\frac{A}{B^2}$
2) Soit Z un nombre complexe tel que : $AZ = B$

a) Ecris Z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

b) En déduis les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$

c) Calcule $(Z)^{12}$

6 **On pose :** $Z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$

1) Calcule Z^2 puis Détermine son module et son argument.
2) En déduis de ce qui précède le module et un argument Z.

7 Les parties I et II sont indépendant :

I- On pose : $|Z| = 2\sqrt{2}$ et $\arg\left[(1+i\sqrt{3})Z\right] = \frac{7\pi}{12}$.

Détermine la forme trigonométrique et exponentielle de Z.

II- On pose : $Z = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $Z' = 1 - i$

1) Ecris $\frac{Z}{Z'}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
2) En déduis les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Détermination de l'ensemble des points

8 Détermine les ensembles suivants :

1) L'ensemble (Ω) des points M d'affixes Z tels que : $|Z - i| = 2$

2) L'ensemble (Γ) des points M d'affixes Z tels que : $|\bar{Z} - i| = 2$

3) L'ensemble (λ) des points M d'affixes Z tels que : $|Z + 1 - 2i| = |\bar{Z} - 1 - i|$

4) L'ensemble (φ) des points M d'affixes Z tels que : $arg(Z - 1 + 2i) = \frac{\pi}{6} + k\pi$

5) L'ensemble (ω) des points M d'affixes Z tels que : $arg(2\bar{Z} - 2 + i) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

9 Le plan est muni d'un repère orthonormal $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe distinct de 1 et soit Z = $\frac{z+1}{z-1}$

Détermine puis construire l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les conditions indiquées :

1) $|Z|=1$; **2)** Z est un réel. ; **3)** Z est un imaginaire

Linéarisation.

10 Linéarise les expressions : $A = sin^3x$; $B = cos^3\frac{x}{2}$; $C = sin^3x \bullet cos^3x$

Résolution d'équations et systèmes.

11 Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $Z^2 - 2Z + 2 = 0$; **b)** $Z^2 - 2Z + 1 = 0$; ***c)*** $Z^2 + 2sin\alpha Z + 1 = 0$

e) $Z^2 - 2cos\alpha Z + 1 = 0$ ***f)*** $4Z^2 - 4(1 + i)Z - (45 + 26i) = 0$

12 1) Développe le produit de facteurs suivant : $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$

2) Résous l'équation $Z^4 = 1$
3) En déduis des questions 1) et 2) la résolution des équations suivantes :
$Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$ Puis $\left(\frac{3Z + i}{Z-1}\right)^3 + \left(\frac{3Z + i}{Z-1}\right)^2 + \left(\frac{3Z + i}{Z-1}\right) + 1 = 0$

13 On donne le nombre complexe Z tel que : $Z = 2 + 3i$

1) Vérifie $Z^4 = -119 - 120i$
2) Détermine les racines quatrièmes de l'unité.
3) En déduis les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $Z^4 = -119 - 120i$

14 Résous dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes :

1) $\begin{cases} Z_1 \times Z_2 = 6 \\ Z_1 + Z_2 = 5 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} (2 + 3i)Z - 5Z' = -1 \\ (1 - i)Z + 2Z' = 2(1 + i) \end{cases}$

Résous dans $\mathbb{C}^3$ le système suivant :

$$\begin{cases} x - y + iz = 0 \\ x + y - z = 0 \\ (1 + i)x - 2y = 2z - 2i \end{cases}$$

15 Dans le plan muni d'un repère orthonormé$(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$, on considère le polynôme $p(Z)$ telque :

$p(Z) = Z^3 - (3 + 5i)Z^2 + (-4 + 9i)Z + 6 - 4i$

1) Démontre que l'équation $p(Z) = 0$ admet une solution réelle que l'on notera Z_1, dont on Déterminera la valeur.

2) Factorise P(Z) puis Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation P(Z) = 0

16 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le polynôme $p(Z)$

telque : $p(Z) = Z^3 - 4iZ^2 - (6 + i)Z + 3i - 1$

1) Montre que l'équation $p(Z) = 0$ admet une solution imaginaire pure.

2) Factorise $p(Z)$puis Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(Z)= 0$.

17 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère le polynôme $p(Z)$ telque :

$p(Z)= Z^3 + 2(1-2cos2\theta)Z^2 + 4(1-2cos2\theta)Z + 8$

1) Calcule $p(-2)$.
2) Factorise $p(Z)$ puis Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(Z) = 0$.
3) On désigne par Z_1 ; Z_2 et Z_3 les solutions de l'équation $p(Z) = 0$.
Calcule le module et un argument de Z_1 ; Z_2 et Z_3.
4) On désigne par A ; B et C les points d'affixes respectives Z_1 ; Z_2 et Z_3.

Pour quelles valeurs de θ, le triangle ABC, est –il équilatérale ?

18 Soit f la fonction à variable complexe Z telle que : $f(Z) = Z^4 - 3Z^3 + \frac{9}{2}Z^2 - 3Z + 1$

1) Prouver que si Z_0 est une solution de l'équation $f(Z) = 0$ alors les complexes : $\overline{Z_0}$ et $\frac{1}{Z_0}$ en sont aussi.

2) Détermine $f(1+i)$ et en exploitant ce qui précède, Trouve toutes les solutions de l'équation $f(Z) = 0$.

19 Soit le polynôme P(Z) définie par : $P(Z) = Z^4 - (1+\sqrt{2})Z^3 + (2+\sqrt{2})Z^2 - (1+\sqrt{2})Z + 1$

1) Vérifie que : $P(Z) = Z^2\left[\left(Z+\frac{1}{Z}\right)^2 - \left(Z+\frac{1}{Z}\right)(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}\right]$ avec $Z \neq 0$

2) En utilisant la question précédente, Résous l'équation $P(Z) = 0$.

20 On considère dans $\mathbb{C}$ le complexe u tel que : $u = -1 - 2i\sqrt{2}$

1- Calcule les racines carrées de u.

2- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2Z^2 + 2iZ + i\sqrt{2} = 0$.
(On notera Z_1 et Z_2 les solutions de cette équation).

3- Montre que : $\left|\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right| = \sqrt{2}$

Figures géométriques dans le plan.

21 Soient A, B, C trois points d'affixes respectives : $-1 - i$; $2 + 3i$; $-10 - 13i$.
Démontre que ces trois points sont alignés. (on fera une figure).

22 Soient A, B, C trois points d'affixes respectives : $3 + i$; $2i$; $2 - 2i$.

a- Démontre que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

b- Détermine l'affixe de D telque : $ABCD$ soit un parallélogramme. (on fera une figure).

23 Soient A, B, C, D quatre points d'affixes respectives : $-1 + i$; $-1 - i$; $2i$; $2 - 2i$.

a- Etudie la nature des triangles ABC et BCD.

b- Démontre que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on Déterminera le centre et le rayon. (on fera une figure).

24 On considère un repère orthonormé directe (O ; $\vec{U}$; $\vec{V}$)du plan complexe. Soit les points A ; B ; C d'affixes respectives :

$Z_A = -1 + i$; $Z_B = \dfrac{2\left[Cos\left(\frac{7\pi}{15}\right) + iSin\left(\frac{7\pi}{15}\right)\right]}{Cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - iSin\left(\frac{\pi}{5}\right)}$ et $Z_C = 2 - 2i$

a- Ecris les complexe Z_A ; Z_B et Z_C sous forme exponentielle.
b- Détermine l'affixe Z_D du point D tel que le triangle OBD soit équilatéral direct, c'est-à-dire la mesure de l'angle ($\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OD}$) = $\frac{\pi}{3}$.

25 Le plan est rapporté au repère orthonormé directe (O ; $\vec{U}$; $\vec{V}$).
On considère :

- Le point A d'affixe $Z_A = 5 - i\sqrt{3}$.
- Le point B d'affixe Z_B est tel que OAB soit un triangle équilatéral direct c'est-à-dire la mesure de l'angle ($\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$) = $\frac{\pi}{3}$.
- Le point Q d'affixe Z_Q est tel que le point Q soit milieu du segment $[OB]$.
- Le point K d'affixe Z_K est tel que $ABQK$ soit un parallélogramme.

1) Détermine les affixes Z_B ; Z_Q et Z_K respectivement des points B ; Qet K.

2) Démontre que $\dfrac{Z_K - Z_A}{Z_K}$ est un imaginaire pur. En déduis la nature du triangle OKA.

3) Soit C la point d'affixe Z_C tel que $Z_C = \dfrac{2Z_A}{3}$

a- Calcule $\frac{Z_K - Z_B}{Z_K - Z_C}$. Que peut-on en déduis pour les points B ; C et K ?

26 On considère l'ensemble des complexes Z_n tels que : $\forall\, n \in \mathbb{C}$ on a :

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \frac{1+i}{2} Z_n \end{cases}$$

1) On note M_n le point d'affixe Z_n dans le plan rapporté au repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

a- Calcule Z_1 ; Z_2; Z_3 et Z_4.
b- Placer les points M_1 , M_2 , M_3 , M_4 et M_5.

2) Calcule le quotient : $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1}}$ puis en déduis la nature du triangle $OM_{n+1}M_n$

Transformations géométriques du plan.

27 Soit (S) l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe Z associe Z' d'affixe M' tel que

$Z' = (1 + i)Z + 1 - i$. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (S).

28 Soit la similitude directe plane S de centre A (1 ; 1) ; de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ par la similitude S ; le point M d'affixe Z a pour transformer le point M' d'affixe Z'.

Exprime Z' en fonction de Z.

29 Soient A, B, C et D les points d'affixes $Z_A = -1 - i$; $Z_B = i$; $Z_C = 1 + 3i$; $Z_D = 5 + i$.

Soit S la similitude directe transformant A en C et B en D.

1) Détermine le rapport k et l'angle θ de S

2) Détermine l'écriture complexe f associée à S.
3) Détermine l'affixe de Ω le centre de S

30 Détermine la traduction complexe de la transformation (Γ) dans chacun des cas suivants :
1) (Γ) est la translation qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + 3i$

2) (Γ) est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + 3i$.

3) (Γ) est la rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$ qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + i$.

31 Soit f la transformation définie par $Z' = aZ + 3i$

1) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f si : $a = 2$ puis si $a = -i$.

2) Soient $A(1)$; $B(2+i)$; $A'(2i)$; $B'(1+i)$.Vérifie que $AB = A'B'$

3) Démontre qu'il existe une unique rotation r telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$

32 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : Z^3 - \left(4 + i\sqrt{3}\right)Z^2 + \left(3 + 4i\sqrt{3}\right)Z - 3i\sqrt{3} = 0$

1) Montre que (E) admet deux solutions réelles que l'on notera α et β puis une solution imaginaire pure que l'on notera ω.

2) Soit f, l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout nombre complexe Z, on a :

$f(Z) = aZ + b$.

a-Détermine les réels a et b pour que $f(\omega) = \omega$ et $f(\alpha) = \beta$.

b-Calcule le module et un argument de a.

c-Donne la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.

33 Le plan P est rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. A est le point d'affixe $2i$ et P^* le plan privé de A.
Soit T la transformation qui au point M d'affixe $Z \neq 2i$ associe le point M' d'affixe Z' tel que :
$Z' = \frac{2iZ-5}{Z-2i}$.

1) Montre que pour tout point M de P^*, le point M' est distinct de A.
2) Démontre que Test une bijection de P^* sur lui-même. Détermine sa réciproque T^{-1}.
3) a- Montre qu'un point M de P^* est invariant par T si et seulement si son affixe vérifie la relation : $Z^2 - 4iZ + 5 = 0$.
   b- Trouve le réel α tel que : $Z^2 - 4iZ + 5 = (Z - 2i)^2 + \alpha$.
   c- Montre alors que T admet deux points invariants B et C.
4) On appelle (D) la droite passant par O et dirigée par $\vec{v}$ et (D^*) la droite (D) privé de A.
   Montre que (D^*) est globalement invariante par T.
5) a- Montre que pour tout $Z \neq 2i$, $|Z' - 2i| \times |Z - 2i| = 9$.
   b- Soit (Γ)le cercle de centre A et de rayon 3. Montre que (Γ) est globalement invariante par T.

34 Le plan P est rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. On donne quatre points $A\ ;B\ ;C$ et D d'affixes respectives : $Z_A = -2 + 6i\ \ ;\ \ Z_B = 1 - 3i\ \ \ ;\ \ Z_C = 5 + 5i$ et $Z_D = 2 + 4i$

1) Soit S la similitude plane directe qui tout point M d'affixe Z, fait correspondre le M' d'affixe Z' tel que : $Z' = 3iZ + 13 - 9i$.
   a- Donne les éléments caractéristiques de S.
   b- Quelle est l'image des points C et D par la similitude S ?
   c- Montre que les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{S(C)S(D)}$ sont orthogonaux.
2) Soit R la similitude plane directe qui transforme B et C et D en A.
   a- Trouve la relation liant l'affixe Z d'un point M et l'affixe Z' de son image R(M).
   b- Donne les éléments caractéristiques de cette similitude (on appellera J le point invariant). Montre que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux.
   c- Que représente le point D pour le triangle ABC ?
3) Montre que J est un point de la droite (AB). Donne une mesure en radian de l'angle des vecteurs $(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$.

35 Soit α un nombre complexe.

1) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1+i)Z^2 - 2i(\alpha+1)Z + (i-1)(\alpha^2+1) = 0$.
2) Soient Z_1 et Z_2 les solutions de cette équation.
   Trouve entre Z_1 et Z_2, une relation indépendante de α.
3) Caractérise la transformation f du plan complexe qui, à tout point M_1 d'affixe Z_1 associe le point M_2 d'affixe Z_2.
4) On pose $Z_1 = x + iy$ et $Z_2 = x' + iy'$.
   a- Exprime x' et y' en fonction de x et y.
   b- Quelle est l'image par f de la droite (D) d'équation $x + 2y - 1 = 0$?

Problèmes.

36 Soit f l'application de $\mathbb{C} - \{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(Z) = \dfrac{iZ}{Z+i}$. Dans le plan complexe rapporté au repère ortho normal direct $(o,\ \vec{u}, \vec{v})$, on note M le point d'affixe Z.

1) Détermine les coordonnées du point B dont l'affixe Z_B et telle que $f(Z_B) = 1 + 2i$

2) Soit Z un élément de E. on note r le module de $Z + i$ et α une mesure de son argument.

Exprime la forme trigonométrique de $f(Z) - i$ en fonction de r et α.

3) Soit A le point d'affixe $-i$

a) Détermine l'ensemble (Γ) des points M vérifiant $|f(z) - i| = \sqrt{2}$

b) Montre que B appartient à (Γ).

37 **Partie A :** Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

1) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $Z^2 - (2 + 6i)Z - 16 + 12i = 0$
2) Soit $P(Z) = Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i$

a- Montre que l'équation $P(Z) = 0$ admet une solution réelle notée z_0 que l'on Déterminera.

b- Factorise P(Z) puis Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$

Partie B:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (o, i, j)

On donne les points A ; B et C d'affixes respectives : $Z_A = 2$; $Z_B = 4 + 2i$; $Z_C = -2 + 4i$

1) a- Calcule le rapport : $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ et en déduis la nature du triangle ABC
b-Montre que le point F d'affixe $2i$ est le milieu du segment $[AC]$

c-Détermine (Δ) l'ensemble des points du plan d'affixe Z vérifiant l'équation suivante :

$|Z - 4 - 2i| = |Z + 2 - 4i|$

2) Soit S la similitude du plan telle que $S(A) = A$ et $S(B) = C$.

a- Déterminons le rapport k et l'angle θ de la similitude S.

b- Détermine l'expression de la bijection complexe associée à la similitude S.

c- En déduis le centre de la similitude S.

Solutions

Forme algébrique

1 Ecrivons sous forme algébrique les nombres complexes donnés puis en déduisons la partie réelle et imaginaire de chacun d'eux :

a) $Z = (-1 - i)^3$ => $Z = (-1)^3(1 + i)^3 = (-1)^3[(1)^3 + 3(1)^2(i) + 3(1)(i)^2 + (i)^3]$ => $Z = -1(-2 + 2i) = 2 - 2i$ => $Re(Z) = 2$ et $Im(Z) = -2$

b) $Z = i^5$ => $Z = i^2 \times i^2 \times i = (-1)(-1) \times i = i$ => $Re(Z) = 0$ et $Im(Z) = 1$

c) $Z = \frac{i}{(1+i)(3-2i)}$ => $Z = \frac{i}{3 - 2i + 3i + 2} = \frac{i}{5 + i} = \frac{i(5-i)}{(5)^2 + (1)^2} = \frac{1 + 5i}{26} = \frac{1}{26} + i\frac{5}{26}$

=> $Re(Z) = \frac{1}{26}$ et $Im(Z) = \frac{5}{26}$

d) $Z = \left(1 + \frac{2}{i}\right)(3 - 2i)$ => $Z = 3 - 2i + \frac{6}{i} - 4 = -1 - 2i - 6$ avec $\frac{6}{i} = \frac{6(-i)}{(1)^2}$

=> $Z = -7 - 2i$ => $Re(Z) = -7$ et $Im(Z) = -2$

2 On donne les nombres complexes suivants : $Z_1 = 1 - 2i$ et $Z_2 = 3 + i$.

Ecrivons sous forme algébrique : $Z_1 + Z_2$; $Z_1 - Z_2$; $Z_1 \times Z_2$; Z_1^2 ; $\frac{1}{Z_2}$; $\frac{Z_2}{Z_1}$

$Z_1 + Z_2 = (1 - 2i) + (3 + i) = 1 - 2i + 3 + i = 4 - i$ => $Z_1 + Z_2 = 4 - i$

$Z_1 - Z_2 = (1 - 2i) - (3 + i) = 1 - 2i - 3 - i = -2 - 3i$ => $Z_1 - Z_2 = -2 - 3i$

$Z_1 \times Z_2 = (1 - 2i) \times (3 + i) = 3 + i - 6i + 2 = 5 - 5i$ => $Z_1 \times Z_2 = 5 - 5i$

$Z_1^2 = (1 - 2i)^2 = 1 - 4i - 4 = -3 - 4i$ => $Z_1^2 = -3 - 4i$

$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{3+i} = \frac{3 - i}{(3)^2 + (1)^2} = \frac{3 - i}{10} = \frac{3}{10} - i\frac{1}{10}$ => $\frac{1}{Z_2} = \frac{3}{10} - i\frac{1}{10}$

$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{3+i}{1-2i} = \frac{(3+i)(1+2i)}{(1)^2 + (-2)^2} = \frac{3 + 6i + i - 2}{5} = \frac{1+7i}{5} = \frac{1}{5} + i\frac{7}{5}$ => $\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{1}{5} + i\frac{7}{5}$

Forme trigonométrique - Forme exponentielle

3 Détermine les formes trigonométriques et exponentielles des nombres complexes suivants :

a) $Z = -i$ => $|Z| = 1$ et $\arg(Z) = -\frac{\pi}{2}$ alors $Z = cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

b) $Z = \sqrt{3} + i$ => $|Z| = 2$ et $\arg(Z) = \frac{\pi}{6}$ alors $Z = 2\left[cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$

c) $Z = \frac{-1-i}{2}$ => $|Z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\arg(Z) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ alors $Z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$

d) $Z = -1 + i\sqrt{3}$ => $|Z| = 2$ et $\arg(Z) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ alors $Z = 2\left[cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

e) $Z = -1 - i$ => $|Z| = \sqrt{2}$ et $\arg(Z) = \frac{5\pi}{4}$ alors $Z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$

f) $Z = \left(-\sqrt{3} - i\right)^3$. Posons $A = -\sqrt{3} - i$ => $|A| = 2$ et $\arg(A) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

=> $|Z| = |A|^3 = (2)^3 = 8$ et $arg(Z) = arg(A)^3 = 3arg(A) = 3\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{7\pi}{6}$

Alors $Z = 8\left[cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]$

g) Z = $\frac{-\sqrt{3}-i}{1+i}$. Posons :

$A = -\sqrt{3} - i$ => $|A| = 2$ et $arg(A) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

$B = 1 + i$ => $|B| = \sqrt{2}$ et $arg(B) = \frac{\pi}{4}$

Alors $|Z| = \left|\frac{A}{B}\right| = \frac{|A|}{|B|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ et

$arg(Z) = arg\left(\frac{A}{B}\right) = arg(A) - arg(B) = \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{4}$

=> $arg(Z) = \frac{14\pi - 3\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}$ alors $Z = \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right]$

h) Z = $(1+i)(-2-2i)$. Posons :

$A = 1 + i$ => $|A| = \sqrt{2}$ et $arg(A) = \frac{\pi}{4}$

$B = -2 - 2i$ => $|B| = 2\sqrt{2}$ et $arg(B) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Alors $|Z| = |A| \times |B| = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$ et $arg(Z) = arg(A \times B) = arg(A) + arg(B)$

=> $arg(Z) = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$ alors $Z = 4\left[cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$

i) Z = $(-1+i)e^{i\frac{-5\pi}{6}}$. Posons :

$A = -1 + i$ => $|A| = \sqrt{2}$ et $\arg(A) = -\frac{\pi}{4}$ alors $A = \sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}}$

$B = e^{i\frac{-5\pi}{6}}$ => $Z = A \times B = \sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}} \times e^{i\frac{-5\pi}{6}} = \sqrt{2}e^{i\frac{-13\pi}{12}} = \sqrt{2}\left[cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right) + isin\left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right]$

Alors $Z = \sqrt{2}\left[cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right) + isin\left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right]$

j) Z $= -cos\alpha + isin\alpha$

$|Z| = \sqrt{(-cos\alpha)^2 + (sin\alpha)^2} = \sqrt{cos^2\alpha + sin^2\alpha} = 1$

$arg(Z)$ est tel que : $\begin{cases} cos\theta = -cos\alpha \\ \quad et \\ sin\theta = sin\alpha \end{cases}$ => $\theta = \pi - \alpha$

Alors $Z = cos(\pi - \alpha) + isin(\pi - \alpha)$

k) Z = = $-cos\alpha - isin\alpha$

De même, ici : le ***cosinus*** est négatif et le ***sinus*** est négatif donc $\theta = \pi + \alpha$

Alors $Z = cos(\pi + \alpha) + isin(\pi + \alpha)$

l) Z = = $cos\alpha - isin\alpha$

De même, ici : le ***cosinus*** est positif et le ***sinus*** est négatif alors $\theta = -\alpha$

Alors $Z = cos(-\alpha) + isin(-\alpha)$

4 Le tableau Complété est le suivant :

F. Algébrique	$-5(1 - i\sqrt{3})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
F. Trigonométrique	$10\left[cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]$	$\left[cos\left(\frac{-5\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{-5\pi}{4}\right)\right]$	$2\left[cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right]$
F. Exponentielle	$10e^{\frac{4i\pi}{3}}$	$e^{-\frac{5i\pi}{4}}$	$2e^{-\frac{3i\pi}{4}}$

5 On pose : $A = 5\sqrt{2}(1 + i)$; $B = -5(1 + i\sqrt{3})$

1) Déterminons le module et un argument de : A ; B ; $\bar{A}$; $\frac{B}{A}$; $A \times B$ et $\frac{A}{B^2}$

$A = 5\sqrt{2}(1 + i)$ => $|A| = 10$ et $arg(A) = \frac{\pi}{4}$

$B = -5(1 + i\sqrt{3})$ => $|B| = 10$ et $arg(B) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$|\bar{A}| = |A| = 10$ et $arg(\bar{A}) = -arg(A) = -\frac{\pi}{4}$

$\left|\frac{B}{A}\right| = \frac{|B|}{|A|} = \frac{10}{10} = 1$ et $arg\left(\frac{B}{A}\right) = arg(B) - arg(A) = \left(\frac{4\pi}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{13\pi}{12}$

$|A \times B| = |A| \times |B| = 10 \times 10 = 100$ et $arg(A \times B) = arg(A) + arg(B) = \left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{19\pi}{12}$

$\left|\frac{A}{B^2}\right| = \frac{|A|}{|B^2|} = \frac{|A|}{|B|^2} = \frac{10}{10^2} = \frac{1}{10}$ et $arg\left(\frac{A}{B^2}\right) = arg(A) - arg(B^2) = arg(A) - 2arg(B)$

$=> arg\left(\frac{A}{B^2}\right) = \left(\frac{\pi}{4}\right) - 2\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{8\pi}{3} = -\frac{29\pi}{12}$

2) Soit Z un nombre complexe tel que : $AZ = B$

a- Ecrivons Z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

Forme algébrique de Z :

$AZ = B => Z = \frac{B}{A} = \frac{-5(1+i\sqrt{3})}{5\sqrt{2}(1+i)} = \frac{-(1+i\sqrt{3})}{\sqrt{2}(1+i)} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{(-1-i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}$

$=> Z = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}+i(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}$

D'où la forme algébrique de Z est : $Z = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}$

Forme trigonométrique de Z :

D'après la question 1) on a : $\left|\frac{B}{A}\right| = 1$ et $\arg\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{13\pi}{12}$

D'où la forme trigonométrique de Z est : $Z = cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$

b- En déduisons les valeurs exactes de $\text{Cos}\frac{13\pi}{12}$ et $\text{Sin}\frac{13\pi}{12}$

Pour cela on égalise la forme algébrique et la forme trigonométrique.

$$\begin{cases} Z = cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{13\pi}{12}\right) \\ Z = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4} \end{cases} => cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}$$

Par identification, on a : $cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}$

c- Calculons $(Z)^{12}$

Pour cela on utilise la forme trigonométrique de Z

$Z = cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{13\pi}{12}\right) => (Z)^{12} = \left[cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right]^{12} =>$

$(Z)^{12} = cos\left(12 \times \frac{13\pi}{12}\right) + isin\left(12 \times \frac{13\pi}{12}\right) = cos(13\pi) + isin(13\pi)$

D'où $(Z)^{12} = cos(13\pi) + isin(13\pi)$

6 **On pose :** $Z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$

1) Calculons Z^2 puis Détermine son module et son argument

$Z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}} \Rightarrow Z^2 = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 \Leftrightarrow$

$Z^2 = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 - 2i\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) + \left(i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2$

$= (2-\sqrt{3}) - 2i\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} - (2+\sqrt{3})$

$= (2-\sqrt{3}) - 2i\sqrt{(2)^2 - (\sqrt{3})^2} - (2+\sqrt{3})$

$= (2-\sqrt{3}) - 2i\sqrt{4-3} - (2+\sqrt{3})$

$= (2-\sqrt{3}) - 2i\sqrt{1} - (2+\sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3} - 2i\sqrt{1} - 2 - \sqrt{3} = -2\sqrt{3} - 2i$

$\Rightarrow Z^2 = -2\sqrt{3} - 2i$

$|Z^2| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{4\times 3 + 4} = \sqrt{16} = 4$

$arg(Z^2)$est tel que : $\begin{cases} cos\theta = \frac{-2\sqrt{3}}{4} \\ et \\ cos\theta = \frac{-2}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ et \\ cos\theta = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = arg(Z^2) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

2) En déduisons le module et un argument de Z

$|Z^2| = 4 \Leftrightarrow |Z|^2 = 4 \Rightarrow |Z| = 2$

$arg(Z^2) = \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow 2argZ = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow argZ = \frac{7\pi}{12}$

7 I- On pose : $|Z| = 2\sqrt{2}$ et $\arg\left[(1+i\sqrt{3})Z\right] = \frac{7\pi}{12}$.

Déterminons la forme trigonométrique et exponentielle de Z.

$arg\left[(1+i\sqrt{3})Z\right] = \frac{7\pi}{12} \Leftrightarrow arg(1+i\sqrt{3}) + arg(Z) = \frac{7\pi}{12} \Rightarrow arg(Z) = \frac{7\pi}{12} - arg(1+i\sqrt{3})$

$\Rightarrow arg(Z) = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3}$ avec $arg(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow arg(Z) = \frac{7\pi - 4\pi}{12} = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$

D'où la forme trigonométrique de Z est : $Z = 2\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

Et la forme exponentielle de Z est : $Z = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

II- On pose : $Z = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $Z' = 1 - i$

1) Ecrivons $\frac{Z}{Z'}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

Pose $Z = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $Z' = 1 - i$

- Forme algébrique :

$$\Rightarrow \frac{Z}{Z'} = \frac{\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}}{1-i} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

- Forme Trigonométrique

$Z = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ => $|Z| = \sqrt{2}$ et $\arg(Z) = -\frac{\pi}{6}$

$Z' = 1 - i$ => $|Z'| = \sqrt{2}$ et $\arg(Z) = -\frac{\pi}{4}$

=> $\left|\frac{Z}{Z'}\right| = \frac{|Z|}{|Z'|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ et $\arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg(Z) - \arg(Z') = \left(-\frac{\pi}{6}\right) - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12}$

D'où la forme Trigonométrique de $\frac{Z}{Z'}$ est

$$\frac{Z}{Z'} = \frac{|Z|}{|Z'|}\left[cos(\theta-\theta') + isin(\theta-\theta')\right] \Rightarrow \frac{Z}{Z'} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left[cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{Z}{Z'} = cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

2) En déduisons les valeurs exactes de $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
Pour cela on égalise la forme algébrique et la forme trigonométrique.

$$\begin{cases} \frac{Z}{Z'} = cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ \frac{Z}{Z'} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4} \end{cases} \Rightarrow cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Par identification, on a : $cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Détermination de l'ensemble des points

8 Déterminons les ensembles suivants :

1) L'ensemble (Ω) des points M d'affixes Z tels que : $|Z - i| = 2$

Posons : $Z_A - i = 0 \Rightarrow Z_A = i \Rightarrow A\binom{0}{1}$

Alors L'ensemble (Ω) des points M cherché est le cercle de centre $A\binom{0}{1}$ et de rayon $r = 2$.

2) L'ensemble (Γ) des points M d'affixes Z tels que : $|\bar{Z} - i| = 2$

Posons : $\overline{Z_A} - i = 0 \Rightarrow \overline{Z_A} = i \Rightarrow Z_A = -i \Rightarrow \Rightarrow A\binom{0}{-1}$

Alors L'ensemble (Γ) des points M cherché est le cercle de centre $A\binom{0}{-1}$ et de rayon $r = 2$.

3) L'ensemble (λ) des points M d'affixes Z tels que : $|Z + 1 - 2i| = |\bar{Z} - 1 - i|$

Posons : $\begin{cases} Z_A + 1 - 2i = 0 \\ \text{et} \\ \overline{Z_B} - 1 - i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_A = -1 + 2i \\ \text{et} \\ \overline{Z_B} = 1 + i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_A = -1 + 2i \\ \text{et} \\ Z_B = 1 - i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\binom{-1}{2} \\ \text{et} \\ B\binom{1}{-1} \end{cases}$

Alors L'ensemble (Γ) des points M cherché est la médiatrice du segment $[AB]$

4) L'ensemble (φ) des points M d'affixes Z tels que : $\arg(Z - 1 + 2i) = \frac{\pi}{6} + k\pi$

Posons : $Z_A - 1 + 2i = 0 \Rightarrow Z_A = 1 - 2i \Rightarrow A\binom{1}{-2}$

Alors L'ensemble (φ) des points M cherché est la est la droite (D) passant par le point $A\binom{1}{-2}$ et faisant un angle $\alpha = \frac{\pi}{6} + k\pi$ avec l'horizontale.

5) L'ensemble (ω) des points M d'affixes Z tels que : $\arg(2\bar{Z} - 2 + i) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

$arg(2\bar{Z} - 2 + i) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

$\Rightarrow -arg(2Z + 2 - i) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

$\Rightarrow arg(2Z + 2 - i) = \frac{\pi}{4} - k\pi$

$\Rightarrow arg\left[2\left(Z + 1 - \frac{1}{2}i\right)\right] = \frac{\pi}{4} - k\pi \Leftrightarrow arg(2) + arg\left(Z + 1 - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{4} - k\pi$

$\Rightarrow arg\left(Z + 1 - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{4} - k\pi \Rightarrow \arg\left[Z - \left(-1 + \frac{1}{2}i\right)\right] = \frac{\pi}{4} - k\pi$

$<=>arg(Z_M - Z_A) = \frac{\pi}{4} - k\pi$ Avec $Z_A = -1 + \frac{1}{2}i$ => $A\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Alors l'ensemble (ω) des points M cherchés est la droite (D) passant par le point $A\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$et faisant un angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$ avec l'horizontale.

9 Le plan est muni d'un repère orthonormal $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe distinct de 1 et soit Z = $\frac{z+1}{z-1}$

Déterminons puis construisons l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les conditions indiquées :

1) $|Z| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z+1|}{|z-1|} = 1 \Leftrightarrow |z+1| = |z-1|$

Posons : $\begin{cases} Z_A + 1 = 0 \\ \text{et} \\ Z_B - 1 = 0 \end{cases}$ => $\begin{cases} Z_A = -1 \\ \text{et} \\ Z_B = 1 \end{cases}$ => $\begin{cases} A\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \\ \text{et} \\ B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \end{cases}$

Alors L'ensemble des points M cherché est la médiatrice du segment $[AB]$

2) Z est un réel.

Z = $\frac{z+1}{z-1}$

On sait que : $Z = x + iy$

=> Z = $\frac{(x+iy)+1}{(x+iy)-1} = \frac{(x+1)+i(y)}{(x-1)+i(y)} = \frac{[(x+1)+iy][(x-1)-i(y)]}{(x-1)^2+(y)^2}$

=> Z = $\frac{x^2+y^2-1+i(-2y)}{(x-1)^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} + i\frac{-2y}{(x-1)^2+y^2}$

Z est un réel si $-2y = 0 => y = 0$

Alors l'ensemble cherché est l'axe des abscisses.

3) Z est un imaginaire

Z est un imaginaire si $x^2 + y^2 - 1 = 0$

Alors l'ensemble cherché est le cercle de centre $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et de rayon $r = 1$

Linéarisation.

10 En utilisant les formules de Moivre et d'Euler, linéarisons les expressions suivantes :

A(x) = $\cos^3 x$; B(x) = $\sin^3 x$; C(x) = $cos^5 \frac{x}{2}$; D(x) = $\cos^3 x \bullet \sin^3 x$

Linéarisons A ; B ; C ; D

- Utilisation des formules de Moivre

A(x) = $\cos^3 x$

Posons θ = x => A(x) = $\cos^3\theta = (Cos\theta)^3 = \left(\frac{Z+\bar{Z}}{2}\right)^3 = \frac{(Z+\bar{Z})^3}{(2)^3} = \frac{Z^3+3Z^2\bar{Z}+3Z\bar{Z}^2+\bar{Z}^3}{8}$

=> A(x) = $\frac{(Z^3+\bar{Z}^3)+(3Z^2\bar{Z}+3Z\bar{Z}^2)}{8} = \frac{(Z^3+\bar{Z}^3)+(3Z^2\bar{Z}+3Z\bar{Z}^2)}{8} = \frac{(Z^3+\bar{Z}^3)+3Z\bar{Z}(Z+\bar{Z})}{8}$

Or $Z^n + \bar{Z}^n = 2\text{Cos}(n\theta)$ => $Z^3 + \bar{Z}^3 = 2\text{Cos}(3\theta)$ et $Z + \bar{Z} = 2\text{Cos}\Theta$

De même $Z^n\bar{Z}^n = 1$ => $Z\bar{Z} = 1$

=>A(x) = $\frac{2\text{Cos}(3\theta)+3(2\text{Cos}(\theta))}{8} = \frac{2\text{Cos}\,3\theta+6\text{Cos}\,\theta}{8} = \frac{2}{8}(Cos3\theta + 3\,Cos\theta)$

=>A(x) = $\frac{1}{4}(Cos3\theta + 3\,Cos\theta)$ or θ = x

=>A(x) = $\frac{1}{4}(Cos3x + 3\,Cosx)$

B(x) = $\boldsymbol{sin^3 x}$

Posons θ = x =>B(x) = $\boldsymbol{sin^3\theta}$ = $(Sin\theta)^3 = \left(\frac{Z-\bar{Z}}{2i}\right)^3 = \frac{(Z-\bar{Z})^3}{(2i)^3} = \frac{Z^3-3Z^2\bar{Z}+3Z\bar{Z}^2-\bar{Z}^3}{-8i}$

=>B(x) = $\frac{(Z^3-\bar{Z}^3)+(-3Z^2\bar{Z}+3Z\bar{Z}^2)}{-8i} = \frac{(Z^3-\bar{Z}^3)-3Z\bar{Z}(Z-\bar{Z})}{-8i}$

Or $Z^n - \bar{Z}^n = 2i\text{Sin}(n\theta)$ => $Z^3 - \bar{Z}^3 = 2i\text{Sin}(3\theta)$ et $Z - \bar{Z} = 2i\text{Sin}\theta$

De même $Z^n\bar{Z}^n = 1$ => $Z\bar{Z} = 1$

=>B(x) = $\frac{2i\text{Sin}(3\theta)+3(2i\text{Sin}(\theta))}{-8i} = \frac{2i\text{Sin}3\theta+6i\text{Sin}\theta}{-8i} = \frac{2i}{-8i}(Sin3\theta + 3Sin\theta)$

=>B(x) = $-\frac{1}{4}(Sin3\theta + 3Sin\theta)$ or $\theta = x$

=>B(x) = $-\frac{1}{4}(Sin3x + 3Sinx)$

C(x) = $cos^5\frac{x}{2}$

Posons $\theta = \frac{x}{2}$ = > C(x) = $\cos^5\theta = (Cos\theta)^5 = \left(\frac{Z+\bar{Z}}{2}\right)^5 = \frac{(Z+\bar{Z})^5}{(2)^5}$

C(x) = $\frac{Z^5+5Z^4\bar{Z}+10Z^3\bar{Z}^2+10Z^2\bar{Z}^3+5Z\bar{Z}^4+\bar{Z}^5}{32}$

=> C(x) = $\frac{(Z^5+\bar{Z}^5)+(5Z^4\bar{Z}+5Z\bar{Z}^4)+(10Z^3\bar{Z}^2+10Z^2\bar{Z}^3)}{32}$

= > C(x) = $\frac{(Z^5+\bar{Z}^5)+5Z\bar{Z}(Z^3+\bar{Z}^3)+10Z^2\bar{Z}^2(Z+\bar{Z})}{32}$

Or $Z^n + \bar{Z}^n = 2cos(n\theta)$ => $Z^5 + \bar{Z}^5 = 2cos(5\theta)$; $Z^3 + \bar{Z}^3 = 2cos(3\theta)$ et

$Z + \bar{Z} = 2cos\theta$

De même $Z^n\bar{Z}^n = 1$ = > $Z\bar{Z} = 1$ et $Z^2\bar{Z}^2 = 1$

=>C(x) = $\frac{2\text{Cos}(5\theta)+5(2\text{Cos}(3\theta))+10(2\text{Cos}\theta)}{32} = \frac{2}{32}(Cos5\theta + 5\,Cos3\theta + 10Cos\theta)$

=>C(x) = $\frac{1}{16}(Cos5\theta + 5\,Cos3\theta + 10Cos\theta)$ or $\theta = \frac{x}{2}$

=>C(x) = $\frac{1}{16}\left(Cos\frac{5x}{2} + 5\,Cos\frac{3x}{2} + 10Cos\frac{x}{2}\right)$

D(x) = $cos^3x \times sin^3x$

$cos^3x \times sin^3x = (cosx \times sinx)^3$. Or $2sinx \times cosx = sin2x$ => $sinx \times cosx = \frac{1}{2}sin2x$

=> $cos^3x \times sin^3x = (cosx \times sinx)^3 = \left(\frac{1}{2}sin2x\right)^3 = \frac{1}{8}sin^32x$

Posons θ = $2x$ =>D(x) = $\frac{1}{8}sin^3\theta = \frac{1}{8}(Sin\theta)^3 = \frac{1}{8}\left(\frac{Z-\bar{Z}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{8}\frac{(Z-\bar{Z})^3}{(2i)^3}$

=>D(x) = $\frac{1}{8}\times\frac{Z^3-3Z^2\bar{Z}+3Z\bar{Z}^2-\bar{Z}^3}{-8i} = \frac{\left(Z^3-\overline{Z}^3\right)+\left(-3Z^2\bar{Z}+3Z\bar{Z}^2\right)}{-64i}$

=> D(x) = $\frac{\left(Z^3-\bar{Z}^3\right)+\left(-3Z^2\bar{Z}+3Z\bar{Z}^2\right)}{-64i} = \frac{\left(Z^3-\bar{Z}^3\right)-3Z\bar{Z}(Z-\bar{Z})}{-64i}$

Or $Z^n - \bar{Z}^n$ = 2iSin($n\theta$) = >$Z^3 - \bar{Z}^3$ = 2iSin(3θ) et Z $-\bar{Z}$ = 2iSinθ

De même:

$Z^n\bar{Z}^n$ = 1 = > Z$\bar{Z}$= 1

=> D(x) = $\frac{2i\text{Sin}(3\theta)-3(2i\text{Sin}(\theta))}{-64i} = \frac{2i\text{Sin}\,3\theta-6i\text{Sin}\,\theta}{-64i} = \frac{2i}{-64i}(Sin3\theta - 3Sin\theta)$

=> D(x) = $-\frac{1}{32}(Sin3\theta - 3Sin\theta)$ or θ = $2x$

=> D(x) = $-\frac{1}{32}(Sin6x - 3Sin2x)$

- Utilisation des formules d'Euler

A(x) = cos^3x

Posons θ = x => A(x) = cos^{3}θ = $(Cos\theta)^3 = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^3}{(2)^3}$

=> A(x) = $\frac{e^{3i\theta}+3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-2i\theta}+e^{-3i\theta}}{8}$

=> A(x) = $\frac{e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}}{8} = \frac{\left(e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}\right)+3\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)}{8}$

Or $e^{in\theta} + e^{-in\theta}$ = 2Cos($n\theta$) = > $e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}$= 2Cos(3θ)

Et $e^{i\theta} + e^{-i\theta}$= 2Cosθ

De même $e^{in\theta} \bullet e^{-in\theta}$ = 1 => $e^{i\theta} \bullet e^{-i\theta}$ = 1

=> A(x) = $\frac{2\text{Cos}(3\theta)+3(2\text{Cos}(\theta))}{8} = \frac{2\text{Cos}\,3\theta+6\text{Cos}\,\theta}{8} = \frac{2}{8}(Cos3\theta + 3\,Cos\theta)$

=> A(x) = $\frac{1}{4}(Cos3\theta + 3\,Cos\theta)$ or θ = x = > A(x) = $\frac{1}{4}(Cos3x + 3\,Cosx)$

Résolution d'équations et systèmes.

11 Résolvons dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $Z^2 - 2Z + 2 = 0$ => $\Delta = -4 = 4i^2$ alors :

$Z_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{4i^2}}{2(1)} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$ et $Z_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{4i^2}}{2(1)} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$

=> S = $\{1 - i\ ; 1 + i\}$

b) $Z^2 - 2Z + 1 = 0$ => $\Delta = 0$ alors : $Z_1 = Z_2 = Z_0 = \frac{-(-2)}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1$ => S = $\{1\}$

c) $Z^2 + 2sin\alpha Z + 1 = 0$ => $\Delta = 4sin^2\alpha - 4 = -4(1 - sin^2\alpha) = 4i^2(cos^2\alpha) = (2icos\alpha)^2$

$Z_1 = \frac{-(2sin\alpha) - \sqrt{(2icos\alpha)^2}}{2(1)} = \frac{-2sin\alpha - 2icos\alpha}{2} = -sin\alpha - icos\alpha$ et

$Z_2 = \frac{-(2sin\alpha) + \sqrt{(2icos\alpha)^2}}{2(1)} = \frac{-2sin\alpha + 2icos\alpha}{2} = -sin\alpha + icos\alpha$

=> S = $\{-sin\alpha - icos\alpha\ \ ; -sin\alpha + icos\alpha\}$

d) $Z^2 - 2cos\alpha Z + 1 = 0$ => $\Delta = 4cos^2\alpha - 4 = -4(1 - cos^2\alpha) = 4i^2(sin^2\alpha) = (2isin\alpha)^2$

$Z_1 = \frac{-(-2cos\alpha) - \sqrt{(2isin\alpha)^2}}{2(1)} = \frac{2cos\alpha - 2isin\alpha}{2} = cos\alpha - isin\alpha$ et

$Z_2 = \frac{-(-2cos\alpha) + \sqrt{(2isin\alpha)^2}}{2(1)} = \frac{2cos\alpha + 2isin\alpha}{2} = cos\alpha + isin\alpha$

=> S = $\{cos\alpha - isin\alpha\ ;\ cos\alpha + isin\alpha\}$

e) $4Z^2 - 4(1 + i)Z - (45 + 26i) = 0$

$\Delta = [-4(1 + i)]^2 - 4(4)[-(45 + 26i)] = 16(1 + 2i - 1) - 16(-45 - 26i)$

⇨ $\Delta = 720 + 448i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 720 \\ 2xy = 448 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(720)^2 + (448)^2} \end{cases} <=> \begin{cases} x^2 - y^2 = 720 & (1) \\ xy = 224 & (2) \\ x^2 + y^2 = 848 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) + (3)

On a : $2x^2 = 1568 => x^2 = 784 => x = -28 \quad ou \quad x = 28$

$(2) : xy = 224 \Rightarrow y = \frac{224}{x}$

- Si $x = -28 \Rightarrow y = \frac{224}{-28} = -8$ et $\delta_1 = x + iy \Rightarrow \delta_1 = -28 - 8i$
- Si $x' = 28 \Rightarrow y' = \frac{224}{28} = 8$ et $\delta_2 = x' + iy' \Rightarrow \delta_2 = 28 + 8i$

Alors les racines carrées de Z_2 sont $\delta_1 = -28 - 8i$ et $\delta_2 = 28 + 8i$

$Z_1 = \frac{-[-4(1+i)] + (-28 - 8i)}{2(4)} = \frac{-24 - 4i}{8} = -3 - \frac{1}{2}i$

$Z_2 = \frac{-[-4(1+i)] + (28 + 8i)}{2(4)} = \frac{-24 - 4i}{8} = 4 + \frac{3}{2}i \Rightarrow S = \left\{-3 - \frac{1}{2}i ; 4 + \frac{3}{2}i \; i\right\}$

12

1) Développons le produit de facteurs suivant : $(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)$

$(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) = x^4 - 1$

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^4 = 1$

$Z^4 = 1 \Leftrightarrow Z^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (Z^2 - 1)(Z^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow (Z^2 - 1) = 0$ ou $(Z^2 + 1) = 0$

Alors $Z^2 - 1 = 0 \Rightarrow Z^2 = 1 \Rightarrow Z = -1$ ou $Z = 1$
De même $Z^2 + 1 = 0 \Rightarrow Z^2 = -1 \Leftrightarrow Z^2 = i^2 \Rightarrow Z = -i$ ou $Z = i$
$\Rightarrow S = \{-1 ; 1 ; -i ; i\}$

3) En déduis des questions 1) et 2) , la résolution des équations :

$(Z-1)(Z^3 + Z^2 + Z + 1) = 0$ et

$\left[\left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right) - 1\right]\left[\left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)^3 + \left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)^2 + \left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right) + 1\right] = 0$

- $(Z-1)(Z^3 + Z^2 + Z + 1) = 0 \Leftrightarrow Z^4 - 1 = 0$. D'après les questions 1) et 2), on a :

$Z_1 = -1 \; ; Z_2 = 1 \; ; Z_3 = -i \; ; Z_4 = i$

- $\left[\left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right) - 1\right]\left[\left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)^3 + \left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)^2 + \left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right) + 1\right] = 0$

En effectuant un changement de variable, on pose : $Z = \left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)$ ainsi l'équation dévient :

$(Z-1)(Z^3 + Z^2 + Z + 1) = 0 \Rightarrow Z_1 = -1 \; ; Z_2 = 1 \; ; Z_3 = -i \; ; Z_4 = i$

$-$ Si $Z_1 = -1 \Leftrightarrow \frac{3Z+i}{Z-1} = -1 \Leftrightarrow 3Z + i = -1(Z-1) \Leftrightarrow 4Z = 1 - i$

=> Z = $\frac{1-i}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$

– Si $Z_2 = 1 \Leftrightarrow \frac{3Z+i}{Z-1} = 1 \Leftrightarrow 3Z + i = 1(Z-1) \Leftrightarrow 2Z = -1 - i$

=> Z = $\frac{-1-i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

– Si $Z_3 = -i \Leftrightarrow \frac{3Z+i}{Z-1} = -i \Leftrightarrow 3Z + i = -i(Z-1) \Leftrightarrow Z(3+i) = 0$ => Z = 0

– Si $Z_4 = i \Leftrightarrow \frac{3Z+i}{Z-1} = i \Leftrightarrow 3Z + i = i(Z-1) \Leftrightarrow Z(3-i) = -2i$ => Z = $\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$

=> S = $\left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i\ ; -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\ ; 0\ ;\ \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i\right\}$

13 On donne le nombre complexe Z tel que : Z = 2 + 3i

1) Vérifions que $Z^4 = -119 - 120i$

$Z^4 = (2 + 3i)^4 = (2)^4 + 4(2)^3 (3i) + 6(2)^2 (3i)^3 + 4(2) (3i)^3 + (3i)^4$

$= 16 + 96i - 216 - 216i + 81 = -119 - 120i$ => $Z^4 = -119 - 120i$

2) Déterminons les racines 4èmes de 1

Les racines 4ème de 1 sont les racines 4ème de l'unité qui sont données par la formule : $\left[1\ ;\ \frac{2k\pi}{n}\right]$
or $n = 4$ => $z_0 = 1$; $z_1 = i$; $z_2 = -1$; $z_3 = -i$

3) En déduisons les solutions de $Z^4 = -119 - 120i$
On a $Z^4 = -119 - 120i \Leftrightarrow Z^4 = (2 + 3i)^4$.

Donc pour Trouve les solutions de $Z^4 = -119 - 120i$, on multiplie les racines 4ème de l'unité par $(2 + 3i)$ Ainsi :

$Z_1 = z_0 \times (2 + 3i)$ => $Z_1 = 1 \times (2 + 3i) = 2 + 3i$

$Z_2 = z_1 \times (2 + 3i)$ => $Z_2 = i \times (2 + 3i) = -3 + 2i$

$Z_3 = z_2 \times (2 + 3i)$ => $Z_3 = -1 \times (2 + 3i) = -2 - 3i$

$Z_4 = z_3 \times (2 + 3i)$ => $Z_4 = -i \times (2 + 3i) = 3 - 2i$

14 Résolvons dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes :

1) $\begin{cases} Z_1 \times Z_2 = 6 \\ Z_1 + Z_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 6 \\ S = 5 \end{cases}$ Résolvons ainsi l'équation : $X^2 - SX + P = 0$

=> $X^2 - 5X + 6 = 0$ => $\Delta = 1$ alors $X_1 = 2$ et $X_1 = 3$ => => S = {(2 ; 3) ; (3 ; 2)}

2) $\begin{cases} (2+3i)Z - 5Z' = -1 & (\mathbf{1}) \\ (1-i)Z + 2Z' = 2(1+i) & (\mathbf{2}) \end{cases}$

En multipliant l'équation (**1**) par 2 et l'équation (**2**) par 5, on a :

$$\begin{cases} (4+6i)Z - 10Z' = -2 & (\mathbf{1}) \\ (5-5i)Z + 10Z' = 10(1+i) & (\mathbf{2}) \end{cases}$$

=> $Z[(4+6i) + (5-5i)] = -2 + 10(1+i)$

=> $Z(4+6i+5-5i) = -2+10+10i \Leftrightarrow Z(9+i) = 8+10i$ => $Z = \frac{8+10i}{9+i}$

=> $Z = \frac{(8+10i)(9-i)}{(9)^2+(1)^2} = \frac{82+82i}{82} = 1+i$ => $Z = 1+i$

En Remplaçant Z par sa valeur dans l'équation (**1**), on a : $-5Z' = -5i$ => $Z' = i$

=> S = {(1 + i ; i) ; (i ; 1 + i)}

Résolvons dans $\mathbb{C}^3$ le système suivant :

$$\begin{cases} x - y + iz = 0 \\ x + y - z = 0 \\ (1+i)x - 2y = 2z - 2i \end{cases}$$

En utilisant la méthode triangulaire (méthode du pivot de Gauss), le système dévient :

$$\begin{cases} x - y + iz = 0 \\ x + y - z = 0 \\ (1+i)x - 2y = 2z - 2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + iz = 0 \\ 2y - z(1+i) = 0 \\ Z(2+i) = 2i \\ z = \frac{2i}{2+i} \end{cases}$$

=> $Z = \frac{2i}{2+i} = \frac{2i(2-i)}{(2)^2+(1)^2} = \frac{2+4i}{5} = \frac{2}{5} + i\frac{4}{5}$ => $Z = \frac{2}{5} + i\frac{4}{5}$

$y = -\frac{3}{10} + i\frac{3}{5}$ et $x = \frac{1}{2} + i\frac{1}{5}$ => S = $\{(\frac{1}{2} + i\frac{1}{5} ; -\frac{3}{10} + i\frac{3}{5} ; \frac{2}{5} + i\frac{4}{5})\}$

15 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère le polynôme P(Z) telque :

$P(Z) = Z^3 - (3+5i)Z^2 + (-4+9i)Z + 6 - 4i$

1) Démontrons que l'équation P(Z) = 0 admet une solution réelle que l'on notera Z_1, dont on Déterminera la valeur.

Soit Z_1 = a cette solution réelle telle que :

$Z_0^3 - (3+5i)Z_0^2 + (-4+9i)Z_0 + 6 - 4i = 0,$

$\Leftrightarrow (a)^3 - (3+5i)(a)^2 + (-4+9i)(a) + 6 - 4i = 0$

$\Leftrightarrow a^3 - 3a^2 - 5ia^2 - 4a + 9ai + 6 - 4i = 0$

$\Leftrightarrow (a^3 - 3a^2 - 4a + 6) + i(-5a^2 + 9a - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a^3 - 3a^2 - 4a + 6) = 0 \ (1) \\ (-5a^2 + 9a - 4) = 0 \quad (2) \end{cases}$

NB : On résous toujours l'équation qui semble la plus facile.

Ainsi résolvons l'équation **(2)** : $-5a^2 + 9a - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (9)^2 - 4(-5)(-4) = 1$

$\Rightarrow a_1 = 1 \ \ et \ a_2 = \frac{4}{5}$

Et par vérification dans **(1)** , on remarque que :

$a_1 = 1$ est la seule solution qui vérifie l'équation (1)

D'où $Z_1 = a = 1$ est la solution réelle

2) Factorisons P(Z) puis résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation P(Z) = 0

$P(Z) = Z^3 - (3+5i)Z^2 + (-4+9i)Z + 6 - 4i$ (En utilisant la méthode d'Horner)

	1	$-3-5i$	$-4+9i$	$6-4i$
1		1	$-2-5i$	$-6+4i$
	1	$-2-5i$	$-6+4i$	0

$\boldsymbol{Z_1}$ $\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{c}$

$\Rightarrow Z^3 - (3+5i)Z^2 + (-4+9i)Z + 6 - 4i = (Z - Z_1)(aZ^2 + bZ + c)$

$\Leftrightarrow Z^3 - (3+5i)Z^2 + (-4+9i)Z + 6 - 4i = (Z-1)\left[Z^2 + (-2-5i) - 6 + 4i\right]$

D'où P(Z) = 0 $\Leftrightarrow Z^3 - (3+5i)Z^2 + (-4+9i)\,Z + 6 - 4i = 0 \Leftrightarrow$

$(Z-1)\left[Z^2 + (-2-5i)Z - 6 + 4i\right] = 0 \Leftrightarrow Z - 1 = 0$ ou $Z^2 + (-2-5i)Z - 6 + 4i = 0$

$=> Z = 1 => Z_1 = 1$ ou $Z^2 + (-2-5i)Z - 6 + 4i = 0$

Si $Z^2 + (-2-5i)Z - 6 + 4i = 0 => \Delta = [-(2+5i)]^2 - 4(1)(-6+4i) = 3+4i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} \end{cases} <=> \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ xy = 2 & (2) \\ x^2 + y^2 = 5 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) + (3)

On a : $2x^2 = 8 => x^2 = 4 => x = -2$ *ou* $x = 2$

$(2) : xy = 2 => y = \frac{2}{x}$

- Si $x = -2 => y = \frac{2}{-2} = -1$ et $\delta_1 = x + iy => \delta_1 = -2 - i$
- Si $x' = 2 => y' = \frac{2}{2} = 1$ et $\delta_2 = x' + iy' => \delta_2 = 2 + i$

Alors les racines carrées de Z *sont* : $\delta_1 = -2 - i$ et $\delta_2 = 2 + i$

$$Z_2 = \frac{-(-3i) + (-2-i)}{2(1)} = \frac{4i}{2} = 2i$$

$$Z_3 = \frac{-(-3i) + (2+i)}{2(1)} = \frac{4+6i}{2} = 2 + 3i => S = \{1 ; 2i ; 2+3i\}$$

16 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le polynôme P(Z) telque :

$P(Z) = Z^3 - 4iZ^2 - (6+i)\,Z + 3i - 1.$

1) Montrons que l'équation P(Z) = 0 admet une solution imaginaire pure.

Soit $Z_0 = ib$ cette solution imaginaire telle que :

$Z_0^3 - 4iZ_0^2 - (6+i)\,Z_0 + 3i - 1 = 0,$

$\Leftrightarrow (ib)^3 - 4i(ib)^2 - (6+i)(ib) + 3i - 1 = 0$

$\Leftrightarrow -ib^3 + 4ib^2 - 6ib + b + 3i - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (b-1) + i(-b^3 + 4b^2 - 6b + 3) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)=0 & (1) \\ (-b^3+4b^2-6b+3)=0 & (2) \end{cases}$

NB : On résous toujours l'équation qui semble la plus facile.

Ainsi résolvons l'équation **(1)** qui est la plus facile à Résous : $b-1=0 => b=1$

Et par vérification dans **(2)** , on obtient :

$-(1)^3+4(1)^2-6(1)+3=0$

$\Leftrightarrow -1+4-6+3=0$

$\Leftrightarrow -3+3=0$

$\Leftrightarrow 0=0$ Vraie

D'où $Z_0 = ib = i$ est la solution réelle

2) Factorisons P(Z) puis résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation P(Z) = 0.

Factorisons : $Z^3-4iZ^2-(6+i)Z+3i-1$

	1	$-4i$	$-6-i$	$3i-1$
i		i	3	$-3i+1$
	1	$-3i$	$-3-i$	0

Z_0 a b c

$=> Z^3-4iZ^2-(6+i)Z+3i-1=(Z-Z_0)(aZ^2+bZ+c)$

$\Leftrightarrow Z^3-4iZ^2-(6+i)Z+3i-1=(Z-i)(Z^2-3iZ-3-i)$

D'où $Z^3-4iZ^2-(6+i)Z+3i-1=0 \Leftrightarrow (Z-i)(Z^2-3iZ-3-i)=0 =>$

$Z-i=0$ ou $Z^2-3iZ-3-i=0 \Leftrightarrow Z=i => Z_0=i$ ou $Z^2-3iZ-3-i=0$

$=>\Delta=(-3i)^2-4(1)(-3-i)=3+4i$

$\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ 2xy=4 \\ x^2+y^2=\sqrt{(3)^2+(4)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=3 & (1) \\ xy=2 & (2) \\ x^2+y^2=5 & (3) \end{cases}$

Effectuons : (1) + (3)

On a : $2x^2=8 => x^2=4 => x=-2 \ ou \ x=2$

$(2): xy = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x}$

- Si $x = -2 \Rightarrow y = \frac{2}{-2} = -1$ et $\delta_1 = x + iy \Rightarrow \delta_1 = -2 - i$
- Si $x' = 2 \Rightarrow y' = \frac{2}{2} = 1$ et $\delta_2 = x' + iy' \Rightarrow \delta_2 = 2 + i$

Alors les racines carrées de Z $sont$: $\delta_1 = -2 - i$ et $\delta_2 = 2 + i$

$Z_1 = \frac{-(-3i)+(-2-i)}{2(1)} = \frac{-2+2i}{2} = -1 + i$

$Z_2 = \frac{-(-3i)+(2+i)}{2(1)} = \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i$

=>S = { i ; $-1 + i$; $1 + 2i$ }

17 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le polynôme P(Z) telque :

$P(Z) = Z^3 + 2(1 - 2cos2\theta)Z^2 + 4(1 - 2cos2\theta)Z + 8$

1) Calcule $P(-2)$.

$P(-2) = (-2)^3 + 2(1 - 2cos2\theta)(-2)^2 + 4(1 - 2cos2\theta)(-2) + 8$

$= -8 + 8(1 - 2cos2\theta) - 8(1 - 2cos2\theta) + 8 = 0$

=> $P(-2) = 0$

2) Factorisons $P(Z)$ puis résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation

	1	$2 - 4cos2\theta$	$4 - 8cos2\theta$	8
-2		-2	$8cos2\theta$	-8
	1	$-4cos2\theta$	4	0

Z_1 a b c

$P(Z) = (Z - Z_1)(aZ^2 + bZ + c)$

=> $P(Z) = (Z + 2)(Z^2 - 4Zcos2\theta + 4)$

3) On désigne par Z_1 ; Z_2 et Z_3 les solutions de l'équation $P(Z) = 0$.

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$.

$(Z+2)(Z^2-4Zcos2\theta+4)=0$ => $Z+2=0$ ou $Z^2-4Zcos2\theta+4=0$

$Z+2=0$ => $Z_1=-2$

$Z^2-4Zcos2\theta+4=0$ => $\Delta=(-4cos2\theta)^2-4(1)(4)=16cos^2 2\theta-16$

=> $\Delta=-16(1-cos^2 2\theta)$. Or $cos^2 2\theta+sin^2 2\theta=1$ => $sin^2 2\theta=1-cos^2 2\theta$

Donc $\Delta=-16sin^2 2\theta=16i^2 sin^2 2\theta=(4isin2\theta)^2$

=> $Z_2=\frac{4cos2\theta-\sqrt{(4isin2\theta)^2}}{2}=\frac{4cos2\theta-4isin2\theta}{2}=2cos2\theta-2isin2\theta$

$Z_3=\frac{4cos2\theta+\sqrt{(4isin2\theta)^2}}{2}=\frac{4cos2\theta+4isin2\theta}{2}=2cos2\theta+2isin2\theta$

S= $\{-2\ ;\ 2cos2\theta-2isin2\theta\ ;\ 2cos2\theta+2isin2\theta\}$

Calculons le module et un argument de Z_1 ; Z_2 et Z_3.

Pour $Z_1=-2$

$|Z_1|=\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2$

$arg(Z_1)$ est tel que : $\begin{cases} cos\alpha=\frac{-2}{2} \\ et \\ sin\alpha=\frac{0}{2} \end{cases}$ <=> $\begin{cases} cos\alpha=-1 \\ et \\ sin\alpha=0 \end{cases}$ => $\alpha=\pi$

D'où $|Z_1|=2$ et $arg(Z_1)=\pi$

Pour $Z_2=2cos2\theta-2isin2\theta$

$|Z_2|=\sqrt{(2cos2\theta)^2+(-2sin2\theta)^2}=\sqrt{4(cos^2 2\theta+sin^2 2\theta)}=\sqrt{4}=2$

$arg(Z_2)$ est tel que : $\begin{cases} cos\alpha=\frac{2cos2\theta}{2} \\ et \\ sin\alpha=\frac{-2sin2\theta}{2} \end{cases}$ <=> $\begin{cases} cos\alpha=cos2\theta \\ et \\ sin\alpha=-sin2\theta \end{cases}$ => $\alpha=-2\theta$

D'où $|Z_2|=2$ et $arg(Z_2)=-2\theta$

Pour $Z_3=2cos2\theta+2isin2\theta$

$|Z_3|=\sqrt{(2cos2\theta)^2+(2sin2\theta)^2}=\sqrt{4(cos^2 2\theta+sin^2 2\theta)}=\sqrt{4}=2$

$arg(Z_3)$ est tel que : $\begin{cases} cos\alpha = \frac{2cos2\theta}{2} \\ et \\ sin\alpha = \frac{2sin2\theta}{2} \end{cases}$ <=> $\begin{cases} cos\alpha = cos2\theta \\ et \\ sin\alpha = sin2\theta \end{cases}$ => $\alpha = 2\theta$

D'où $|Z_3| = 2$ et $arg(Z_3) = 2\theta$

4) On désigne par A ; B et C les points d'affixes respectives Z_1 ; Z_2 et Z_3.

Déterminons les valeurs de θ pour que le triangle ABC soit équilatérale

Le triangle ABC est équilatérale si et seulement si $\frac{Z_3-Z_1}{Z_2-Z_1} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\frac{Z_3-Z_1}{Z_2-Z_1} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \frac{(2cos2\theta+2isin2\theta)-(-2)}{(2cos2\theta-2isin2\theta)-(-2)} = cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{2cos2\theta+2isin2\theta+2}{2cos2\theta-2isin2\theta+2} = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{cos2\theta+isin2\theta+1}{cos2\theta-isin2\theta+1} = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{2cos2\theta+2isin2\theta+2}{cos2\theta-isin2\theta+1} = 1+i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 2cos2\theta + 2isin2\theta + 2 = (1+i\sqrt{3})(cos2\theta - isin2\theta + 1)$

$\Leftrightarrow 2 + 2cos2\theta + 2isin2\theta = (1 + cos2\theta + \sqrt{3}sin2\theta) + i(\sqrt{3} + \sqrt{3}cos2\theta - sin2\theta)$

$=> \begin{cases} 2 + 2cos2\theta = 1 + cos2\theta + \sqrt{3}sin2\theta \\ 2sin2\theta = \sqrt{3} + \sqrt{3}cos2\theta - sin2\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cos2\theta - \sqrt{3}sin2\theta + 1 = 0 \\ cos2\theta - \sqrt{3}sin2\theta + 1 = 0 \end{cases}$

$cos2\theta - \sqrt{3}sin2\theta + 1 = 0 \Leftrightarrow cos2\theta - \sqrt{3}sin2\theta = -1 \Leftrightarrow cos\frac{\pi}{3}cos2\theta - sin\frac{\pi}{3}sin2\theta = -\frac{1}{2}$

$cos\left(\frac{\pi}{3}+2\theta\right) = -cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow cos\left(\frac{\pi}{3}+2\theta\right) = cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow cos\left(\frac{\pi}{3}+2\theta\right) = cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3}+2\theta = \frac{2\pi}{3}+2k\pi \\ ou \\ \frac{\pi}{3}+2\theta = -\frac{2\pi}{3}+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\theta = \frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ ou \\ 2\theta = -\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\theta = \frac{\pi}{3}+2k\pi \\ ou \\ 2\theta = -\pi+2k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{6}+k\pi \\ ou \\ \theta = -\frac{\pi}{2}+k\pi \end{cases}$ => $\theta \in \left\{\frac{\pi}{6}+k\pi\,;k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;k\in\mathbb{Z}\right\}$

18 Soit f la fonction à variable complexe Z telle que : $f(Z) = Z^4 - 3Z^3 + \frac{9}{2}Z^2 - 3Z + 1$

1) Prouvons que si Z_0 est une solution de l'équation $f(Z) = 0$ alors les complexes : $\bar{Z}_0$ et $\frac{1}{Z_0}$ en sont aussi.

Z_0 est solution de l'équation $f(Z) = 0 \Leftrightarrow Z_0^4 - 3Z_0^3 + \frac{9}{2}Z_0^2 - 3Z_0 + 1 = 0$

En appliquant la propriété du conjugué $\left(\overline{Z + Z'} = \bar{Z} + \bar{Z'}\right)$, on a :

$\Rightarrow \overline{Z_0^4 - 3Z_0^3 + \frac{9}{2}Z_0^2 - 3Z_0 + 1} = \bar{0} \Leftrightarrow \overline{Z_0^4} - 3\overline{Z_0^3} + \frac{9}{2}\overline{Z_0^2} - 3\overline{Z_0} + 1 = 0$

De même $\frac{1}{Z_0}$ est aussi solution si $\left(\frac{1}{Z_0}\right)^4 - 3\left(\frac{1}{Z_0}\right)^3 + \frac{9}{2}\left(\frac{1}{Z_0}\right)^2 - 3\times\frac{1}{Z_0} + 1 = 0$

Conclusion : si Z_0 est une solution de l'équation $f(Z) = 0$ alors les complexes : $\bar{Z}_0$ et $\frac{1}{Z_0}$ en sont aussi.

2) Déterminons $f(1+i)$ et en exploitant ce qui précède, trouvons toutes les solutions de l'équation $f(Z) = 0$.

$f(1+i) = (1+i)^4 - 3(1+i)^3 + \frac{9}{2}(1+i)^2 - 3(1+i) + 1 = 0 \Rightarrow$

$Z_0 = 1+i$; $\bar{Z}_0 = 1-i$; $\frac{1}{Z_0} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1)^2+(1)^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ et $\left(\overline{\frac{1}{Z_0}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

D'où les solutions de l'équation $f(Z) = 0$ sont : $\mathbf{S} = \left\{ 1+i ; 1-i ; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i ; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right\}$

19 Soit le polynôme P(Z) définie par : $P(Z) = Z^4 - \left(1+\sqrt{2}\right)Z^3 + \left(2+\sqrt{2}\right)Z^2 - \left(1+\sqrt{2}\right)Z + 1$

1) Vérifions que : $P(Z) = Z^2\left[\left(Z + \frac{1}{Z}\right)^2 - \left(Z + \frac{1}{Z}\right)\left(1+\sqrt{2}\right) + \sqrt{2}\right]$ avec $Z \neq 0$

$P(Z) = Z^4 - \left(1+\sqrt{2}\right)Z^3 + \left(2+\sqrt{2}\right)Z^2 - \left(1+\sqrt{2}\right)Z + 1$

En mettant Z^2 en facteur, on a :

$P(Z) = Z^2\left[Z^2 - \left(1+\sqrt{2}\right)Z + \left(2+\sqrt{2}\right) - \frac{1}{Z}\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{1}{Z^2}\right] \Leftrightarrow$

$P(Z) = Z^2\left[Z^2 - Z - \sqrt{2}Z + 2 + \sqrt{2} - \frac{1}{Z} - \frac{\sqrt{2}}{Z} + \frac{1}{Z^2}\right] \Leftrightarrow$

$P(Z) = Z^2\left[\left(Z^2 + 2 + \frac{1}{Z^2}\right) + \left(-Z - \frac{1}{Z}\right) + \left(-\sqrt{2}Z - \frac{\sqrt{2}}{Z}\right) + \sqrt{2}\right] \Leftrightarrow$

$P(Z) = Z^2\left[\left(Z^2 + 2 + \frac{1}{Z^2}\right) - \left(Z + \frac{1}{Z}\right) - \sqrt{2}\left(Z + \frac{1}{Z}\right) + \sqrt{2}\right] \Leftrightarrow$

$P(Z) = Z^2\left[\left(Z + \frac{1}{Z}\right)^2 - \left(Z + \frac{1}{Z}\right)(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}\right] \Leftrightarrow$

2) En utilisant la question précédente, résolvons l'équation P(Z) = 0.

$P(Z) = 0 \Leftrightarrow Z^2\left[\left(Z + \frac{1}{Z}\right)^2 - \left(Z + \frac{1}{Z}\right)(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}\right] \Leftrightarrow Z^2 \neq 0$ ou

$\left(Z + \frac{1}{Z}\right)^2 - \left(Z + \frac{1}{Z}\right)(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 0$

Effectuons un changement de variable en posant $X = + \frac{1}{Z}$, alors l'équation dévient :

$X^2 - X(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \Delta = \left[-(1 + \sqrt{2})\right]^2 - 4(1)(\sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2} + 2 \Rightarrow$
$\Delta = (1 - \sqrt{2})^2$. Ainsi on a :

$X_1 = \frac{-[-(1+\sqrt{2})] - \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}}{2(1)} = \frac{(1+\sqrt{2}) - (1-\sqrt{2})}{2} = \frac{1+\sqrt{2} - 1+\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$X_1 = \frac{-[-(1+\sqrt{2})] + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}}{2(1)} = \frac{(1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2})}{2} = \frac{1+\sqrt{2} + 1-\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

- Si $X = \sqrt{2} \Leftrightarrow Z + \frac{1}{Z} = \sqrt{2} \Leftrightarrow Z^2 - \sqrt{2}Z + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = \left(-\sqrt{2}\right)^2 - 4(1)(1) = 2 - 4 = -2 \Rightarrow \Delta = 2i^2$

Alors $Z_1 = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $Z_2 = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

- Si $X = 1 \Leftrightarrow Z + \frac{1}{Z} = 1 \Leftrightarrow Z^2 - Z + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3 \Rightarrow \Delta = 3i^2$

Alors $Z_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $Z_4 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

D'où $\mathbf{S} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

20 On considère dans $\mathbb{C}$ le complexe u tel que : $u = -1 - 2i\sqrt{2}$

1) Calculons les racines carrées de u

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ 2xy = -2\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -1 & (1) \\ xy = -\sqrt{2} & (2) \\ x^2 + y^2 = 3 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) + (3)

On a : $2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \ \ ou \ \ x = 1$

$(2) : xy = -\sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{-\sqrt{2}}{x}$

- Si $x = -1 \Rightarrow y = \frac{-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2}$ et $\delta_1 = x + iy \Rightarrow \delta_1 = -1 + i\sqrt{2}$
- Si $x' = 1 \Rightarrow y' = \frac{-\sqrt{2}}{1} = -\sqrt{2}$ et $\delta_2 = x' + iy' \Rightarrow \delta_2 = 1 - i\sqrt{2}$

Alors les racines carrées de Z $sont$: $\delta_1 = -1 + i\sqrt{2}$ et $\delta_2 = 1 - i\sqrt{2}$

2) Résolution dans $\mathbb{C}$ l'équation $2Z^2 + 2iZ + i\sqrt{2} = 0$

On a $= \Delta' = (i)^2 - (2)(i\sqrt{2}) = -1 - 2i\sqrt{2} = (1 - i\sqrt{2})^2$

D'où :

$$Z_1 = \frac{-b + \delta 1}{2a} = \frac{1 - i(1 + 2\sqrt{2})}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}$$

$$Z_2 = \frac{-b + \delta 2}{2a} = -\frac{1}{2} - i\frac{1 - 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S = \left\{\frac{1}{2} - i\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} \ ; \ -\frac{1}{2} - i\frac{1 - 2\sqrt{2}}{2}\right\}$$

3) Montrons que : $\left|\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right| = \sqrt{2}$

$$\left|\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right| = \left|\frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 \times Z_2}\right| = \left|\frac{-\frac{i}{i\sqrt{2}}}{2}\right| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Figures géométriques dans le plan.

21 Soient A, B, C trois points d'affixes respectives : $-1 - i$; $2 + 3i$; $-10 - 13i$.

$Z_A = -1 - i \Rightarrow$ $A(-1 ; -1)$

$Z_B = 2 + 3i \Rightarrow$ $B(2 ; 3)$

$Z_C = -10 - 13i \Rightarrow C(-10 ; -13)$

Démontrons que : A ; B ; C sont alignés :

A ; B ; C sont alignés si $det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = 0$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -9 \\ -12 \end{pmatrix}$

$det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 3 & -9 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} = (3)(-12) - (4)(-9) = -36 + 36 = 0$

Puis que $det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = 0$; alors les points A ; B ; C sont alignés.

22 Soient A, B, C trois points d'affixes respectives : $3 + i$; $2i$; $2 - 2i$.

Soient A, B, C trois points d'affixes respectives : $3 + i$; $2i$; $2 - 2i$.

$Z_A = 3 + i \Rightarrow A(3 ; 1)$

$Z_B = 2i \Rightarrow$ $B(0 ; 2)$

$Z_C = 2 - 2i \Rightarrow C(2 ; -2)$

1) Démontrons que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A. (on fera une figure).

A ; B ; C est un triangle rectangle et isocèle en A si : $\begin{cases} arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = -\frac{\pi}{2} \; ou \; \frac{\pi}{2} \\ et \\ AB = AC \end{cases}$

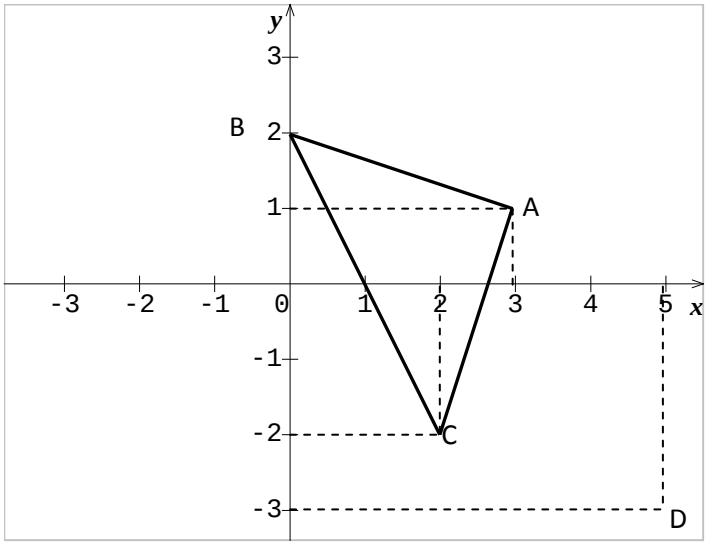
Or $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{(2 - 2i) - (3 + i)}{(2i) - (3 + i)} = \frac{-1 - 3i}{-3 + i} = \frac{(-1 - 3i)(-3 - i)}{(-3)^2 + (1)^2} = \frac{10i}{10} = i$

et $arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0 - 3)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{10}$

AC = $\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(2-3)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{10}$

Conclusion : Puisque : $\begin{cases} arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \\ et \\ AB = AC = \sqrt{10} \end{cases}$



2) Déterminons l'affixe de D tel que ABCD soit un parallélogramme. (on placera le point D).

ABCD soit un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow Z_B - Z_A = Z_C - Z_D$; où Z_D est l'affixe du point D.

$Z_B - Z_A = Z_C - Z_D$ => $Z_D = Z_C - Z_B + Z_A$ => $Z_D = (2 - 2i) - (2i) + (3 + i)$

=> $Z_D = 2 - 2i - 2i + 3 + i = 5 - 3i$.

D'où l'affixe du point D est tel que $Z_D = 5 - 3i$.

Autre méthode :

ABCD soit un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Or $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x \\ -2-y \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} <=> \begin{pmatrix} 2-x \\ -2-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} <=> \begin{cases} 2-x = -3 \\ -2-y = 1 \end{cases} => \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$

D'où D$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et par conséquent l'affixe du point D est tel que $Z_D = 5 - 3i$.

23 Soient A, B, C, D quatre points d'affixes respectives : $-1 + i$; $-1 - i$; $2i$; $2 - 2i$.

$Z_A = -1 + i$ =>A$(-1 ; 1)$

$Z_B = -1 - i$ => B$(-1 ; -1)$

$Z_C = 2i$ => C$(0 ; 2)$

$Z_D = -2 - 2i$ => D$(2 ; -2)$

1) Etudions la nature des triangles ABC et BCD.

Pour le triangle ABC

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{(2i) - (-1+i)}{(-1-i) - (-1+i)} = \frac{1+i}{-2i} = \frac{(1+i)(2i)}{(0)^2 + (-2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{-2+2i}{4} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Et $arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \arg\left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\pi}{4}$

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1+3)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{2}$

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(0+1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(0+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{10}$

Alors le triangle ABC est quelconque.

Pour le triangle BCD

$$\frac{Z_D - Z_B}{Z_C - Z_B} = \frac{(2-2i) - (-1-i)}{(2i) - (-1-i)} = \frac{3-i}{1+3i} = \frac{(3-i)(1-3i)}{(1)^2 + (3)^2} = \frac{-10i}{10} = -i$$

Et $\arg\left(\frac{Z_D - Z_B}{Z_C - Z_B}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(0+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{10}$

$CD = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{(2-0)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{20} = 5\sqrt{2}$

$BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(2+1)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{10}$

Alors le triangle BCD est rectangle et isocèle en B.

2) Démontrons que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on Déterminera le centre et le rayon.

Soit Ω(x ; y) les coordonnées du centre de ce cercle.

les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle si :

d(A ; Ω) = d(B ; Ω) = d(C ; Ω) = d(D ; Ω) = r

d(A ; Ω) = d(B ; Ω) $\Leftrightarrow \sqrt{(x_\Omega - x_A)^2 + (y_\Omega - y_A)^2} = \sqrt{(x_\Omega - x_B)^2 + (y_\Omega - y_B)^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2$

$\Leftrightarrow (y-1)^2 = (y+1)^2$

$\Leftrightarrow -2y = 2y \Rightarrow y = 0$

d(C ; Ω) = d(D ; Ω) $\Leftrightarrow \sqrt{(x_\Omega - x_C)^2 + (y_\Omega - y_C)^2} = \sqrt{(x_\Omega - x_D)^2 + (y_\Omega - y_D)^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2}$

$\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2$

En remplaçant $y = 0$ par sa valeur dans l'équation ci-dessus, on a :

$-4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$

D'où $\Omega\binom{1}{0}$

Or le rayon r est tel que r = d(A ; Ω) = d(B ; Ω) = d(C ; Ω) = d(D ; Ω)

=> r = $\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(1+1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5}$

D'où les points A, B, C,D appartiennent à un même cercle de centre $\Omega\binom{1}{0}$ et de rayon r = $\sqrt{5}$

24 On considère un repère orthonormé directe (O ; $\vec{U}$; $\vec{V}$)du plan complexe. Soit les points A ; B ; C d'affixes respectives :

$Z_A = -1 + i$; $Z_B = \dfrac{2\left[Cos\left(\frac{7\pi}{15}\right) + iSin\left(\frac{7\pi}{15}\right)\right]}{Cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - iSin\left(\frac{\pi}{5}\right)}$ et $Z_C = 2 - 2i$

1) Ecrivons les complexe Z_A ; Z_B et Z_C sous forme exponentielle.

$Z_A = -1 + i$ => $|Z_A| = \sqrt{2}$ et $\arg(Z_A) = \frac{3\pi}{4}$ => $Z_A = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4}i}$

$Z_B = \frac{2\left[Cos\left(\frac{7\pi}{15}\right) + iSin\left(\frac{7\pi}{15}\right)\right]}{Cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - iSin\left(\frac{\pi}{5}\right)}$ => $Z_B = \frac{2e^{\frac{7\pi}{15}i}}{e^{-\frac{\pi}{5}i}} = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$ => $Z_B = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$

$Z_C = 2 - 2i$ => $|Z_C| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(Z_C) = -\frac{\pi}{4}$ => $Z_C = 2\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}i}$

2) Déterminons l'affixe Z_D du point D tel que le triangle OBD soit équilatéral direct, c'est-à-dire la mesure de l'angle ($\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OD}$) = $\frac{\pi}{3}$.

OBD est équilatéral direct si et seulement si : $\frac{Z_D - Z_O}{Z_B - Z_O} = e^{\frac{\pi}{3}i} \Leftrightarrow \frac{Z_D}{Z_B} = e^{\frac{\pi}{3}i}$ (car l'affixe de l'origine $Z_O = 0$). Alors $Z_D = Z_B e^{\frac{\pi}{3}i} = 2e^{\frac{2\pi}{3}i} \times e^{\frac{\pi}{3}i} = 2e^{\pi i} = 2(-1) = -2$ => $Z_D = -2$

25 Le plan est rapporté au repère orthonormé directe (O ; $\vec{U}$; $\vec{V}$).
On considère :

- Le point A d'affixe $Z_A = 5 - i\sqrt{3}$.
- Le point B d'affixe Z_B est tel que OAB soit un triangle équilatéral direct c'est-à-dire la mesure de l'angle ($\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$) = $\frac{\pi}{3}$.
- Le point Q d'affixe Z_Q est tel que le point Q soit milieu du segment $[OB]$.
- Le point K d'affixe Z_K est tel que ABQK soit un parallélogramme.

1) Déterminons les affixes Z_B ; Z_Q et Z_K respectivement des points B ; Q et K.

- OAB est équilatéral direct si et seulement si : $\frac{Z_B - Z_O}{Z_A - Z_O} = e^{\frac{\pi}{3}i} \Leftrightarrow \frac{Z_B}{Z_A} = e^{\frac{\pi}{3}i}$

(car l'affixe de l'origine $Z_O = 0$). Alors $Z_B = Z_A e^{\frac{\pi}{3}i} = \left(5 - i\sqrt{3}\right) \times \left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$ =>

$Z_B = \left(5 - i\sqrt{3}\right) \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ => $Z_B = 4 + 2i\sqrt{3}$ et $B\begin{pmatrix}4\\2\sqrt{3}\end{pmatrix}$

- Q est milieu du segment $[OB]$ si et seulement si :

$x_Q = \frac{x_O + x_B}{2} = \frac{0+4}{2} = 2$ et $y_Q = \frac{y_O + y_B}{2} = \frac{0+2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ => $Z_Q = 2 + i\sqrt{3}$ et $Q\begin{pmatrix}2\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$

- $ABQK$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KQ} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_Q - x_K\\y_Q - y_K\end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} 4-5 \\ 2\sqrt{3}+\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x_K \\ \sqrt{3}-y_K \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x_K \\ \sqrt{3}-y_K \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x_K = -1 \\ \sqrt{3} - y_K = 3\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_K = 3 \\ y_K = -2\sqrt{3} \end{cases}$

$\Rightarrow Z_K = 3 - 2i\sqrt{3}$ et $K\begin{pmatrix} 3 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

2) Démontrons que $\frac{Z_K - Z_A}{Z_K}$ est un imaginaire pur et en déduisons la nature du triangle OKA.

$\frac{Z_K - Z_A}{Z_K} = \frac{(3-2i\sqrt{3}) - (5 - i\sqrt{3})}{(3-2i\sqrt{3})} = \frac{3-2i\sqrt{3} - 5 + i\sqrt{3}}{3-2i\sqrt{3}} = \frac{-2-i\sqrt{3}}{3-2i\sqrt{3}} = \frac{(-2-i\sqrt{3})(3+2i\sqrt{3})}{(3)^2+(2\sqrt{3})^2}$

$\Rightarrow \frac{Z_K - Z_A}{Z_K} = \frac{-7\sqrt{3}}{21} i$

D'où $\frac{Z_K - Z_A}{Z_K}$ est un imaginaire pur. D'où le triangle OKA est rectangle en O.

3) Soit C la point d'affixe Z_C tel que $Z_C = \frac{2Z_A}{3}$

a- Calculons $\frac{Z_K - Z_B}{Z_K - Z_C}$. Puis en déduisons une relation entre les points B ; C et K

$Z_C = \frac{2Z_A}{3} = \frac{2}{3} Z_A = \frac{2}{3}(5 - i\sqrt{3}) = \frac{10}{3} - i\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \frac{Z_K - Z_B}{Z_K - Z_C} = \frac{(3-2i\sqrt{3}) - (4+2i\sqrt{3})}{(3-2i\sqrt{3}) - \left(\frac{10}{3} - i\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{3-2i\sqrt{3} - 4-2i\sqrt{3}}{3-2i\sqrt{3} - \frac{10}{3} + i\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{-1-4i\sqrt{3}}{-\frac{1}{3} - \frac{4i\sqrt{3}}{3}} = \frac{-(1+4i\sqrt{3})}{\frac{-(1+4i\sqrt{3})}{3}}$

$\Rightarrow \frac{Z_K - Z_B}{Z_K - Z_C} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$ alors $\frac{Z_K - Z_B}{Z_K - Z_C}$ est un réel. D'où les points B ; C et K sont alignés.

26 On considère l'ensemble des complexes Z_n tels que : $\forall\, n \in \mathbb{C}$ on a :

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \frac{1+i}{2} Z_n \end{cases}$$

1) On note M_n le point d'affixe Z_n dans le plan rapporté au repère $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$

Calculons Z_1 ; Z_2; Z_3 et Z_4.

$Z_1 = \frac{1+i}{2} Z_0 \Rightarrow Z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$; $Z_2 = \frac{1+i}{2} Z_1 \Rightarrow Z_2 = \frac{1}{2} i$

$Z_3 = \frac{1+i}{2} Z_2 \Rightarrow Z_3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} i$; $Z_4 = \frac{1+i}{2} Z_3 \Rightarrow Z_4 = -\frac{1}{4}$

2) Calcule le quotient : $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_{n+1}}$ puis en déduis la nature du triangle $OM_{n+1}M_n$

On sait que $Z_{n+1} = \frac{1+i}{2}Z_n$ => $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_{n+1}} = \frac{\left(\frac{1+i}{2}Z_n\right)-Z_n}{\frac{1+i}{2}Z_n}$ (car $Z_{n+1} = \frac{1+i}{2}Z_n$)

$$=> \frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_{n+1}} = \frac{Z_n\left(\frac{1+i}{2}-1\right)}{Z_n\left(\frac{1+i}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{1+i}{2}-1\right)}{\left(\frac{1+i}{2}\right)} = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{(1)^2+(1)^2} = \frac{-1+i+i+1}{2}$$

$= \frac{2i}{2} = i$ => $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_{n+1}}$ est un imaginaire pur. Alors $OM_{n+1}M_n$ est un triangle rectangle en O.

Transformations géométriques du plan.

27 Soit (S) l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe Z associe Z' d'affixe M' tel que

$Z' = (1+i)Z + 1 - i$. Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de (S).

- Rapport : $k = |1+i| = \sqrt{(1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$
- Angle : $\theta = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$
- Centre : $\omega = \frac{b}{1-a}$ avec $a = 1+i$ et $b = 1-i$ => $\omega = \frac{1-i}{1-(1+i)}$ =>

$\omega = \frac{1-i}{1-1-i} = \frac{1-i}{-i} = \frac{(1-i)(i)}{1} = 1+i$ alors le centre a pour coordonnées $\Omega\binom{1}{1}$

28 Soit la similitude directe plane S de centre $A(1\ ;\ 1)$; de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ par la similitude S ; le point M d'affixe Z a pour transformer le point M' d'affixe Z'.

Exprimons Z' en fonction de Z.

On a : le centre $A(1\ ;\ 1)$; rapport $k = \sqrt{2}$ et l'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$

L'expression de Z' en fonction de Zest donné par la formule suivante : $Z' = aZ + b$
Cherchons ainsi les complexes a et b.

$a = |a|(\cos\theta + i\sin\theta) \Leftrightarrow a = k(\cos\theta + i\sin\theta)$ => $a = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$ => $a = 1+i$

On sait que le centre A(1 ; 1) à pour affixe $\frac{b}{1-a} \Leftrightarrow 1+i = \frac{b}{1-a}$ or $a = 1+i \Leftrightarrow$

$1+i = \frac{b}{1-(1+i)} \Leftrightarrow 1+i = \frac{b}{1-1-i} \Leftrightarrow 1+i = \frac{b}{-i}$ => $b = 1-i$

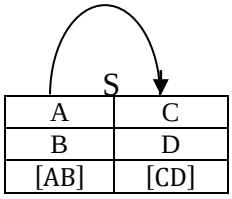
D'où $Z' = (1 + i)Z + 1 - i$

29 Soient A, B, C et D les points d'affixes $Z_A = -1 - i$; $Z_B = i$; $Z_C = 1 + 3i$; $Z_D = 5 + i$.

Soit S la similitude directe transformant A en C et B en D.

1) Détermine le rapport k et l'angle θ de S

La traduction schématique d'une similitude directe S qui transforme A en C et B en D est :



- $k = \frac{[CD]}{[AB]} = \left|\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right| = \left|\frac{(5+i)-(1+3i)}{i-(-1-i)}\right| = \frac{|4-2i|}{|1+2i|} = \frac{\sqrt{16+4}}{\sqrt{1+4}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{4}} = \sqrt{4} = 2$

- θ = mes (AB ; CD) = $arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right) = arg\left(\frac{4-2i}{i+2i}\right) = arg\,(-2i) = -\frac{\pi}{2}$

2) Déterminons l'écriture complexe f associée à S.
L'écriture complexe f associée à S est : $f(Z) = aZ + b$.

La traduction algébrique d'une similitude directe S qui transforme A en C et B en D est :

$$S(A) = C \quad \text{et} \quad S(B) = D \Leftrightarrow \begin{cases} aZ_A + b = Z_C & (1) \\ aZ_B + b = Z_D & (2) \end{cases}$$

(1) – (2) => $a(Z_A - Z_B) = Z_C - Z_D$ => $a = \frac{Z_C - Z_D}{Z_A - Z_B} = \frac{-4+2i}{-1-2i} = -2i$

Dans (2) on a: $aZ_B + b = Z_D$ => $b = Z_D - aZ_B$ => $b = (5 + i) - (-2i)(i)$

=> $b = 5 + i + 2i^2 = 5 + i - 2 = 3 + i$ => $b = 3 + i$

D'où l'écriture complexe f est $f(Z) = -2iZ + 3 + i$

3) Déterminons l'affixe du centre Ω de S.

Soit ω l'affixe du centre de Ω tel que : $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{3+i}{1-(-2i)} = \frac{(3+i)(1-2i)}{(1)^2+(2)^2} = 1 - i$.

30 Détermine la traduction complexe de la transformation (Γ) dans chacun des cas suivants :

1) La traduction complexe d'une translation est : $f(Z) = Z + q$.
$f(A) = B \Leftrightarrow f(-1 + i) = -2 + 3i \Leftrightarrow -1 + i + q = -2 + 3i \Rightarrow q = -1 + 2i$

D'où $f(Z) = Z - 1 + 2i$

2) La traduction complexe d'une homothétie est $f(Z) = kZ + q$.
$f(A) = B \Leftrightarrow f(-1 + i) = -2 + 3i \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(-1 + i) + q = -2 + 3i \Rightarrow q = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$

D'où $f(Z) = \frac{1}{2}Z - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$

3) La traduction complexe d'une rotation est $f(Z) = e^{i\theta}Z + q$.

$f(A) = B \Leftrightarrow f(-1 + i) = -2 + i \Leftrightarrow e^{i\frac{3\pi}{4}}(-1 + i) + q = -2 + i$
$\Rightarrow q = -2 + i\,(1 + \sqrt{2})$

D'où $f(Z) = Ze^{i\frac{3\pi}{4}} - 2 + i\left(1 + \sqrt{2}\right)$

31 Soit f la transformation définie par Z' = aZ + 3i
1) Soit f la transformation définie par Z' = aZ + 3i

Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de f si : $a = 2$ puis si $a = -i$

$\underline{Si\ a = 2}$

Z' = aZ + 3i $\Leftrightarrow$ f(Z) = 2Z + 3i

- Montrons que f admet un point invariant :
  f admet un point invariant si : $f(\omega) = \omega \Leftrightarrow 2\omega + 3i = \omega \Leftrightarrow \omega = -3i \Rightarrow \Omega(0\ ;\ -3)$

- Ainsi déterminons la nature de f
  Pour cela, on exprime Z' $-$ ω en fonction de Z $-$ ω $\Leftrightarrow$

  Z' = 2Z + 3i **(1)**

  ω = 2ω+3i **(2)**

  En effectuant **(1)** $-$ **(2)** ; on a : Z'$-$ω = 2(Z$-$ ω) ; sous la forme :

  Z' – ω = k(Z – ω) qui est l'écriture complexe d'une Homothétie

- Ces éléments caractéristiques sont :
- Centre : Ω(0 ; -3)
- Rapport : k = 2

Si $a = -i$

Z' = $aZ + 3i \Leftrightarrow f(Z) = -iZ + 3i$

- Montrons que f admet un point invariant :
  f admet un point invariant si : $f(\omega) = \omega \Leftrightarrow -i\omega + 3i = \omega \Leftrightarrow \omega = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$
  => $\Omega\left(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2}\right)$

- Ainsi déterminons la nature de f
  Pour cela, on exprime $Z' - \omega$ en fonction de $Z - \omega \Leftrightarrow$

  Z' = $-iZ + 3i$ **(1)**

  $\omega = -i\omega + 3i$ **(2)**

En effectuant (1) $-$ (2) ; on a : $Z' - \omega = -i(Z - \omega)$; sous la forme

$Z' - \omega = e^{i\alpha}(Z - \omega)$ qui est l'écriture complexe d'une Rotation

- Ces éléments caractéristiques sont :

- Centre : $\Omega\left(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2}\right)$
- Angle = $arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$

2) Soient A(1) ; B($2 + i$) ; A'($2i$) ; B'($1 + i$)

Vérifions que AB = A'B'

Puis démontrons qu'il existe une unique rotation r telle que r(A) = A' et r(B) = B'

AB = A'B' = $\sqrt{2}$

r(A) = A' => $A' - \omega = e^{i\alpha}(A - \omega)$ => $2i - \omega = e^{i\alpha}(1 - \omega)$ (1)

r(B) = B' => $B' - \omega = e^{i\alpha}(B - \omega)$ => $1 + i - \omega = e^{i\alpha}(2 + i - \omega)$ (2)

(1) $-$ (2) donne : $e^{i\alpha} = -i$ => $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

On en déduit que $2i - \omega = -i(1 - \omega)$ => $\omega = \frac{3+i}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

On en déduit que $2i - \omega = -i(1 - \omega)$ => $\omega = \frac{3+i}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

32 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : Z^3 - (4 + i\sqrt{3})Z^2 + (3 + 4i\sqrt{3})Z - 3i\sqrt{3} = 0$

1) Montrons que (E) admet deux solutions réelles que l'on notera α et β puis une solution imaginaire pure que l'on notera ω.

Recherche des solutions réelles :

Soient $\alpha = a_1$, et $\beta = a_2$ les solutions réelles de l'équation (E) telle que :

$a^3 - (4 + i\sqrt{3})a^2 + (3 + 4i\sqrt{3})a - 3i\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$

$$(a^3 - 4a^2 + 3a) + i(-a^2\sqrt{3} + 4a\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 4a^2 + 3a = 0 \\ et \\ -a^2\sqrt{3} + 4a\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

En utilisant l'équation (2), on a : $-a^2\sqrt{3} + 4a\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow -a^2 + 4a - 3 = 0$

=> $a_1 = 1$ ou $a_2 = 3$

D'où les solutions réelles de l'équation (E) sont telles que : $\alpha = 1$ et $\beta = 3$

Recherche de la solution imaginaire pure:

Soient $\omega = ib$, la solution imaginaire pure de l'équation (E) telle que :

$(ib)^3 - (4 + i\sqrt{3})(ib)^2 + (3 + 4i\sqrt{3})(ib) - 3i\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$

$$(4b^2 - 4b\sqrt{3}) + i(-b^3 + b^2\sqrt{3} + 3b - 3\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4b^2 - 4b\sqrt{3} = 0 \\ et \\ -b^3 + b^2\sqrt{3} + 3b - 3\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

En utilisant l'équation (1), on a : $4b^2 - 4b\sqrt{3} = 0 = 0 \Leftrightarrow b^2 - b\sqrt{3} = 0$

=> $b_1 = 0$ (à rejeté) ou $b_2 = \sqrt{3}$ (à retenir)

D'où la solution imaginaire pure de l'équation (E) est telle que : $\omega = ib = i\sqrt{3}$

2) Soit f, l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout nombre complexe Z, on a :

$f(Z) = aZ + b$.

a-Déterminons les réels a et b pour que $f(\omega) = \omega$ et $f(\alpha) = \beta$.

$\begin{cases} f(\omega)=\omega \\ \text{et} \\ f(\alpha)=\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\omega+b=\omega \\ \\ a\alpha+b=\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\omega+b=\omega \\ \\ -a\alpha-b=-\beta \end{cases}$

$\Rightarrow a\omega-a\alpha=\ \omega-\beta$

$\Leftrightarrow a(\omega-\alpha)=\omega-\beta \Rightarrow a=\frac{\omega-\beta}{\omega-\alpha} \Rightarrow a=\frac{(i\sqrt{3})-(3\ )}{(i\sqrt{3})-(1)}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{(-3+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}$

$\Rightarrow a=\frac{6+2i\sqrt{3}}{4}=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ainsi en remplaçant $a=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ par sa valeur dans l'équation (1), on a : $b=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

b-Calculons le module et un argument de a.

$a=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |a|=\sqrt{3}$ et $arg(a)=\frac{\pi}{6}$

c-Donnons la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.

$f(Z)=aZ+b$ avec $a=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\in\mathbb{C}-\{-1\,;1\}$ et $b=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\in\mathbb{C}$

Alors la transformation f est une similitude directe dont les éléments caractéristiques sont :

- Rapport : $k=|a|=\sqrt{3}$
- Angle : $\theta=arg(a)=\frac{\pi}{6}$
- Centre : Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}=\frac{\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}=i\sqrt{3} \Rightarrow \Omega\begin{pmatrix}0\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$

33 Montrons que pour tout point M de P^*, le point M' est distinct de A.

Posons $M'=A \Rightarrow Z'=2i \Leftrightarrow \frac{2iZ-5}{Z-2i}=2i \Leftrightarrow 2iZ-5=2iZ+4 \Leftrightarrow -5=4$ impossible, donc $M'\neq A$

1) Démontrons que Test une bijection de P^* sur lui-même.

Résolvons l'équation $Z'=b \Leftrightarrow \frac{2iZ-5}{Z-2i}=b \Leftrightarrow 2iZ-5=b(Z-2i\ ) \Leftrightarrow$

$Z(b-2i\ )=-5+2ib$

$\Rightarrow Z=\frac{2ib-5}{b-2i}$ si $b\neq 2i$.

Puis que l'équation $Z^{'} = b$ admet une unique solution Z donc Test une bijection de P^* sur lui-même.

Déterminons sa réciproque T^{-1}.

$Z = \frac{2ib-5}{b-2i}$ => $T^{-1}: P^* \to P^*$

$$M(Z) \to M'(Z^{'}) / \ Z' = \frac{2iZ-5}{Z-2i}$$

2) a- Montrons qu'un point M de P^* est invariant par T si et seulement si son affixe vérifie la relation : $Z^2 - 4iZ + 5 = 0$.

M est invariant par T si et seulement si $Z' = Z \Leftrightarrow \frac{2iZ-5}{Z-2i} = Z \Leftrightarrow$

$2iZ - 5 = Z(Z - 2i\ ) \Leftrightarrow Z^2 - 4iZ + 5 = 0$. D'où la relation vérifiée.

b- Trouvons le réel α tel que : $Z^2 - 4iZ + 5 = (Z - 2i)^2 + \alpha$.

$Z^2 - 4iZ + 5 = (Z - 2i)^2 + \alpha. \Leftrightarrow Z^2 - 4iZ + 5 = Z^2 - 4iZ - 4 + \alpha \Leftrightarrow 5 = -4 + \alpha$

=> $\alpha = 9$.

D'où $Z^2 - 4iZ + 5 = (Z - 2i)^2 + 9$.

c- Montrons alors que T admet deux points invariants B et C.

T admet deux points invariants si $Z^2 - 4iZ + 5 = 0 \Leftrightarrow (Z - 2i)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow$

$(Z - 2i - 3i)(Z - 2i + 3i) = 0 \Leftrightarrow (Z - 5i)(Z + i) = 0$ => $Z = 5i$ ou $Z = -i$

D'où $B\binom{0}{5}$ et $B\binom{0}{-1}$

On appelle (D) la droite passant par O et dirigée par $\vec{v}$ et (D^*) la droite (D) privé de A.

Montrons que (D^*) est globalement invariante par T.

(D^*) Passant par O et dirigée par $\vec{v}$ donc $(D^*) = (Oy) - \{A\}$. Or B et $C \in (Oy)$ =>

$(Oy) = (BC)$

Si B et C sont les points invariants alors $T(BC) = (BC) = (Oy) = (D)$ => $T(D^*) = (D^*)$.

Donc (D^*) est globalement invariante par T.

3) a- Montrons que pour tout $Z \neq 2i$, $|Z' - 2i| \times |Z - 2i| = 9$.

$Z' = \frac{2iZ-5}{Z-2i}$ (en ajoutant $-2i$ à tous les membres de l'égalité), on a : $Z' - 2i = \frac{2iZ-5}{Z-2i} - 2i$

$=> Z' - 2i = \frac{2iZ-5-2iZ-4}{Z-2i} \Leftrightarrow Z' - 2i = \frac{-9}{Z-2i} \Leftrightarrow |Z' - 2i| = \left|\frac{-9}{Z-2i}\right| \Leftrightarrow |Z' - 2i| = \frac{9}{|Z-2i|}$

$\Leftrightarrow |Z' - 2i| \times |Z - 2i| = 9$. Ce qu'il fallait Montre.

b- Soit (Γ)le cercle de centre A et de rayon 3. Montrons que (Γ) est globalement invariante par T.

On sait que $|Z' - 2i| \times |Z - 2i| = 9 \Leftrightarrow AM \times AM' = 9 \Leftrightarrow AM \times AM' = 3 \times 3$

$=> AM' = 3$ et $AM = 3$.

Si $AM' = 3$ alors M' appartient au cercle de centre A et de rayon $r = 3$.

De même Si $AM = 3$ alors M appartient au cercle de centre A et de rayon $r = 3$.

Conclusion : $AM = AM' \Leftrightarrow M$ et M' appartiennent à un même cercle (T).

D'où (Γ) est globalement invariante par T c'est-à-dire $T(\Gamma) = (\Gamma)$.

34 On donne: $Z_A = -2 + 6i$; $Z_B = 1 - 3i$; $Z_C = 5 + 5i$ et $Z_D = 2 + 4i$

1) Soit S la similitude plane directe qui tout point M d'affixe Z, fait correspondre le M' d'affixe Z' tel que : $Z' = 3iZ + 13 - 9i$.

a- Donnons les éléments caractéristiques de S.

- Rapport : $k = |3i| = \sqrt{3^2} = 3$
- Angle : $\theta = arg(3i) = \frac{\pi}{2}$
- Centre : $\omega = \frac{b}{1-a}$ avec $a = 3i$ et $b = 13 - 9i$ $=> \omega = \frac{13-9i}{1-3i} = \frac{(13-9i)(1+3i)}{10} = 4 + 3i$

Alors le centre a pour coordonnées $\Omega\binom{4}{3}$

b- Déterminons l'image des points C et D par la similitude S

L'image C'de C est telle que $Z_{C'} = 3iZ_C + 13 - 9i = 3i(5 + 5i) + 13 - 9i = -2 + 6i = Z_A$. Alors $S(C) = A$

L'image D' de D est telle que : $Z_{D'} = 3iZ_D + 13 - 9i = 3i(2 + 4i) + 13 - 9i = 1 - 3i = Z_B$. Alors $S(D) = B$

c-Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{S(C)S(D)}$ sont orthogonaux.

1ière méthode :

S est une similitude directe d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$. Alors les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{S(C)S(D)}$ sont orthogonaux.

2ième méthode :

$Z_A = -2 + 6i$ => $A\binom{-2}{6}$; $Z_B = 1 - 3i$ => $B\binom{1}{-3}$; $Z_C = 5 + 5i$ => $C\binom{5}{5}$ et $Z_D = 2 + 4i$ => $D\binom{2}{4}$

$\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{S(C)S(D)}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$

$\overrightarrow{CD}\binom{x_D - x_C}{y_D - y_C} = \binom{2-5}{4-5}$ =>$\overrightarrow{CD}\binom{-3}{-1}$ et $\overrightarrow{S(C)S(D)} = \overrightarrow{AB}$ => $\overrightarrow{AB}\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \binom{1+2}{-3-6}$ =>$\overrightarrow{AB}\binom{3}{-9}$

$\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB} = \binom{-3}{-1} \bullet \binom{3}{-9} = (-3)(3) + (-1)(-9) = -9 + 9 = 0$

Alors les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{S(C)S(D)}$ sont orthogonaux.

2) Soit R la similitude plane directe qui transforme B et C et D en A.

a-Trouvons la relation liant l'affixe Z d'un point M et l'affixe Z' de son image R(M).

La relation liant Z et Z' est : $Z' = aZ + b$.

$S(B) = C$ et $S(D) = A \Leftrightarrow \begin{cases} aZ_B + b = Z_C & (1) \\ aZ_D + b = Z_A & (2) \end{cases}$

(1) – (2) => $a(Z_B - Z_D) = Z_C - Z_A$ => $a = \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_D} = \frac{7-i}{-1-7i} = i$

Dans (2) on a: $aZ_D + b = Z_A$ => $b = Z_A - aZ_D$ => $b = (-2 + 6i) - (i)(2 + 4i)$ => $b = 2 + 4i$

D'où l'écriture complexe f est $Z' = iZ + 2 + 4i$

b-Donnons les éléments caractéristiques de la similitude R (on appellera J le point invariant).

- Rapport : $k = |i| = 1$
- Angle : $\theta = arg(i) = \frac{\pi}{2}$
- Centre : $Z_J = \frac{b}{1 - a}$ avec $a = i$ et $b = 2 + 4i$ => $Z_J = \frac{2+4i}{1-i} = \frac{(2+4i)(1+i)}{2}$ $= -1 + 3i$

Alors $Z_J = -1 + 3i$

Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux.

R est une similitude directe d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$. Alors les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux.

c- D'après les quadrilatères $DBCA$ et $CDAB$, le point D représente l'orthocentre du triangle ABC

3) Montrons que J est un point de la droite (AB).
$Z_{\overrightarrow{AB}} = (1-3i)-(-2+6i) = 3-9i$
$Z_{\overrightarrow{AJ}} = (-1+3i)+(-2+6i) = 1-3i$
Alors $Z_{\overrightarrow{AB}} = 3Z_{\overrightarrow{AJ}}$. Donc J est un point de la droite (AB).

Donnons une mesure en radian de l'angle des vecteurs $(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$.
$mes(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA}) = arg\left(\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}\right) = arg\left(\frac{-3+9i}{4+8i}\right) = \frac{\pi}{4}$

35 Soit α un nombre complexe.

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1+i)Z^2 - 2i(\alpha+1)Z + (i-1)(\alpha^2+1) = 0$.

$\Delta = [-2i(\alpha+1)]^2 - 4(1+i)(i-1)(\alpha^2+1) = 4\alpha^2 - 8\alpha + 4 = (2\alpha-2)^2$

$Z_1 = \frac{2i(\alpha+1)-(2\alpha-2)}{2(1+i)} = \frac{-(\alpha-1)+(\alpha+1)i}{1+i} = \frac{[-(\alpha-1)+(\alpha+1)i](1-i)}{2} = \frac{2+2\alpha i}{2} = 1+\alpha i$

$Z_2 = \frac{2i(\alpha+1)+(2\alpha-2)}{2(1+i)} = \frac{(\alpha-1)+(\alpha+1)i}{1+i} = \frac{[(\alpha-1)+(\alpha+1)i](1-i)}{2} = \frac{2\alpha+2i}{2} = \alpha+i$

$S = \{1+\alpha i\ ;\ \alpha+i\}$

2) Soient Z_1 et Z_2 les solutions de cette équation.

Trouvons entre Z_1 et Z_2, une relation indépendante de α.
$Z_1 = 1+\alpha i \Rightarrow \alpha = \frac{Z_1-1}{i} = -i(Z_1-1)$
$Z_2 = \alpha+i \Rightarrow Z_2 = -i(Z_1-1)+i = -iZ_1+i+i = -iZ_1+2i \Leftrightarrow Z_2+iZ_1-2i = 0$

3) Caractérisons la transformation f du plan complexe qui, à tout point M_1 d'affixe Z_1 associe le point M_2 d'affixe Z_2.

On sait que : $Z_2+iZ_1-2i = 0 \Rightarrow Z_2 = -iZ_1+2i$. Ici $a = -i$ et $b = 2i$

- Angle : $\theta = arg(-i) = \frac{\pi}{2}$
- Centre Ω est telque: $Z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{2i}{1+i} = \frac{2i(1-i)}{2} = i(1-i) = 1+i$. D'où $\Omega\binom{1}{1}$

Alors f est une rotation de centre $\Omega\binom{1}{1}$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$

4) On pose $Z_1 = x+iy$ et $Z_2 = x'+iy'$.

a- Exprimons x' et y' en fonction de x et y.

On sait que : $Z_2 = -iZ_1+2i \Leftrightarrow x'+iy' = -i(x+iy)+2i \Leftrightarrow x'+iy' = -ix+y+2i \Leftrightarrow$
$x'+iy' = y+i(-x+2)$. Par identification, on a : $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x+2 \end{cases}$

b- Déterminons l'image par f de la droite (D) d'équation $x+2y-1=0$

On sait que : $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = -y'+2 \end{cases}$. Ainsi remplaçons x et y par leur valeurs dans l'équation de la droite (D): $x+2y-1=0$. D'où l'image (D')de la droite (D) est : (D'):
$-y'+2+2x'-1 = 0 \Leftrightarrow$
(D'): $-y'+2x'+1 = 0 \Leftrightarrow (D')$: $y'-2x'-1 = 0$

Problèmes.

36 Soit f l'application de $\mathbb{C}-\{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(Z) = \frac{iZ}{Z+i}$. Dans le plan complexe rapporté au repère ortho normal direct$(o, \vec{u}, \vec{v})$, on note M le point d'affixe Z.

1) Déterminons les coordonnées du point B dont l'affixe Z_B et telle que $f(Z_B) = 1 + 2i$

$f(Z_B) = 1 + 2i \Leftrightarrow \frac{iZ_B}{Z_B + i} = 1 + 2i \Leftrightarrow iZ_B = (1 + 2i)(Z_B + i) \Leftrightarrow iZ_B = Z_B + i + 2iZ_B - 2$

$iZ_B - Z_B - 2iZ_B = -2 + i \Leftrightarrow Z_B(1 + i) = 2 - i \Rightarrow Z_B = \frac{2-i}{1+i}$

$\Rightarrow Z_B = \frac{1-3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

D'où $B\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

2) Soit Z un élément de E. On note r le module de $Z + i$ et α une mesure de son argument.

Exprimons la forme trigonométrique de $f(z) - i$ en fonction de r et α.

$|f(z) - i| = \left|\frac{iZ}{Z+i} - i\right| = \left|\frac{iZ - iZ + 1}{Z+i}\right| = \left|\frac{1}{Z+i}\right| = \frac{1}{|Z+i|}$ or $|Z + i| = r \Rightarrow |f(z) - i| = \frac{1}{r}$

$arg(f(z) - i) = arg\left(\frac{iZ}{Z+i} - i\right) = arg\left(\frac{iZ - iZ + 1}{Z+i}\right) = arg\left(\frac{1}{Z+i}\right) = -arg(Z + i) = -\alpha$

D'où la forme trigonométrique de $f(z) - i$ en fonction de r et α est :

$f(z) - i = \frac{1}{r}[cos(-\alpha) + isin(-\alpha)]$

3) Soit A le point d'affixe $-i$

a- Déterminons l'ensemble (Γ) des points M vérifiant $|f(z) - i| = \sqrt{2}$

$|f(z) - i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{|Z+i|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |Z + i| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |Z + i| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Posons $Z_A + i = 0 \Rightarrow Z_A = -i$

Alors l'ensemble (Γ) des points M cherchés est le cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b- Montrons que B appartient à (Γ).

B appartient à (Γ) si et seulement si la distance du centre A à B vaut le rayon, c'est-à-dire $|Z_B - Z_A| = \sqrt{2}$

$$|Z_B - Z_A| = \left|\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right) - (-i)\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i + i\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = r$$

D'où B appartient à (Γ).

37 **Partie A :** Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $Z^2 - (2 + 6i)Z - 16 + 12i = 0$

$\Delta = [-(2 + 6i)]^2 - 4(1)(-16 + 12i) = 32 - 24i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 32 \\ 2xy = -24 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(32)^2 + (-24)^2} \end{cases} <=> \begin{cases} x^2 - y^2 = 32 & (1) \\ xy = -12 & (2) \\ x^2 + y^2 = 40 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) + (3)

On a : $2x^2 = 72 => x^2 = 36 => x = -6 \ ou \ x = 6$

$(2) : xy = -12 => y = \frac{-12}{x}$

- Si $x = -6 => y = \frac{-12}{-6} = 2$ et $\delta_1 = x + iy => \delta_1 = -6 - 2i$
- Si $x' = 6 => y' = \frac{-12}{6} = -2$ et $\delta_2 = x' + iy' => \delta_2 = 6 - 2i$

Alors les racines carrées de Δ $sont$: $\delta_1 = -6 - 2i$ et $\delta_2 = 6 - 2i$

$Z_1 = \frac{(2 + 6i) + (-6 - 2i)}{2(1)} = -2 + 2i$ et $Z_2 = \frac{(2 + 6i) + (6 - 2i)}{2(1)} = 4 + 2i$

=> S = $\{-2 + 2i \ ; \ 4 + 2\}$

2) Soit P(Z) = $Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i$
a- Montrons que l'équation P(Z) = 0 admet une solution réelle notée Z_0 que l'on Déterminera.

Soit $Z_0 = a$ cette solution réelle telle que :

$Z_0^3 - (4 + 6i)Z_0^2 - (12 - 24i)Z_0 + 32 - 24i = 0$

$\Leftrightarrow (a)^3 - (4 + 6i)(a)^2 - (12 - 24i)(a) + 32 - 24i = 0$

$\Leftrightarrow a^3 - 4a^2 - 6ia^2 - 12a + 24ai + 32 - 24i = 0$

$\Leftrightarrow (a^3 - 4a^2 - 12a + 32) + i(-6a^2 + 24a - 24) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 4a^2 - 12a + 32 = 0 \ (1) \\ -6a^2 + 24a - 24 = 0 \quad (2) \end{cases}$

NB : On résous toujours l'équation qui semble la plus facile.

Ainsi résolvons l'équation (2) : $-6a^2 + 24a - 24 = 0 \Leftrightarrow -a^2 + 4a - 4 = 0$

=> $\Delta = 16 - 16 = 0$ => $a = 2$

D'où $Z_0 = a = 2$ est la solution réelle

b- Factorisons P(Z) puis résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation P(Z) = 0

$P(Z) = Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i$

Factorisons : $Z^3 - 4iZ^2 - (6 + i)Z + 3i - 1$

	1	$-4-6i$	$-12+24i$	$32-24i$
2		2	$-4-12i$	$-32+24i$
	1	$-2-6i$	$-16+12i$	0

Z_0 a b c

=> $Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i = (Z - Z_0)(aZ^2 + bZ + c)$

$\Leftrightarrow Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i = (Z - 2)[Z^2 - (2 + 6i) - 16 + 12i]$

D'où $P(Z) = 0 \Leftrightarrow (Z - 2)[Z^2 - (2 + 6i) - 16 + 12i]$

$\Leftrightarrow Z - 2 = 0$ ou $Z^2 - (2 + 6i) - 16 + 12i = 0$

=> $Z - 2 = 0$ => $Z_0 = 2$ ou $Z^2 - (2 + 6i) - 16 + 12i = 0$

D'après la question 1), la résolution de l'équation $Z^2 - (2 + 6i) - 16 + 12i = 0$ donne pour

Solution $Z_1 = \frac{(2 + 6i) + (-6 - 2i)}{2(1)} = -2 + 2i$ et $Z_2 = \frac{(2 + 6i) + (6 - 2i)}{2(1)} = 4 + 2i$

Alors l'ensemble solution de l'équation P(Z) = 0 est $S = \{-2 ; -2 + 2i ; 4 + 2i\}$

Partie B:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(o\ ,i\ ,j)$

On donne les points A(2), B$(4+2i)$ et C$(-2+4i)$.

1) a- Calculons le rapport $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ puis en déduisons la nature du triangle ABC.

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{(-2+4i)-(2)}{(4+2i)-(2)} = \frac{-2+4i-2}{4+2i-2} = \frac{-4+4i}{2+2i} = \frac{-2+2i}{1+i} = \frac{(-2+2i)(1-i)}{2} = \frac{4i}{2} = 2i$$

=> $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ est un imaginaire pur. Alors le triangle ABC est rectangle en A.

b-Montrons que le point F d'affixe $2i$ est le milieu du segment $[AC]$

F est milieu du segment $[AC]$ si $x_F = 0$ et $y_F = 2$

$$x_F = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2-2}{2} = 0 \quad \text{et} \quad y_F = \frac{0+4}{2} = 2$$

D'où le point F d'affixe $2i$ est le milieu du segment $[AC]$

c-Déterminons (Δ) l'ensemble des points du plan d'affixe Z vérifiant :

$|Z-4-2i| = |Z+2-4i|$

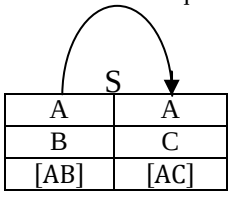
Posons : $\begin{cases} Z_D - 4 - 2i = 0 \\ \text{et} \\ Z_E + 2 - 4i = 0 \end{cases}$ => $\begin{cases} Z_D = 4+2i \\ \text{et} \\ Z_E = -2+4i \end{cases}$ => $\begin{cases} D\binom{4}{2} \\ \text{et} \\ E\binom{-2}{4} \end{cases}$

Alors L'ensemble (Δ) des points M cherché est la médiatrice du segment $[DE]$

2) Soit S la similitude du plan telle que $S(A) = A$ et $S(B) = C$.

a- Déterminons le rapport k et l'angle θ de la similitude S

La traduction schématique d'une similitude directe S qui transforme A en A et B en C est :



Rapport $k = \frac{[AC]}{[AB]} = \left|\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = \left|\frac{(-2+4i)-(2)}{(4+2i)-(2)}\right| = \frac{|-4+4i|}{|2+2i|} = \frac{\sqrt{16+16}}{\sqrt{4+4}} = \sqrt{2}$

- Angle θ = $arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right)$ = $arg\left(\frac{-4+4i}{2+2i}\right)$ = $arg\ (2i)$ = $\frac{\pi}{2}$

b- Détermine l'expression de la bijection complexe associée à la similitude S.

L'écriture complexe f associée à S est : $f(Z) = aZ + b$.

La traduction algébrique d'une similitude directe S qui transforme A en C et B en D est :

$S(A) = A$ et $S(B) = C \Leftrightarrow \begin{cases} aZ_A + b = Z_A & (1) \\ aZ_B + b = Z_C & (2) \end{cases}$ on a : (1) – (2) => $a(Z_A - Z_B) = Z_A - Z_C$

=> $a = \frac{Z_A - Z_C}{Z_A - Z_B} = \frac{-4+4i}{2+2i} = 2i$. Dans (2) on a: $aZ_B + b = Z_C$ => $b = Z_C - aZ_B$

=> $b = (-2 + 4i) - (2i)(4 + 2i)$ => $b = 2 - 4i$. D'où $f(Z) = 2iZ + 2 - 4i$

c- En déduisons l'affixe du centre Ω de S.

Soit ω l'affixe du centre de Ω tel que : $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{2-4i}{1-(2i)} = \frac{10}{(1)^2+(2)^2} = \frac{10}{5} = 2$

Arithmétiques

OBJECTIFS :

Ce chapitre vise à :

• approfondir les notions d'arithmétique vues au premier cycle ;

• mettre en place la congruence dans $\mathbb{Z}$ et l'utiliser pour Résous des problèmes ;

• mettre en œuvre des techniques d'algorithme et de raisonnement pour Résous des problèmes d'arithmétique.

Commentaire général

L'arithmétique, par opposition à l'analyse qui développe la notion du " continu", met en relief le caractère discret de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

On mettra en évidence des raisonnements très utiles en arithmétique : la récurrence, la disjonction des cas et la démonstration par l'absurde.

Les notions de décomposition en produit de facteurs premiers, de PPCM, de PGCD, de nombres premiers et de diviseurs ont été abordées en cinquième et en quatrième.

Ce cours sera l'occasion d'approfondir ces acquis en les formalisant.

L'arithmétique est un chapitre qui donne l'occasion d'évoquer d'illustres mathématiciens (Fermat, Bézout, Gauss,…) et de rencontrer des problèmes (nombres amiables, nombres parfaits, nombres de Mersenne,….) qui contribueront à consolider la culture mathématique de l'élève.

Volumes horaire : 18 heures

1. DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Multiples d'un entier relatif. • Notation n $\mathbb{Z}$. • Diviseurs d'un entier relatif.	• Démontre qu'un entier est divisible par un entier donné. • Détermine l'ensemble des diviseurs d'une entier naturel non nul.

Remarques et suggestions

On ne parlera pas des structures de groupe et d'anneau. La propriété " si a divise b et c, alors a divise $pb + qc$" est très efficace dans les exercices.

2. DIVISION EUCLIDIENNE

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
•Division euclidienne dans IN. • Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.	• Détermine le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier relatif par un entier naturel non nul.

Remarques et suggestions

On pourra effectuer la division euclidienne d'un entier relatif par un entier relatif non nul si le niveau de la classe le permet. Cependant, ceci n'est pas au programme.

La démonstration de l'existence et de l'unicité de la division euclidienne, mettant en œuvre la notion de plus petit élément, pourra être faite.

3. CONGRUENCE MODULO n

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
•Définition. • Propriété de conformité avec les opérations.	• Utiliser les propriétés des congruences pour Résous des problèmes de divisibilités.

Remarques et suggestions

Les congruences permettent de Résous de nombreux problèmes d'arithmétique, en particulier, la recherche de restes de divisions euclidiennes, les problèmes de divisibilité, les résolutions d'équations ainsi que la justification des critères de divisibilité vus au premier cycle. Il est parfois judicieux d'utiliser les nombres négatifs (par exemple : $90 \equiv -1\ [13]$ est parfois plus intéressent que $90 \equiv 12\ [13]$ dans la détermination des restes.

On prendra garde de ne pas opérer de division avec les congruences à cause de l'existence éventuelle de diviseurs propres de zéro (par exemple : $2x \equiv 6\ [10]$ n'est pas équivalent à $x \equiv 3\ [10]$. Les équations avec congruence faisant intervenir des carrés, des cubes, des puissances,…. Pourront faire l'objet d'exercices d'approfondissement à condition que les élèves soient guidés. Mais en aucun cas, elles ne feront l'objet d'une évaluation.

4. NOMBRES PREMIERS

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
•Définition. • L'ensemble des nombres premiers est infini. • Décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers	• Démontre qu'un nombre est premier. • Détermine l'ensemble des diviseurs d'un entier naturel non nul. • Décomposer un entier en produit de facteurs premiers.

Remarques et suggestions

La démonstration de la propriété "l'ensemble des nombres premiers est infini" est un exemple d'utilisation du raisonnement par l'absurde.

Le théorème de l'existence et de l'unicité de la décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers sera admis.

5. PGCD, PPCM

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
•Définition et propriétés. • Algorithme d'Euclide. • Nombres premiers entre eux. • Théorème de Bézout. • Théorème de Gauss	• Détermine le PGCD de deux nombres : - à l'aide de l'algorithme d'Euclide ; - à l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers. • Détermine le PPCM de deux nombres : - à l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers ; - à l'aide du PGCD. • Utiliser le théorème de Bézout pour Démontre que des entiers sont premiers entre eux. • Utiliser le théorème de Gauss pour Résous des problèmes d'arithmétique.

Remarques et suggestions

La numération se limitera exclusivement aux bases 2et 10. La base 2, qui a des applications en informatique, constituera un exemple de base autre que 10 qui permettra de mieux cerner la décomposition d'un nombre dans une base donnée.

I) Introduction et Définition :

1) Introduction

On peut considérer que, dès l'époque préhistorique, les hommes ont utilisé leurs doigts pour compter ou effectuer des calculs sommaires. L'emploi de symboles pour désigner les nombres apparaît sans doute en Mésopotamie, vers 2000 av. J.-C, où l'on a retrouvé des tablettes babyloniennes couvertes de chiffres en base 60. Puis viennent les systèmes de numération égyptiens, grecs et romains. **C'est en Grèce qu'est fondée l'arithmétique théorique par les pythagoriciens au VIe siècle av. J.-C.** À cette époque, les mathématiciens grecs savent déjà manipuler des notions arithmétiques comme les proportions, les moyennes, ou encore les progressions. Tout ce savoir a été, par la suite, regroupé dans les ***Éléments*** **d'Euclide**.

2) Définition

L'Arithmétique est la branche des mathématiques qui étudie les propriétés des **Nombres Entiers Naturels** $\mathbb{N}$, des **Entiers Relatifs** $\mathbb{Z}$ et des **Nombres Rationnels** $\mathbb{Q}$.

II) Rappel sur les ensembles $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$

En arithmétique, on utilise trois types de nombres : les **Nombres Entiers Naturels** $\mathbb{N}$; les **Nombres Entiers Relatifs** $\mathbb{Z}$ et les **Nombres Rationnels** $\mathbb{Q}$.

1) Ensemble des Nombres entiers naturels :

L'ensemble des entiers naturels, noté : $\mathbb{N}$ est défini en extension comme suite :

$\mathbb{N} = \{ \mathbf{0} \ ; \ \mathbf{1} \ ; \ \mathbf{2} \ ; \ \mathbf{3} \ ; \dots\dots\dots \ ; \ \boldsymbol{n} \ ; \ (\boldsymbol{n+1}) \ ; \dots\dots \}$

On défini dans $\mathbb{N}$ deux lois de compositions internes:

- **L'addition** : $\forall\, a \in \mathbb{N}$ et $\forall\, b \in \mathbb{N}$, $a + b = S \in \mathbb{N}$.
- **La multiplication** : $\forall\, a \in \mathbb{N}$ et $\forall\, b \in \mathbb{N}$, $a \times b = p \in \mathbb{N}$.

Exemple : $2 + 1 = 3 \in \mathbb{N}$ et $4 \times 3 = 12 \in \mathbb{N}$

On défini aussi dans $\mathbb{N}$ une relation d'ordre, c'est-à-dire que pour tout a et b de $\mathbb{N}$, on a :

Soit $a \leq b$, soit : $b \leq a$.

Propriétés

P$_1$: $\mathbb{N}$ a un plus petit élément noté 0.

P$_2$: $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément.

P_3 : Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément.

2) Ensemble des Nombres entiers relatifs :

L'ensemble des entiers relatifs, noté : $\mathbb{Z}$ est défini en extension comme suite :

$\mathbb{Z} = \{ -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; \ldots\ldots ; n ; -n ; (n+1) ; -(n+1), \ldots . \}$

Cet ensemble a la structure d'un **anneau commutatif unitaire** :

On défini dans $\mathbb{Z}$ deux lois de composition interne : **une addition et une multiplication.**

Propriétés :

P_1 : L'addition est commutative associative dans $\mathbb{Z}$ et admet un élément neutre qui est 0.

P_2 : La multiplication est commutative associative dans $\mathbb{Z}$ et admet un élément neutre qui est 1.

P_3 : La multiplication est distributive par rapport à l'addition : $a \bullet (b + c) = ab + ac$.

P_4 :L'existence d'un élément symétrique – a, c'est-à-dire que a + (−a) = 0.

NB :

L'anneau est unitaire à cause de l'existence de l'élément neutre "1" de la multiplication.

$(\mathbb{Z} ; +)$ est un groupe commutatif.

$(\mathbb{Z} ; + ; \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

On défini dans $\mathbb{Z}$ une **relation d'ordre** $(\leq)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
2) $a \leq b \text{ et } c > 0 \Rightarrow ac \leq bc$
3) $a \leq b \text{ et } c < 0 \Rightarrow ac \geq bc$

D'autres propriétés de $\mathbb{Z}$, que nous admettrons sans preuve sont :

P_1- Toute partie de $\mathbb{Z}$ qui est non vide et qui est majorée, a un plus grand élément.

P_2- Toute partie de $\mathbb{Z}$ qui est non vide et qui est minorée a un plus petit élément.

P_3- Si a et b sont deux entiers relatifs, et b est non nul, il existe un entier relatif n où $nb \geq a$.

3) Ensemble des Nombres rationnels :

L'ensemble des nombres rationnels, noté : $\mathbb{Q}$ est un ensemble qui est défini en extension comme suite : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{P}{Q} \ , \ P \in \mathbb{Z} \ ; \ q \in \mathbb{Z}^*\right\}$

NB : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

III) Raisonnement par récurrence :

Principe :

Pour Démontre qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n, on procède de la façon suivante :

- **1ère Etape :(Initialisation):**

On vérifie que la proposition P_n est vraie pour le terme initial, c'est-à-dire : (P_0 est vraie).

- **2ère Etape :(Transmission) :**

On suppose que la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel et ensuite on démontre qu'elle est vraie à l'ordre $n + 1$. C'est-à-dire P_{n+1} est vraie.

- **3ère Etape :(Conclusion) :**

On conclu qu'alors : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

IV) Division Euclidienne dans $\mathbb{N}$

1) Définition :

Soient a et b deux entiers naturels **($b \neq 0$).**
On appelle division Euclidienne de l'entier naturel a par l'entier naturel , toute opération visant à Détermine un couple unique (q ; r) $\in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tel que $a = bq + r$.
Avec : $0 \leq r < b$.

2) Notation :

- **q :** est appelé le quotient de la division Euclidienne de l'entier **a** par l'entier **b.**
- r **:** est appelé le reste de la division Euclidienne de l'entier a par l'entier b.

3) Propriétés :

P_1 : Si *b* divise, alors le reste r est nul (r = 0) . Ainsi : $\boldsymbol{a = bq}$.

P_2 : Si *b* divise, alors pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, *b* divise $\boldsymbol{na}$ **.**

V) Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Multiples et diviseurs d'un entier relatif :

a- Définitions :

Soient a et b deux entiers relatifs.

- On dit que *a* est un multiple de, s'il existe un entier relatif *k* tel que : $\boldsymbol{a = kb}$.
- On dit que *b* est un diviseur de, si $\boldsymbol{a = qb}$ (où *q* est le quotient de la division).

NB :

- 0 est un multiple de tout entier relatif.
- Tout entier relatif non nul divise 0, mais il ne divise aucun entier relatif.
- Si $b \neq 0$, on dit que *b* est un diviseur de *a* ou que *b* divise a. On note : $b \mid a$.

b- Propriété :

Soient $\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{c}$ trois entiers tel que $\boldsymbol{a \neq 0}$**.**

Si $\boldsymbol{a}$ divise $\boldsymbol{b}$ et a divise $\boldsymbol{c}$, alors pour tout entier $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$, **a** divise la combinaisons linéaire $\boldsymbol{bu + cv}$.

VI) Système de numération

1) Définition :

Soit b un entier naturel tel que b ≥2. Tout entier naturel *x* peut s'écrire de façon unique

telque : $\boldsymbol{x = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots\ldots + a_p b^p = \sum_{k=0}^{p} a_k b^k}$ avec $\boldsymbol{a_k \in \mathbb{N}}$**.**

Ainsi si $\boldsymbol{0 \leq a_k < b}$ et $\boldsymbol{a_p \neq 0}$, on peut écrire : $\boldsymbol{x = \overline{a_p a_{p-1} \ldots . a_1 a_0}^{b}}$**.**

Cette écriture de *x* est appelée *x* dans la base b .

2) Propriétés :

P_1 : Par convention , dans le système décimal (**appelé aussi à base 10**), les nombres sont écrits à l'aide des dix chiffres décimaux , à savoir : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9.

C'est-à-dire tout nombre sans barre, est écrit en base 10.

Exemple :

$3201 = \overline{3201}^{10} = 1\times10^0 + 0\times10^1 + 2\times10^2 + 3\times10^3 = 1 + 0 + 200 + 3000 = 3201$

Donc, les chiffres **1 ; 0 ; 2 ; 3** sont les coefficients respectifs des puissances croissantes de la base 10.

P_2 : Au Delas des 10 chiffres décimaux, on peut adopter les lettres : A ; B ; C ; D ; E...etc. pour : 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 …..etc.

3) Changement de base :

a- Système binaire ou système en base 2 :

Dans le système binaire les symboles utilisés sont : 0 et 1

b- Système octal ou système en base 8 :

Dans le système octal les symboles utilisés sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

c- Système hexadécimal ou système en base 16 :

Dans le système hexadécimal les symboles utilisés sont : 0 ; 1 ; 2 ;….9 ; A ; B ; C ; D , E ; F

VII) Congruence Modulo n

Considérons les nombres entiers relatifs ci-dessous, où n est un entier naturel supérieur à 1,

$a = -2n + 1$ et $b = 15n + 1$. Des relations ci-dessus, on note que :

- a et b ont un même reste (à savoir 1) lorsqu'ils sont divisés par n
- $a - b = -2n-(15n) = -17n$, c'est-à-dire que a – b est un multiple de n.

De ces observations, nous donnons la définition de la congruence modulo n comme suite :

1) Définitions :

Définition 1:On dit que l'entier relatif a est congru à l'entier relatif b, modulo n, si la division de a par n, et celle de b par n, ont le même reste. Ceci est symbolisé par : $\boldsymbol{a \equiv b(n)}$.

Définition 1 : On dit que l'entier relatif a est congru à l'entier relatif b, modulo n, si la différence $a - b$ est un multiple de n. Autrement dit $\boldsymbol{a \equiv b(n)} <=> \exists\, k \in \mathbb{Z}\,; a - b = kn$.

Remarque : $a \equiv b(n) \Leftrightarrow a = kn + b$ c'est-à-dire le reste de la division euclidienne de a par n est b.

2) Propriétés :

La relation de congruence modulo n est une **relation d'équivalence**, car elle met en évidence les propriétés suivantes :

P_1 : la relation de congruence modulo n est **Réflexive**, c'est-à-dire :

$\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}$, $\boldsymbol{on\ a}$: $\boldsymbol{a \equiv a[n].}$

P_2 : la relation de congruence modulo n est **Symétrique**, c'est-à-dire :

$\forall (\boldsymbol{a}\ ;\ \boldsymbol{b}) \in \mathbb{Z}^{\boldsymbol{2}}$, $\boldsymbol{Si\ a \equiv b[n]}$ **Alors** $\boldsymbol{b \equiv a[n]}$

P_3 : la relation de congruence modulo n est **Transitive**, c'est-à-dire :

$\forall (\boldsymbol{a}\ ;\ \boldsymbol{b}\ ;\ \boldsymbol{c}) \in \mathbb{Z}^{\boldsymbol{3}}$, $\boldsymbol{Si\ a \equiv b[n]}$ **et** $\boldsymbol{b \equiv c[n]}$ **alors** $\boldsymbol{a \equiv c[n]}$ **.**

3) Autres propriétés caractéristiques :

P_1 : $a \equiv b[n] => n$ divise $a - b$

P_2 : $a \equiv b[n] <=> \forall k \in \mathbb{N},\ ka \equiv kb[n]$

P_3 : $a \equiv b[n] <=> \forall p \in \mathbb{N},\ a^p \equiv b^p[n]$

4) Congruences particulières (Critères de divisibilité) :

a- Divisibilité par 2

Un entier N est divisible par 2 si et seulement si son chiffre des unités simples est pair, c'est-à-dire si l'entier x est terminé par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8.

b- Divisibilité par 3 et par 9

Un entier N est divisible par 3 (respectivement par 9) si et seulement si la somme de ces chiffres est divisible par 3 (respectivement par 9).

c- Divisibilité par 5

Un entier N est divisible par 5 si et seulement si cet entier est terminé par 0 ou 5.

d- Divisibilité par 11

Un entier N est divisible par 11 si et seulement si la différence de la somme des chiffres de rang pair et de la somme des chiffres de rang impair est divisible par 11.

e- Divisibilité par 4 et par 25

Un entier N est divisible par 4 (respectivement par 25) si et seulement si le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4 (respectivement par 25).

VIII) Congruence et structure d'anneau (Ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) :

1) Classe d'équivalence modulo n

a- Définition :

Lorsqu'un nombre quelconque x de $\mathbb{Z}$ est divisé par un entier naturel n, les restes possibles sont : $\mathbf{0}$; $\mathbf{1}$; $\mathbf{2}$; ... ; $\boldsymbol{n-1}$.

On dit qu'un élément x de $\mathbb{Z}$ appartient à la **classe $\dot{p}$ modulo n** si : $x \equiv p \; avec \; n-1 \geq 0$.

D'une manière générale, si$x$ est un élement de $\mathbb{Z}$, alors la classe de x modulo n est l'ensemble de tous les éléments de $\mathbb{Z}$ qui ont le même reste que x dans la division par n ; on le note $\boldsymbol{cl(x)} = \dot{\boldsymbol{x}}$ tel que : $\boldsymbol{cl(x)} = \dot{\boldsymbol{x}} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{Z} / \; \boldsymbol{x-y} \equiv \boldsymbol{0}[\boldsymbol{n}]\}$

b- Ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

L'ensemble des classes $\dot{p}$ modulo n est noté par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et s'appelle groupe quotient de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ **tel que :** $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\dot{0} \; ; \; \dot{1} \; ; \; \dot{2} \; ; \; \dot{3} \; ; \; \ldots\ldots \dot{\overline{n-1}}\}$.

2) Propriétés dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

a- Propriétés (Addition) :

1) L'associativité : $\dot{x} + (\dot{y} + \dot{z}) = (\dot{x} + \dot{y}) + \dot{z}$
2) La commutativité : $\dot{x} + \dot{y} = \dot{y} + \dot{x}$
3) L'élément neutre : $\dot{0}$ $\left(car \; \dot{x} + \dot{0} = \dot{\overline{x+0}} = \dot{x}\right)$
4) L'élément : $\dot{\overline{-x}}$, symétrique de x (car $\dot{\overline{-x+x}} = \dot{0}$

b- Propriétés (Multiplication) :

1) L'associativité : $\dot{x} \times (\dot{y} \times \dot{z}) = (\dot{x} \times \dot{y}) \times \dot{z}$

2) La commutativité : $\dot{x}\times\dot{y}=\dot{y}\times\dot{x}$

3) L'élément neutre : $\dot{1}$ (car $\dot{1}\times\dot{x}=\overbrace{\dot{1}\times\dot{x}}^{\dot{}}=\dot{x}$)

4) La distributivité par rapport à l'addition, soit : $\dot{x}\times(\dot{y}+\dot{z})=(\dot{x}\times\dot{y})+(\dot{x}\times\dot{z})$

NB :

On dit qu'un anneau commutatif unitaire A est **intègre** si pour tout x, y de A, on a :

$x \times y = 0 \Rightarrow x = 0 \ ou \ y = 0$

Lorsque l'anneau n'est pas intègre, il existe $x \ et \ y$, tous non nuls, dont le produit est zéro. On dit alors que $x \ et \ y$ sont des **diviseurs de zéro**.

IX) Nombre entier naturel premier :

1) Définition :

On dit qu'un nombre entier naturel p est premier s'il a exactement deux diviseurs, 1 et p.

D'une manière générale :

Pour Montre qu'un nombre entier naturel p est premier, il suffit de le diviser par les entiers naturels premiers successifs qui lui sont inférieur afin d'obtenir un entier premier d qui ne le divise pas avec **($d^2 < a$)**

2) Théorèmes :

Théorème1 : Tout entier naturel n supérieur à 1, admet au moins un diviseur premier.

Théorème 2 : L'ensemble des nombres premiers est infini.

Théorème 3 :
Tout entier naturel n supérieur à 1 admet au moins un diviseur premier d tel que : $1 < d^2 \leq n$

NB :

L'ensemble des nombres premiers compris entre 1 et 100 peut s'obtenir par **l'algorithme d'Eratosthène** que nous décrivons comme suit :

1) On construit une table des nombres allant de 1 à 100.
2) On élimine le nombre 1 qui n'est pas premier
3) On garde le nombre 2 et on élimine de la table tous ses multiples
4) Le nombre suivant non éliminé est 3, que l'on garde. On élimine de la table tous les multiples de 3;

5) On procède ainsi jusqu'au nombre 100 .
6) Les nombres non éliminés de la table sont tous premiers.

On obtient alors la table suivante :

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

<u>Théorème 4</u> : (**Décomposition d'un nombre entier en produit de facteur premier**).

Tout entier naturel supérieur à 1 se décompose de façon unique comme un produit de facteurs premiers. La décomposition prend la forme générale : $\boldsymbol{n = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} P_3^{\alpha_3} \ldots . P_k^{\alpha_k}}$ où α_i est le nombre de termes de valeur P_i contenus dans n.

X) PPCM et PGCD de deux entiers naturels a et b :

1) Plus Petit Commun Multiple (PPCM)

a- Définition :

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. On appelle plus petit commun multiple de a et b, le plus petit élement strictement positif de ($a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$).

Notation :

Le plus petit commun multiple de a et b peut être noté comme suit:

PPCM (a ; b) = (a V b) = m .

b- Propriétés

P_1: $\forall$ (a ; b) $\in$ $\mathbb{Z}^2$; PPCM(a ; b) = PPCM($|a|$; $|b|$)

C'est à dire cherché le PPCM de deux entiers relatifs, revient à cherché le PPCM de deux entiers naturels non nuls.

P_2: $\forall$ (a ; b) $\in$ $(\mathbb{N}^*)^2$, on a : m(a ; b) $\leq$ PPCM(a ; b) $\leq$ $a \bullet b$

P_3: $\forall$ (a ; b) $\in$ $(\mathbb{N}^*)^2$, on a : PPCM(a ; b) = a < = > $a \in$ ($b\,\mathbb{Z}$).

Exemple : PPCM (12 ; 4) = 12 < = >12 $\in$ (4 $\mathbb{Z}$).

P_4 : L'ensemble des multiples communs de deux entiers naturels non nuls a et b est l'ensemble des multiples de leurs PPCM, c'est-à-dire si PPCM (a ; b) = m ; alors : ($\mathbb{Z} \cap b\,\mathbb{Z}$) = $m\mathbb{Z}$.

Exemple : PPCM (12 ; 16) = 48 donc ($12\mathbb{Z} \cap 16\mathbb{Z}$) = $48\mathbb{Z}$.

P_5 : Soit a ; b et k trois entiers naturels non nuls. On a : PPCM (ka ; kb) = kPPCM(a ; b)

Exemple : PPCM(120 ; 168) = PPCM(24×5 ; 24×7) = 24 = 24•PPCM(5 ; 7) = 24×35

= >PPCM(120 ; 168) = 840

2) Plus Grand Commun Diviseur (PGCD)

a- Définition :

Soient a *et* b deux entiers relatifs non nuls. On appelle Plus Grand Commun Diviseur de a et b, le plus grand élement commun strictement positif de **($a \in \mathbb{Z} \cap b \in \mathbb{Z}$).**

Notation :

Le Plus Grand Commun Diviseur de a et b peut avoir les notations suivantes :

PGCD (a ; b) = ($a \wedge b$) = d = Δ .

b- Propriétés :

P_1 :$\forall$ (a ; b) $\in \mathbb{Z}^2$; PGCD (a ; b) = PGCD (| a | ; | b |)

C'est à dire cherché le PGCD de deux entiers relatifs, revient à cherché le PGCD de deux entiers naturels non nuls.

P_2 : Soient a *et* b deux entiers naturels non nuls. On a :

PGCD (a ; b) = d => D(a ; b) = D_d où D_d désigne l'ensemble des diviseurs de d.

Exemple :

PGCD (24 ; 30) = 6 => PGC D(24 ; 30) = D_6 = { 1 ; 2 ; 3 ; 6 }

P_3 : Soient a ; b et k trois entiers naturels non nuls. On a :

PGCD (ka ; kb) = k PGCD (a ; b) .

Exemple :

PGCD (228 ; 95) = PGCD (19×12 ; 19×5) = 19 PGCD (12 ; 5) = 19×1 = 19

P_4 : Si b > a alors PGCD(a ; b) = PGCD(a ; $b - a$) = PGCD[$b - a$; $a - (b - a)$]

Exemple 1 :

PGCD(143 ;27) = PGCD(27 ; 116) = PGCD(27; 89) = PGCD(77; 62) = PGCD(27;35)

= PGCD(27 ; 8) = PGCD(8 ; 19) = 1

Exemple 2 :

PGCD($2n + 3$; $5n - 2$) = PGCD($3n - 5$; $2n + 3$) = PGCD($n - 8$; $2n + 3$)
= >PGCD($n + 11$; $n - 8$) = PGCD(19 ; $n - 8$) = 19

P_5 :D'après l'algorithme d'Euclide, si $a = bq + r$ (r ≠ 0) alors :

Activité

Consigne : Montre que PGCD$[(5n^3 - n)\ ;\ (n + 2)]$ = PGCD$[(n + 2)\ ;\ 38\ ]$

Synthèse

La division Euclidienne de $(5n^3 - n)\ par\ (n + 2)$ donne pour quotient :

$q = 5n^2 - 10n + 19$ et pour reste $r = -38$.

Puisque : PGCD(a ; b) = PGCD(b ; r) alors on a :

PGCD$[(5n^3 - n)\ ;\ (n + 2)]$ = PGCD$[(n + 2)\ ;\ -38\ ]$ = PGCD$[(n + 2)\ ;\ 38\ ]$

P_6 : Soit (a ; b) ∈ $(\mathbb{N}^*)^2$ et d leur PGCD. Un entier relatif $m$est un multiple de d si et seulement si, il existe deux entiers relatifs u et v tel que $m = au + bv$

Exemple :

38 est un multiple de 19 ; donc il existe un couple $(u\ ;v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$38 = 228u + 95v \Rightarrow 38 = 228(1) + (-2)(95) \Rightarrow u = 1\ et\ v = -2$$

XI) Algorithme d'Euclide :

1) Définition :

Soient a et b deux entiers tels que : $0 <$ b $< a$ et r le reste de la division Euclidienne de a par b.

On appelle **Algorithme d'Euclide**, toute opération visant à Détermine le PGCD des deux entiers $a\ et\ b$ en effectuant les divisions Euclidiennes successives suivantes :

- Division de a par b pour obtenir : a = b$q_0 + r_0$;Avec $0 \leq r_0 < b$.
- Division de b par r_0 pour obténir : b = $r_0 q_1 + r_1$; Avec $0 \leq r_1 < r_0$.
- Division de r_0 par r_1 pour obtenir : $r_0 = r_1 q_2 + r_2$; Avec $0 \leq r_2 < r_1$.

Et ainsi de suite jusqu'à obtention du dernier reste non nul qui correspond au PGCD des deux entiers $et\ b$.

NB : toutes ces opérations peuvent êtres résumées dans un tableau appelé : tableau **d'Algorithme** qui se présente sous la forme :

Quotients	q_0	q_1	q_2	$\ldots\ldots q_{n+1}$
Dividendes	**Diviseurs**	r_0	r_1	$\ldots\ldots r_n$
Restes	r_0	r_1	r_2	$\ldots\ldots r_{n+1}$

XII) Nombres Premiers entre eux ou Nombres étrangers :

1) Définitions :

Définition 1 :

Soient a et b deux nombres entiers relatifs non nuls.

On dit que a et b sont premiers entre eux (ou sont étrangers) si **PGCD ($\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$) = 1.**

Définition 2:

On dit également que a et b sont premiers entre eux (ou sont étrangers) s'ils n'admettent pas de diviseur commun (en dehors de l'unité c'est-à-dire 1).

2) Théorèmes :

- **Théorème 1 : (Théorème de Bézout).**

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. a et b sont étrangers s'il existe un couple ($\boldsymbol{u}$; $\boldsymbol{v}$) $\in \mathbb{N}$ tel que : $\boldsymbol{au + bv = 1.}$

- **Théorème 2 : (Théorème de Gauss).**

Soient a ; b ; et c trois entiers relatifs non nuls. Si a divise bc et que a et b sont premier entre eux c'est-à-dire : (**PGCD ($\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$) = 1**), alors a divise c.

- **Théorème 3 : (Théorème de Fermat).**

Soit $\boldsymbol{a}$ un nombre entier non nul, et $\boldsymbol{p}$ un nombre premier. Si $\boldsymbol{p}$ ne divise pas $\boldsymbol{a}$, alors il s'en suit la congruence suivante : $\boldsymbol{a^{p-1} \equiv 1[\,p\,]}$

- **Théorème 4 :**

Si a et b sont premiers entre eux (PGCD **($\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$) = 1**) et si a et b divisent c, alors le produit ab divise c.

- **Théorème 5 :**

Si a et b sont premiers entre eux (PGCD **($\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$) = 1**), alors PPCM (a ; b) = ab

3) Relation Entre PGCD et PPCM :

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux entiers naturels non nuls. Si $\boldsymbol{d}$ et $\boldsymbol{m}$ désignent respectivement le

PGCD et le **PPCM** des entiers naturels : $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$, on a : $a \bullet b = m \bullet d$

Ainsi il existe deux entiers a' et b' premiers entre eux (**PGCD ($\boldsymbol{a}'$; $\boldsymbol{b}'$) = 1**) tel que :

$a = a' \bullet d$ et $b = b' \bullet d$ $=> a \bullet b = d^2 \bullet a'b'$

Puisque a' et b' sont premiers entre eux (**PGCD ($\boldsymbol{a}'$; $\boldsymbol{b}'$) = 1**), alors on a le théorème

Suivant : **PPCM ($\boldsymbol{a}'$; $\boldsymbol{b}'$) = $\boldsymbol{a}' \bullet \boldsymbol{b}'$**

XIII) Résolution dans $\mathbb{Z}^2$ des équations Diophantiennes

Equations du type ($\boldsymbol{ax + by = c}$)

1) Définition :

On appelle équation Diophantienne, toute équation de $\mathbb{Z}^2$ dont l'ensemble solution se présente sous forme de couple(x ; y).

Résolution d'un cas particulier : Equation du type a$\boldsymbol{x}$ + b$\boldsymbol{y}$ = $\boldsymbol{c}$.

$ax + by = c$ où : a ; b ; c sont tous des entiers (avec $a$et b non nul)

Théorème

L'équation : $ax + by = c$, admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ si et seulement si c est un multiple du PGCD(a ; b).

2) Résolution

Pour Résous de telles équations, nous pouvons utilisez deux méthodes :

La méthode par Congruence ou La méthode d'algorithme

Exercices

Raisonnement par récurrence.

1 Démontre par récurrence les propositions suivantes :

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, on\ a : 2^n > n$.
2) $\forall n \in \mathbb{N}, on\ a : 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, on\ a : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots . + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2 Démontre par récurrence que :

1- $\forall n \in \mathbb{N}, on\ a : 3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.
2- $\forall n \in \mathbb{N}, on\ a : 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

Division euclidienne dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{Z}$.

3 1) Détermine dans chacun des cas suivants, le quotient et le reste la division Euclidienne de l'entier a par l'entier b.

a- $a = 3453$ et $b = 13$; **b-** $a = 354870$ et $b = 15$; **c-** $a = -317$ et $b = 21$

2) Calcule le quotient et le reste de la division euclidienne de 430 par 38.
Peut-on en déduis, sans effectuer une nouvelle division, le quotient et le reste de la division de 860 par 76 ?

4 1) 1235 personnes (**hommes + femmes**) doivent voyagées dans des cars de 45 places.

Combien faut-il de cars, et combien de personnes rempliront le car non plein ?

2) Nous étions vendredi 1er septembre 2006. Quel jour de la semaine serons-nous le 1er septembre 2007 ? Le 1er septembre 2008 ? Le 1er septembre 2009 ?

5 1) La somme de deux entiers naturels a et b avec $(a > b)$ est 444. La division Euclidienne de a par b donne $q = 4$ pour quotient et $r = 24$ pour reste. Détermine les entiers a et b.
2) Soient deux entier naturels a et b $(a > b)$. La division Euclidienne de a par b donne pour quotient $q = 6$ et $r = 47$ pour reste. Par ailleurs $a + b + r = 591$. Détermine a et b.
3) Quelle peuvent être le diviseur et le reste d'une division Euclidienne dont le dividende est 542 et le quotient est 12 ?
4) La division Euclidienne de l'entier naturel a par b donne pour quotient q et pour reste r. D'autre par $(a + 15)$ diviser par $(b + 5)$ donne q pour quotient et r pour reste. Détermine q.

Multiples – Diviseurs et Critères de divisibilité dans $\mathbb{Z}$.

6

1) Donnez tous les multiples de 7 (ou expression…)
2) Donnez tous les multiples de 1
3) Donnez tous les multiples de 0
4) Comment s'écrivent les nombres pairs, les nombres impairs ?
5) Les nombres 12 et 18 sont ils des diviseurs de 2772 ?
6) Trouve un entier naturel qui soit diviseur de 48 sans être diviseur de 12.
7) Combien y-a-t'il de multiples de 17 entre 1 000 et 2 500 ?

7

1) Détermine le chiffre x pour que $\overline{53x2}$ soit divisible par 9.
2) Détermine le chiffre y pour que $\overline{53y4}$ soit divisible par 3 et 4.

8 On considère l'entier naturel N qui s'écrit $\overline{53x4}^8$

Détermine x tel que :

a) N soit divisible par 7

b) N soit divisible par 6.

c) En déduis la valeur de x pour que N soit à la fois divisible par 6 et par 7.

PGCD et PPCM.

9 Dans chacun des cas suivants, Détermine le PGCD et le PPCM des réels a et b.

a- $a = 24$ *et* $b = 33$; **b-** $a = 48$ *et* $b = 46$; **c-** $a = 1455$ *et* $b = 335$

10 Montre dans chacun des cas suivants que:

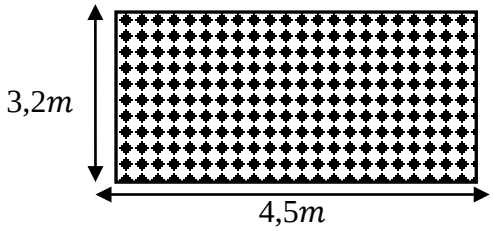
1) PGCD($2n + 3$; $5n - 2$) = 19
2) Montre que PGCD[$(5n^3 - n)$; $(n + 2)$] = PGCD[$(n + 2)$; 38]

11 Deux voitures A et B démarrent en même temps d'une même ligne de depart et font plusieurs tours d'un même circuit. La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes.

1) Determine un autre moment (autres que le depart!) où les voitures A et B se croisent sur la ligne de depart.
2) Precise le nombre de tours effectués par chaque voiture.

12 1) Détermine le PGCD de 450 et 320.

2) Une maison a pour dimensions 4,5m et 3,2m. On souhaite carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe comme l'indique la figure suivante :



3) Quel est le plus grand côté possible (en cm) de la dalle carrée ?

13 On dispose d'une feuille de papier. On découpe dans cette feuille le plus grand carré possible. Dans le morceau restant, on découpe encore le plus grand carré possible, et ainsi de suite….

On continue à découper le plus grand carré possible jusqu'à ce que le morçeau restant soit lui meme un carré.

1) Quelle est la taille du dernier carré si les dimensions de la feuille initiale sont 192 cm sur 84 cm?
2) Même question si les dimensions initiales sont deux entiers quelconques.

14 On considère l'équation (E) définie par : $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$, $35x - 27y = 2$.

1) a- Vérifier que $(-20\,;\,-26)$ est solution de (E).
   b- Démontrer que les solutions de (E) sont les couples $(x\,;y)$d'entiers relatifs vérifiant : $x = 27k - 20$ et $y = 35k - 26$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2) Dans un village il ya deux fétiches **Bolifing** et **Boliblen**. Le fétiche **Bolifing** est adoré tous les 140 jours et le fétiche **Boliblen** tous les 180 jours. Les jours où les cultes coïncident sont appelés jours de grâce. Un matin, le village a adoré le fétiche **Boliblen.**
   Déterminer le nombre de jours qui séparent ce matin-là du prochain jour de grâce sachant qu'ils avaient adoré le fétiches **Bolifing** 8 jours auparavant.

15 Δ et m désignent respectivement le PGDC et le PPCM des entiers a et b.

Détermine l'ensemble des couples $(a\,;b)$ d'entiers relatifs vérifiant les conditions données ci-dessous :

1) $\begin{cases} a+b=168 \\ \Delta=21 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} m+3\Delta=276 \\ 10<\Delta<30 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} a^2-b^2=405 \\ 3m=a\bullet b \end{cases}$

16 Montre que l'équation : $(x\ ;\ y)$ de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$: $6y - 3x = m$ admet des solutions si et seulement si m est un multiple de 3.

1) Résous dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ les équations suivantes :
   a- $6y - 3x = 5$.
   b- $6y - 3x = 3$.
2) Déduis de ce qui précède les solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de l'équation :
   $(6y - 3x - 4)(6y - 3x + 4) = 1$.

17 Pour tout entier naturel n, on considère les nombres :
$a_n = 4\times10^n - 1$; $b_n = 2\times10^n - 1$ $c_n = 2\times10^n + 1$

a) Calcule : a_i ; b_i ; c_i pour $i \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$.

b) Démontre que a_n et c_n sont divisibles par 3

c) Démontre que b_2 est un nombre premier.

d) Démontre que pour tout entier naturel n, on a : $b_n \times c_n = a_{2n}$. En déduis la décomposition en produit de facteurs premiers de a_4

e) Démontre que : PGCD$(b_n\ ;c_n)$ = PGCD$(b_n\ ;2)$. En déduis que b_n et c_n sont premiers entre eux c'est-à-dire sont étrangers.

18 1) On considère l'équation (1) d'inconnue $(x\ ;\ y)$ de $\mathbb{Z}^2$: $11x - 24y = 1$.

   a- Justifie à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.
   b- En utilisant l'algorithme d'Euclide, Détermine une solution particulière de (1).
   c- Détermine l'ensemble solution de l'équation (1)

2) Recherche du PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

a- Justifie que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.
b- $(x\ ;\ y)$ désignant un couple quelconque d'entiers naturels solution de (1), Montre que l'on peut écrire : $(10^{11x} - 1) - 10(10^{24y} - 1) = 9$.
c- Montre que $10^{11} - 1$ divise $10^{11x} - 1$.
   (On rappelle que : $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots\ldots + 1)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
d- Déduis de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :
   $(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9$.
e- Montre que tout diviseur commun à $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$ divise 9.
f- Déduis des questions précédentes le PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

Système de numération

19

1) Donner l'écriture de : **a)** A = $\overline{231}^4$; **b)** B = $\overline{1001}^2$; **c)** C = $\overline{4\alpha 2}^5$ en base 10.
2) Ecris la suite des 10 premiers nombres entiers en base 2 puis en base 4.
3) En base 12, on désigne par A le chiffre correspondant à 10, par B celui correspondant à 11. Ecris la suite des cinq successeurs de BA9.
4) A s'écrit 23 dans le système décimal et 27 dans un système de base a. Que vaut a ?

20

1) Ecris dans le système décimal le nombre : $\overline{432}^5$
2) Ecris dans le système binaire le nombre : $\overline{127}^{10}$
3) Ecris dans le système décimal le nombre : $\overline{F0A3}^{16}$
4) Sachant que 14 = 13 + 1, écrire14^8 dans le système de base 13.
5) Un nombre s'écrit BABA (Avec : A = 10 et B = 11) dans le système hexadécimal. Ecris ce nombre dans le système octal.

21

Un nombre de (6) chiffres s'écrit en base 7 et comporte comme chiffre de gauche le nombre (1). Un autre nombre de (6) chiffres s'écrit en base 7 et comporte comme chiffre de droite le nombre (1) D'autre par ce nombre est encore le triple du précédent. Détermine les nombres initiaux.

22

Soit x un entier naturel $x \geq 5$ on considère les entiers $n = \overline{100x}$ et n' =$\overline{x001}$ dans le système de base $(x + 1)$

a- Ecris n et n' dans le système de base x.

b- Ecris $n + n'$ dans le système de base x et vérifier que $n + n'$ est divisible par $(x + 1)$ puis donner le quotient q de cette division en base x.

c- Détermine les entiers a et b tel que : $q = \overline{ab}^x \bullet \overline{aaa}^x$.

Congruence modulo n et structure d'anneau

23

1) Complète les congruences suivantes :
   a) 37≡….mod[13] ; **b)** 125≡….mod[100] ; **c)** -5≡….mod[10]
2) Complète les congruences suivantes :
   a) 7≡….mod[10] ; **b)** 7^2 ≡….mod[10] ; **c)** 7^3 ≡….mod[10]

En déduis 7^{401} ≡….mod[10] puis 7^{31} ≡….mod[10]

24

1) Le premier Janvier 2000 était un samedi. Quel jour serons nous le premier Janvier 2100 ?

(2000 ; 2004…..sont bissextiles).

2) Trouve le reste de la division euclidienne par 17 du nombre 200^{539}

25 Sachant que $n \equiv 3[5]$, prouver que $2n^2 - n$ est un multiple de 5.

26 1) Résous dans$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

a- $\dot{4}x = \dot{3}$; **b-** $\dot{1}x^2 + \dot{2}x - \dot{3} = \dot{0}$

2) Résous dans $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2$ le système : $\begin{cases} \dot{3}x + \dot{2}y = \dot{1} \\ \dot{2}x + \dot{5}y = \dot{6} \end{cases}$

Problèmes.

27 Un Champ a la forme d'un trapèze dont les deux bases mesurent respectivement $119m$ et $91m$; les deux autres cotés mesurent $56m$ et $35m$. Pour la clôture, le propriétaire Mr DEMBELE a besoin des poteaux de support à égale distance mesurée en nombre entier de mètre pour un nombre minimum de poteaux, avec un poteau à chaque sommet.

1) a) Quelle est la distance entre deux poteaux quelconques?

b) Détermine le nombre de poteaux nécessaires à la clôture.

2) Selon le type de clôture et la qualité de fil de fer choisi, Mr DEMBELE a dépensé $\overline{\alpha 1630}^{11}$ F (où α = 10) pour un nombre entier x rangées de fil de fer et $\overline{53008}^{9}$ F pour un nombre entier y de jours de mains d'œuvre. Après évaluation Mr DEMBELE s'est rendu compte que le coût total des travaux était de $\overline{656\alpha 5}^{13}$ F et le nombre de rangées de clôture dépassait le nombre de jours de travail.

a) Exprime tous les montants dans le système décimal.

b) Précise le nombre de rangées de fil de fer et le nombre de jours de mains d'œuvre.

28 On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par : $\begin{cases} u_0 = 14 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \end{cases}$

1) Calcule u_1 , u_2 , u_3 et u_4. Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers

Chiffres de u_n ?

2) Montre que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \equiv u_n[4]$

En déduis que $\forall\, k \in \mathbb{N},\ u_{2k} \equiv 2[4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0[4]$.

3) Montre par récurrence que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $2u_n = 5^{n+2} + 3$

29 1) a) Détermine, suivant les valeurs de n, le reste de la division par 7 de l'entier 3^n.
En déduis le reste de la division par 7 de l'entier naturel $(506390)^{128}$

b) Dans le système de numération décimale, on considère l'entier naturel $\overline{651x}$.

Détermine x pour que $(506390)^{128} + \overline{651x}$ soit divisible par 7.

2) a) Détermine le plus grand diviseur commun des nombres 21590 et 9525

b) Détermine l'ensemble des entiers x tels que $34x \equiv 2[15]$.

c) Résous l'équation : $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2\,; 21590x + 9525y = 1270$

d) Quel est le chiffre des unités de l'entiers naturels 7^{1980} écrit dans le système décimal ?

Solutions

Raisonnement par récurrence.

1 Démontrons par récurrence les propositions suivantes :

1) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, on\ a : 2^n > n$.

- **1ère Etape :(Initialisation) :**

Pour $n = 1$; on a : $2^1 = 2 > 1$ (vraie).
Pour $n =$; on a : $2^2 = 4 > 2$ (vraie).

- **2ère Etape :(Transmission) :**

Supposons $2^k > k$ et montrons que $2^{k+1} > k + 1$.

On sait que : $2^k > k$.

En multipliant chaque membre de l'inégalité par 2, on a :

$2\times 2^k > 2k$. Or $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $2k \geq k + 1$ d'où : $2^{k+1} > k + k \geq k + 1$

$2^{k+1} > k + 1$

- **3ère Etape :(Conclusion) :**

D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, on\ a : 2^n > n$.

2) $\forall\, n \in \mathbb{N}, on\ a :\ 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Posons : $P_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n \quad et\ P_n' = \frac{n(n+1)}{2}$

- **<u>1ère Etape :</u>(Initialisation) :**

Pour $n = 1$; on a : $\begin{cases} P_1 = 1 \\ P_1' = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases} => P_1 = P_1'$ (vraie)

Pour $n = 2$; on a : $\begin{cases} P_2 = 1 + 2 = 3 \\ P_2' = \frac{2(2+1)}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{cases} => P_2 = P_2'$ (vraie)

- **<u>2ème Etape :</u>(Transmission) :**

Supposons que la proposition est vraie au rang $n = k$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n = k + 1$.

Pour $n = k + 1$, on a :

$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Or : $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

D'où $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

- **<u>3ème Etape :</u>(Conclusion) :**

$\forall\, n \in \mathbb{N}, on\ a :\ 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, on\ a : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots. + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Posons : $P_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots. + n^2 \quad et\ P_n' = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- **<u>1ère Etape :</u>(Initialisation) :**

Pour $n = 1$; on a : $\begin{cases} P_1 = 1^2 = 1 \\ P_1' = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1 \end{cases} => P_1 = P_1'$ (vraie)

Pour $n = 2$; on a : $\begin{cases} P_2 = 1^2 + 2^2 + = 5 \\ P_2' = \frac{2(2+1)(4+1)}{6} = \frac{30}{6} = 5 \end{cases} => P_2 = P_2'$ (vraie)

- **2ère Etape :(Transmission) :**

Supposons que la proposition est vraie au rang $n = k$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n = k+1$.

Pour $n = k + 1$, on a :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Or $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

D'où $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$

$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

- **3ère Etape :(Conclusion) :**

$\forall n \in \mathbb{N}^*, on\ a : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2 Démontrons par récurrence que :

1) $\forall n \in \mathbb{N}, on\ a :\ 3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

Posons $A_n = 3^{n+3} - 4^{4n+2}$

- 1ère Etape :(Initialisation) :

Pour $n = 0$; on a : $A_0 = 3^3 - 4^2 = 11 \equiv 0[11]$

Pour $n = 1$; on a : $A_1 = 3^4 - 4^6 = -4015 \equiv 0[11]$

- 2ère Etape :(Transmission) :

Supposons que la proposition est vraie au rang $n = k$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n = k+1$.

Pour $n = k+1$, on a : $A_{k+1} = 3^{k+1+3} - 4^{4(k+1)+2} = 3^{k+1+3} - 4^{4k+4+2} =>$

$A_{k+1} = 3^{k+3} \times 3^1 - 4^{4k+2} \times 4^4 = 3^{k+3} \times 3 - 4^{4k+2} \times 4^4$ or $3 \equiv 3[11]$ et $4^4 \equiv 3[11]$

$=> A_{k+1} \equiv (3^{k+3} \times 3 - 4^{4k+2} \times 3)[11] => A_{k+1} \equiv 3(\underbrace{3^{k+3} - 4^{4k+2}}_{A_k})[11]$

Or d'après l'hypothèse de récurrence $A_k \equiv 0[11] => 3A_k \equiv 0[11]$

D'où la relation est vraie à l'ordre $n = k + 1$

- 3ère Etape :(Conclusion) :

$\forall n \in \mathbb{N}, on\ a :\ 3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

2) $\forall n \in \mathbb{N}, on\ a :\ 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

Posons $A_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$

- 1ère Etape :(Initialisation) :

Pour $n = 0$; on a : $A_0 = 3^1 + 2^2 = 7 \equiv 0[7]$
Pour $n = 1$; on a : $A_1 = 3^3 + 2^3 = 35 \equiv 0[7]$

- 2ère Etape :(Transmission) :

Supposons que la proposition est vraie au rang $n = k$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n = k + 1$.

Pour $n = k + 1$, on a : $A_{k+1} = 3^{2(k+1)+1} + 2^{k+1+2} = 3^{2k+2+1} + 2^{k+1+2} =>$

$A_{k+1} = 3^{2k+1} \times 3^2 + 2^{k+2} \times 2^1 = 3^{k+3} \times 9 - 4^{4k+2} \times 2$ or $9 \equiv 2[7]$ et $2 \equiv 2[7]$

$=> A_{k+1} \equiv (3^{2k+1} \times 2 + 2^{k+2} \times 2)[7] => A_{k+1} \equiv 2(\underbrace{3^{2k+1} + 2^{k+2}}_{A_k})[11]$

Or d'après l'hypothèse de récurrence $A_k \equiv 0[7] => 2A_k \equiv 0[7]$

D'où la relation est vraie à l'ordre $n = k + 1$

- 3ère Etape :(Conclusion) :

$\forall n \in \mathbb{N}, on\ a :\ 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

Division euclidienne dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{Z}$.

3 1) Déterminons dans chacun des cas suivants, le quotient et le reste la division Euclidienne de l'entier a par l'entier b.

a- $a = 3453$ et $b = 13$.

Soit q le quotient et r le reste de la division Euclidienne de l'entier a par l'entier b.

On a : $3453 \equiv 8[13]$ => $3453 = 13 \times 256 + 8$

D'où q = 265 et $r = 8$

b- $a = 354870$ et $b = 15$

Soit q le quotient et r le reste de la division Euclidienne de l'entier a par l'entier b.

On a : $354870 \equiv 0[15]$ => $354870 = 15 \times 23658 + 0$

D'où q = 23658 et $r = 0$

c- $a = -317$ et $b = 21$

Soit q le quotient et r le reste de la division Euclidienne de l'entier a par l'entier b.

$-317 \equiv 19[21]$ => $-317 = 21 \times (-16) + 19$ car il ne faut pas oublier que $0 \leq r < |b|$

D'où q = -16 et $r = 19$

2) a- Calculons le quotient et le reste de la division euclidienne de 430 par 38.

Soit q le quotient et r le reste de la division Euclidienne de l'entier a par l'entier b.

$430 \equiv 12[38]$ => $430 = 38 \times 11 + 12$

D'où q = 11 et $r = 12$

b- Peut-on en déduis, sans effectuer une nouvelle division, le quotient et le reste de la division de 860 par 76 ?

$430 = 38 \times 11 + 12 \Leftrightarrow 2 \times (430) = 2 \times 38 \times 11 + 2 \times 12 \Leftrightarrow 860 = 76 \times 11 + 24$

On en déduit donc que, dans la division de 860 par 76, le quotient vaut 11 et le reste 24.

4 1) 1235 personnes (hommes + femmes) doivent voyagées dans des cars de 45 places.

Déterminons le nombre de cars nécessaire, et le nombre de personnes qui rempliront le car non plein

La division euclidienne de 1235 par 45 fourni : $1235 = 45 \times 27 + 20$.

Le voyage nécessitera donc 27 cars $\ll pleins \gg$ et un 28ième car occupé par 20 personnes.

2) Nous étions vendredi 1er septembre 2006.

Déterminons le jour de la semaine correspondant au 1er septembre 2007 ; au 1er septembre 2008 et au 1er septembre 2009

– Entre le 1er septembre 2006 et le 1er septembre 2007 s'écrouleront 365 jours (car 2007 n'est pas bissextile). Or $365 = 7 \times 52 + 1$, donc s'écouleront 52 semaines et 1 jour, faisant tomber le 1er septembre 2007 un samedi.

– Entre le 1er septembre 2007 et le 1er septembre 2008 s'écrouleront 366 jours (car 2008 est bissextile). Or $366 = 7 \times 52 + 2$, donc s'écouleront 52 semaines et 2 jour, faisant tomber le 1er septembre 2008 un lundi.

– Entre le 1er septembre 2008 et le 1er septembre 2009 s'écrouleront 365 jours (car 2009 n'est pas bissextile). Or $365 = 7 \times 52 + 1$, donc s'écouleront 52 semaines et 1 jour, faisant tomber le 1er septembre 200 un lundi.

5 1) La somme de deux entiers naturels a et b avec ($a > b$) est 444. La division Euclidienne de a par b donne q = 4 pour quotient et r = 24 pour reste. Déterminons les entiers a et b.

On sait que : $a = qb + r \Leftrightarrow a - qb = r$ or $q = 4$ et $r = 24$ => $a - 4b = 24$ =>

$$\begin{cases} a + b = 444 \\ a - 4b = 24 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne : $a = 360\ et\ b = 84$

2) Soient deux entier naturels a et b ($a > b$). La division Euclidienne de a par b donne pour quotient q = 6 et pour reste r = 47.

Par ailleurs $a + b + r$ = 591. Déterminons a et b sachant que q = 6 ; $r = 47$ et $a + b + r = 591$

On sait que : $a + b + r = 591$ et d'autre part $a = qb + r$

Formons ainsi le système avec les équations : $a = qb + r$ et $a + b + 47 = 591$

=> $\begin{cases} a = qb + r \\ a + b + r = 591 \end{cases}$ or q = 6 et r = 47 alors le système devient $\begin{cases} a = 6b + 47 \\ a + b + 47 = 591 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 6b = 47 \\ a + b = 591 - 47 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a - 6b = 47 \\ a + b = 544 \end{cases}$

La résolution de ce système donne : $a = 473\ \ et\ b = 71$

3) Déterminons le diviseur et le reste d'une division Euclidienne dont le dividende est 542 et le quotient est 12

On sait que : $a = qb + r$. Or $a = 542$ et $q = 12$ => $542 = 12b + r$ =>
$r = 542 - 12b$ **(1)**

D'autre part $0 \leq r < b$

$\Leftrightarrow 0 \leq 542 - 12b < b$

$\Leftrightarrow 12b \leq 542 < 13b$

$\Leftrightarrow 12 \leq \frac{542}{b} < 13$ Alors l'encadrement nous permet de dire que $\frac{542}{b} = 12$ => $b = 45$.

En remplaçant b par sa valeur dans **(1)** , on obtient $r = 542 - 12(45) = 2$

D'où $b = 45$ et $r = 2$

4) La division Euclidienne de l'entier naturel a par b donne pour quotient q et pour reste r. D'autre par $(a + 15)$ diviser par $(b + 5)$ donne q pour quotient et r pour reste. Déterminons le quotient q.

$$\begin{cases} a = qb + r \\ (a + 15) = q(b + 5) + r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - qb = r \\ a + 15 = qb + 5q + r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - qb = r \\ a - qb = 5q + r - 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + qb = -r \\ a - qb = 5q + r - 15 \end{cases}$$

$5q - 15 = 0$ => $q = 3$

Multiples – Diviseurs et Critères de divisibilité dans $\mathbb{Z}$.

6

1) Donnons tous les multiples de 7 (ou expression…)

Les multiples de 7 sont tous les entiers de la forme $7n$, où $n \in \mathbb{N}$

2) Donnons tous les multiples de 1

Les multiples de 1 sont tous les entiers naturels.

3) Donnons tous les multiples de 0

La liste des multiples de 0 est réduite à 0 (car pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \times 0 = 0$)

4) Déterminons l'écriture des nombres pairs et des nombres impairs

Les entiers pairs sont multiples de 2, donc de la forme $2n$, où $n \in \mathbb{N}$ et Les entiers impairs sont de la forme $2n + 1$, où $n \in \mathbb{N}$.

5) Vérifions si les nombres 12 et 18 sont des diviseurs de 2772

Les nombres 12 et 18 sont des diviseurs de 2772 car $2772 = 12 \times 231$
et $2772 = 18 \times 154$

6) Trouvons un entier naturel qui soit diviseur de 48 sans être diviseur de 12.

Par exemple : 24 ou 16

7) Déterminons le nombre de multiples de 17 entre 1 000 et 2 500

Les multiples de 17 sont tous les entiers de la forme $17n$, où $n \in \mathbb{N}$. Les multiples de 17 entre 1 000 et 2 500 sont donc les entiers tels que $1000 \leq 17n \leq 2500 \Leftrightarrow \frac{1000}{17} \leq n \leq \frac{2500}{17}$.

Puis que $n \in \mathbb{N}$, on a donc $59 \leq n \leq 147$. Les multiples de 17 compris entre 1 000 et 2 500 sont donc les entiers de la forme $17n$, avec $59 \leq n \leq 147$. Il ya donc $147 - 59 + 1 = 89$ multiples de 17 entre 1 000 et 2 500

7 1) Déterminons le chiffre x pour que $\overline{53x2}$ soit divisible par 9.

$\overline{53x2}$ est divisible par 9 si la somme de ces chiffres l'est, c'est-à-dire :
$5 + 3 + x + 2 = 10 + x$ est divisible par 9. Mais puis que x est un chiffre compris entre 0 et 9, la seule valeur de $10 + x$ divisible par 9 est obtenue pour $x = 8$.

2) Déterminons le chiffre y pour que $\overline{53y4}$ soit divisible par 3 et 4.

$\overline{53y4}$ est divisible par 3 et 4 si la somme de ces chiffres est divisible par 3 et si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4. La somme de ces chiffres vaut : $5 + 3 + y + 4 = 12 + y$, divisible par 3 si y vaut : 0 ; 3 ; 6 ou 9. Mais si on veut que le nombre formé par ces deux derniers chiffres, à savoir $\overline{y4} = 10y + 4$ soit divisible par 4, seul $y = 0$ ou 6 convient.

8 On considère l'entier naturel N qui s'écrit $\overline{53x4}^8$

Déterminons x tel que :

1) N soit divisible par 7

N = $\overline{53x4}^8$ => $N = 5 \times 8^3 + 3 \times 8^2 + 8 \times x + 4$

Or : $8 \equiv 1[7]$; $8^2 \equiv 1[7]$; $8^3 \equiv 1[7]$

Donc $N \equiv (5 + 3 + x + 4)[7] \Leftrightarrow N \equiv (12 + x)[7]$ or $12 \equiv 5[7]$ => $N \equiv (5 + x)[7]$.
N est divisible par 7 si $(5 + x) \equiv 0[7] \Leftrightarrow 5 + x = 7k$ => $x = 7k - 5$

- Si $k = 0$ alors $x = -5$ à rejeté
- Si $k = 1$ alors $x = 2$ à retenir
- Si $k = 2$ alors $x = 9$ à rejeté

On remarque qu'à partir de $k = 2$, la valeur de x est supérieur à la base qui est 8

D'où $x = 2$ est la seule valeur pour la quelle N est divisible par 7.

2) N soit divisible par 6.

N = $\overline{53x4}^8$ => N = $5 \times 8^3 + 3 \times 8^2 + 8 \times x + 4$

Or : $8 \equiv 2[6]$; $8^2 \equiv 4[6]$; $8^3 \equiv 2[6]$

Donc N$\equiv (10 + 12 + 2x + 4)[6] \Leftrightarrow$ N$\equiv (2 + 2x)[6]$
N est divisible par 6 si $(2 + 2x) \equiv 0[6] \Leftrightarrow 2 + 2x = 6k$ => $1 + x = 3k$ => $x = 3k - 1$

- Si $k = 0$ alors $x = -1$ à rejeté
- Si $k = 1$ alors $x = 2$ à retenir
- Si $k = 2$ alors $x = 5$ à retenir
- Si $k = 3$ alors $x = 8$ à rejeté (car la valeur de x vaut la base qui est 8)

D'où $x = 2$ ou $x = 5$ sont les deux valeurs pour les quelles N est divisible par 6.

3) En déduisons la valeur de x pour que N soit à la fois divisible par 6 et par 7.

D'après les questions 1) et 2), N est à la fois divisible par 6 et par 7 si $x = 2$.

PGCD et PPCM.

9 Dans chacun des cas suivants, Détermine le PGCD et le PPCM des réels a et b.

a) $a = 24$ et $b = 33$

La décomposition de a et b en produit de facteurs premiers donne :

$\begin{cases} a = 24 \\ b = 33 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} a = 2^3 \times 3 \\ b = 3 \times 11 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} a = 2^3 \times 3 \times 11^0 \\ b = 3 \times 11 \times 2^0 \end{cases}$

PGCD(24 ; 33) = $2^0 \times 3 \times 11^0$= 3 = > PGCD(24 ; 33) = 3 **et**

PPCM(24 ; 33) = $2^3 \times 3 \times 11$ = 264 = > PPCM(24 ; 33) = 264

b) $a = 48$ et $b = 46$

La décomposition de a et b en produit de facteurs premiers donne :

$$\begin{cases} a = 48 \\ b = 46 \end{cases} <=> \begin{cases} a = 2^4 \times 3 \\ b = 2 \times 23 \end{cases} <=> \begin{cases} a = 2^4 \times 3 \times 23^0 \\ b = 2 \times 23 \times 3^0 \end{cases}$$

PGCD (48 ; 46) = $2 \times 3^0 \times 23^0 = 2$ = > PGCD (48 ; 46) = 2 et

PPCM (48 ; 46) = $2^4 \times 3 \times 23$ = 1104 = > PPCM (48 ; 46) = 1104

c) $a = 1455$ et $b = 335$

La décomposition de a et b en produit de facteurs premiers donne :

$$\begin{cases} a = 1455 \\ b = 335 \end{cases} <=> \begin{cases} a = 3 \times 5 \times 97 \\ b = 5 \times 67 \end{cases} <=> \begin{cases} a = 3 \times 5 \times 97 \times 67^0 \\ b = 5 \times 67 \times 3^0 \times 97^0 \end{cases}$$

PGCD(1455 ; 335) = $5 \times 3^0 \times 97^0 \times 67^0 = 5$ = > PGCD(1455 ; 335) = 5 et

PPCM(1455 ; 335) = $5 \times 3 \times 67 \times 97$ = 97485 = > PPCM(1455 ; 335) = 97485

10 Montrons dans chacun des cas suivants que :

1) PGCD($2n + 3$; $5n - 2$) = 19

PGCD($2n + 3$; $5n - 2$) = PGCD($3n - 5$; $2n + 3$) = PGCD($n - 8$; $2n + 3$)
= >PGCD($n + 11$; $n - 8$) = PGCD(19 ; $n - 8$) = 19

2) Montrons que PGCD$[(5n^3 - n)$; $(n + 2)]$ = PGCD$[(n + 2)$; 38]

La division Euclidienne de $(5n^3 - n)$ par $(n + 2)$ donne pour quotient :

$q = 5n^2 - 10n + 19$ et pour reste $r = -38$.

Puisque : PGCD(a ; b) = PGCD(b ; r) alors on a :

PGCD$[(5n^3 - n)$; $(n + 2)]$ = PGCD$[(n + 2)$; -38] = PGCD$[(n + 2)$; 38]

11 Deux voitures A et B démarrent en même temps de la ligne de depart et font plusieurs tours d'un même circuit. La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes.

1) Vérifions s'il ya des moments (autres que le depart!) où les voitures A et B se croisent sur la ligne de depart.

Les voitures A et B se croiseront pour la première fois (autres que le depart) au bout d'un temps égal à PPCM (30; 36).

Pour Calcule PPCM (30; 36), deux solutions sont envisageables:

- Soit on cacule PGCD(30; 36), qui vaut 6 et puisque :
  PGCD(30; 36)×PPCM (30; 36) = 30×36, on en déduira PPCM (30; 36) = $\frac{30\times36}{6}$ = 180
- Soit on utilise la decomposition de 30 et 36 en produits de facteurs premiers, à savoir :
  $30 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$ et $36 = 2^2 \times 3^2$ puis l'on calcule grâce aux maximum des puissances,
  PPCM (30; 36) = $2^2 \times 3^2 \times 5^1$ = 180.

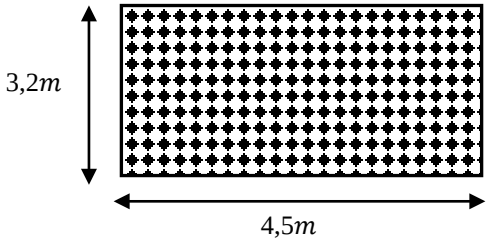
Alors les voitures A et B se croiseront pour la première fois au bout de 180 minutes.

2) Precisions le nombre de tours effectués par chaque voiture.

La voiture A parcourt $\frac{180}{36} = 5$ tours et la voiture B parcourt $\frac{180}{30} = 6$ tours

12 1) Déterminons le $PGCD$ de 450 et 320.

$PGCD(450\,;\,320) = 2 \times 5 = 10$



2) Déterminons le plus grand côté possible (en m) de la dalle carrée ?

On a : L = 4,5 m = 450 cm et l = 3,2 m = 320 cm.

Ainsi le côté en cm d'une dalle carrée est le PGCD (450 ; 320) = 10.

D'où le plus grand côté possible d'une dalle est 10 cm.

13 On dispose d'une feuille de papier. On découpe dans cette feuille le plus grand carré possible. Dans le morçeau restant, on découpe encore le plus grand carré possible, et ainsi de suite….

On continue à découper le plus grand carré possible jusqu'à ce que le morçeau restant soit lui meme un carré.

1) Déterminons la taille du dernier carré si les dimensions de la feuille initiale sont 192 cm sur 84 cm

La taille du dernier carré est PGCD (192; 84) = 12

2) De même déterminons la taille du dernier carré si les dimensions de la feuille initiale sont deux entiers quelconques.

De manière générale, si on note x et y (avec x et y deux entiers quelconques), les dimensions de la feuille initiale, la taille du dernier carré sera le PGCD $(x\,;y)$

14 On considère l'équation (E) définie par : $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$, $35x - 27y = 2$.

1) a- Vérifions que $(-20\,;\,-26)$ est solution de (E).

On a : $35(-20) - 27(-26) = -700 + 702 = 2$. Donc $(-20\,;\,-26)$ est solution de (E).

b- Démontrons que les solutions de (E) sont les couples $(x\,;y)$d'entiers relatifs vérifiant : $x = 27k - 20$ et $y = 35k - 26$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

1ère méthode :

Si le couple $(x_0\,;\,y_0)$ est une solution particulière de l'équation diophantienne $ax + by = c$, alors l'ensemble solution est donc de la forme $S = \{-bk + x_0\,;ak + y_0\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Donc l'ensemble solution de l'équation $35x - 27y = 2$ ayant pour solution particulière $(-20\,;\,-26)$ est :

$S = \{27k - 20\ ;35k - 26\}$ Avec $k \in \mathbb{Z}$.

2ième méthode :

Si $(x_0\,;\,y_0)$ est une solution particulière de l'équation $35x - 27y = 2$ alors on a :

$35x_0 - 27y_0 = 2$. Alors on a le système suivant :

$$\begin{cases} 35x - 27y = 2 & (1) \\ 35x_0 - 27y_0 = 2 & (2) \end{cases}$$

En multipliant l'équation (2) par – **1** , on a :

$$\begin{cases} 35x - 27y = 2 & (1) \\ -35x_0 + 27y_0 = -2 & (2) \end{cases}$$

En effectuant la somme membre à membre des équations (1) et (2) , on a :
$35(x - x_0) - 27(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow 35(x - x_0) = 27(y - y_0)$.

Puisque $PGCD(35\,;27) = 1$, c'est-à-dire que 35 et 27 sont premier entre eux, alors d'après Gauss on a : $35/27(y - y_0) \Leftrightarrow 35/(y - y_0)$. Donc il existe un rée $k \in \mathbb{Z}$ tel que :
$35k = y - y_0 \Leftrightarrow y = 35k + y_0$.
Or $y_0 = -26$ => $y = 35k - 26$.

De même : $27(y - y_0) = 35(x - x_0)$.

Puisque $PGCD(35\ 27) = 1$, c'est-à-dire que 35 et 27 sont premier entre eux, alors d'après Gauss on a : $27/35(x - x_0) \Leftrightarrow 27/(x - x_0)$.
Donc il existe un rée $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $27k = x - x_0 \Leftrightarrow x = 27k + x_0$.
Or $x_0 = -20$ => $x = 27k - 20$.

D'où $S = \{27k - 20\ ; 35k - 26\}$ Avec $k \in \mathbb{Z}$.

2) Dans un village il ya deux fétiches **Bolifing** et **Boliblen**. Le fétiche **Bolifing** est adoré tous les 140 jours et le fétiche **Boliblen** tous les 180 jours. Les jours où les cultes coïncident sont appelés jours de grâce. Un matin, le village a adoré le fétiche **Boliblen.**

Déterminer le nombre de jours qui séparent ce matin-là du prochain jour de grâce sachant qu'ils avaient adoré le fétiches **Bolifing** 8 jours auparavant.
Soit : $n = 140x$ le nombre de jours d'adoration de **Bolifing** avec $x \in \mathbb{N}$
$m = 108y$ le nombre de jours d'adoration de **Bolifing** avec $y \in \mathbb{N}$
Puisqu'il ya eu 8 jours de différence entre le jour d'adoration des deux fétiches, alors on : $m = n - 8 \Leftrightarrow$

$108y = 140x - 8 \Leftrightarrow 140x - 108y = 8$. En simplifiant par 4 , on a : $35x_0 - 27y_0 = 2$ et on obtient :

$x = 27k - 20$ et $y = 35k - 26$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Ainsi le plut petit entier k telque $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$ est $k = 1$.
Par conséquent $x = 7$ et $y = 9$.
D'où le nombre de jours qui séparent ce matin-là du prochain jour de grâce sachant qu'ils avaient adoré le fétiches **Bolifing** 8 jours auparavant est $n = 108 \times 9 = 972$ jours.

15 Δ et m désignent respectivement le PGDC et le PPCM des entiers a et b.

Déterminons l'ensemble des couples $(a\ ;\ b)$ d'entiers relatifs vérifiant les conditions données ci-dessous :

a) $\begin{cases} a + b = 168 \\ \Delta = 21 \end{cases}$

Soient a' et b' deux entiers non nul tel que : $a = a'd$ et $b = b'd$
(avec PGCD (a'; b') = 1)

Posons : $PGCD(\ a\ ;\ b\ ) = 21 = d$. Ainsi le système devient :

$\begin{cases} a'd + b'd = 168 \\ d = 21 \end{cases} <=> \begin{cases} d(\ a' + b'\ ) = 168 \\ d = 21 \end{cases} <=> \begin{cases} 21(\ a' + b'\ ) = 168 \\ d = 21 \end{cases}$

$<=> \begin{cases} a' + b' = 8 \\ d = 21 \end{cases}$

Puisque PGCD (a' ; b') = 1 alors $(\ a'\ ;\ b'\ ) \in \{(\ 3\ ;5\ )\ ;\ (\ 5\ ;3\ )\ ;\ (\ 7\ ;1\ )\ ;\ (\ 1\ ;7\ )\}$

Or : $a = 21a'$ et $b = 21b'$

a'	5	3	7	1
b'	3	5	1	7
a	105	63	147	21
b	63	105	21	147

=> $\boldsymbol{S} = \{(105;63);(63;105);(147;21);(21;147)\}$

b) $\begin{cases} m + 3\Delta = 276 \\ 10 < \Delta < 30 \end{cases}$

Cherchons tous les diviseurs de 276

Par décomposition de 276 en produit de facteurs premiers, on obtient :

$D_{276} = \{1;2;3;4;6;12;23;46;69\}$

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Si Δ et $m$désignent respectivement le

PGCD et le PPCM des entiers naturels : a et b, on a :

- $a \bullet b = m \bullet \Delta$

Ainsi il existe deux entiers a'et b' premiers entre eux (PGCD (a' ; b') = 1) tel que :

- $a = a' \bullet \Delta$ et $b = b' \bullet \Delta$ => $a \bullet b = \Delta^2 \bullet a'b'$

=> $\Delta^2 \bullet a'b' = m \bullet \Delta$ <=> $m = a'b' \bullet \Delta$

Alors le système devient :

$$\begin{cases} a'b' \bullet \Delta + 3\Delta = 276 \\ 0 < \Delta < 30 \end{cases} <=> \begin{cases} \Delta(a'b' + 3) = 276 \\ 0 < \Delta < 30 \end{cases} <=> \begin{cases} a'b' + 3 = \frac{276}{\Delta} \\ 0 < \Delta < 30 \end{cases}$$

Or $0 < \Delta < 30$ <=> $\Delta \in \{12;23\}$car l'ensemble des diviseurs de 276 comprises entre 0 et 30 sont : 12 et 23

<u>1er cas : Si $\Delta = 12$, on a :</u>

$a'b' + 3 = \frac{276}{12}$ <=> $a'b' + 3 = 23$ =>$a'b' = 20$

Puisque PGCD($a'b'$) = 1 alors ($a'b'$) $\in$ $\{(4;5);(5;4);(20;1);(1;20)\}$

Or $a = 12a'$ et $b = 12b'$

a'	4	5	20	1
b'	5	4	1	20
a	48	60	240	12
b	60	48	12	240

=> $\boldsymbol{S_1} = \{(48\,;60)\,;(60\,;48);\,(240\,;12)\,;\,(12\,;240)\}$

2er cas : Si Δ = 23, on a :

$a'b' + 3 = \frac{276}{23}$ <=> $(a'b') + 3 = 12$ =>$a'b' = 9$

Puisque PGCD $(a'b') = 1$ alors $(a'b') \in \{(9\,;1)\,;\,(1\,;9)\}$

Or $a = 23a'$ et $b = 23b'$

a'	9	1
b'	1	9
a	207	23
b	23	207

=> $\boldsymbol{S_2} = \{(207\,;23)\,;(23\,;207)\}$

D'où $S = \{(48\,;60)\,;(60\,;48);\,(240\,;12)\,;\,(12\,;240)\,;\,(207\,;23)\,;(23\,;207)\}$

c) $\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = a \bullet b \end{cases}$

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Si d et m désignent respectivement le

PGCD et le PPCM des entiers naturels : a et b , on a :

- $a \bullet b = m \bullet d$

Ainsi il existe deux entiers a' et b' premiers entre eux (PGCD $(a'\,;\,b') = 1$) tel que :

- $a = a' \bullet d$ et $b = b' \bullet d$

Alors le système devient :

$\begin{cases} (a' \bullet d)^2 - (b' \bullet d)^2 = 405 \\ 3m = m \bullet d \end{cases}$ <=> $\begin{cases} a'^2 \bullet d^2 - b'^2 \bullet d^2 = 405 \\ d = 3 \end{cases}$ <=>

$\begin{cases} d^2(a'^2 - b'^2) = 405 \\ d = 3 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} 3^2(a'^2 - b'^2) = 405 \\ d = 3 \end{cases}$ <=>

$\begin{cases} 9(a'^2 - b'^2) = 405 \\ d = 3 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} a'^2 - b'^2 = 45 \\ d = 3 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} (a' - b')(a' + b') = 45 \\ d = 3 \end{cases}$

Résous ce système, revient à Résous les cas de systèmes suivants :

$\begin{cases} a' - b' = 1 \\ a' + b' = 45 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a' - b' = 5 \\ a' + b' = 9 \end{cases}$ (Car PGCD(a' ; b') = 1) Ainsi :

Pour $\begin{cases} a' - b' = 1 \\ a' + b' = 45 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} a' = 23 \\ b' = 22 \end{cases}$ => $\begin{cases} a = 69 \\ b = 66 \end{cases}$ =>$S_1 = \{(69 ; 66)\}$

Pour $\begin{cases} a' - b' = 5 \\ a' + b' = 9 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} a' = 7 \\ b' = 2 \end{cases}$ => $\begin{cases} a = 7 \\ b = 6 \end{cases}$ =>$S_1 = \{(7 ; 6)\}$

=> $\boldsymbol{S} = \{(69 ; 66) ; (7 ; 6)\}$

16 1) Montre que l'équation: (x ; y) de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$: $6y - 3x = m$ admet des solutions si et seulement si m est un multiple de 3.

$6y - 3x = m$ <=> $3(2y - x) = m$ <=>$2y - x = \frac{m}{3}$

Alors l'équation admet donc des solutions dans $\mathbb{Z}$ si 3 divise m ou encore si m est un multiple de 3.

2) Résolvons dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

a- $6y - 3x = 5$

Puisque 5 n'est pas un multiple de 3, alors l'équation : $6y - 3x = 5$ n'admet pas de solution.

Par conséquent $S = \{\emptyset\}$

b- $6y - 3x = 3$

Puisque 3 est un multiple de 3 , alors l'équation : $6y - 3x = 3$ admet des solutions .

Résolution :

$6y - 3x = 3$ <=> $2y - x = 1$ <=> $x = 2y - 1$<=> $x \equiv -1[2]$ => $x = 2k - 1$

En remplaçant x par sa valeur dans l'équation : $2y - x = 1$, on a : $y = k$

=> $S = \{(2k - 1 ; k)\}$

3) Déduisons de ce qui précède les solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de l'équation :

$(6y - 3x - 4)(6y - 3x + 4) = 1.$

Résous l'équation ($6y-3x-4$)($6y-3x+4$) = 1, revient à Résous les systèmes suivant :

$\begin{cases} 6y-3x-4=1 \\ 6y-3x+4=1 \end{cases}$ (S_1) ou $\begin{cases} 6y-3x-4=-1 \\ 6y-3x+4=-1 \end{cases}$ (S_2)

<=> $\begin{cases} 6y-3x=5 \\ 6y-3x=-3 \end{cases}$ (S_1) ou $\begin{cases} 6y-3x=3 \\ 6y-3x=-5 \end{cases}$ (S_2)

D'après les questions précédents, 5 et – 5 ne sont pas des multiples de 3.

Par conséquent aucun des deux systèmes n'admet de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

D'où l'équation : ($6y-3x-4$)($6y-3x+4$) = 1 n'admet pas de solution
=> $S = \{\emptyset\}$.

17 Pour tout entier naturel n, on considère les nombres : $a_n = 4\times10^n - 1$; $b_n = 2\times10^n - 1$ et $c_n = 2\times10^n + 1$

1) Calculons : a_i ; b_i ; c_i pour $i \in \{1 ; 2 ; 3\}$.

a_1 = 39 ; b_1 = 19 ; c_1 = 21

a_2 = 399 ; b_2 = 119 ; c_2 = 201

a_3 = 3999 ; b_3 = 1999 ; c_3 = 2001

2) Démontrons que a_n et c_n sont divisibles par 3

Puisque : $4 \equiv 1[3]$; $10 \equiv 1[3]$; $2 \equiv -1[3]$

$a_n = 4\times10^n - 1 \equiv 1\times1 - 1 \equiv 0[3]$ et $c_n = c_n = 2\times10^n + 1 \equiv -1\times1 + 1 \equiv 0[3]$

3) Démontrons que b_2 est un nombre premier.

b_2 = 119 => $\sqrt{b_2} = \sqrt{119} = 14{,}1 \approx 14$. Ainsi pour Démontre que b_2 est premier, il suffit de vérifier que b_2 n'est pas divisible par tous les nombres premiers inférieurs à 14.

L'ensemble des nombres premiers inférieurs à 14,1 sont : {2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13}

Puisque 119 n'est ni divisible par : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13. Ainsi 199 est premier.

4) Démontrons que pour tout entier naturel n, on a : $b_n \times c_n = a_{2n}$.

$b_n \times c_n = (2\times10^n - 1)\times(2\times10^n + 1) = (2\times10^n)^2 - 1^2 = 4\times10^{2n} - 1 = a_{2n}$.

En déduisons la décomposition en produit de facteurs premiers de a_4

$a_4 = a_{2\times 2} = b_2 \times c_2 = 199 \times 201 = 199 \times 3 \times 67$.

En effet 199 est premier et 201= $3 \times 67 =$ avec 67 premier.

5) Démontrons que : PGCD$(b_n\,;c_n)$ = PGCD$(b_n\,;2)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = b_n + 2$ avec $0 \leq 2 \leq b_n$. Donc 2 est le reste de la division euclidienne de c_n par b_n. Ainsi PGCD$(b_n\,;c_n) =$ PGCD$(b_n\,;2)$. En déduis que b_n et c_n sont premiers entre eux c'est-à-dire sont étrangers.

Puisque $b_n \equiv -1[2]$ alors b_n n'est pas divisible par 2 et par conséquent on a :
PGCD$(b_n\,;c_n) =$ PGCD$(b_n\,;2) = 1$

D'où b_n et c_n sont premiers entre eux c'est-à-dire sont étrangers.

18 1) On considère l'équation (1) d'inconnue $(x\,;y)$ de $\mathbb{Z}^2$: $11x - 24y = 1$.

a- Justifions à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.

Les entiers 11 et 24 sont premiers entre eux, puis que 11 est premier et ne divise pas 24.

Le **théorème de Bézout** affirme : deux entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe $(u\,;v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $au + bv = 1$.

Les entiers 11 et 24 étant premiers entre eux, il existe $(u\,;v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $11u + 24v = 1$.

Le couple $(u\,;-v)$ est solution de l'équation (1).

b- En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminons une solution particulière de $11x - 24y = 1$

En utilisant l'algorithme d'Euclide, on a : $11(11) - 24(5) = 1$ =>$(x_0\,;\,y_0) = (11\,;5)$ est une solution particulière de l'équation (1).

c- Déterminons l'ensemble solution de l'équation (1)

NB : Si $(x_0\,;\,y_0)$ est une solution particulière de l'équation $ax + by = c$ alors l'ensemble solution de l'équation $ax + by = c$ est donné par : S = $\{(-bk + x_0\,;ak + y_0)\}$. Or :

$a = 11\,;\ b = -24\ ;\ x_0 = 11\ et\ y_0 = 5$ => S = $\{(24k + 11\,;11k + 5)\}\ avec\ k \in \mathbb{Z}$

2) Recherche du PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

a- Justifions que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

L'écriture décimale de 10^{11} comprend un « 1 » suivit de « $onze$ 0 ».

Par le jeu des retenues, on obtient : $10^{11} - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{\textbf{Onze 9}} = 9\times \underbrace{11\ldots1}_{\textbf{Onze 1}}$

Ce qui montre que 9 divise $10^{11} - 1$.

De même on obtient : $10^{24} - 1 = 9\times \underbrace{11\ldots1}_{\textbf{Vint-quatre 1}}$

Ce qui montre que 9 divise $10^{24} - 1$

b- $(x\,;\,y)$ désignant un couple quelconque d'entiers naturels solution de (1), montrons que l'on peut écrire : $(10^{11x} - 1) - 10(10^{24y} - 1) = 9$.

Le couple $(11\,;5)$ est solution de (1). Alors :

$(10^{11x} - 1) - 10(10^{24y} - 1) = 10^{11x} - 1 - 10^{24y+1} + 10 = 10^{11x} - 10^{24y+1} + 9$

Or par hypothèse $11x - 24y = 1$ et donc $11x = 1 + 24y$.

On en déduit donc que $(10^{11x} - 1) - 10(10^{24y} - 1) = 9$

c- Montrons que $10^{11} - 1$ divise $10^{11x} - 1$.

Puis que : $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots\ldots + 1)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$.

Ainsi : $10^{11x} - 1 = (10^{11})^x - 1 = (10^{11} - 1)[(10^{11})^{x-1} + (10^{11})^{x-2} + \ldots + 1]$

D'où $10^{11} - 1$ divise $10^{11x} - 1$.

En posant $N = (10^{11})^{x-1} + (10^{11})^{x-2} + \ldots + 1$, on obtient : $10^{11x} - 1 = (10^{11} - 1)N$

On obtient de même

$10^{24y} - 1 = (10^{24})^y - 1 = (10^{24} - 1)[(10^{24})^{y-1} + (10^{24})^{y-2} + \ldots + 1]$

Donc $10(10^{24y} - 1) = (10^{24} - 1)[(10^{24})^{y-1} + (10^{24})^{y-2} + \ldots + 1]$

En posant $M = (10^{24})^{y-1} + (10^{24})^{y-2} + \ldots + 1$, on obtient : $10^{24y} - 1 = (10^{24} - 1)M$

d- Déduisons de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :

En remplaçant dans l'égalité trouvée à la question b-), on trouve

$(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9$

$(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9.$

e- Montre que tout diviseur commun à $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$ divise 9.

Soit d un codiviseur de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$

d Divise $10^{11} - 1$ par conséquent divise $(10^{11} - 1)N$, de même $10^{24} - 1$ par conséquent divise : $(10^{24} - 1)M$. Ainsi on en déduit que d divise la différence :

$(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M$, c'est-à-dire que d divise 9.

f- Déduisons des questions précédentes le PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

Nous en déduisons de la question d) qu'un codiviseur de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$ est inférieur ou égal à 9 en particulier.
Alors PGCD$(10^{11} - 1\ ;\ 10^{24} - 1.) \leq 9$

Système de numération

19 1) Donnons l'écriture de : **a)** A = $\overline{231}^4$; **b)** B = $\overline{1001}^2$; **c)** C = $\overline{4\alpha 2}^5$ en base 10.

a) A = $\overline{231}^4 = 2 \times 4^2 + 3 \times 4^1 + 1 \times 4^0 = 45$ => A = $\overline{231}^4 = 45$

b) B = $\overline{1001}^2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 9$

c) C = $\overline{4\alpha 2}^5 = 4 \times 5^2 + \alpha \times 5^1 + 2 \times 5^0$ (or $\alpha = 10$) => C = $\overline{4\alpha 2}^5 = 152$

2) Ecrivons la suite des 10 premiers nombres entiers en base 2 puis en base 4.

- En base 2, on a : 0 ; 1 ; 10 ; 11 ; 100 ; 101 ; 110 ; 111 ; 100 ; 1001 ; 1010

- En base 4, on a : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 20 ; 21

3) En base 12, on désigne par A le chiffre correspondant à 10, par B celui correspondant à 11. Ecrivons la suite des cinq successeurs de BA9.

la suite des cinq successeurs de BA9 sont : BAA ; BAB ; BB0 ; BB1 ; BB2

4) A s'écrit 23 dans le système décimal et 27 dans un système de base a. Déterminons a

A = $\overline{23}^{10} = 23$ (dans le système décimal) et A = $\overline{27}^a = 2 \times a + 7$

Par identification on a : $23 = 2 \times a + 7 \Leftrightarrow 2a = 23 - 7 \Leftrightarrow 2a = 16$ => $a = 8$.

Ecrivons dans le système décimal le nombre : $\overline{432}^5$

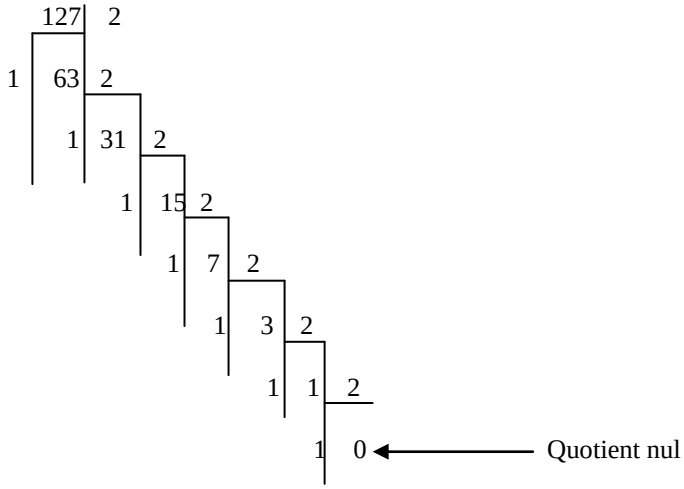
$\overline{432}^5 = 4\times5^2 + 3\times5^1 + 2 = 117$ ou $\overline{432}^5 = \overline{117}^{10}$

20 **1)** Ecrivons dans le système binaire le nombre : $\overline{127}^{10}$

Le nombre $\overline{127}^{10}$ est équivalent à 127

Ecris 127 dans le système binaire revient à l'écrire en base 2.

Pour cela, effectuons des divisions successives de 127 par 2 comme donner ci-dessous



En recopiant la suite des différents restes du bas vers le haut, on obtient :

$\overline{127}^{10} = 127 = \overline{1111111}^2$

2) Ecris dans le système décimal le nombre : $\overline{F0A3}^{16}$

$\overline{F0A3}^{16} = F\times16^3 + 0\times16^2 + A\times16^1 + 3 = F\times16^3 + A\times16 + 3$

Or A = 10 et F = 15

=> $\overline{F0A3}^{16} = 15\times16^3 + 10\times16 + 3 = 61440 + 160 + 3 = 61603$

=> $\overline{F0A3}^{16} = 61603$ ou $\overline{F0A3}^{16} = \overline{61603}^{10}$

3) Sachant que 14 = 13 + 1, écrivons14^8 dans le système de base 13.

$14 = 13 + 1 => 14^8 = (13 + 1)^8$

Ainsi d'après le triangle de Pascal, le développement de $(13 + 1)^8$ donne :

$(13+1)^8 = 13^8 + 8\times13^7 + 28\times13^6 + 56\times13^5 + 70\times13^4 + 56\times13^3 + 28\times13^2 + 8\times13^1 + 1$

Or : $28 = 13\times2 + 2$; $56 = 13\times4 + 4$; $70 = 13\times5 + 5$. Alors, on a :

- $28\times13^6 = 13^6(13\times2 + 2) = 2\times13^7 + 2\times13^6$
- $56\times13^5 = 13^5(13\times4 + 4) = 4\times13^6 + 4\times13^5$
- $70\times13^4 = 13^4(13\times5 + 5) = 5\times13^5 + 5\times13^4$
- $56\times13^3 = 13^3(13\times4 + 4) = 4\times13^6 + 4\times13^5$
- $28\times13^2 = 13^2(13\times2 + 2) = 2\times13^3 + 2\times13^2$

La somme des termes de même puissance donne :

$(13+1)^8 = 1\times13^8 + 10\times13^7 + 6\times13^6 + 9\times13^5 + 9\times13^4 + 6\times13^3 + 2\times13^2 + 8\times13^3 + 1$

$\Rightarrow (13+1)^8 = 14^8 = \overline{1A6996281}^{13}$ (avec A = 10)

4) Un nombre s'écrit BABA (Avec : A = 10 et B = 11) dans le système hexadécimal. Ecrivons ce nombre dans le système octal.

$\overline{BABA}^{16} = B\times16^3 + A\times16^2 + B\times16^1 + A$ Or : A = 10 et B = 11

$\Rightarrow \overline{BABA}^{16} = 11\times16^3 + 10\times16^2 + 11\times16^1 + 10$

Dans le système octal les symboles utilisés sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

Or : $11 = 8 + 3$; $10 = 8 + 2$ Alors, on a :

$\Rightarrow \overline{BABA}^{16} = (8+3)\times16^3 + (8+2)\times16^2 + (8+3)\times16^1 + (8+2)$

Or : $16^3 = (8\bullet2)^3$; $16^2 = (8\bullet2)^2$; $16^1 = (8\bullet2)^1$; $10 = 8 + 2$ Alors, on a :

$\overline{BABA}^{16} = (8+3)\times(8\bullet2)^3 + (8+2)\times(8\bullet2)^2 + (8+3)\times16^1 + (8+2)$

$= (8+3)\times8^3\times2^3 + (8+2)\times8^2\times2^2 + (8+3)\times8\times2$

Le développement et la somme des termes de même puissance donnent :

$\overline{BABA}^{16} = 8^5 + 3\times8^4 + 5\times8^3 + 2\times8^2 + 7\times8^1 + 2$

$\Rightarrow \overline{BABA}^{16} = \overline{135272}^8$

21 Un nombre de (6) chiffres s'écrit en base 7 et comporte comme chiffre de gauche le nombre **1**. Un autre nombre de (6) chiffres s'écrit en base 7 et comporte comme chiffre de droite le nombre **1.** D'autre par ce nombre est encore le triple du précédent.
Déterminons ces nombres initiaux.

- Soit N le nombre de (6) chiffres s'écrivant en base 7 et comporte comme chiffre de gauche le nombre 1 tel que $N = \overline{1abcde}^7 = 7^5 + a \times 7^4 + b \times 7^3 + c \times 7^2 + d \times 7^1 + e$
- Soit N' le nombre de (6) chiffres s'écrivant en base 7 et comporte comme chiffre de droite le nombre 1 tel que $N' = \overline{abcde1}^7 = a7^5 + b \times 7^4 + c \times 7^3 + d \times 7^2 + e \times 7^1 + 1$
- Ce nombre est encore le triple du précédent alors : $N' = 3N \Leftrightarrow N' - 3N = 0$

Effectuons la différence : $N' - 3N$

$N' - 3N = a \times 7^4(7-3) + b \times 7^3(7-3) + c \times 7^2(7-3) + d \times 7^1(7-3) + e(7-3) - (1 - 3 \times 7^5)$

$N' - 3N = 0 \Leftrightarrow (7-3)(a \times 7^4 + b \times 7^3 + c \times 7^2 + d \times 7^1 + e) - 5420 = 0 \Leftrightarrow$

$a \times 7^4 + b \times 7^3 + c \times 7^2 + d \times 7^1 + e = \frac{5420}{7-3}$ =>

$a \times 7^4 + b \times 7^3 + c \times 7^2 + d \times 7^1 + e = 12605 \Leftrightarrow \overline{abcde}^7 = 12605$

Or l'écriture de 12605 en base 7 donne : $12605 = \overline{51515}^7$ alors les nombres initiaux sont :
$a = 5\ ;\ b = 1\ ;\ c = 5\ ;\ d = 1\ ;\ e = 5$

D'où $N = \overline{151515}^7$ et $N' = \overline{515151}^7$

22 Soit x un entier naturel $x \geq 5$. On considère les entiers $n = \overline{100x}$ et $n' = \overline{x001}$ dans le système de base $(x+1)$

1) Ecrivons n et n' dans le système de base x.

$n = \overline{100x}^{(x+1)}$ => $n = 1 \times (x+1)^3 + 0(x+1)^2 + 0(x+1) + x = x^3 + 3x^2 + 4x + 1$

=> $n = x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ ou $n = \overline{1341}^x$

$n' = \overline{x001}$ => $n' = x \times (x+1)^3 + 0(x+1)^2 + 0(x+1) + 1 = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 1$

=> $n' = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 1$ ou $n' = \overline{1331}^x$

2) Ecris $n + n'$ dans le système de base x et vérifier que $n + n'$ est divisible par $(x+1)$ puis donner le quotient q de cette division en base x.
$n = 1 \times (x+1)^3 + 0(x+1)^2 + 0(x+1) + x = (x+1)^3 + x$

$n' = x \times (x+1)^3 + 0(x+1)^2 + 0(x+1) + 1 = x(x+1)^3 + 1$

Alors $n + n' = [(x+1)^3 + x] + [x(x+1)^3 + 1] = (x+1)^3 + x + x(x+1)^3 + 1$

$= (x+1)^3 + x(x+1)^3 + (x+1) = (x+1)[(x+1)^2 + x(x+1)^2 + 1]$

$= (x+1)^3 + x(x+1)^3 + (x+1) = (x+1)[(x+1)^2(x+1) + 1]$

$= (x+1)[(x+1)^3 + 1] = (x+1)^4 + (x+1)$

D'où $n + n' = \overline{10010}^{(x+1)}$

Vérifions que $n + n'$ est divisible par $(x+1)$ puis donnons le quotient q de cette division en base x.
En faisant la division euclidienne de $n + n'$ par $(x+1)$ on aura pour quotient

$q = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ (en base 10) ou $q = \overline{1332}^x$ (en base x)

3) Détermination des entiers a et b.

$q = \overline{ab}^x \times \overline{aaa}^x \Leftrightarrow q = (ax+b)(ax^2 + ax + a)$
$\Rightarrow q = a^2x^3 + x^2(a^2 + ab) + x(a^2 + ab) + ab$. Or d'après la question 2), on a :

$q = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$. Ainsi par identification, on a :

$a^2x^3 + x^2(a^2 + ab) + x(a^2 + ab) + ab = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

$\Rightarrow a = 1$ et $b = 2$. D'où $q = \overline{12}^x \times \overline{111}^x$

Congruence modulo n et structure d'anneau

23 1) Complétons les congruences suivantes :

a) $37 \equiv 11[13]$ car le reste de la division de 37 par 13 est 11
b) $125 \equiv 25[100]$ car le reste de la division de 125 par 100 est 25

c) $-5 \equiv 5[10]$ car le reste de la division de -5 par 10 est 5

2) Complétons les congruences suivantes :

a) $7 \equiv 7[10]$; **b)** $7^2 \equiv 9[10]$; **c)** $7^3 \equiv 3[10]$; **d)** $7^4 \equiv 1[10]$

Puisque $401 = 4 \times 100 + 1$, on a donc $7^{401} = 7^{4\times100+1} = (7^4)^{100} \times 7^1$. Puisque $7^4 \equiv 1[10]$

Alors $(7^4)^{100} \equiv (1)^{100} \equiv 1[10]$. Donc $7^{401} \equiv 1 \times 7[10]$

De même Puisque $30 = 4 \times 7 + 2$ alors $7^{30} = 7^{4\times7+2} = (7^4)^7 \times 7^2$. Puisque $7^4 \equiv 1[10]$

Alors $(7^4)^7 \equiv (1)^7 \equiv 1[10]$. Donc $7^{31} \equiv 1 \times 7^2 \equiv 9[10]$

24 1) Le premier Janvier 2000 était un samedi.

Déterminons le jour correspondant au premier Janvier 2100

NB : Une année bissextile est une année contenant 366 jours et Une année non bissextile est une année contenant 365 jours.

Alors entre 2000 et 2100, il ya 25 années bissextiles et 75 années non bissextiles, soit un total de 36525 jours.

Puisque $36525 = 7 \times 5217 + 6$ alors $36525 \equiv 6[7]$, d'où un décalage de 6 jours par rapport au 1er janvier 2000.

Ainsi le premier Janvier 2100 sera donc un Vendredi

2) Trouvons le reste de la division euclidienne par 17 du nombre 200^{539}

Puisque $200 = 17\times 11 + 13$, on établit que $200 \equiv 13[17]$, donc $200^2 \equiv 13^2[17]$, c'est-à-dire : $200^2 \equiv 169[17]$. Or $169 \equiv 16[17] \equiv -1[17]$

En décomposant 539 comme $539 = 2\times 269 + 1$, on a donc $200^{539} = 200^{2\times269+1}$ =>

$200^{539} = (200^2)^{269} \times 200$, donc $200^{539} \equiv (-1)^{269} \times 13[17] \equiv -13[17] \equiv 4[17]$

Ainsi le reste de la division euclidienne par 17 du nombre 200^{539} est donc égal à 4.

25 Sachant que $n \equiv 3[5]$, prouvons que $2n^2 - n$ est un multiple de 5.

Si $n \equiv 3[5]$ alors $2n^2 \equiv 2 \times 3^2 \equiv 18[5] \equiv 3[5]$. En soustrayant les congruences, on a :

$2n^2 - n \equiv (3 - 3)[5]$, c'est -à-dire $2n^2 - n \equiv 0[5]$, ce qui signifie que :

$2n^2 - n$ est divisible par 5.

26 1) Résolvons dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

a- $\dot{4}x = \dot{3}$

$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\dot{0}\,;\dot{1}\,;\dot{2}\,;\dot{3}\,;\dot{4}\,;\dot{5}\,;\dot{6}\}$

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$
$4x$	$\dot{0}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$	$\dot{5}$	$\dot{2}$	$\dot{6}$	$\dot{3}$
$4x-3$	$\dot{4}$	$\dot{1}$	$\dot{5}$	$\dot{2}$	$\dot{6}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$

Ainsi la dernière ligne comportant le chiffre 0 correspond à la valeur $x = 6$ => S= $\{\dot{6}\}$

b- $\dot{1}x^2 + \dot{2}x - \dot{3} = \dot{0}$

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$
$\dot{1}x^2$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$
$\dot{2}x$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{6}$	$\dot{1}$	$\dot{3}$	$\dot{5}$
$x^2 + \dot{2}x$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{6}$
$\dot{1}x^2 + \dot{2}x - \dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{5}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{4}$	$\dot{3}$

=> S= $\{\dot{1}\,;\dot{4}\}$

2) Résolvons dans $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2$ le système : $\begin{cases} \dot{3}x + \dot{2}y = \dot{1} \\ \dot{2}x + \dot{5}y = \dot{6} \end{cases}$

Dressons la table de multiplication de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

×	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$
$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{6}$	$\dot{1}$	$\dot{3}$	$\dot{5}$
$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{6}$	$\dot{2}$	$\dot{5}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$
$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$	$\dot{5}$	$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{5}$	$\dot{3}$	$\dot{1}$	$\dot{6}$	$\dot{4}$	$\dot{2}$
$\dot{6}$	$\dot{0}$	$\dot{6}$	$\dot{5}$	$\dot{4}$	$\dot{3}$	$\dot{2}$	$\dot{1}$

$\begin{cases} \dot{3}x + \dot{2}y = \dot{1} & (1) \\ \dot{2}x + \dot{5}y = \dot{6} & (2) \end{cases}$

En effectuant (1) + (2), on obtient : $\dot{5}x + \dot{7}y = \dot{7}$. Or $7 \equiv 0[7]$

=> $\dot{5}x + \dot{0}y = \dot{0} \Leftrightarrow \dot{5}x = \dot{0}$. Dans cette équation, le coefficient de x est $\dot{5}$, alors cherchons $\dot{5}$ dans la première colonne. Ainsi projetons cette valeur horizontalement jusqu'à l'obtention du chiffre $\dot{0}$ qui n'est rien d'autre que la valeur qui se trouve dans l'autre membre de l'égalité de l'équation $\dot{5}x = \dot{0}$, puis par projection verticale, on obtient la valeur $x = \dot{0}$. (Voir tableau).

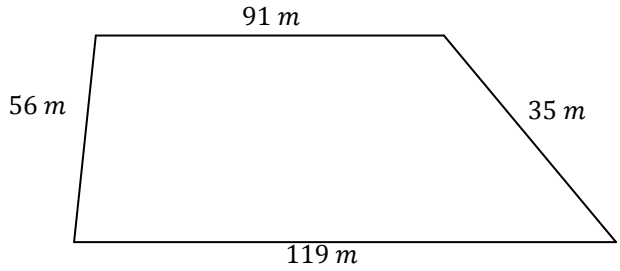
Dans l'équation (1), remplaçons $x = \dot{0}$ par sa valeur. Ainsi l'équation (1) dévient :

$\dot{3}(\dot{0}) + \dot{2}y = \dot{1} \Leftrightarrow \dot{2}y = \dot{1}$. Ainsi par le même procédé, on obtient $y = \dot{4}$

=> S = $\{(\dot{0}\ ;\ \dot{4})\}$

Problèmes.

27 Un Champ a la forme d'un trapèze dont les deux bases mesurent respectivement $119m$ et $91m$; les deux autres cotés mesurent $56m$ et $35m$. Pour la clôture, le propriétaire Mr DEMBELE a besoin des poteaux de support à égale distance mesurée en nombre entier de mètre pour un nombre minimum de poteaux, avec un poteau à chaque sommet.



1) a) Déterminons la distance entre deux poteaux quelconques

Cette distance correspond au PGCD(119 ; 91 ; 56 ; 35) =>

PGCD(7 × 17 ; 7 × 13 ; 7 × 8 ; 7 × 5) = 7 × PGCD(17 ; 13 ; 8 ; 5) = 7

Car PGCD(17 ; 13 ; 8 ; 5) = 1 puisque 17 ; 13 ; 8 ; 5 sont premiers entre eux.

b) Déterminons le nombre de poteaux nécessaires à la clôture.

Ce nombre de poteaux correspond à : $\frac{119 + 91 + 56 + 35}{7}$ = 43

2) Selon le type de clôture et la qualité de fil de fer choisi, Mr DEMBELE a dépensé $\overline{\alpha 1630}^{11}$ F (où α = 10) pour un nombre entier x rangées de fil de fer et $\overline{53008}^{9}$ F pour un nombre entier y de jours de mains d'œuvre. Après évaluation Mr DEMBELE s'est rendu compte que

le coût total des travaux était de $\overline{656\alpha5}^{13}$ F et le nombre de rangées de clôture dépassait le nombre de jours de travail.

a) Exprimons tous les montants dans le système décimal.

- Dépense effectuée pour x rangées de fil de fer est : $\overline{\alpha1630}^{11}$ F = 148500 F (avec α = 10).

- Dépense effectuée pour y jours de main d'œuvres est : $\overline{53008}^{9}$ F = 35000 F (avec α = 10).

- Dépense effectuée pour le coût total des travaux est : $\overline{656\alpha5}^{13}$ F = 183500 F. (avec α = 10).

b) Précisons le nombre de rangées de fil de fer et le nombre de jours de mains d'œuvre.

Précisé le nombre de rangées de fil de fer et le nombre de jours de mains d'œuvre, revient à Résous l'équation Diophantienne : $\overline{\alpha1630}^{11}x + \overline{53008}^{9}$ y = $\overline{656\alpha5}^{13}$ ⇔

$148500x + 35000y = 183500$. Après simplification de cette équation, on obtient :

$297x + 70y = 367$. En utilisant l'algorithme d'Euclide, on obtient :

$297(12111) + 70(-51380) = 367$ et l'ensemble solution est :
S = $\{(-70k + 12111 \ ; \ 297k - 51380)\}$

28 On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par : $\begin{cases} u_0 = 14 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \end{cases}$

1) Calculons u_1 , u_2 , u_3 et u_4 puis en déduisons une conjecture concernant les deux derniers

Chiffres de u_n

$u_0 = 14$; $u_1 = 64$; $u_2 = 314$; $u_3 = 1564$; $u_4 = 7814$

On peut donc conjecturer que :

- Si $n = 2k$ (pair), alors les deux derniers chiffres de u_n est 14.

- Si $n = 2k + 1$ (impair), alors les deux derniers chiffres de u_n est 64.

2) - Montrons que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \equiv u_n[4]$
On sait que $u_{n+1} = 5u_n - 6$ => $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6 = 25u_n - 30 - 6$

=> $u_{n+2} = 25u_n - 36$

Or $25 \equiv 1[4]$

=> $25u_n \equiv u_n[4]$ et $-36 \equiv 0[4]$. En effectuant la somme de ces deux équations, on a :

$25u_n \equiv u_n[4]$

$-36 \equiv 0[4]$

=> $25u_n - 36 \equiv u_n[4]$. Or $25u_n - 36 = u_{n+2}$ => $u_{n+2} \equiv u_n[4]$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \equiv u_n[4]$

- En déduisons que $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{2k} \equiv 2[4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0[4]$.

On sait que $u_{n+2} \equiv u_n[4]$

- Pour $n = 0$, on a : $u_2 \equiv u_0[4]$. Or $u_0 = 14 \equiv 2[4]$ => $u_2 \equiv 2[4]$.
  Ainsi d'une manière générale on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{2k} \equiv 2[4]$.
- Pour $n = 1$, on a : $u_3 \equiv u_1[4]$. Or $u_1 = 64 \equiv 0[4]$ => $u_3 \equiv 0[4]$.
  Ainsi d'une manière générale on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{2k+1} \equiv 0[4]$.

3) Montrons par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_n = 5^{n+2} + 3$

Pour $n = 0$, on a : $2u_0 = 5^2 + 3 \Leftrightarrow 2(14) = 25 + 3 \Leftrightarrow 28 = 28$ vraie.

Supposons la relation vraie à l'ordre $n = k$ et montrons qu'elle est aussi vraie à l'ordre $n = k + 1$ c'est-à-dire $2u_{k+1} = 5^{k+1+2} + 3$ <=> $2(5u_k - 6) = 5^{k+2} \times 5 + 3$

$\Leftrightarrow 10u_k - 12 = 5^{k+2} \times 5 + 3 \Leftrightarrow 10u_k = 5^{k+2} \times 5 + 15$. En simplifiant le tout par 5, on a : $2u_k = 5^{k+2} + 3$. D'où la relation est vraie à l'ordre $n = k + 1$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_n = 5^{n+2} + 3$

29 1) a) Déterminons, suivant les valeurs de n, le reste de la division par 7 de l'entier 3^n puis en déduisons le reste de la division par 7 de l'entier naturel $(506390)^{128}$

- Déterminons, suivant les valeurs de n, le reste de la division par 7 de l'entier 3^n

$3^0 \equiv 1[7]$ $\quad 3^2 \equiv 2[7]$ $\quad 3^4 \equiv 4[7]$ $\quad 3^6 \equiv 1[7]$

$3^1 \equiv 3[7]$ $\quad 3^3 \equiv 6[7]$ $\quad 3^5 \equiv 5[7]$

Alors d'une manière générale, $\forall k \in \mathbb{N}$, on a :

$3^{6k} \equiv 1[7]$ $\quad 3^{6k+2} \equiv 2[7]$ $\quad 3^{6k+4} \equiv 4[7]$

$3^{6k+1} \equiv 3[7]$ $\quad 3^{6k+3} \equiv 6[7]$ $\quad 3^{6k+5} \equiv 5[7]$

- En déduisons le reste de la division par 7 de l'entier naturel $(506390)^{128}$

$506390 \equiv 3[7]$ et $128 = 6 \times 21 + 2$

Alors $(506390)^{128} \equiv 3^{128}[7]$

$\equiv 3^{6\times21+2}[7]$

$\equiv 3^{2}[7]$

$\equiv 2[7]$

D'où le reste de la division par 7 de l'entier naturel $(506390)^{128}$ est 2.

b) Dans le système de numération décimale, on considère l'entier nature l$\overline{651x}$.

Déterminons x pour que $(506390)^{128} + \overline{651x}$ soit divisible par 7.

$(506390)^{128} + \overline{651x} \equiv 0[7] \Leftrightarrow 2 + \overline{651x} \equiv 0[7] \Leftrightarrow 2 + 6000 + 500 + 10 + x \equiv 0[7]$

$\Leftrightarrow 2 + x \equiv 0[7] \Leftrightarrow x \equiv 5[7] \Leftrightarrow x = 7k + 5$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \{0\ ;\ 1\}$

Donc pour $k = 0$, on a : $x = 5$

2) a) Déterminons le plus grand diviseur commun des nombres 21590 et 9525

En utilisant le tableau d'algorithme, on obtient : PGCD(21590 ; 9525) = 635

b) Déterminons l'ensemble des entiers x tels que $34x \equiv 2[15]$.

$34x \equiv 2[15] \Leftrightarrow 34x \equiv 2[15] \Leftrightarrow 17x \equiv 1[15]$. Or $17 \equiv 2[15]$ => $2x \equiv 1[15]$

$\Leftrightarrow 2x \equiv 16[15] \Leftrightarrow x \equiv 8[15]$ => $x = 15k + 8$ avec $k \in \mathbb{Z}$

c) Résolvons l'équation : $(x\ ;y) \in \mathbb{Z}^2\ ; 21590x + 9525y = 1270$

$21590x + 9525y = 1270$. En simplifiant cette équation par 635, on a : $34x + 15y = 2$

$34x = 2 - 15y \Leftrightarrow 34x \equiv 2[15]$. Or d'après la question b), $x = 15k + 8$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Remplaçons x par sa valeur dans l'équation $34x + 15y = 2$. Ainsi on obtient :

$34(15k + 8) + 15y = 2$ => $y = -34k - 18$

d) Déterminons le chiffre des unités de l'entiers naturels 7^{1980} écrit dans le système décimal.

$7 \equiv (-3)[10]$

$\Leftrightarrow \quad 7^{1980} \equiv (-3)^{1980}[10]$

$\Leftrightarrow \quad 7^{1980} \equiv 3^{1980}[10]$

$\Leftrightarrow \quad 7^{1980} \equiv (3^2)^{990}[10]$

$\Leftrightarrow \quad 7^{1980} \equiv (9)^{990}[10]$. Or $10 \equiv 1[10]$

$\Leftrightarrow \quad 7^{1980} \equiv (1)^{990}[10]$.

$\Leftrightarrow \quad 7^{1980} \equiv 1[10]$.

Ainsi le chiffre des unités est le reste de la division de 7^{1980} par 10 qui est 1.

Conclusion : le chiffre des unités de l'entiers naturels 7^{1980} écrit dans le système décimal est 1

Fonction numérique d'une variable réelle

LIMITES – CONTINUITE

OBJECTIFS :

Ce chapitre vise à :

• Complète l'étude de la limite d'une fonction engagée en classe de première par :

- L'introduction de la limite d'une fonction composée ;
- La limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert.

• Introduire la continuité d'une fonction sur un intervalle et utiliser quelques théorèmes usuels liés à la continuité de cette fonction.

Commentaires

La plupart des propriétés ont été abordées en classe de première. Ces propriétés, tout comme les techniques de calcul pour lever une indétermination, ne doivent pas faire l'objet d'un traitement théorique. Elles seront mises assez rapidement en œuvre dans des exercices dont le niveau de technicité et l'abondance doivent rester très raisonnable car elles seront réinvesties tout au long de l'année dans les études de fonctions. La propriété sur la limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert sera utilisée dans les suites et les fonctions définies par intégrales.

Les asymptotes à une courbe (horizontale, verticale et oblique) ont été abordées en Première. L'étude générale des branches infinies est hors programme. Les branches paraboliques selon les axes de coordonnées sont les seules directions asymptotes à connaître. Dans le cas d'une asymptote oblique, une équation est fournie à l'élève.

On introduira la continuité d'une fonction sur un intervalle. Cette définition permet l'usage de deux théorèmes importants concernant l'existence d'une bijection réciproque et la propriété des "valeurs intermédiaires ". Notons que la forme générale de cette dernière propriété est hors programme. On se limitera au cas d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle.

Les propriétés concernant les opérations sur les fonctions continues sur un intervalle sont admises. On n'exigera pas de l'élève la justification de la continuité sur un intervalle lors d'une évaluation.

On habituera les élèves à Donne une valeur approchée d'une solution d'une équation.

Volume horaire/semaine : 5 heures

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Limites - Limite d'une fonction composée. - Limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert • Branches paraboliques de direction (OI) et (OJ) dans un repère (O, I, J). • Continuité sur un intervalle : - Opérations, composée (propriétés admises). - Image d'un intervalle. • Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle : **Théorie 1 :** *si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f est une bijection de I sur f(I). sa bijection réciproque* f^{-1} est continue et de même sens de variation que la fonction *f*	• Détermine la limite d'une fonction : - en utilisant les limites de référence ou une expression conjuguée ; - en ayant recours à la définition d'un nombre dérivé. • Détermine la limite d'une fonction composée. • interprète graphiquement : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ (resp. $-\infty$) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ et $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ (resp. $-\infty$) • Démontre qu'une courbe admet une branche parabolique de direction (OI)(resp. (OJ)) • Détermine l'image d'un intervalle par une fonction continue : - en utilisant le tableau de variations ; - en utilisant une méthode algébrique. • Démontre qu'une fonction réalise une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J dans le cas où f est donnée par une formule explicite, Détermine f^{-1} (x).
Théorème 2 : si *f* est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors pour tout m de *f*(I), l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution dans I. Corollaire : soit *f* une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$. Si *f*(a) et *f*(b) sont des signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle ouvert $]a, b[$. • Fonctions du type :	• Prouver l'existence d'une unique solution de l'équation : $f(x) = m$ sur un intervalle I.

$-x \mapsto \sqrt[n]{x}$, ($n \in IR*$) $-x \mapsto x^r$ ($r \in Q, x \notin IR+*$). Définitions ; notons $x^{p/q}$ Propriétés des puissances d'exposants rationnels	

Remarques et suggestions

Dans la détermination des limites, on veillera à ce que l'élève sache identifier une forme indéterminée sans forcement en faire état par écrit.
Pour Détermine la limite d'une fonction composée on peut utiliser un changement de variable.
On n'abusera pas des fonctions définies par raccordement.
Sur des exemples, introduire les branches paraboliques de direction (OI) et (OJ).
Pour Détermine l'image d'un intervalle par une fonction continue, on privilégiera l'utilisation du tableau de variations, l'utilisation d'une méthode algébrique n'étant proposée qu'à travers des exercices guidés.
On peut avec profit Vérifie les pré requis de la classe de Première et les théorèmes concernant la continuité à travers des études de fonctions.
On habituera les élèves à Donne une valeur approchée d'une solution.

DERIVATION

OBJECTIFS :
Ce chapitre vise à :
• consolider les notions abordées en classe de première telles que la détermination du sens de variation d'une fonction et la recherche de tangentes à une courbe en des points donnés ;
• consolider la notion de dérivé et l'étendre à la composée de deux fonctions dérivables ;
• Complète les théorèmes concernant la dérivabilité par les notions de dérivabilité à gauche et de dérivabilité à droite ;
• utiliser des propriétés des fonctions dérivables pour Démontre des inégalités ou établir des encadrements.

Commentaires

La définition d'une fonction dérivable en un point ou sur un intervalle reste la même que celle introduite en Première. On la complète par la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle fermé et par la dérivabilité à droite et à gauche. On définira la notion de demi-tangente à une courbe. Le vocabulaire « point d'inflexion » est hors programme. Cependant on pourra étudier la position d'une tangente par rapport à une courbe.
La différentiabilité ou toute autre forme s'y rattachant est hors programme, de même que l'approximation affine d'une fonction.
La dérivée d'une fonction composée et la dérivée d'une fonction réciproque sont des compléments apportés en Terminale. Ces fonctions doivent garder une place raisonnable et être considérées comme des outils pour l'étude de fonctions nouvelles : des fonctions avec radicaux, des fonctions racines $n^{ième}$, les fonctions logarithmes et exponentielles.
Dans le cas où une fonction est définie par raccordement, on se ramène alors à une étude portant sur chacun des intervalles. Il est bien entendu que ces cas doivent être considérés comme exceptionnels et leur étude doit être largement guidée.

Les fonctions qu'on peut étudier dans ce chapitre sont en nombre infini. Il sera bon de bien sélectionner celles qui seront étudiées pour obtenir un éventail aussi complet que possible de situations différentes.

Volume horaire : 12 heures

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Dérivées successives ; nouvelle notations. $\frac{df}{dx}$; $\frac{d^2 f}{dx^2}$ • Si une fonction est dérivable sur un intervalle, alors elle continue sur cet intervalle. • Dérivée d'une fonction composée (admise) ; application à la dérivation des fonctions de la forme : u^n $(n \in \mathbb{Z}\ *), \sqrt{u}$ • Existence de la dérivée d'une fonction réciproque (admise), formule de la dérivée de la fonction réciproque. • Dérivée des fonctions puissances d'exposants rationnels. • Inégalité des accroissements finis (2 formes) • nombre dérivé à droite (à gauche) d'une fonction en un point. • Demi-tangente	• Démontre qu'une fonction composée est dérivable en un point et savoir Calcule le nombre dérivé en ce point. • Préciser l'ensemble des éléments où la fonction réciproque d'une fonction donnée est dérivable. • Détermine le nombre dérivé de la fonction réciproque en un point x_0 •Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour : - Démontre une inégalité ; - établir un encadrement. • Etudie la dérivabilité d'une fonction définie par intervalles en un point de raccordement. • Interprète graphiquement la dérivabilité à droite (resp. à gauche) d'une fonction en un point x_0.

Remarques et suggestions

On ne demandera pas de justifier la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle lors d'une évaluation.
La dérivée d'une fonction de la forme u^n $(n \in \mathbb{Z}\ *)$ doit être traité comme application de la dérivée d'une fonction composée.
Les dérivées de la forme u^α $(\alpha \in IR^*)$ seront abordées dans les chapitres sur les fonctions puissances.
Le programme signale que l'existence de la dérivée d'une fonction réciproque doit être admise.
On se limitera à l'utilisation de la formule donnant la dérivée d'une fonction réciproque uniquement en un point x_0 et cela pour des exemples ne présentant pas de difficulté particulière

I- Généralité sur les fonctions

1) Définition d'une fonction :

On appelle fonction $f : A \to B$, toute relation qui à chaque élément de $x \to f(x)$ ***A*** on associe **au plus un élément de** ***B***.

NB :

- $\boldsymbol{x}$ est appelé la variable ;
- $\boldsymbol{f(x)}$est appelé image de x par la fonction f;
- ***A*** est appelé ensemble de départ.
- ***B*** est appelé ensemble d'arrivé.

2) Ensemble de définition ou domaine de définition d'une fonction numérique $\boldsymbol{f}$:

Soit f une fonction de A vers B
On appelle ensemble de définition ou domaine de définition d'une fonction numérique f, **l'ensemble des éléments de *A* qui ont une image dans *B***. On le note **Df.**
Ainsi :

- **Si $\boldsymbol{f(x) = u(x)}$ (fonction polynôme), alors D$\boldsymbol{f}$ = $\mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$**
- **Si $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{u(x)}}$ (fonction irrationnelle), alors D$\boldsymbol{f}$ = $\{\boldsymbol{x/x \in \mathbb{R}; u(x) \geq 0}\}$**
- **Si $\boldsymbol{f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}}$ (fonction rationnelle), alors D$\boldsymbol{f}$ = $\{\boldsymbol{x/x \in \mathbb{R}; v(x) \neq 0}\}$**

3) Opération sur les fonctions :

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur leur ensemble de définition Df et Dg.

a- **Somme** :

$\forall\, x\ \in \mathrm{D}f$ et $\forall\, x\ \in \mathrm{D}g;\ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

b- Produit :

$\forall\, x\ \in \mathrm{D}f \cap \mathrm{D}g\ ;(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

c- Quotient :

$\forall\, x\ \in \mathrm{D}f \cap \mathrm{D}g$ et $g(x) \neq 0\ ona:\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

II- Limites

1) Propriétés sur les limites :

a) Propriété 1

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

b) Propriété 2

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{k}{x^n} = 0$ $(k \in \mathbb{R})$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{k}{x^n} = 0$ ($k \in \mathbb{R}$)

2) Opération sur les limites

a) Somme :

f	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g	l'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f + g$	$l + l'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

b) Produit :

f	l	l	0	∞
g	l'	∞	∞	∞
$f \bullet g$	$l \bullet l'$	∞ règle des signes	Forme indéterminée	∞ règle des signes

c) Quotient:

f	l	l	0	l	∞	∞
g	$l' \neq 0$	$l' = 0$	0	∞	l	∞
$\frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	+/− ∞ à gauche / à droite	Forme indéterminée	0	∞ règle des signes	Forme indéterminée

On remarque ainsi que l'on a quatre (4) formes indéterminées qui sont :
$-\infty + \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$.

3) Limite des fonctions polynômes et rationnelles à l'infini.

a) Limite d'une fonction polynôme à l'infini

La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite de son monôme du plus haut degré.

Exemple : $\lim\limits_{x \to -\infty} 1-2x^2 + 3x = \lim\limits_{x \to -\infty} -2x^2 = -2\,(-\infty)^2 = -\infty$.

b) Limite d'une fonction rationnelle à l'infini :

La limite d'une fonction du rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite du quotient des monômes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3x + 4x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1 + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} 4x = +\infty$

N.B : La propriété sur la limite des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles ne peut être utilisée qu'en $+\infty$ ou en $-\infty$.
En aucun cas, elle ne peut être utilisée lorsque x tend vers un nombre réel.

4) Limite de la composée de deux fonctions :

Soient f et g deux fonctions et fog leur composée définie sur un intervalle I contenant **« a »** où a est une borne de I.

Si : $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to l} f(x) = l'$ alors $\lim\limits_{x \to a} fog(x) = l'$

5) Limite des fonctions circulaires :

Si a est un nombre réel non nul, on a :
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sinx}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinax}{ax} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgax}{ax} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2}$

6) Limite à gauche – Limite à droite de x_0

a) Limite à gauche de x_0

On appelle limite à gauche d'un réel x_0 d'une fonction f, la limite lors qu'elle existe quand x tend vers x_0 par valeurs inferieures on note : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

b) Limite à droite de x_0

On appelle limite à droite d'un réel x_0 en une $fonction\ f$, la limite lors qu'elle existe quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures on note : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

NB :
Une fonction admet une limite en un point x_0 si sa limite à gauche est égale à sa limite à droite.
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

7) Théorème des gendarmes

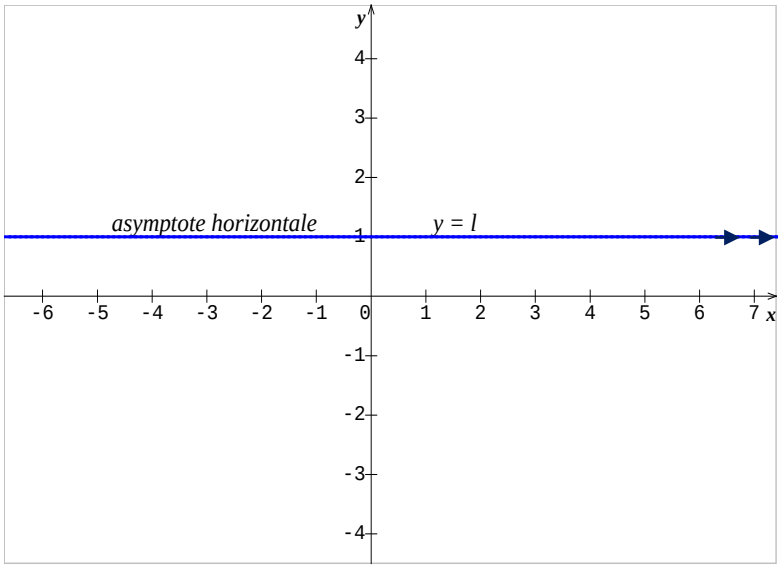
Soit f une fonction définie sur un intervalle I tel qu'on ait l'encadrement suivant :
$A(x) \leq f(x) \leq B(x)$

$$si \begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} A(x) = l \\ et \\ \lim\limits_{x \to \infty} B(x) = l \end{cases} \quad alors \quad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$$

6) Interprétation graphique de la limite d'une fonction :

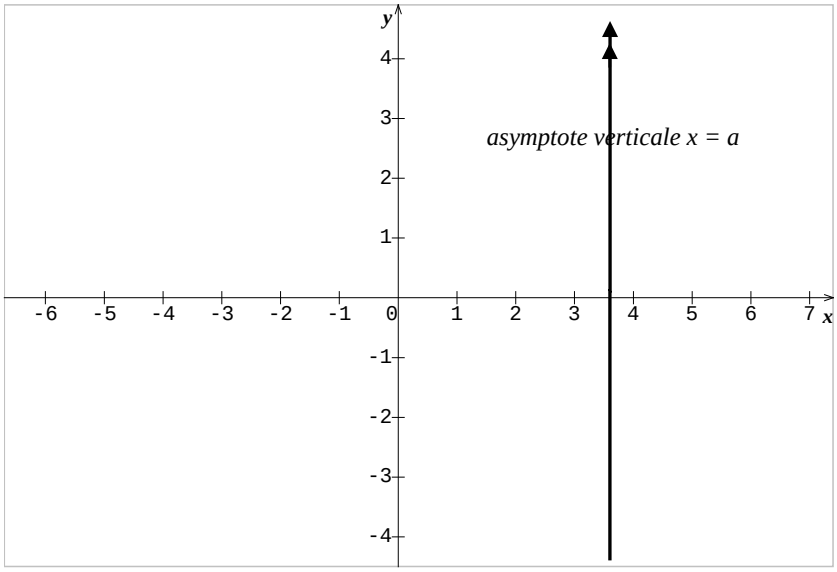
Soit f une fonction et Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$
Si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

Alors la droite d'équation $y = l$ est asymptote **Horizontale** à courbe Cf



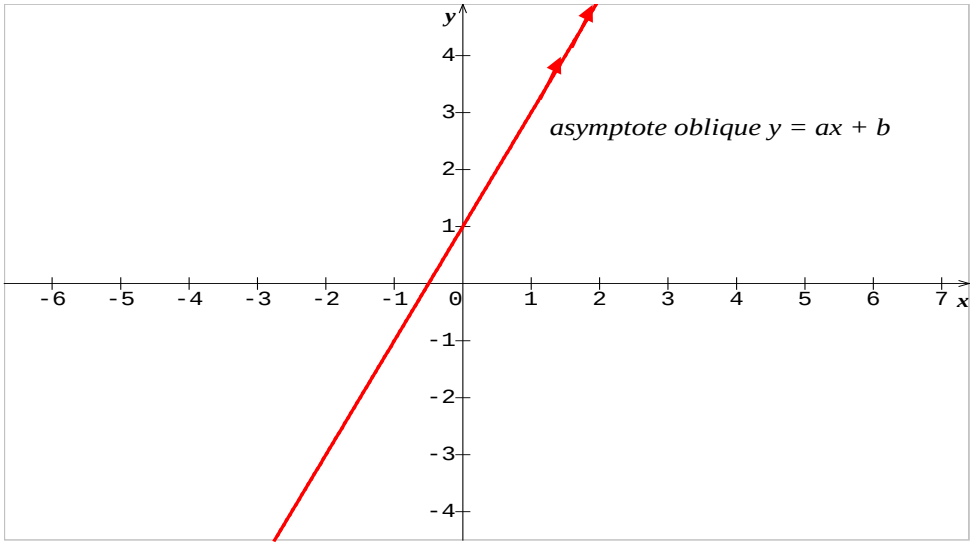
$Si\ \lim_{x \to a} f(x) = +\infty\ ou\ \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote **verticale** à la courbe Cf.



$Si\ \lim_{x \to +\infty} [\, f(x) - (ax + b)\,] = 0 \quad ou \quad \lim_{x \to -\infty} [\, f(x) - (ax + b)\,] = 0$

Alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote **oblique** à la courbe Cf.



III- Continuité

1) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit x_o un réel appartenant à I.
On dit que f est continue en x_o si et seulement si f est définie en x_o et si la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 est égale à $f(x_0)$
Une fonction f est continue en x_0 si et seulement si :

$f(x_0)$ Existe et $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_0) = l\ (l\ fini)$.

Remarque : les fonctions non continues en x_0 sont les fonctions non définies en x_0 et les fonctions n'admettant pas de limite en x_0

2) Continuité sur un intervalle :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a\ ;\ b]$ ou $I =]a\ ;\ b[$. On dit que f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout point de I.

3) Continuité à gauche – continuité à droite

a- Continuité à gauche :

Une fonction f est continue à gauche de x_o *si* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_o)$.

b) Continuité à droite :
Une fonction f est continue à droit de x_o si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$
NB : Une fonction est continue en un point de x_o si elle est **gauche** et à **droite** de x_o

4) Prolongement par continuité

Soit f une fonction numérique non définie en x_0 ; mais admettant une limite l en ce point. La fonction g définie par : $g(x)=\begin{cases} f(x) & si\ x \neq x_0 \\ l & si\ x = x_0 \end{cases}$ est appelée le prolongement de la fonction f par continuité au point x_0

N B : Si f n'est pas définie en x_0 mais admet une limite en ce point, alors on dit que f est prolongeable par continuité au point x_0.

IV- Dérivation :

1) Nombre dérivé en un point x_0 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_o.

On dit que f est dérivable en x_o si et seulement si la quantité $\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ admet une limite finie quand x tend vers x_o. Cette limite est appelée **nombre dérivé en** x_o **et est noté** $f'(xo)$.

C'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'(x_o)$

N.B : f est dérivable en x_0 est équivalente que la quantité $\frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers zéro ; il suffit de poser $h = x - x_0$

f est dérivable en x_0 si elle admet un nombre dérivé $f'(x_o)$

2) Lien entre continuité et dérivabilité :

Toute fonction dérivable en un point x_o est continue en x_o .

N.B : La réciproque est inexacte.

3) Nombre dérivé à gauche – Nombre dérivée à droite

a) Nombre dérivé à gauche :

$Si \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ existe et est finie, alors on dit que f est dérivable à gauche en x_o.

On la note $f'_g(x_0)$

b) Nombre dérivé à droite :

$Si \lim\limits_{x \to x_o^+} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ existe et est finie, alors on dit que f est dérivable à droite en x_o.

On la note $f'_d(x_0)$

Théorème :

Si f est dérivable à gauche et à droite en x_o et si les deux nombres dérivés sont égaux alors

f est dérivable en x_o et on a : $\lim\limits_{x \to x_o^-} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim\limits_{x \to x_o^+} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'(x_o)$

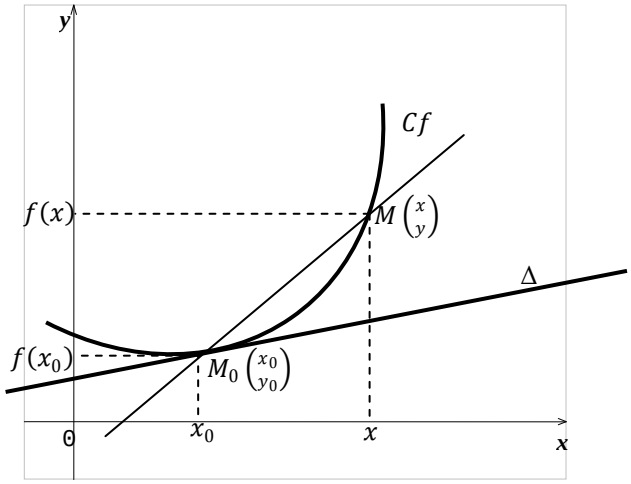
4) <u>Interprétation graphique d'un nombre dérivé</u>

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(;O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

Soit $M_0\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ un point fixé de $(\mathcal{C})$. M$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point courant de $(\mathcal{C})$; construisons la droite (M_0M) .

Lorsque x tend vers x_0, la droite (M_0M)vient occuper une position limite (M_0T) appelée tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point $M_0\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$.

$f\,'(x_0)$ est appelé **pente** ou **coefficient directeur** de la tangente à la courbe représentative de f au point $M_0\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$



5) <u>Equation de la tangente au point d'abscisse x_0</u> :

L'équation de la tangente à la courbe en un point d'abscisse x_0 est donné par :

(T) : $y = f\,'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$

<u>NB :</u>

Si le nombre dérivé à gauche et le nombre dérivé à droite existent et sont différents, alors la courbe admet deux demi – tangentes en M_o de coefficients directeur respectifs : les nombres dérivés à gauche et à droite de x_0 en faisant un angle en ce point.

- La courbe $(\boldsymbol{Cf})$ passe par le point $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ si et seulement $\boldsymbol{f(x_0) = y_0}$.
- La courbe $(\boldsymbol{Cf})$ admet au point $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses c'est-à-dire l'axe ox si et seulement si $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$.
- La courbe $(\boldsymbol{Cf})$ admet au point $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ une tangente parallèle à la droite **(D)** d'équation : $\boldsymbol{y = ax + b}$ si et seulement si $\boldsymbol{f'(x_0) = a}$.
- La courbe $(\boldsymbol{Cf})$ admet au point $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ une tangente de coefficient directeur $\boldsymbol{k}$ si et seulement si $\boldsymbol{f'(x_0) = k}$.

6) Formules sur les dérivées :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. La fonction f' qui à tout $x \in I$ fait correspondre le nombre dérivé de f en x que l'on note par $f'(x)$ est appelé fonction dérivée première de f. Ainsi si f ; u et v sont des fonctions dérivables en un point $x \in I$ alors on a le tableau des dérivées suivants :

a- Dérivées usuelles :

Fonctions	Dérivées	Domaines
a	0	$\mathbb{R}$
ax	a	$\mathbb{R}$
ax^n	nax^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{a}{x^n}$	$\frac{-nax^{n-1}}{x^{2n}} (x \neq 0)$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^*_+$
$\sqrt{ax+b}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$	$\mathbb{R}_+$
$cosx$	$-sinx$	$\mathbb{R}$
$sinx$	$cosx$	$\mathbb{R}$
$tanx$	$\frac{1}{Cos^2x} = 1 + tg^2x$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$
$cos(ax+b)$	$-asin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$sin(ax+b)$	$acos(ax+b)$	$\mathbb{R}$

b- Opérations sur les dérivées :

$au\ (a \in \mathbb{R})$	au'
$u \times v$	$u'v + v'u$
$\frac{a}{u}(a \in \mathbb{R})$	$\frac{-au'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{(u')(v)-(v')(u)}{(v)^2}$
$(u)^n$	$nu'u^{n-1}$
$\frac{a}{u^n}\ (a \in \mathbb{R})$	$\frac{-nau'u^{n-1}}{u^{2n}}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$sin(u)$	$u'cos(u)$
$cos(u)$	$-u'sin(u)$
$tan(u)$	$\frac{u'}{Cos^2u}$
$u = (gof)(x)$	$u' = f'(x)og'[f(x)]$

7) Sens de variation d'une fonction.

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On retient que les variations d'une fonction dépendent du signe de sa dérivée. Ainsi :

- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in$ I, alors $\forall x \in$ I, f est strictement décroissante.
- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in$ I, alors $\forall x \in$ I, f est strictement croissante.
- Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in$ I, alors $\forall x \in$ I, f est constante ou stationnaire

N.B :

Les variations d'une fonction peuvent être résumées dans un tableau appelé tableau de variation de f. Ainsi un tableau de variation comporte les éléments suivants :

- Le domaine de définition Df.
- Les limites aux bornes du domaine de définition Df
- Les valeurs pour les quelles la dérivée f' s'annule
- Des flèches croissantes et décroissantes justifiant les variations de f.

8) <u>Extremum relatif</u>:

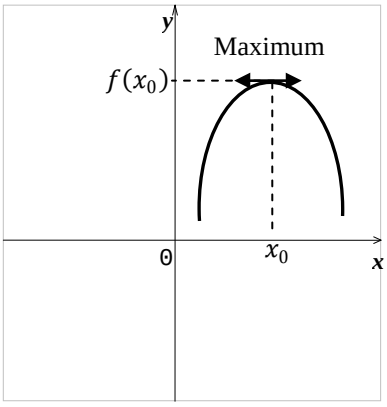
<u>Théorème 1</u>

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a\,;b[$ ouvert contenant x_0. Si $f'(x)$ s'annule en x_0 et en changeant de signe, alors f admet un extremum au point d'abscisse x_0.

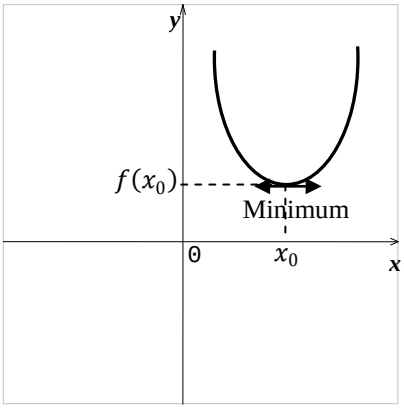
<u>Théorème 2</u>

Si f admet un extremum relatif d'abscisse x_0, alors $f'(x_0) = 0$ ou encore on dira que f n'est pas dérivable au point d'abscisse x_0.

Si $f\,'(x)$ passe du signe négatif au signe positif on dit que f présente un minimum



Ici : $f\,'(x)$ passe du signe positif au signe négatif.
On dit que f présente un maximum



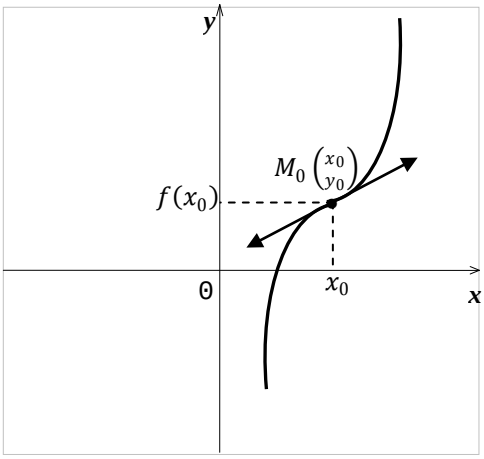
Ici : $f\,'(x)$ passe du signe négatif au signe positif.
On dit que f présente un minimum

9) Extension du nombre dérivé

a- Point d'inflexion:

Théorème

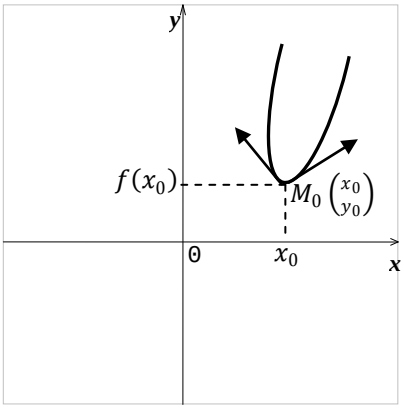
Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a\,;b[$ ouvert contenant x_0. Si $f''(x)$ s'annule en x_0 changeant de signe, alors f admet un point d'inflexion au point d'abscisse x_0.



Au point $M_0\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ la courbe cf coupe la tangente.
Par conséquent M_0 est un point d'inflexion pour la courbe cf.

b- Points anguleux:

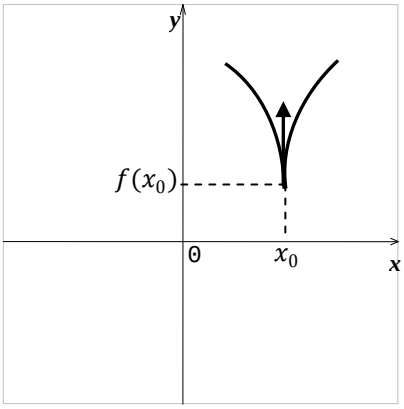
Soit f une fonction admettant au point d'abscisse x_0 un nombre dérivé à gauche $l(l \in \mathbb{R})$ et un nombre dérivé à droite $l'(l' \in \mathbb{R})$. On dit que la courbe (C) de f admet au point d'abscisse x_0 un point anguleux si et seulement f n'est pas dérivable en x_0 et si $l \neq l'$.



Ici la courbe (C) admet au point d'abscisse x_0 deux demi – tangentes de coefficient directeurs respectifs l et l'.
Avec $l \neq l'$.

c- Points de rebroussement:

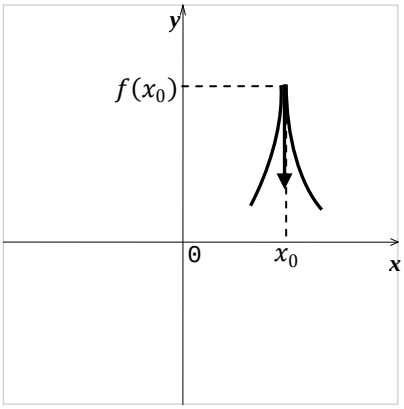
Soit f une fonction admettant au point d'abscisse x_0 un nombre dérivé.



Point de remboursement de 1ière espèce

Si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = +\infty$

Alors la courbe (c) de f admet au point d'abscisse x_0 une demi- tangente verticale dirigée vers le haut



Point de remboursement de 2ième espèce

Si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = -\infty$

Alors la courbe (c) de f admet au point d'abscisse x_0 une demi- tangente verticale dirigée vers le bas

d- Théorème de l'inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I =]a\,;b[$.

Première forme :
Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$ et m et M sont tels que si $x \in [a\,;b]$ et $m \leq f'(x) \leq M$ alors on a : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

Deuxième forme :
Si k est un réel tel que : $\forall x \in I = [a\,;b]$, si $|f'(x)| \leq k$ alors $|f(b) - f(a)| \leq k|b-a|$

V- Etude de fonctions :

1) Parité d'une fonction

a- Fonction paire :

Une fonction f est dite paire si et seulement si $\forall\, x \in Df$ et $-x \in Df$, on a :
$f(-x) = f(x)$

b- Fonction impaire :

Une fonction f est dite impaire si et seulement si $\forall\, x \in Df$ et $-x \in Df$, on a :
$f(-x) = -f(x)$

NB :

- La fonction $x \mapsto cosx$ est paire car $cos(-x) = cosx$
- La fonction $x \mapsto sinx$ est paire car $sin(-x) = -sinx$

2) Périodicité d'une fonction

Une fonction f est dite périodique et de période T si et seulement si $\forall\, x \in Df$, on a :
$f(x+T) = f(x)$

NB :

- La fonction $x \mapsto cos(ax+b)$ est périodique et de période $T = \frac{2\pi}{|a|}$
- La fonction $x \mapsto sin(ax+b)$ est périodique et de période $T = \frac{2\pi}{|a|}$
- La fonction $x \mapsto tang(ax+b)$ est périodique et de période $T = \frac{\pi}{|a|}$
- Les fonctions $x \mapsto cosx$ et $x \mapsto sinx$ sont toutes deux périodiques et de période $T = 2\pi$

3) Courbes symétriques :

a) Axe de symétrie :

La droite **d'équation $x = a$ est dite axe de symétrie** pour la courbe (Cf) de f si :
$f(2a - x) = f(x)$ ou $f(a + x)$ est paire ou $f(a + x) = f(a - x)$

b) Centre de symétrie :

Le **point $I\binom{a}{b}$ est dit centre de symétrie** pour la courbe (Cf) de f si
$f(2a - x) + f(x) = 2b$ ou $f(a + x) - b$ est paire ou $f(a + x) + f(a - x) = 2b$

N.B :

- Toute fonction paire admet l'axe $(y'\,o\,y)$ comme axe de symétrie.
- Toute fonction impaire admet le point $O\binom{0}{0}$ (origine du repère) comme centre de symétrie.

c) Recherche de centre de symétrie et d'axe de symétrie :

Centre de symétrie :

Soit f une fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{\gamma x+\beta}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\imath}$) où : a ; b ; c ; γ ; β sont tous des réels avec : $a \neq 0 \ et \ \gamma x + \beta \neq 0$.

Si f peux ce mettre sous la forme : $f(x) = a'x + b' + \frac{c'}{\gamma x + \beta}$

Alors le centre de symétrie à la courbe (C) de f à pour coordonnée : $I\begin{pmatrix} x_0 = \frac{-\beta}{\gamma} \\ y_0 = a'x_0 + b' \end{pmatrix}$

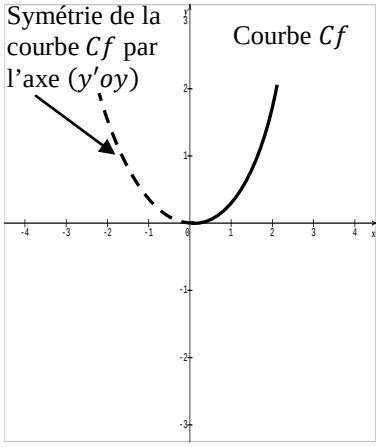
- **Axe de symétrie :**

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec ($a \neq 0$)

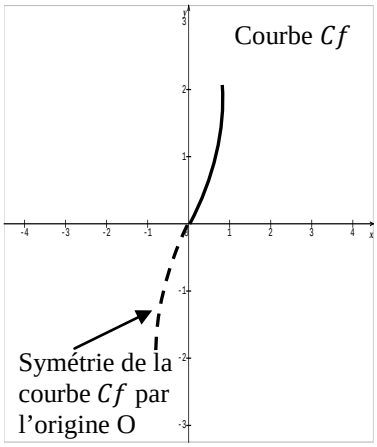
Si f peux ce mettre sous la forme : $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

Alors l'axe de symétrie à la courbe (C) de f à pour équation $x = -\frac{b}{2a}$.

Représentation



Ici l'axe $(y'oy)$ est axe de symétrie



Ici l'origine O du repère est centre de symétrie

3) <u>Fonction réciproque</u>

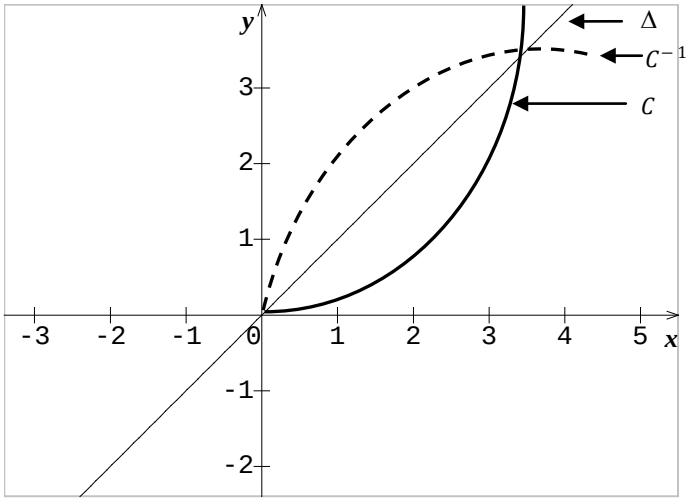
<u>Bijection</u> :
Une fonction f de E vers F est dite bijective si tout élément de l'ensemble d'arrivé F admet un et un seul antécédent dans l'ensemble de départ E.

- **En Pratique :**

Une application f est bijective si et seulement si $\forall y \in F \ \exists! x \in E$ on a **: $f(x) = y$**

- **Graphiquement**

Les courbes représentatives d'une fonction et celle de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice**(Δ)** d'équation $y = x$.



<u>Théorème</u> :
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f est une bijection de **I sur $f(I)$**. **et admet une bijection *réciproque* f^{-1} de f (I) sur I ayant même sens de variation que f**
Les courbes Cf et Cf^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice Δ : $y = x$
Si M (x ; y) ∈ Cf alors M(y ; x) ∈ Cf^{-1}
Si $x = a$ est asymptote à C_f alors y = a devient asymptote pour Cf^{-1}

4) <u>Théorème de valeurs intermédiaires</u> :

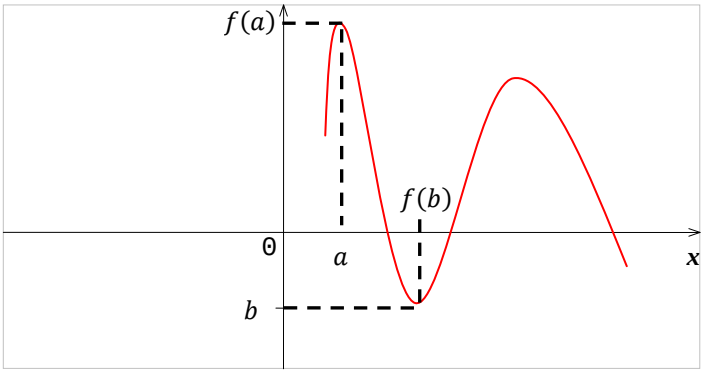
<u>L'image d'un intervalle par une fonction continue :</u>

<u>Théorème 1 :</u>
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
Soit f une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit Df son ensemble de définition. Soit I = [a ; b] ou I =] a ; b [un intervalle de Df . Si f est continue sur I alors $f(I)$ est aussi un intervalle

Théorème 2:
L'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé.

1ère forme :
Soit f une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et soit D_f son ensemble de définition. Soit I = [a ; b] ou I =] a ; b [un intervalle de . Si f est continue sur I alors $f(I)$ est aussi un intervalle.

2ème forme :
Si f est continue sur I et que $f(a) \times f(b) < 0$, alors il existe un réel α ∈ I tel que $\boldsymbol{f(\alpha) = 0}$



5) Théorème relatif aux fonctions continues et strictement monotones

1ère forme : Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle [a ; b]

et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors il existe un unique point x_0 élément de $]a; b[$ tel que $f(x_0) = 0$

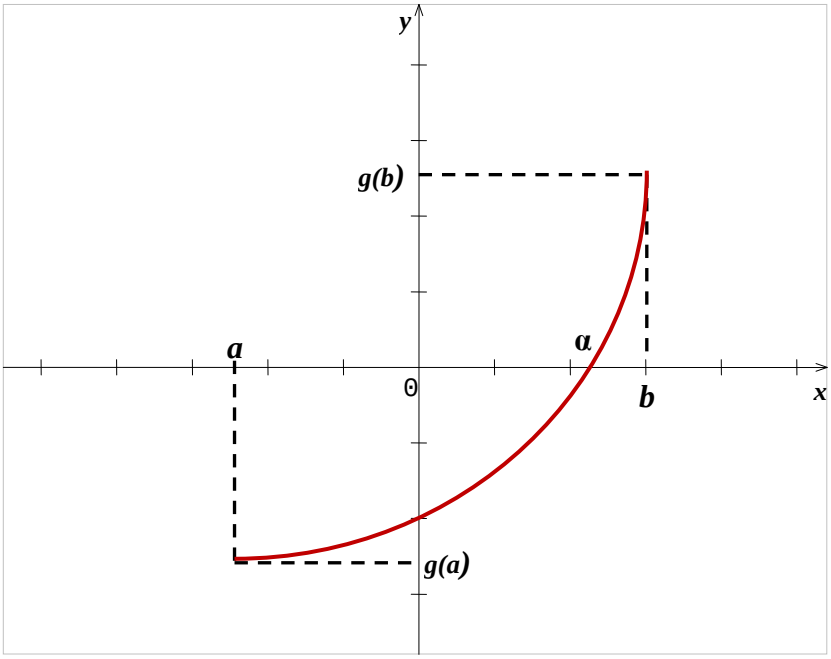
2ème forme : Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle[a ; b] et si : $f(a) \times f(b) \leq 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α ∈ [a ; b]

6) Approximation d'une solution α de l'équation $g(x) = 0$:

a- Méthode de dichotomie :

Soit g une fonction définie sur un intervalle [a ; b] tel que $g(a) \times g(b) < 0$.
Posons $a_0 = b$ et $b_0 = b$.

- **Si g est strictement croissante sur $[a\ ;\ b]$**

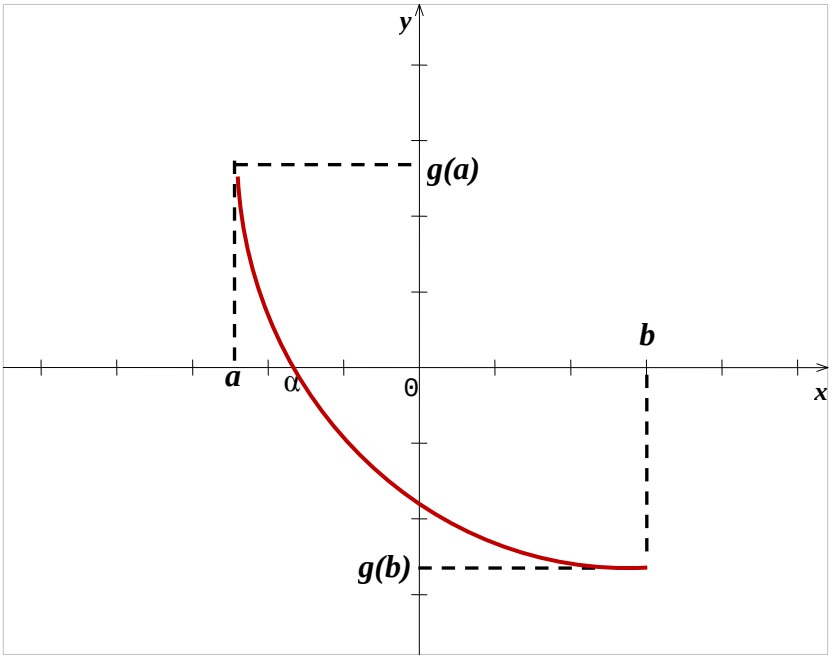


Ainsi on a deux suites numériques de termes généraux a_n et b_n tel que α ∈ [a_n ; b_n].
On calcule $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$.

- Si $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ alors α ∈ $\left[\frac{a_n + b_n}{2}\ ;\ b_n\right]$.

- Si $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$ alors α ∈ $\left[\ a_n\ ;\ \frac{a_n + b_n}{2}\right]$.

- **Si g est strictement décroissante sur $[a\ ;\ b]$**



Ainsi on a deux suites numériques de termes généraux a_n et b_n tel que $\alpha \in [\ a_n\ ;\ b_n\ ]$.

On calcule $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$.

- Si $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ alors $\alpha \in \left[\ a_n\ ;\ \frac{a_n + b_n}{2}\right]$.
-
- Si $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$ alors $\alpha \in \left[\frac{a_n + b_n}{2}\ ;\ b_n\ \right]$.

b- <u>Méthode des balayages</u> :

C'est une méthode qui consiste à déterminée une approximation de α à partir d'un tableau de valeur. Ainsi la valeur de α est obtenue en encadrant la valeur de x à partir du changement de signe obtenue entre l'antécédent positif et négatif.

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	.....	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$	$f(x_6)$	$f(x_7)$	.....	$f(x_n)$

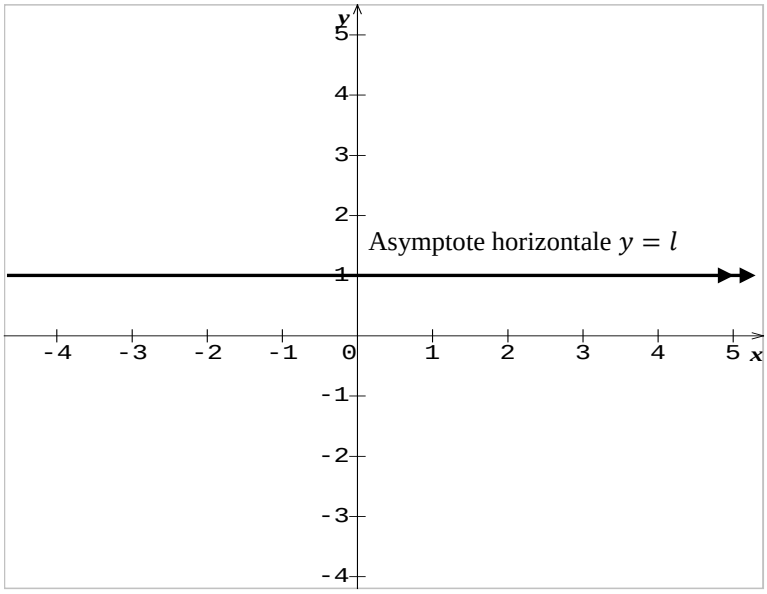
Si par exemple $f(x_5) \times f(x_6) < 0$ alors $\alpha \in [\ x_5\ ;\ x_6\ ]$ et par conséquent $\alpha = \frac{x_5 + x_6}{2}$

7) <u>Etude des branches infinies</u> :

<u>Notion d'asymptotes</u> :

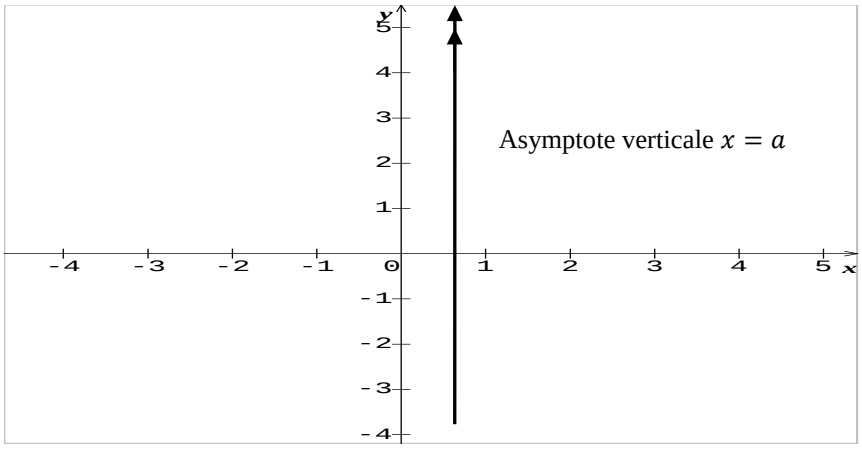
Si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

Alors la droite d'équation $y = l$ est asymptote **horizontale** à la courbe Cf.



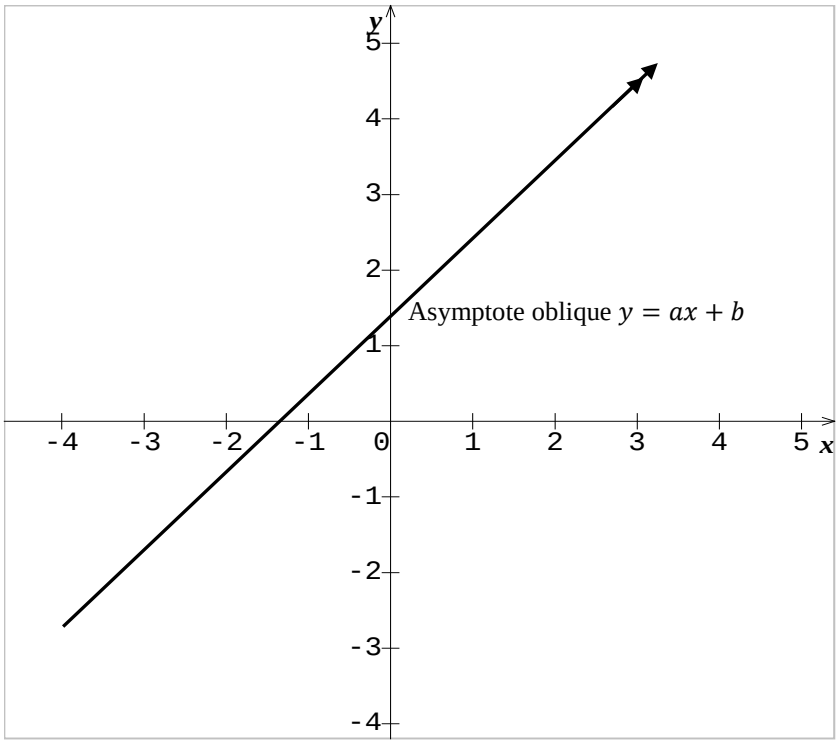
$Si \lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote **verticale** à la courbe Cf..



$Si \lim\limits_{x \to +\infty} [\, f(x) - (ax+b) \,] = 0$ *ou* $\lim\limits_{x \to -\infty} [\, f(x) - (ax+b) \,] = 0$

Alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote **oblique** à la courbe Cf



Recherche d'asymptote oblique :

Il est évident de dire que si : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, alors on a une possibilité d'asymptote oblique.

Ainsi pour chercher l'asymptote oblique, on procède comme suite :

−Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b$

Alors la droite d'équation $y = ax + b$ est Asymptote oblique à la courbe (C) de f.

−Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = 0$ ou ∞

Alors la droite d'équation $y = ax$ est Asymptote oblique à la courbe (C) de f.

−Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$

Alors la courbe (C) de f admet l'axe $(y'oy)$ comme branche parabolique.

−Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

Alors la courbe (C) de f admet l'axe $(x'ox)$ comme branche parabolique.

N.B :
Si f est une fonction rationnelle dont le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur d'une seule unité, alors on peut écrire $f(x)$ sous la forme :

$f(x)$ = quotient $+ \frac{Reste}{Diviseur} = q(x) + \frac{R}{D(x)}$

Si $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{R}{D(x)} = 0$. Alors la droite d'équation $y = q(x)$est appelée Asymptote oblique.

8) Position relative d'une courbe (Cf) et de son asymptote oblique (Δ).

Pour Détermine la position relative d'une courbe (Cf) et de son asymptote oblique (Δ), on étudie le signe de : $f(x) - y$. Ainsi :

- Si $f(x) - y < 0$, alors la courbe (Cf) est en dessous de la droite (Δ).
- Si $f(x) - y > 0$, alors la courbe (Cf) est au dessus de la droite (Δ).
- Si $f(x) - y = 0$, alors la courbe (Cf) et la droite (Δ) sont confondues.

9) Intersection de la courbe avec les axes du repère :

a) Intersection de la courbe avec l'axe des abscisses (ox)

Pour Trouve le ou les points d'intersection de la courbe (Cf) avec l'axe des abscisses, on résous l'équation $f(x) = 0$. Ainsi la courbe passe par les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'axe (ox).

b) Intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées (oy)

Pour Trouve le ou les points d'intersection de la courbe (Cf) avec l'axe des ordonnées, on calcule l'ordonnée $y = f(o)$. Ainsi la courbe passe par$y = f(o)$ sur l'axe des (oy).

10) Plan d'étude d'une fonction :
Pour étudier une fonction f et représente graphiquement sa courbe (Cf) dans le repère on adopte le plan suivant :

- Recherche du domaine de définition ou ensemble de définition Df.
- Etude ci-possible de la continuité.
- Etude ci-possible de la parité et de la périodicité afin de réduire le domaine d'étude puis de Complète la courbe de la fonction f par symétrie.
- Etude des limites aux bornes de l'ensemble de définition Df.
- Calcule de la dérivée $f'(x)$ puis étude du signe de $f'(x)$.

- Préciser le sens de variation de la fonction f.
- Consignation des résultats précédents dans un tableau de variation.
- Rechercher ci-possible des points d'intersections éventuels avec les axes du repère.

Exercices

Limites

Limites en un point x_0

1 Calcule les limites suivantes aux points x_0 donnés :

a- $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^3 - 8}{-x+2}$; b- $\lim\limits_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$; c- $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{2x+5}{x^2-x-2}$; d- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

e- $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-x-6}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$; f- $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x^2-1}{-x^2-3x+4}$

2 Calcule les limites suivantes aux points x_0 donnés :

a- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sin2x}{3x}$; b- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{1-Sinx}$; c- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sin5x}{Sin3x}$; e- $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{Sinx}{\pi - x}$; f- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sin4x}{tangx}$;

Limites à l'infinie

3 Calcule les limites suivantes à l'infinie :

a- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-8}{x+1-x^2}$; b- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt{x}-1}{x+2}$; c- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2+2}{5x^2-x}$; d- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

e- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x+3}{\sqrt{4x^2+x-5}}$; f- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}$; g- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x-|x|}{2x-2}$

h- $\lim\limits_{x \to +\infty} 1-x+\sqrt{x^2+x+1}$; i- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2+Sinx}{x+1}$ (*théorème des gendarmes*)

Limites et asymptotes

4 Calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci-dessous (on Donnera ci-possible les éventuelles asymptotes ou possibilité d'asymptotes)

a- $f(x) = \frac{x^2+5}{-x+2}$; b- $f(x) = \frac{-x^2+5}{x^2+5x-6}$; c- $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{-x}$; d- $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$

5 Soit la fonction f dénie par : $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x$.
On note (Cf) sa courbe dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
a- Etudie les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. La courbe (Cf) admet – elle une asymptote horizontale ?

b- Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à (Cf) en $-\infty$.

Continuités

Continuité en un point x_0

6 Etudie la continuité des fonctions suivantes aux points x_0 donnés :

a- $\begin{cases} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2+x-6} \text{ et } x_0 = 2 \\ f(2) = 0 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} f(x) = \frac{|x-1|+2}{x+3} \quad x_0 = 1 \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Continuité et condition de faisabilité

7 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$\begin{cases} f(x) = \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} \; si \; x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ f(2) = a \end{cases}$
Détermine la valeur de a pour que f soit continue en $x_o = 2$

8 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$\begin{cases} f(x) = x^2 + ax \quad si \; x \in]-\infty \; ; -1[\\ f(x) = 2x - 1 \quad si \quad x \in]-1 \; ; \; 1[\\ f(x) = b(x^2 - 1) \quad si \; x \in]1 \; ; +\infty[\end{cases}$

a) Détermine le réel a pour que f soit continue au point $x_o = -1$
b) Pouvez – vous Détermine la valeur de b pour que f soit continue au point $x_o = 1$?

Prolongement par continuité

9 Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de définition de la fonction f et Détermine (s'il existe) le prolongement par continuité de cette fonction en x_o.

a) $\begin{cases} f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ x_0 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} f(x) = \frac{tgx}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$

10 Soient f et g deux fonctions définies respectivements par :
$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$

a- Détermine les ensembles de définitions Df et Dg respectivement des fonctions f et g.

b- Vérifie que la fonction g est le prolongement par conitinuité de la fonction f en $x_0 = 0$.

11 On considère la fonction g de la variable réelle x définie par $g(x) = \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}$

1) Détermine son ensemble de définition Dg.
2) Montre que g admet en 2 un prolongement par continuité que l'on notera par h.
3) Montre que h est dérivable en 2 puis Donne l'équation de la tangente à la courbe(C) de h au point d'abscisse 2.

Dérivabilité

Dérivabilité en un point x_0

12 Etudie la dérivabilité des fonctions suivantes aux points x_0 donnés :

a) $\begin{cases} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2+x-6} \text{ et } x_0 = 2 \\ f(2) = 0 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} f(x) = \frac{|x-1|+2}{x+3} \quad x_0 = 1 \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Dérivabilité et condition de faisabilité

13 Détermine les réels a et b pour que f soit continue et dérivable aux points $x_0 = 1$

$\begin{cases} f(x) = 2x^2 + ax - 3 \; si \; x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2x+b}{x} \; si \; x > 1 \end{cases}$

14 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$\begin{cases} f(x) = \frac{x(x+1)}{(x+2)^2} \; si \; x \geq -1 \\ f(x) = 2x + a \; si \; x < -1 \end{cases}$

1) Pour quelle valeur de a la fonction f est – elle continue au point -1 ?
2) Pour cette valeur, étudier la dérivabilité de la fonction f au point – 1.

Application de la dérivée

15 Détermine une équation de la tangente en $M_o(xo ; f(xo))$ à la courbe (C) de f dans les cas suivants :

$a) f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3 \; et \; x_o = -2$; $b) f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$ et $x_o = 1$

c) $f(x) = \frac{tangx}{x}$ et $x_o = 0$

16 Détermine la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$a) f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 3$; $b) f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$; c) $f(x) = (-x^2 + 2x)^3$

d) $f(x) = \sqrt{2x^3 - 4x^2 + 1}$; e) $f(x) = (1 - 3x^2)(-x^2 + 1)$; f) $f(x) = \text{Cos}^3 x$

g) $f(x) = (x-1)\sqrt{x^3 - x^2}$; h) $f(x) = \text{Sin}(3x - 1)^4$; i) $f(x) = Sin^4(3x - 1)$

17 Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$

1) Ecris de $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
2) a– Etudie la continuité et la dérivabilité de f aux points $x_o = -1$ et $x_o = 3$.
   b– Que dira – t – on quant à la dérivabilité de f aux points $x_o = -1$ et $x_o = 3$?
3) Donne une équation de la tangente à gauche et à droite aux points $x_o = -1$ et $x_o = 3$.
4) Dresse le tableau de variation de la fonction f.

Etudes de fonctions

Analyse et interprétation d'un tableau de variation.

18 Analyse puis interprète chacun des tableaux de variations suivants afin de préciser :

a- les domaines de définition.
b- les limites aux bornes du domaine de définition tout en mettant en évidence les éventuelles asymptotes et possibilités d'asymptotes.
c- Donne l'allure de la courbe (Cf) dans chaque cas.

1) *f* est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f\,'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

De plus :
- La courbe (Cf) admet l'origine du repère comme centre de symétrie.
- La courbe (Cf) admet l' axe $(y'Oy)$ comme branche parabolique.

2) *g*est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g\,'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	$-\infty$

De plus : La courbe (Cg) admet l' axe $(y'Oy)$ comme branche parabolique.

3) *h*est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$h\,'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$h(x)$	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1

4) *p*est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$p\,'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$p(x)$	2	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	2

19 Dresse le tableau de variation de la fonction numérique donnée, partant de ses renseignements fournis dans les cas suivants :

1) Pour f :

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que l'équation $f\,'(x) = 0$ admet les solutions $x = -1$ et $x = \frac{3}{2}$
- f n'est croissante qu'entre les zéros de sa dérivée $f\,'$ et les points $E_1\left(\frac{3}{2}\ ; 4\right)$ et $E_2\left(-1; -\frac{5}{2}\right)$ sont ses extremums
- les droites $y = -2$ et $y = 3$ sont ses asymptotes respectives en $-\infty$ et $+\infty$

2) Pour g :

- g est définie sur $]-\infty\ ;\ 0\,] \cup \left[\frac{5}{2}\ ; +\infty\right[$ et admet des demi tangentes verticales aux points d'abscisses 0 et $\frac{5}{2}$
- g est strictement décroissante sur son ensemble de dérivabilité.
- la droite $y = -x$ est à la fois asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$
- les points de coordonnées $(0\ ;-3)$ et $\left(\frac{5}{2}\ ;\ 1\right)$ sont sur la courbe de g.

3) Pour h :

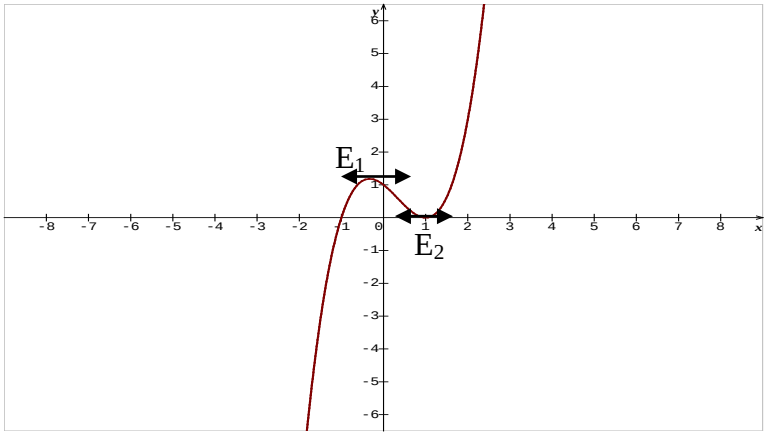
- h est dérivable sur $\mathbb{R}-\{0\ ;\ 2\}$ et continue sur $\mathbb{R}$.
- le point de coordonnées $(0{,}3\ ;\ 0{,}4)$ est l'extremum maximum absolue de la courbe (Ch) et h est croissante sur $[\,0\ ;\ 0{,}3\,] \cup [\,2\ ; +\infty[$
- les droites d'équations $y = -1\ et\ y = -2x + 1$ sont asymptotes de (Ch) respectivement en $-\infty$ et $+\infty$
- les points de coordonnées $(0\ ;\ 0)$;$(1\ ;\ 0)$; et $(2\ ;-2)$appartiennent à (Ch)

Analyse et interprétation d'un graphique.

20 Analyse chacune des courbes représentatives données dans un repère orthonormé du plan afin d'établir son tableau de variation.

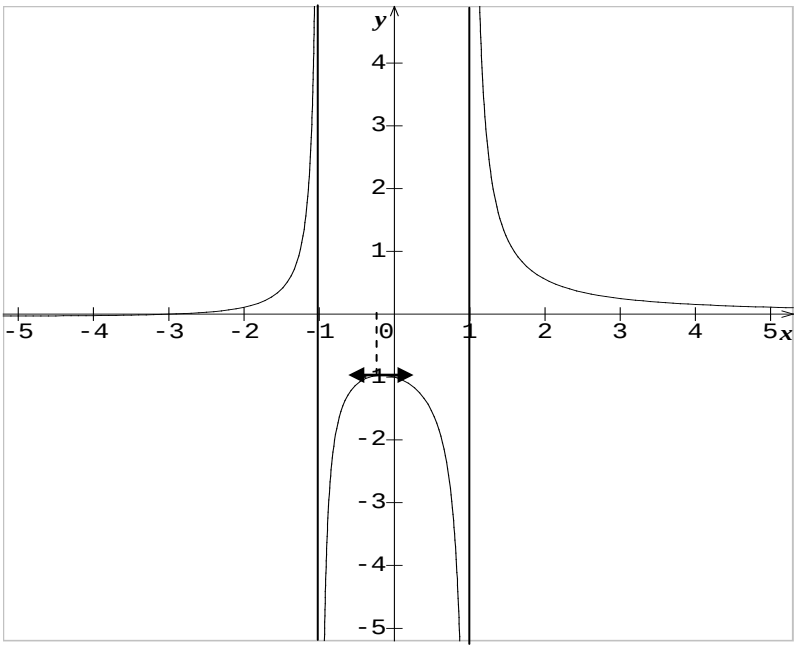
a- Détermine les réels $a\ ;\ b\ ;\ c$….. en utilisant le graphique.

1) f est la fonction dont la courbe est donnée ci-dessous par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

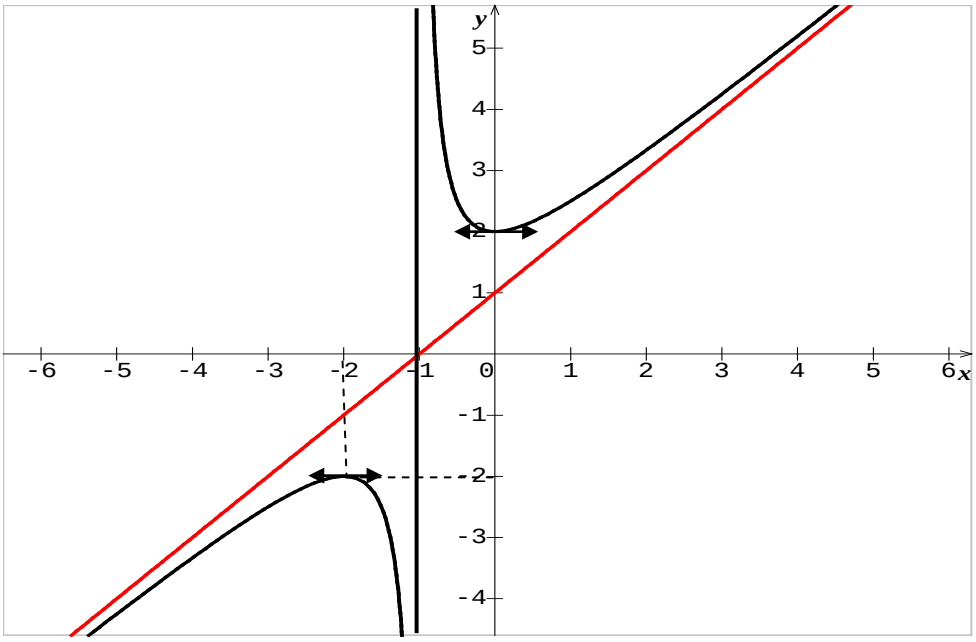


De plus : $E_1\left(\frac{-1}{3}\ ;\ \frac{32}{27}\right)$ et $E_2(1\ ;\ 0)$ sont les sommets de la courbe (Cf)

2) La fonction donnée est g telle que : $g(x) = \frac{ax + b}{cx^2 + d}$



3) La fonction donnée est h telle que : $h(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$



Fonctions d'initialisations.

21 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Détermine l'ensemble de définition Df.
2) Calcule les limites aux bornes de Df.
3) Détermine les réels a ; b et c tel que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$
4) a- Montre que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe Cf .
   b- Détermine la position de la courbe Cf et de la droite (D).
5) Montre que le point I$\binom{-1}{0}$ est centre de symétrie pour la courbe Cf.
6) Détermine une équation de la tangente à la courbe Cf au point d'abscisse – 2
7) Calcule la dérivée f' de la fonction f puis Dresse le tableau de variation de f.
8) Construire la courbe Cf et la droite (D) dans le même repère.

22 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Détermine les réels a ; b ; c et d tel que :
   a- La courbe Cf admet comme asymptote les droites $x = 2$ et $x = -1$.

b- La courbe Cf passe par le point A$\binom{1}{-2}$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -5.

2) Etudie la fonction f puis représente sa courbe Cf dans le repère.

23 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 + ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

Détermine les réels a ; b c ; m ; n et p tel que :

a- La courbe Cf admet comme asymptote les droites $x = 2$ et $x = -1$.

b- La courbe Cf passe par les points A$\binom{1}{-1}$ et B$\binom{0}{3}$ et admet au point B$\binom{0}{3}$ une tangente de coefficient directeur -3.

24 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 - 9x}{2(x^2 - 1)}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Etudie les variations de f.
2) Préciser les asymptotes à la courbe Cf.
3) Soit Δ l'asymptote non parallèle aux axes de coordonnées, Détermine la position de Cf par rapport à Δ dans l'intervalle $]-1 ; 1[$.
4) Construire Cf.

25 Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{2x}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Etudie et construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
2) Montre que le point d'intersection des asymptotes est un centre de symétrie de (Cf)
3) Discute graphiquement suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines de l'équation : $x^2 + 2(1 - m)x + 4 = 0$
4) Montre que la restriction h de f à l'intervalle I = [2 ; $+\infty$ [est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
5) Construire la courbe représentative de la fonction réciproque h^{-1} de h dans le même repère que (Cf).

Fonctions biologiques.

26 Une population de bactéries (exprimer en millier) a un rythme de croissance modélisé par la fonction $f(t) = \dfrac{60t + 40}{t + 10}$ où $t \in$ [0 ; $+\infty$ [est le temps écoulé en jours.

1) Quelle est la population de cette culture au bout de 3 jours ? ; 5 jours ? ; 21 jours ?
2) Détermine les réels a et b tels que $f(t) = a + \dfrac{b}{t + 10}$ pour $t \in$ [0 ; $+\infty$ [.
3) a- Calcule la dérivée $f'(t)$ de la fonction $f(t)$.
   b- Justifier que la population de bactéries est croissante.
4) a- Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(t) = 52$.

c- En déduis à partir de quel jour la population de bactéries sera égal à 52.000 individus.

5) a- Quelle est la limite de f en $+\infty$?

b- En déduis une interprétation quant à la population de bactéries.

6) Trace la courbe (Cf) de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

Echelle : 1 $cm \rightarrow$ 10 ans sur l'axe (ox) et 1 $cm \rightarrow$ 10.000 individus sur l'axe (oy).

27 Un laboratoire médical désire mesurer le nombre de personne contaminés par jour du à un virus à partir d'une « fonction de contagion » f, définie sur l'intervalle [1 ; 30] par :
$f(t) = 0{,}02t^3 - 1{,}4t^2 + 22t + 640$ où t désigne la durée en jour de propagation.
On appelle f' la dérivée de la fonction f comme la fonction « contagion ».
On dit qu'il y a « contagion » lorsque f'est positive. Sinon on dit qu'il y a « non contagion ».

1) Quelle est le nombre de personne contaminé entre le 1er jour et le 21 jour ?

2) Détermine les intervalles où il ya contagion et non contagion.

3) On désigne par S = $\int_{10}^{15} f(t)dt$, l'aire en m^2de la zone contaminée par la virus.
Détermine cette aire.

28 Une culture de bactéries a un rythme de croissance $(exprimé\ en\ mm/jour)$et modélisé par la fonction $C(x) = \frac{3000}{1 + 0{,}25x}$ où $x \in [0\ ;\ +\infty[$ est le temps écoulé en jours.

On admet que ce rythme de croissance est la dérivée de la fonction population $p(x)$c'est-à-dire que $p'(x) = C(x)$ et au temps $x = 0$, la culture compte 1000 bactéries c'est-a-dire : $p(0) = 1000$.

1) a- Détermine $p(x)$désignant la population des bactéries après x jours.

b- Evaluer le nombre de bactérie ainsi que leur rythme de croissance au bout de 3 jours.

c- Après combien de jours le nombre de bactéries atteindra t-il 1500 individus ?

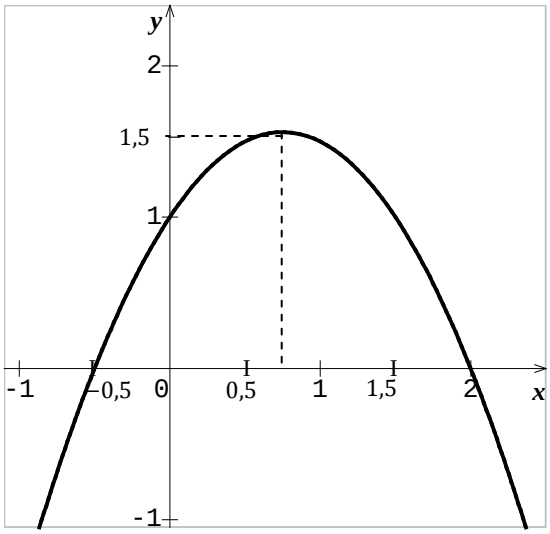
2) a- Etudie les variations de p sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

b- Calcule la limite de $p(x)$en $+\infty$.

29 Un malade contracte une fièvre dont la température en degré est modélisée par la fonction t définie sur l'intervalle $[0\ ; +\infty[$ par $t(x) = -x^2 + 1{,}5x + 1$. Où : x est le temps écoulé exprimé en seconde et $t(x)$ est la température de la fièvre exprimé en degré.

1) Quelle est la température du malade à : 0 s ? ; 1s ? et 2s ?

2) La fonction t est représentée par la courbe ci-dessous :



a. Indiquer à qu'elle instant la fièvre atteint sa température maximale.

b. Donne les intervalles respectifs de montée et de descente de la fièvre.

3) On désigne par T une primitive de la fonction t définie sur l'intervalle [0 ; 2].

a. Calcule T.

b. Calcule la température moyenne du malade pendant l'intervalle de temps [0 ; 2]. ($on\ donnera\ une\ valeur\ décimale\ arrondie\ au\ dixième$).

Rappel **:** Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle$[a\ ;b]$.
La valeur moyenne m de $f$sur l'intervalle$[a\ ;b]$, est le nombre m tel que :
$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Fonctions circulaires.

30 Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \frac{Sin3x}{Cos^3x}$
Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Montre que l'ensemble de définition Df peut se réduit
2) Etudie la parité et la périodicité de f puis en déduis un intervalle d'étude D_E.
3) Montre que $\forall\ x\ \in$ D$f, f'(x) = \frac{3Cos2x}{Cos^4x}$ puis Dresse le tableau de variation de f.
4) En déduis le tracé de (Cf) sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ par symétrie.

31 Soit la fonction f définie sur $[-\pi\ ;\ \pi\ ]$ par $f(x) = \frac{1+\ Cos3x}{Cos^3x}$
Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Détermine l'ensemble de définition Df.
2) Etudie la parité et la périodicité de f puis en déduis un intervalle d'étude D_E.
3) Montre que $\forall\ x\ \in$ D$f, f'(x) = \frac{3(1-\ 2Cosx\ )Sinx}{Cos^4x}$
4) Etudie le signe de $(1-2cosx)$ sur D_E puis en déduis les variations de f sur D_E.

5) Détermine les coordonnées des points d'intersections de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.

6) En déduis le tracé de (Cf) sur $[-\pi\ ;\ \pi\ ]$ par symétrie.

32 On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = Sin2xCosx$.
Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) a- Prouver que la verticale $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe Cf et étudier la parité de f.

b- Justifier que l'on peut étudier f sur $D_E = \left[\ 0\ ;\ \frac{\pi}{2}\ \right]$ puis décrire les étapes à suivre pour avoir la courbe Cf sur $\mathbb{R}$.

2) a- Détermine $f'(x)$ et justifier que $f'(x) = 2cosx(3cos^2x\ -2\ )$ pour tout $x \in D_E$

b- Etablis le tableau de variation de f sur D_E

3) Trace (C f) sur $\left[\ 0\ ;\ \frac{\pi}{2}\ \right]$ puis sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ par symétrie.

Fonctions paramétriques.

33 Soit f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = (2m - 1)\,x^4 - (m + 4)\,x^2 - m + 5$.
Où x est la variable et m est un paramètre réel.
Soit (C_m) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Montre que toutes les courbes (C_m) passent par deux points fixes dont on Déterminera les coordonnées.

2) Etudie la fonction f_0 puis représente sa courbe (C_0) dans le repère orthonormé.

34 Soit f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = \frac{x^2 + 3x + 4m}{x^2 + (5m + 1)x + 3}$.
Où x est la variable et m est un paramètre réel.
Soit (C_m) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Montre que toutes les courbes (C_m) passent par trois points fixes dont on Déterminera les coordonnées.

2) Détermine m pour que le point d'intersection I de (C_m) et l'asymptote parallèle à $(x'ox)$ ait pour abscisse $\frac{3}{2}$.

3) Etudie les fonctions $f_0$et f_1 puis représente leur courbe respectives courbe (C_0) et (C_1).

35 Soit f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = \frac{x^2 - mx}{x^2 - 1}$.
Où x est la variable et m est un paramètre réel différent de 1.
Soit (C_m) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Donne le tableau de variation de la fonction f_m suivant les valeurs de m.
(On distinguera les cas où $m = -2$; $m = 2$).

2) Comparer $f_m(x)$ et $f_{-m}(-x)$ puis Donne la position relative des courbes (C_m) et (C_{-m}).

3) Montre que toutes les courbes (C_m) passent par un même point fixe dont on Déterminera les coordonnées..
4) Représente leur courbe respectives (C_{-2}) et (C_2).

Fonctions auxiliaires.

36

Partie A : On considère le polynôme P définie : $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$
1) Donne le tableau de variation de P.
2) Démontre que l'équation $P(x) = 0$ a une solution unique α dans l'intervalle $]1{,}6\ ;\ 1{,}7\ [$.
3) Donne le signe de $P(x)$ dans l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty\ [$.

Partie B : On considère la fonction $f :]-1\ ;\ +\infty\ [\to \mathbb{R}$ et $x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x^3}$
Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
1) a) Justifier la dérivabilité de f sur $]-1\ ;\ +\infty\ [$.
b) Calcule $f'(x)$ puis établir que $f'(x) = \dfrac{P(x)}{(1+x^3)^2}$
2) Donne le tableau de variation de f.
3) Détermine les équations des asymptotes à la courbe Cf de f.
4) Place α puis Trace Cf.
5) Soit g la restriction de f à l'intervalle$[2\ ;\ +\infty\ [$.
Montre que g réalise une bijection de $[2\ ;\ +\infty\ [$ sur un intervalle J que l'on précisera.
6) Trace Cg^{-1} où g^{-1} est la bijection réciproque de la fonction g restriction de f à l'intervalle $[2\ ;\ +\infty\ [$.

37

Partie A : On donne la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 3x - 4$
1) Etudie les variations de g et Dresse son tableau de variation.
2) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $2{,}19 < \alpha < 2{,}20$
3) En déduis le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

Partie B : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\ ;\ 1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$
Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
1) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition Df.
2) Montre que $\forall\ x \in \mathbb{R} - \{-1\ ;\ 1\}$, on a : $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$
3) Etudie le signe de $f'(x)$ et en déduis les variations de f puis son tableau de variation de la fonction f.
4) Montre que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe Cf . Etudie la position de Cf et (D).
5) Trace Cf.

38

1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$
a) Etudie les variations de la fonction g.
b) Montre que $g(x) = 0$ admet une solution unique α que l'on Déterminera.
c) En déduis le signe de g sur $\mathbb{R}$

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} - x$.
Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
On note (D) et (D') les droites d'équations respectives : $y = -3x$ et $y = x$.

a) Etudie les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$

b) Montre que $\forall\, x \in \mathbb{R}\,;\, f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

c) En déduis le tableau de variation de f.

3) a- Détermine la limite en $-\infty$ de $f(x) - (-3x)$.
b- Quelle conséquence graphique peut – on déduis de ce résultat ?

4) a-Montre la droite (D') est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$
b-Etudie la position de (C) par rapport aux deux droites (D) et (D').

5) Trace la courbe (C), les droites (D) et (D').

Fonction irrationnelle –fonction avec valeur absolue.

39 Soit la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Donne l'ensemble de définition Df de f .
2) Etudie les variations de f, puis Trace avec soins sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On donne : $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}6$ et $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -0{,}3$

40 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + \sqrt{x^2+8}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) a) Démontre que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $x - \sqrt{x^2+8} < 0$
b) Etudie les limites de f aux bornes de Df. En déduis que la courbe (C) de f admet une asymptote horizontale dont on précisera une équation.
c) Démontre que la droite (D) d'équation $y = -2x$ est asymptote à (C) en - ∞
2) a) Calcule $f'(x)$. Puis en déduis de 1) a) le sens et le tableau de variation de f.
b) Trace (C) et (D) dans un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm)

41 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{|x^2+x|+1}{|x|+1}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Détermine le domaine de définition de f et écrire $f(x)$ sans les symboles "valeur absolue"
2) Etudie la dérivabilité de f en -1 et en 0, puis interprète géométriquement les résultats
3) Etudie les variations de f
4) Montre que les droites d'équations $y = -x - 2$ et $y = x$ sont asymptotes à la courbe (C) et f
5) Trace (C)

42 Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \sqrt{|x^2-2x-3|}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Détermine l'ensemble de définition de f
2) Ecris $f(x)$ sans valeur absolue
3) Etudie la dérivabilité de f en $x_0 = -1$ et en $x_0 = 3$ puis interprète graphiquement vos résultats.

4) Montre que la courbe (C) de f admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $-\infty$ et une asymptote oblique (D) au voisinage de $+\infty$.
5) Dresse son tableau de variation
6) Trace dans un repère orthonormé la courbe (C) de f.

43 Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|\sqrt{\frac{x}{x-1}}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Détermine l'ensemble de définition Df de f
2) a) Etudie la dérivabilité de f au point $x_0 = 0$, en déduis l'ensemble de dérivabilité de f.
   b) Calcule $f'(x)$ pour x élément des intervalles de dérivabilité.
   c) Calcule les limites de $f(x)$ aux bornes de Df et préciser les équations des asymptotes à la courbe (C) de f.
   d) Dresse le tableau de variation de f.
3) Trace la courbe (C) de f.

44 On considère, dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$), le cercle (Γ) de centre O et de rayon 1.

Soit A le point de coordonnées (1 ; 0) et A' le point de coordonnées (-1 ; 0) .

1) Pour tout point H du segment[AA'], distinct de A et A', on mène la perpendiculaire (Δ) à la droite (AA'). La droite (Δ) coupe le cercle (Γ) en M et M'.
   On pose $\overline{OH} = x$. Calcule en fonction de x l'aire du triangle AMM'.
2) Soit f la fonction définie sur]-1 ; 1 [par $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$.
   a- Etudie les variations de f.
   b- Montre que le triangle AMM' d'aire maximale est équilatéral.

Problèmes

45 La fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est donnée par une partie de son tableau de variation.
On sait de plus que la droite d'équation $x = 2$ est axe de symétrie pour la courbe C de f.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$			$-$		$-$		
$f(x)$		1		$-\infty$	$+\infty$		3

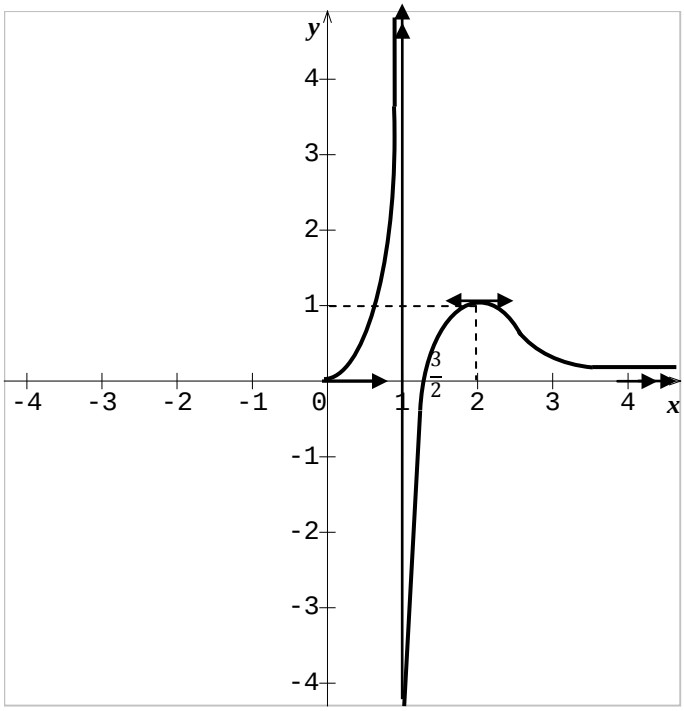
1) Trace la courbe C de f
2) Complète le tableau de variation de f
3) On suppose que $f(x)$ est de la forme $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + \beta x + \alpha}$

a- Détermine les réels a ; b ; c ; β et α

b- Montre que la restriction g de f à I =] 2 ; 4] réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
c- Donne l'équation de la tangente à la courbe C' de g^{-1} au point d'abscisse 1
d- Trace C'

e- Discute graphiquement suivant les valeurs du paramètre m, du nombre et des signes des solutions de $l'équation\ (3-m)x^2 - (12-4m)x + 8 = 0$

46 On donne la figure ci-dessous qui représente une partie de la courbe d'une fonction g.



1) Complète la courbe de la fonction g sachant que g est impaire.

2) Donne les équations des asymptotes à (Cg)
3) Quel est le domaine de définition de g sous forme de réunion d'intervalles
Donne les limites de g aux bornes de Dg.
4) Dresse le tableau de variation de g.

47 Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x+d}$ où a ; b ; c et d sont des réels et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$
1) Trouve les réels a ; b ; $c\ et\ d$ sachant que la droite d'équation $x = 3$ est asymptote et (C_f) passe par les points $A(2\ ;\ 3)$, $B(4\ ;\ 7)$ et admet au point d'abscisse 2 une tangente horizontale.
2) Dans la suite du problème on prendra $a = 1\ ;\ b = -1\ ;\ c = -5\ et\ d = -3$
a- Etudie la fonction f

b- Etudie la position de (C_f) par rapport à son asymptote oblique
c- Montre que la restriction g de f à l'intervalle $[4\ ;\ +\infty[$ réalise une bijection de $[4\ ;\ +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3) Montre que (Cf) admet un centre de symétrie que l'on Déterminera
4) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β
5) a- Montre que $\forall x \in [4\,;5]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$
b- En déduis que $\left|f(x) - \frac{15}{2}\right| \leq \frac{3}{4}|x-5|$
6) Trace (Cf) dans le repère $(o;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ ainsi que (Cg^{-1}) la courbe de g^{-1}

48

Partie A : Soit f la fonction numérique définie sur Df =] 1 ; +∞[par : $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

1) Montre que la dérivée de f garde un signe constant sur Df.
2) Etudie les variations de f (limite et sens de variation)
3) En déduis que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle] 1 ; 2[

Partie B: On se propose de Résous l'équation $f(x) = 0$ dans] 1 ; 2[.

1) Montre que l'équation $f(x) = 0$, a même ensemble de solution que l'équation $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$.
2) On appelle g la fonction définie sur] 0 ; +∞[par : $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ soit α la solution de l'équation $f(x) = 0$ (On a donc $g(\alpha) = \alpha$ et $1 \leq \alpha \leq 2$)
   a) Montre que si x est élément de] 1 ; 2[alors $g(x)$ est aussi élément de] 1 ; 2[.
   b) Justifier la dérivabilité de g sur [0 ; +∞[Calcule la dérivée de g puis Montre que pour tout x [1 ; 2] ∈ on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$
   c) En déduis que pour tout x de [1 ; 2], on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$
3) Construire la courbe (C) de la fonction f

49

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x+1}$ et (C) sa courbe.

1) a- Démontre que la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle [0 ; +∞[est au dessus de sa tangente en tout point.
b- En déduis que$\forall\, \alpha \in$ [0 ; +∞[, on a : $\frac{1}{\alpha + 1} \geq 1 - \alpha$ **(1)**.
2) Soit la fonction g définie sur [0 ; +∞[; par $g(x) = \sqrt{x+1}$ et soit k un réel strictement positif.
a- Détermine la dérivée première et seconde de g sur [0 ; +∞[

b- Vérifie que : $\forall\, x \in$ [0 ; k[on a : $\frac{1}{2\sqrt{1+k}} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$
c- En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis à la fonction g sur l'intervalle [0 ; k] , Démontre que : $1 + \frac{k}{2\sqrt{1+k}} \leq \sqrt{1+k} \leq 1 + \frac{k}{2}$ **(2)**
d- Déduisez des relations **(1)** et **(2)** que : $\forall\, \alpha \in$ [0 ; +∞[, on a :
$1 + \frac{k}{2} - \frac{k^2}{4} \leq \sqrt{1+k} \leq 1 + \frac{k}{2}$
e- Etablis alors l'inégalité suivante : $1{,}0475 \leq \sqrt{1{,}1} \leq 1{,}05$
f- En déduisez une valeur approchée de $\sqrt{1{,}1}$ tout en précisant la marge d'incertitude.

Solutions

Limites en un point x_0

1 Calculons les limites suivantes aux points x_0 donnés :

a- $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^3-8}{-x+2} = \dfrac{2^3-8}{-2+2} = \dfrac{8-8}{-2+2} = \dfrac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^3-8}{-x+2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{-(x-2)} = \lim_{x \to 2^+} -(x^2+2x+4) = -12$$

b- $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \dfrac{\sqrt{9}-3}{9-9} = \dfrac{3-3}{9-9} = \dfrac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} \times \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \lim_{x \to 9} \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x \to 9} \frac{(\sqrt{x})^2-(3)^2}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \lim_{x \to 9} \frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x \to 9} \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

c- $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2x+5}{x^2-x-2} = \dfrac{2(2)+5}{(2)^2-(2)-2} = \dfrac{9}{0^-} = -\infty$

d- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \dfrac{\sqrt{0+1}-1}{0} = \dfrac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \times \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{(x)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-(1)^2}{(x)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-(1)^2}{(x)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2+1-1}{(x)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{(x)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{0}{2} = 0.$$

e- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \dfrac{9-3-6}{\sqrt{3}-\sqrt{3}} = \dfrac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-x-6}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} = \lim_{x \to 3} \frac{\left(x^2-x-6\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+2)(x-3)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} =$$

$= \lim\limits_{x \to 3} \frac{(x+2)(x-3)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} (x+2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right) = 10\sqrt{3}$

f- $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x^2-5}{-x^2-3x+4} = \frac{1-5}{-1-3+4} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$

2 Calculons les limites suivantes aux points x_0 donnés :

a- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sin2x}{3x} = \frac{Sin\,0}{0} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sin2x}{3x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{Sin2x}{3x} \times \frac{2}{2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{Sin\,2x}{2x} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ (car $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sinax}{ax} = 1$)

b- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos}2x}{1-Sinx} = \frac{\text{Cos}\,\pi}{1-Sin\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{0} = \infty$

c- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sin5x}{Sin3x} = \frac{Sin\,0}{Sin\,0} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{5x}{5x} \times Sin\,5x}{\frac{3x}{3x} \times Sin\,3x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{5x \times \frac{sin5x}{5x}}{3x \times \frac{sin3x}{3x}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{sin5x}{5x}}{\frac{sin3x}{3x}} \times \frac{5x}{3x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{sin5x}{5x}}{\frac{sin3x}{3x}} \times \frac{5}{3} = \frac{1}{1} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$

d- $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{Sinx}{\pi - x} = \frac{Sin\pi}{\pi-\pi} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

Effectuons un changement de variable en posant $X = x - \pi$ => $x = X + \pi$

Si $x \to \pi$ alors $X \to 0$

Donc $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{Sinx}{\pi - x} \Leftrightarrow \lim\limits_{X \to 0} \frac{Sin(X+\pi)}{\pi-(X+\pi)} = \lim\limits_{X \to 0} \frac{Sin(X+\pi)}{\pi-X-\pi} = \lim\limits_{X \to 0} \frac{-Sin(X)}{-X} = \lim\limits_{X \to 0} \frac{SinX}{X} = 1$

(car $Sin(\pi + \alpha) = -Sin\alpha$)

e- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sin4x}{tangx} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{Sin4x}{tangx} = \frac{Sin\,0}{tang\,0} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{4x}{4x} \times Sin\,4x}{\frac{x}{x} \times tang\,x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{4x \times \frac{sin4x}{4x}}{x \times \frac{tangx}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{sin4x}{4x}}{\frac{tangx}{x}} \times \frac{4x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{sin5x}{5x}}{\frac{sin3x}{3x}} \times 4 = \frac{1}{1} \times 4 = 4$

Limites à l'infinie

3 Calculons les limites suivantes à l'infinie :

a- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-8}{x + 1 - x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-8}{-x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{8}{x^2} = \frac{8}{(-\infty)^2} = \frac{8}{+\infty} = 0$

b- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt{x} - 1}{x + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}\right)} - 1}{x + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2|x|\sqrt{\frac{1}{x}} - 1}{x + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x\sqrt{\frac{1}{x}} - 1}{x + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\left(2\sqrt{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{2}{x}\right)}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{2\sqrt{0} - 0}{1 + 0} = \frac{0}{1} = 0$

c- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + 2}{5x^2 - x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{5x^2} = \frac{2}{5}$

d- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 1}{x}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x\left(-\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x}\right)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} -\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} = -1$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

e- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x + 3}{\sqrt{4x^2 + x - 5}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\left(4 + \frac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(4 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}\right)}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\left(4 + \frac{3}{x}\right)}{|x|\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\left(4 + \frac{3}{x}\right)}{x\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\left(4 + \frac{3}{x}\right)}{x\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4 + \frac{3}{x}}{\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}}} = \frac{4}{2} = 2$

f- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{(1)^2-(\sqrt{x})^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{1-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{-x} = \frac{1}{+\infty} = 0.$

g-$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x-|x|}{2x-2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x-(-x)}{2x-2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x+x}{2x-2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x}{2x-2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x}{2x} = \frac{4}{2} = 2$

h- $\lim\limits_{x \to +\infty} 1-x+\sqrt{x^2+x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1-x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} 1-x+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1-x+x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = -\infty+\infty$

(Forme indéterminée)

Levons l'indétermination:

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1-x+\sqrt{x^2+x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1-x+\sqrt{x^2+x+1}\right) \times \frac{1-x-\sqrt{x^2+x+1}}{1-x-\sqrt{x^2+x+1}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\left(1-x+\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(1-x-\sqrt{x^2+x+1}\right)}{1-x-\sqrt{x^2+x+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(1-x)^2-\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}{1-x-\sqrt{x^2+x+1}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(1-x)^2-\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}{1-x-\sqrt{x^2+x+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\left(x^2-2x+1\right)-\left(x^2+x+1\right)}{1-x-\sqrt{x^2+x+1}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2-2x+1-x^2-x-1}{1-x-\sqrt{x^2+x+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3x}{1-x-\sqrt{x^2+x+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3x}{-x-\sqrt{x^2}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3x}{-x-|x|} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3x}{-x-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3x}{-2x} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$

i- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2+Sinx}{x+1}$ *(théorème des gendarmes)*

On sait que : $-1 \leq Sinx \leq 1$

En ajoutons 2 à chaque membre de l'inégalité, on a :

$1 \leq 2+Sinx \leq 3$

En divisant chaque membre de l'inégalité par $x+1$, on a : $\frac{1}{x+1} \leq \frac{2+Sinx}{x+1} \leq \frac{3}{x+1}$

En appliquant la limite à chaque membre de l'inégalité, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} \leq \lim_{x \to +\infty} \frac{2+Sinx}{x+1} \leq \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x+1}$$

Or $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \\ et \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x+1} = 0 \end{cases}$ Alors d'après le théorème des Gendarmes, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2+Sinx}{x+1} = 0$

Limites et asymptotes

4 Calculons les limites aux bornes de l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci-dessous (on Donnea ci-possible les éventuelles asymptotes ou possibilité d'asymptotes)

a- $f(x) = \frac{x^2+5}{-x+2}$ => $D_f = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+5}{-x+2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+5}{-x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \to +\infty} -x = -\infty$$

Après division euclidienne de $\boldsymbol{x^2+5}$ par $\boldsymbol{-x+2}$, on obtient :

$$\boldsymbol{f(x) = -x-2+\frac{9}{-x+2}}$$

Alors la droite d'équation $y = -x-2$ est asymptote oblique car $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{9}{-x+2} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \frac{(2)^2+5}{-(2)+2} = \frac{9}{0^+} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \frac{(2)^2+5}{-(2)+2} = \frac{9}{0^-} = -\infty \end{array}\right\}$$ Alors la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale

b- $f(x) = \frac{-x^2 + 5}{x^2 + 5x - 6}$ => $D_f = \mathbb{R} - \{-6\,;1\} =]-\infty\,;-6[\cup]-6\,;+\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2 + 5}{x^2 + 5x - 6} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2 + 5}{x^2 + 5x - 6} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

Alors la droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale

$$\lim_{x \to -6^-} f(x) = \frac{-(-6)^2 + 5}{(-6)^2 + 5(-6) - 6} = \frac{-31}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -6^+} f(x) = \frac{-(-6)^2 + 5}{(-6)^2 + 5(-6) - 6} = \frac{-31}{0^-} = +\infty$$

Alors la droite d'équation $x = -6$ est asymptote verticale

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{-(1)^2 + 5}{(1)^2 + 5(1) - 6} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{-(1)^2 + 5}{(1)^2 + 5(1) - 6} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

Alors la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale

5 Soit la fonction f dénie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$.
On note (Cf) sa courbe dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
1) Etudions les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ puis en déduisons si la courbe (Cf) admet une asymptote horizontale

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} - x = \lim_{x \to -\infty} |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x = \lim_{x \to -\infty} -x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right) = -(-\infty)(2) = +\infty$$

Alors la courbe (Cf) n'admet pas une asymptote horizontale en $-\infty$, mais on a une possibilité d'asymptote oblique $-\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} - x = \lim_{x \to +\infty} |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x$$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - x = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - 1\right) = +\infty \times 0 =$ (Forme indéterminée)

Levons l'indétermination:

$$\lim_{x \to +\infty} -x + \sqrt{x^2+x+1} = \lim_{x \to +\infty} \left(-x + \sqrt{x^2+x+1}\right) \times \frac{-x-\sqrt{x^2+x+1}}{-x-\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(-x+\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(-x-\sqrt{x^2+x+1}\right)}{-x-\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(-x)^2-\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}{-x-\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(-x)^2-\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}{-x-\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-\left(x^2+x+1\right)}{-x-\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-x^2-x-1}{-x-\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x-1}{-x-\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x-1}{-x-\sqrt{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x-1}{-x-|x|} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x-1}{-x-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{-2x} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Alors la courbe (Cf) admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = \frac{1}{2}$

2) Démontrons que la droite (Δ) d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à (Cf) en $-\infty$.

La droite (Δ) d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à (Cf) en $-\infty$ si et seulement si :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - y = \lim_{x \to -\infty} \left[\left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right) - \left(-2x - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x + 2x + \frac{1}{2} = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+1} + x + \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right) \times \frac{x+\frac{1}{2}-\sqrt{x^2+x+1}}{x+\frac{1}{2}-\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\sqrt{x^2+x+1}\right)}{x+\frac{1}{2}-\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}{x+\frac{1}{2}-\sqrt{x^2+x+1}}$$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + x + \frac{1}{4} - \left(\sqrt{x^2 + x + 1}\right)^2}{x + \frac{1}{2} - \sqrt{x^2+x+1}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + x + \frac{1}{4} - \left(x^2 + x + 1\right)}{x + \frac{1}{2} - \sqrt{x^2+x+1}}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + x + \frac{1}{4} - x^2 - x - 1}{x + \frac{1}{2} - \sqrt{x^2+x+1}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-\frac{3}{4}}{x + \frac{1}{2} - \sqrt{x^2+x+1}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-\frac{3}{4}}{x + \frac{1}{2} - |x|} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-\frac{3}{4}}{x + \frac{1}{2} + x}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-\frac{3}{4}}{2x + \frac{1}{2}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\frac{3}{4}}{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-\frac{3}{4}}{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3}{8x} = \dfrac{-3}{8(-\infty)} = \dfrac{-3}{-\infty} = 0$

D'où la droite (Δ) d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à (Cf) en $-\infty$

Continuités

Continuité en un point x_0

6 Etudions la continuité des fonctions suivantes aux points x_0 donnés :

a- $\begin{cases} f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2 + x - 6} \text{ et } x_0 = 2 \\ f(2) = 0 \end{cases}$

f est continue en $x_0 = 2$ si et seulement si :

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 0$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)^2}{x^2 + x - 6} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)^2}{(x-2)(x+3)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x+3} = \dfrac{2-2}{2+3} = \dfrac{0}{5} = 0$

Puis que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 0$. Alors f est continue en $x_0 = 2$

b- $\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x-1|+2}{x+3} \\ f(1) = 5 \end{cases}$; $x_o = 1$

Ecrivons f sans le symbole de la valeur absolue :

Posons $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Puis étudions le signe de tableau de si $x - 1$ dans un tableau.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$		$x-1$

$$=>\begin{cases} f(x)=\frac{(-x+1)+2}{x+3} & si\ x\in\ ]-\infty\ ;\ 1\ ] \\ & et \\ f(x)=\frac{(x-1)+2}{x+3} & si\ x\in\ ]1\ ;\ +\infty\ [\end{cases}$$

$$=>\begin{cases} f(x)=\frac{-x+3}{x+3} & si\ x\in\ ]-\infty\ ;\ 1\ ] \\ & et \\ f(x)=\frac{x+1}{x+3} & si\ x\in\ ]1\ ;\ +\infty\ [\end{cases}$$

Ainsi étudions la continuité de f à gauche et à droite de $x_0 = 1$

f est continue en $x_0 = 1$ si $f(1)\ existe\ et\ si\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$

Continuité à gauche :

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{-x+3}{x+3} = \frac{1}{2}$

Continuité à droite :

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x+1}{x+3} = \frac{1}{2}$

Puis que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$

Alors f est continue en $x_0 = 1$.

Continuité et condition de faisabilité

7 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x)=\frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2}\ si\ x\in\ \mathbb{R}-\{2\} \\ f(2)=a \end{cases}$$

Déterminons la valeur de a pour que f soit continue en $x_o = 2$

f est continue en $x_0 = 2$ si $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = a$

$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} = \frac{3-\sqrt{2\times 2+5}}{2-2} = \frac{3-3}{2-2} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée)

Levons l'indétermination:

$$\lim_{x \to 2} \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} \times \frac{3+\sqrt{2x+5}}{3+\sqrt{2x+5}} = \lim_{x \to 2} \frac{(3-\sqrt{2x+5})(3+\sqrt{2x+5})}{(x-2)(3+\sqrt{2x+5})} = \lim_{x \to 2} \frac{(3)^2-(\sqrt{2x+5})^2}{(x-2)(3+\sqrt{2x+5})}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(3)^2-(\sqrt{2x+5})^2}{(x-2)(3+\sqrt{2x+5})} = \lim_{x \to 2} \frac{9-2x-5}{(x-2)(3+\sqrt{2x+5})} = \lim_{x \to 2} \frac{4-2x}{(x-2)(3+\sqrt{2x+5})}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-2(x-2)}{(x-2)(3+\sqrt{2x+5})} = \lim_{x \to 2} \frac{-2}{3+\sqrt{2x+5}} = \frac{-2}{3+\sqrt{2\times 2+5}} = \frac{-2}{3+\sqrt{9}} = \frac{-2}{3+3} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

Alors $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = \frac{-1}{3}$

Or $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = a \Leftrightarrow a = \frac{-1}{3}$. D'où $a = \frac{-1}{3}$

8 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + ax \quad si\ x \in]-\infty\ ;\ -1[\\ f(x) = 2x - 1 \quad si \quad x \in]-1\ ;\ 1[\\ f(x) = b(x^2-1) \quad si\ x \in]1\ ;\ +\infty[\end{cases}$$

1) Détermine le réel a pour que f soit continue au point $x_o = -1$

f est continue en $x_0 = 2$ si $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to -1^-} x^2 + ax = \lim_{x \to -1^+} 2x - 1$

$\Leftrightarrow (-1)^2 + a(-1) = 2(-1) - 1 \Leftrightarrow 1 - a = -2 - 1 \Leftrightarrow 1 - a = -3 \Rightarrow a = 4$

1) Vérifions si l'on peut Détermine la valeur de b pour que f soit continue au point $x_o = 1$.

f est continue en $x_0 = 1$ si $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to 1^-} 2x - 1 = \lim_{x \to 1^+} b(x^2-1)$

$\Leftrightarrow 2 - 1 = b(1-1) \Leftrightarrow -3 = 0$ absurde

Alors impossible de Détermine la valeur de b pour que f soit continue au point $x_o = 1$.

Prolongement par continuité

9 Dans chacun des cas suivants, précisons l'ensemble de définition de la fonction f et déterminons (s'il existe) le prolongement par continuité de cette fonction en x_o.

a) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ x_0 = 0 \end{cases}$

- Ensemble de definition:

$Df = \{x / x \in x \geq 0 \; et \; x \neq 0\}$ => $Df =]0\,;\,+\infty[$

- Prolongement par continuité:

$x_0 = 0 \notin]0\,;\,+\infty[$. Alors f peut être prolongée par continuité au point $x_0 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \dfrac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{x}-1)\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0} (\sqrt{x}-1) = -1 \in \mathbb{R}$

Alors f est peut être prolongée par continuité au point $x_0 = 0$.

Soit g le Prolongement par continuité de f en $x_0 = 0$ tel que:

$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \; si \; x \in]0\,;\,+\infty[\\ g(0) = -1 \quad si \; x = 0 \end{cases}$ ou $g(x) = \sqrt{x} - 1$

b) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{tgx}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$

- Ensemble de definition:

$Df = \{x / x \in cosx \neq 0 \; et \; x \neq 0\}$

$cosx \neq 0 \Leftrightarrow cosx \neq cos\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ ou \\ x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$ et $x \neq 0$ =>

$Df = \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,;0\right\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

- Prolongement par continuité:

$x_0 = 0 \notin \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,;0\right\}$. Alors f peut être prolongée par continuité au point $x_0 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{tgx}{x} = \dfrac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$$\lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = lim \frac{\frac{sinx}{cox}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{sinx}{cox} \times \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} \times \frac{1}{cox} = 1$$

$$\left(\text{Car } \lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \to 0} \frac{1}{cosx} = 1\right)$$

Alors f est peut être prolongée par continuité au point $x_0 = 0$.

Soit g le Prolongement par continuité de f en $x_0 = 0$ tel que:

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{tgx}{x} \ si \ x \in \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi ; \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi ; 0\right\} \\ g(0) = 1 \quad si \ x = 0 \end{cases}$$

10 Soient f et g deux fonctions définies respectivement par :

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}$

a- Déterminons les ensembles de définitions Df et Dg respectivement des fonctions f et g.

Df = $\{x / \ x \in x + 1 \geq 0 \ et \ x \neq 0\}$ => Df = $[-1 ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

Dg = $\{x / \ x \in x + 1 \geq 0 \ \ et \ \ 1 + \sqrt{x+1} \neq 0\}$ => Df = $[-1 ; +\infty[$

b- Vérifions que la fonction g est le prolongement par continuité de la fonction f en $x_0 = 0$.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (1)^2}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = g(x)$$

Alors g est le prolongement par continuité au point $x_0 = 0$ de la fonction f.

11 On considère la fonction g de la variable réelle x définie par $g(x) = \dfrac{\sqrt{2x}-2}{x-2}$

1) Déterminons son ensemble de définition Dg.

Dg = $\{x / \ x \in 2x \geq 0 \ \ et \ \ x - 2 \neq 0\}$ => Dg = $[0 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

2) Montrons que g admet en 2 un prolongement par continuité que l'on notera par h.

$x_0 = 2 \notin [0 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$. Alors g peut être prolongée par continuité au point $x_0 = 2$

$\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{2x}-2}{x-2} = \dfrac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{2x}+2)}{(x-2)(\sqrt{2x}+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{2x}+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2}{\sqrt{2x}+2} = \frac{1}{2}$$

Alors f est peut être prolongée par continuité au point $x_0 = 2$.

Soit h le Prolongement par continuité de g en $x_0 = 2$ tel que:

$$\begin{cases} h(x) = \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2} & si\ x \in [0\,;2[\ \cup\ ]2\,;+\infty[\\ h(2) = \frac{1}{2} & si\ x = 2 \end{cases}$$

2) Montrons que h est dérivable en 2 puis donnons l'équation de la tangente à la courbe(C) de h au point d'abscisse 2.

- **Dérivabilité au point $x_0 = 2$**

h est dérivable en 2 si et seulement si : $\lim_{x \to 2} \frac{h(x)-h(2)}{x-2} = h'(2) = l \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{h(x)-h(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\left(\frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{2(\sqrt{2x}-2)-(x-2)}{2(x-2)}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{2(\sqrt{2x}-2)-(x-2)}{2(x-2)^2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2\sqrt{2x}-4-x+2}{2(x-2)^2} = \lim_{x \to 2} \frac{2\sqrt{2x}-x-2}{2(x-2)^2} = \lim_{x \to 2} \frac{2\sqrt{2x}-(x+2)}{2(x-2)^2} =>$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{h(x)-h(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\left[2\sqrt{2x}-(x+2)\right]\left[2\sqrt{2x}+(x+2)\right]}{2(x-2)^2\left[2\sqrt{2x}+(x+2)\right]} = \lim_{x \to 2} \frac{\left(2\sqrt{2x}\right)^2-(x+2)^2}{2(x-2)^2\left[2\sqrt{2x}+(x+2)\right]}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{8x-\left(x^2+4x+4\right)}{2(x-2)^2\left[2\sqrt{2x}+(x+2)\right]} = \lim_{x \to 2} \frac{8x-x^2-4x-4}{2(x-2)^2\left[2\sqrt{2x}+(x+2)\right]} = \lim_{x \to 2} \frac{-x^2+4x-4}{2(x-2)^2\left[2\sqrt{2x}+(x+2)\right]}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-\left(x^2-4x+4\right)}{2(x-2)^2\left[2\sqrt{2x}+(x+2)\right]} = \lim_{x \to 2} \frac{-(x-2)^2}{2(x-2)^2\left[2\sqrt{2x}+(x+2)\right]} = \lim_{x \to 2} \frac{-1}{2\left[2\sqrt{2x}+(x+2)\right]}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-1}{2\left[2\sqrt{2x}+(x+2)\right]} = \frac{-1}{2\left[2\sqrt{4}+(4)\right]} = \frac{-1}{16}$$

D'où h est dérivable en 2 et son nombre dérivé est : $h'(2) = \frac{-1}{16}$

- **Equation de la tangente au point $x_0 = 2$**

L'équation de la tangente au point $x_0 = 2$ est donnée par la formule :

$y = h'(2)(x-2) + h(2)$ avec $h'(2) = \frac{-1}{16}$ et $h(2) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow y = \frac{-1}{16}(x-2) + \frac{1}{2} = \frac{-1}{16}x + \frac{-2}{16} + \frac{1}{2} = \frac{-1}{16}x + \frac{3}{8} \Rightarrow y = \frac{-1}{16}x + \frac{3}{8}$

Dérivabilité

Dérivabilité en un point x_0

12 Etudions la dérivabilité des fonctions suivantes aux points x_0 donnés :

a) $\begin{cases} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2+x-6} \text{ et } x_0 = 2 \\ f(2) = 0 \end{cases}$

f est dérivable en 2 si et seulement si : $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = l \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\left[\frac{(x-2)^2}{x^2+x-6}\right]-0}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\left[\frac{(x-2)^2}{(x+3)(x-2)}\right]}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2}{(x+3)(x-2)^2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{(x+3)} = \frac{1}{5} \in \mathbb{R}$$

D'où f est dérivable en 2 et son nombre dérivé est : $f'(2) = \frac{1}{5}$

b) $\begin{cases} f(x) = \frac{|x-1|+2}{x+3} \quad x_0 = 1 \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Ecrivons f sans le symbole de la valeur absolue :

Posons $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Puis étudions le signe de tableau de si $x - 1$ dans un tableau.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$		$x-1$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{(-x+1)+2}{x+3} & si\ x \in]-\infty\ ;\ 1] \\ f(x) = \frac{(x-1)+2}{x+3} & si\ x \in]1\ ;\ +\infty[\end{cases} \quad et$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = \dfrac{-x+3}{x+3} & si\ x \in]-\infty\ ;\ 1] \\ & et \\ f(x) = \dfrac{x+1}{x+3} & si\ x \in]1\ ;\ +\infty[\end{cases}$$

Etude de la dérivabilité de f

f est dérivable en $x_0 = 1$ si sa dérivabilité à gauche est égale à sa dérivabilité à droite,

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = l \in \mathbb{R}$

Dérivabilité à gauche :

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\left(\frac{-x+3}{x+3}\right)-\frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\left[\frac{2(-x+3)-(x+3)}{2(x+3)}\right]}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-2x+6-x-3}{2(x+3)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{-3x+3}{2(x+3)(x-1)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-3(x-1)}{2(x+3)(x-1)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-3}{2(x+3)} = \frac{-3}{2(1+3)} = \frac{-3}{8} \in \mathbb{R}$$

Dérivabilité à droite :

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\left(\frac{x+1}{x+3}\right)-\frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\left[\frac{2(x+1)-(x+3)}{2(x+3)}\right]}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2x+2-x-3}{2(x+3)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{2(x+3)(x-1)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{2(x+3)} = \frac{1}{8} \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

Alors f n'est pas dérivable à gauche et à droite de $x_0 = 1$, mais elle admet deux demi-tangentes de coefficients directeurs respectives $f'(1) = \frac{-3}{8}$ et $f'(1) = \frac{1}{8}$

Dérivabilité et condition de faisabilité

13 Déterminons les réels a et b pour que f soit continue et dérivable aux points $x_0 = 1$

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 + ax - 3\ si\ x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{2x+b}{x}\ si\ x > 1 \end{cases}$$

- **Continuité** :

f est continue en $x_0 = 1$ si et seulement si : $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x \to 1^-} 2x^2 + ax - 3 = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2x+b}{x} \Leftrightarrow a - 1 = 2 + b \Leftrightarrow a - b = 3$ **(1)**

- **Dérivabilité** :

f est dérivable en $x_0 = 1$ si et seulement si : $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{(2x^2+ax-3)-(a-1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\left(\frac{2x+b}{x}\right)-(2+b)}{x-1} \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{(2x^2+ax-3)-(a-1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\left(\frac{2x+b}{x}\right)-(2+b)}{x-1} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{2x^2+ax-3-a+1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{b-bx}{x-1} \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{2x^2-2+ax-a}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{b-bx}{x-1} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{2(x^2-1)+a(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{b-bx}{x-1} \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{2(x-1)(x+1)+a(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{b-bx}{x-1} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{(x-1)[2(x+1)+a]}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{-b(x-1)}{x-1}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} 2(x+1) + a = \lim\limits_{x \to 1^+} -b \Leftrightarrow 4 + a = -b \Leftrightarrow a + b = -4$ **(2)**

Ainsi, formons le système avec les équations **(1)** et **(2)**

$\begin{cases} a - b = 3 & (\mathbf{1}) \\ a + b = -4 & (\mathbf{2}) \end{cases}$ La résolution de ce système donne : $a = -\frac{1}{2}$ et $b = -\frac{7}{2}$

14 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x(x+1)}{(x+2)^2} & si\ x \geq -1 \\ f(x) = 2x + a & si\ x < -1 \end{cases}$

1) Déterminons la valeur de a pour que la fonction f soit continue au point -1

f est continue en $x_0 = -1$ si et seulement si : $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x(x+1)}{(x+2)^2} = \lim\limits_{x \to -1^+} 2x + a \Leftrightarrow 0 = -2 + a \Leftrightarrow a = 2$

2) Pour $= 2$, étudions la dérivabilité de la fonction f au point – 1.

f est dérivable en $x_0 = -1$ si et seulement si : $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$

$\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{\left[\frac{x(x+1)}{(x+2)^2}\right]-(0)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{(2x+2)-(-2+2)}{x+1} \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x(x+1)}{(x+1)(x+2)^2} = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{2(x+1)}{x+1} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x}{(x+2)^2} = 2 \Leftrightarrow -1 = 2$ (absurde)

Alors f n'est pas dérivable en – 1.

Application de la dérivée

15 Déterminons une équation de la tangente en $M_o(xo\,;\, f(xo))$ à la courbe (C) de f dans les cas suivants :
L'équation de la tangente à la courbe au (C) de f point x_0 est donnée par la formule suivante :
$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$a)\ f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3$ et $x_o = -2$ => $y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$ =>

$y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$ => $y = -1(x+2) + 13$ => $y = -x - 11$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$ et $x_o = 1$ => $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ => $y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$

c) $f(x) = cos^2 x$ et $x_o = \frac{\pi}{6}$ => $y = f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ => $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{9 + \pi\sqrt{3}}{12}$

16 Déterminons la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivants :
$a)\ f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 3$ => $f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$

$b)\ f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$. Posons $u = x^2 + 2x + 2$ => $u' = 2x + 2$ et $v = x + 1$ => $v' = 1$

$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ => $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

c) $f(x) = (-x^2 + 2x)^3$. Posons $u = -x^2 + 2x$ => $u' = -2x + 2$ et $n = 3$

$f'(x) = n(u')(u)^{n-1}$ => $f'(x) = 3(-2x+2)(-x^2 + 2x)^2$

d) $f(x) = \sqrt{2x^3 - 4x^2 + 1}$. Posons $u = 2x^3 - 4x^2 + 1$ => $u' = 6x^2 - 8x$

$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ => $f'(x) = \frac{6x^2-8x}{2\sqrt{2x^3-4x^2+1}} = \frac{3x^2-4x}{\sqrt{2x^3-4x^2+1}}$

e) $f(x) = (1-3x^2)(-x^2+1)$.

Posons $u = 1-3x^2$ => $u' = -6x$ et $v = -x^2+1$ => $v' = -2x$

$f'(x) = u'v + v'u$ => $f'(x) = (-6x)(-x^2+1) + (-2x)(1-3x^2) = 12x^3 - 8x$

f) $f(x) = \text{Cos}^3 x$. Posons $u = cosx$ => $u' = -sinx$ et $n = 3$

$f'(x) = n(u')(u)^{n-1}$ => $f'(x) = 3(-sinx)(cosx)^2 = -3sinxcos^2x$

g) $f(x) = (x-1)\sqrt{x^3-x^2}$

Posons $u = x-1$ => $u' = 1$ et $v = \sqrt{x^3-x^2}$ => $v' = \frac{3x^2-2x}{2\sqrt{x^3-x^2}}$

$f'(x) = u'v + v'u$ => $f'(x) = (1)\left(\sqrt{x^3-x^2}\right) + \left(\frac{3x^2-2x}{2\sqrt{x^3-x^2}}\right)(x-1)$

=> $f'(x) = \frac{5x^3-7x^2+2x}{2\sqrt{x^3-x^2}}$

h) $f(x) = \text{Sin}(3x-1)^4$. Posons $u = (3x-1)^4$ => $u' = 4(3)(3x-1)^3 = 12(3x-1)^3$

$f'(x) = u'cosu$ => $f'(x) = 12(3x-1)^3 cos(3x-1)^4$

i) $f(x) = Sin^4(3x-1)$ Posons $u = sin(3x-1)$ => $u' = 3cos(3x-1)$ et $n = 4$

$f'(x) = n(u')(u)^{n-1}$ => $f'(x) = 4[3cos(3x-1)][sin(3x-1)]^3$

=> $f'(x) = 12cos(3x-1) \times sin^3(3x-1)$

17 Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$

1) Ecrivons de $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

En posant $x^2 - 2x - 3 = 0$ on obtient comme solution $x_1 = -1$ et $x_1 = 3$

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
x^2-2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$
$\lvert x^2-2x-3 \rvert$	x^2-2x-3		$-x^2+2x+3$		x^2-2x-3

$$=> \begin{cases} f(x) = x^2-2x-3 & si\ x \in]-\infty ; -1[\cup]3 ; +\infty[\\ f(x) = -x^2+2x+3 & si\ x \in]-1 ; 3[\end{cases}$$

2) Etudions la continuité et la dérivabilité de f aux points $x_o = -1$ et $x_o = 3$.

- **Etude de la continuité en $x_o = -1$**

f est continue en $x_o = -1$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} x^2 - 2x - 3 = 0$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} -x^2 + 2x + 3 = 0$

Puis que $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 0$

Alors f est continue en $x_o = -1$

- **Etude de la dérivabilité en $x_o = -1$**

f est dérivable en $x_o = -1$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1}$

$\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x^2-2x-3 \ -0}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x^2-2x-3}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{(x-3)(x+1)}{x+1}$

$= \lim\limits_{x \to -1^-} x - 3 = -1 - 3 = -4$

$\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{-x^2 + 2x + 3 \ -0}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{-x^2+2x+3}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{-(x-3)(x+1)}{x+1}$

$= \lim\limits_{x \to -1^+} -x + 3 = 4$

Ainsi on dira que f n'est pas dérivable à gauche et à droite de $x_o = -1$, mais elle admet deux demi-tangentes respectivement à gauche et à droite de $x_o = -1$ dont les coefficients directeurs sont : $f'(-1) = -4$ et $f'(-1) = 4$

- **Etude de la continuité en $x_o = 3$**

f est continue en $x_o = 3$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} -x^2 + 2x + 3 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} x^2 - 2x - 3 = 0$

Puis que $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 0$

Alors f est continue en $x_o = 3$

- **Etude de la dérivabilité en $x_o = 3$**

f est dérivable en $x_o = 3$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{-x^2+2x+3\ -0}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{-x^2+2x+3}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{-(x-3)(x+1)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3^-} -x-1 = -3-1 = -4$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2-2x-3\ -0}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2-2x-3}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{(x-3)(x+1)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3^+} x+1 = 3+1 = 4$$

Ainsi on dira que f n'est pas dérivable à gauche et à droite de $x_o = 3$, mais elle admet deux demi-tangentes respectivement à gauche et à droite de $x_o = 3$ dont les coefficients directeurs sont : $f'(3) = -4$ et $f'(3) = 4$

3) Donnons une équation de la tangente à gauche et à droite de $x_o = -1$ et $x_o = 3$.

− A gauche de -1, on a : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ => $f'(x) = 2x - 2$ et
$y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ => $y = -4(x+1) + 0$ => $y = -4x - 4$

− A droite de -1, on a : $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ => $f'(x) = -2x + 2$ et
$y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ => $y = 4(x+1) + 0$ => $y = 4x + 4$

− A gauche de 3, on a : $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ => $f'(x) = -2x + 2$ et
$y = f'(3)(x-3) + f(3)$ => $y = -4(x-3) + 0$ => $y = -4x + 12$

− A droite de 3, on a : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ => $f'(x) = 2x - 2$ et
$y = f'(3)(x-3) + f(3)$ => $y = 4(x-3) + 0$ => $y = 4x - 12$

3) Dressons le tableau de variation de la fonction f.

Pour $x \in]-\infty ; -1[\cup]3 ; +\infty[$, on a : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ et $f'(x) = 2x - 2$

Posons $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$						$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0				0	↗	$+\infty$

Pour $x \in]-1 ; 3[$, on a : $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ et $f'(x) = -2x + 2$

Posons $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖		‖	$+$	0	$-$	‖		‖
$f(x)$	‖		0	↗	4	↘	0		‖

Ainsi l'intersection de ces deux tableaux donnent celui de $f(x)$ sur l'intervalle $]-\infty ; +\infty[$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Etudes de fonctions

Analyse et interprétation d'un tableau de variation.

18 Analysons puis interprète chacun des tableaux de variations suivants afin de préciser :

1) a- Domaine de définition.

Df = $\mathbb{R}$ = $]-\infty ; +\infty[$

b- Limites aux bornes du domaine de définition tout en mettant en évidence les éventuelles asymptotes ou possibilités d'asymptotes.

$lim\ f(x) = -\infty$ et $lim\ f(x) = +\infty$
$x \to -\infty$ $x \to +\infty$

La courbe (Cf) admet l'axe $(y'Oy)$ comme branche parabolique.

2) a- Domaine de définition.

Dg = $\mathbb{R}$ = $]-\infty ; +\infty[$

b- Limites aux bornes du domaine de définition tout en mettant en évidence les éventuelles asymptotes ou possibilités d'asymptotes.

$lim\ g(x) = +\infty$ et $lim\ g(x) = -\infty$
$x \to -\infty$ $x \to +\infty$

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction (oy)

3) a- Domaine de définition.

Dh = $\mathbb{R}-\{-2 ; 2\} =]-\infty ; -2[\cup]-2 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

b- Limites aux bornes du domaine de définition tout en mettant en évidence les éventuelles asymptotes ou possibilités d'asymptotes.

$lim\ h(x) = -1$ et $lim\ h(x) = 3$
$x \to -\infty$ $x \to +\infty$

Alors les droites d'équations $y = -1$ et $y = 3$ sont respectivement asymptotes horizontales en $-\infty$ et $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^-} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -2^+} h(x) = +\infty$.
Alors la droite d'équation $x = -2$ est asymptote Verticale

$\lim\limits_{x \to 2^-} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x) = -\infty$.
Alors la droite d'équation $x = 2$ est asymptote Verticale

4) a- Domaine de définition.
Dp = $\mathbb{R} - \{0\} =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$
b- Limites aux bornes du domaine de définition tout en mettant en évidence les éventuelles asymptotes ou possibilités d'asymptotes.
$\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = 2$

Alors la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale en $-\infty$ et $+\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} p(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} p(x) = +\infty$. Alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote Verticale

19 Dressons le tableau de variation de la fonction numérique donnée, partant de ses renseignements fournis dans les cas suivants :

1) Pour f :

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que l'équation $f'(x) = 0$ admet les solutions $x = -1$ et $x = \frac{3}{2}$
- f n'est croissante qu'entre les zéros de sa dérivée f' et les points $E_1\left(\frac{3}{2} ; 4\right)$ et $E_2\left(-1; -\frac{5}{2}\right)$ sont ses extremums
- les droites $y = -2$ et $y = 3$ sont ses asymptotes respectives en $-\infty$ et $+\infty$

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	↘	$-\frac{5}{2}$	↗	4	↘	3

2) Pour g **:**

- g est définie sur $]-\infty ; 0] \cup \left[\frac{5}{2} ; +\infty\right[$ et admet des demi tangentes verticales aux points d'abscisses 0 et $\frac{5}{2}$
- g est strictement décroissante sur son ensemble de dérivabilité.
- la droite $y = -x$ est à la fois asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$
- les points de coordonnées $(0 ; -3)$ et $\left(\frac{5}{2} ; 1\right)$ sont sur la courbe de g.

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$g\,'(x)$	$+$	0	‖	‖	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-3	‖	1	↗	$+\infty$

3) Pour h :

- h est dérivable sur $\mathbb{R}-\{0\ ;\ 2\}$ et continue sur $\mathbb{R}$.
- le point de coordonnées $(0{,}3\ ;\ 0{,}4)$ est l'extremum maximum absolue de la courbe (C_h) et h est croissante sur $[\,0\ ;\ 0{,}3\,] \cup [\,2\ ;\ +\infty[$
  Les droites d'équations $y = -1$ *et* $y = -2x + 1$ sont asymptotes de (C_h) respectivement en $-\infty$ et $+\infty$

x	$-\infty$		0		$0{,}3$		2		$+\infty$
$f\,'(x)$	$-$	‖	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	-1	↘	$-\infty$	‖ $-\infty$	↗	↘	$-\infty$	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$

Analyse et interprétation d'un graphique.

20 1) f est la fonction dont la courbe est donnée ci-dessous par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

a- Analysons chacune des courbes représentatives données dans un repère orthonormé du plan afin d'établir son tableau de variation.

Df = $\mathbb{R}$= $]-\infty\ ;\ +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f\,'(x)$	$+$	0	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{32}{27}$	↘	0	↗	$+\infty$

b- Déterminons les réels a ; b ; c et d en utilisant le graphique.

On sait que la formule explicite de f est le suivant : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

D'après le graphique, la courbe (C) passe par les points $E_1\left(\frac{-1}{3}\ ;\ \frac{32}{27}\right)$ et $E_2(1\ ;\ 0) \Leftrightarrow$

$f\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{32}{27}$ et $f(1) = 0$

De même, la courbe (C) admet les points $E_1\left(\frac{-1}{3}\ ;\ \frac{32}{27}\right)$ et $E_2(1\ ;\ 0)$comme extremum $\Leftrightarrow$

$f'\left(\frac{-1}{3}\right) = 0$ et $f'(1) = 0$

La réunion de ces deux conditions donne le système suivant :

$$\begin{cases} f\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{32}{27} \\ f(1) = 0 \\ f'\left(\frac{-1}{3}\right) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 3b - 9c + 27d = 32 & \textbf{(1)} \\ a + b + c + d = 0 & \textbf{(3)} \\ a - 2b + 3c = 0 & \textbf{(2)} \\ 3a + 2b + c = 0 & \textbf{(4)} \end{cases}$$

L'équation **(2)** donne : $a + b + c + d = 0 \Rightarrow a = -b - c - d$
En remplaçant $\boldsymbol{a}$ par sa valeur dans les équations **(1) ; (3) et (4),** on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} b - 2c + 7d = 8 \\ -3b + 2c - d = 0 \\ -b - 2c - 3d = 0 \end{cases}$$

En utilisant la méthode du Pivot de Gauss, la résolution de ce système donne :

$b = -1$; $c = -1$ et $d = 1$. Puis en remplaçant les valeurs de b; c et d dans l'équation **(2),**
On obtient $a = 1$.

D'où $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

2) La fonction donnée est g telle que : $g(x) = \frac{ax + b}{cx^2 + d}$

a- Analysons chacune des courbes représentatives données dans un repère orthonormé du plan afin d'établir son tableau de variation.

$Dg = \mathbb{R} - \{-1 ; 1\} =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

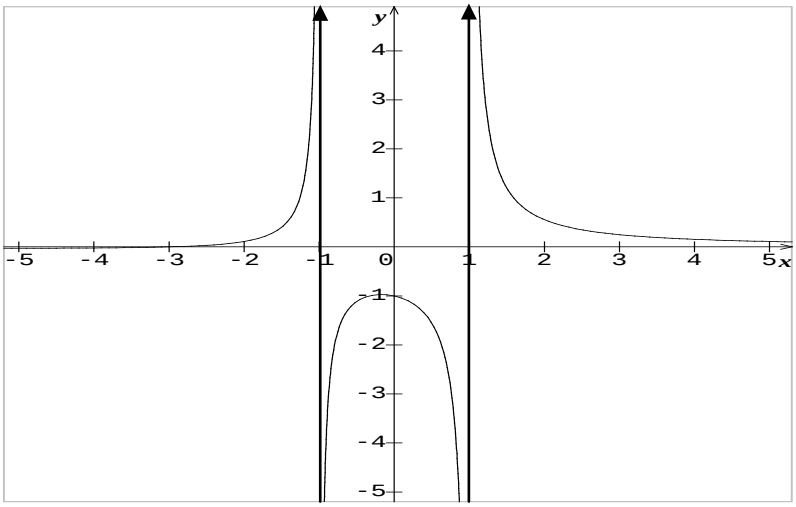
Alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale en $-\infty$ et $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = -\infty$.

Alors la droite d'équation $x = -1$ est asymptote Verticale

$\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = +\infty$.

Alors la droite d'équation $x = 1$ est asymptote Verticale



x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0

b- Déterminons les réels a ; b ; c et d en utilisant le graphique.

Soit $g(x) = \frac{ax + b}{cx^2 + d}$

Puis que g admet les droites $x = -1$ et $x = 1$ comme asymptote verticale, alors on a :

$cx^2 + d = (x-1)(x+1) \Leftrightarrow cx^2 + d = x^2 - 1$ et par identification on a : $c = 1$ et $d = -1$

$\Rightarrow g(x) = \frac{ax + b}{x^2 - 1}$

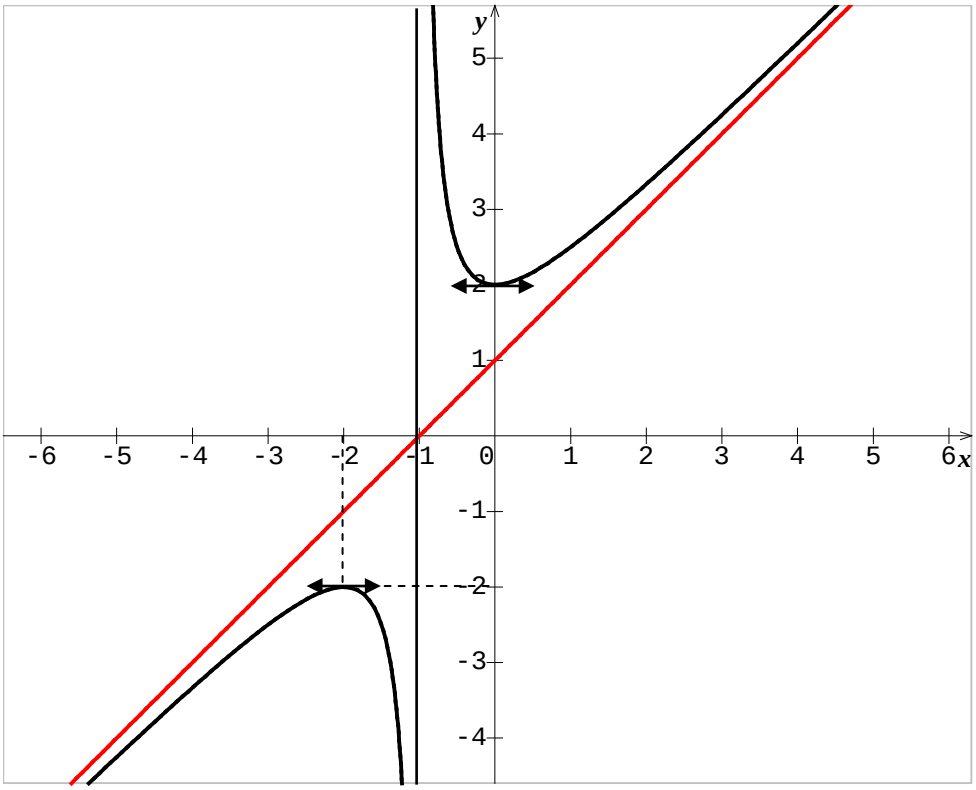
De même la courbe passe par le point $(0\ ;\ -1) \Rightarrow g(0) = -1 \Leftrightarrow \frac{b}{-1} = -1 \Rightarrow b = 1$

$\Rightarrow g(x) = \frac{ax + 1}{x^2 - 1}$

De même la courbe passe par le point $(-3\ ;\ 0) \Rightarrow g(-3) = 0 \Leftrightarrow \frac{-3a + 1}{8} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

D'où $g(x) = \frac{\frac{1}{3}x + 1}{x^2 - 1} \Leftrightarrow g(x) = \frac{x + 3}{3(x^2 - 1)}$

3) La fonction donnée est h telle que : $h(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$



a- Analysons chacune des courbes représentatives données dans un repère orthonormé du plan afin d'établir son tableau de variation.

Dh = $\mathbb{R}-\{-1\}$ = $]-\infty\,;\,-1[\cup]-1\,;\,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

Alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe (C).
Cherchons ainsi les réels a et b. La droite passe par deux points $(-1\,;\,0)$et $(0\,;1)$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}-a+b=0\\ b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}$ D'où $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe (C).

$\lim\limits_{x\to-1^-} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} h(x) = +\infty$.
Alors la droite d'équation $x = -1$ est asymptote Verticale

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

b- Déterminons les réels a ; b ; c ; d et e en utilisant le graphique.

$h(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$

Puis que h admet la droite $x = -1$comme asymptote verticale, alors on a : $dx + e = x + 1$ et par identification on a : $d = 1$ et $e = 1 \Rightarrow h(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + 1}$

La courbe (C) passe par les points $(-2\,;\,-2)$ et $(0\,;\,2) \Rightarrow h(-2) = -2$ et $h(0) = 2$

$\Leftrightarrow \frac{4a - 2b + c}{-1} = -2 \Leftrightarrow 4a - 2b + c = 2$ et $\frac{c}{1} = 2 \Leftrightarrow c = 2 \Rightarrow h(x) = \frac{ax^2 + bx + 2}{x + 1}$

De même $(-2\,;\,-2)$ est un extremum alors $h'(-2) = 0$ avec $h'(x) = \frac{ax^2 + 2ax + b - 2}{(x + 1)^2}$

$h'(-2) = 0 \Leftrightarrow \frac{4a - 4a + b - 2}{(-2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow h(x) = \frac{ax^2 + 2x + 2}{x + 1}$

La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe (C).

Alors $a = 1$(Coefficient directeur de la droite $y = x + 1$). D'où $h(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Fonctions d'initialisations.

21 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Déterminons l'ensemble de définition Df.

$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty\,;\,-1[\cup]-1\,;\,+\infty[$

2) Calculons les limites aux bornes de Df.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x^2+ 2x+2}{x+1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

3) Déterminons les réels a ; b et c tel que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

En effectuant la division Euclidienne $(x^2 + 2x + 2)$ par $(x + 1)$, on obtient :

$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}$ et par identification avec $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$, on a :

$a = 1$; $b = 1$ et $c = 1$

4) a- Montrons que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe Cf .
La droite (D) d'équation $y = ax + b = x + 1$ est asymptote à la courbe Cf si :

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - y = 0.$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - y = \lim\limits_{x \to \infty} \left(x + 1 + \frac{1}{x+1}\right) - (x + 1) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x+1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

D'où la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe Cf .

b- Déterminons la position de la courbe Cf et de la droite (D).
Pour ce la étudions le signe de $f(x) - y$. Posons $f(x) - y = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = 0$.

Le signe de $f(x) - y$ depend du signe de $x + 1$, car $1 > 0$

Posons $x + 1 = 0$ => $x = -1$

D'où le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y$	$-$	0	$+$

D'après le tableau de signe de $f(x) - y$, on a :

$\forall x \in]-\infty ; -1[$, $f(x) - y < 0$. Alors $\forall x \in]-\infty ; -1[$, (C) est en dessous de (D).

$\forall x \in]-1 ; +\infty[$, $f(x) - y > 0$. Alors $\forall x \in]-1 ; +\infty[$, (C) est au dessus de (D).

4) Montrons que le point $I\binom{-1}{0}$ est centre de symétrie pour la courbe Cf.

Le point $I\binom{-1}{0}$ est dit centre de symétrie si $f(2(-1) - x) + f(x) = 2(0)$

$\Leftrightarrow f(-2-x)+f(x)=0$

$f(-x-2)=\dfrac{(-2-x)^2+2(-2-x)+2}{(-2-x)+1}=\dfrac{4+4x+x^2-4-2x+2}{-2-x+1}=\dfrac{x^2+2x}{-x-1}$

$=>f(-x-2)+f(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{-x-1}+\dfrac{x^2+2x-2}{x+1}=\dfrac{-x^2-2x-2}{x+1}+\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}=0$

Puisque $f(-x-2)+f(x)=0$ alors $I\binom{-1}{0}$ est un centre de symétrie pour la courbe (C)

5) Déterminons une équation de la tangente à la courbe Cf au point d'abscisse -2

$f(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ => $f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

$y=f'(-2)(x+2)+f(-2)$ => $y=-2$

6) Calculons la dérivée f' de la fonction f puis dressons le tableau de variation de f.

Posons $u=x^2+2x+2$ => $u'=2x+2$ et $v=x+1$ => $v'=1$

$=>f'(x)=\dfrac{u'\times v-v'\times u}{(v)^2}=\dfrac{(2x+2)(x+1)-(1)(x^2+2x+2)}{(x+1)^2}=>f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

Or $\forall\ x\in Df,(x+1)^2>0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe du

Numérateur x^2+2x.

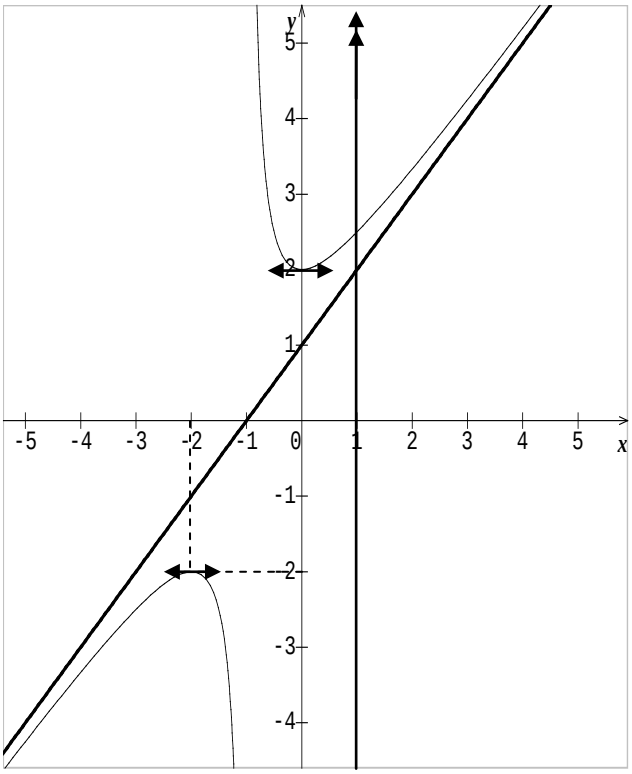
Posons $x^2+2x=0=>x=0\quad ou\quad x=-2$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	‖ $-\infty$ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

7) Construisons la courbe Cf et la droite (D) dans le même repère.

Ainsi on a la représentation suivante :



22 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Déterminons les réels a ; b ; c et d tel que :

a- La courbe Cf admet comme asymptote les droites $x = 2$ et $x = -1$.

Alors $x^2 + cx + d = (x-2)(x+1) \Leftrightarrow x^2 + cx + d = x^2 - x - 2$

Par identification, on a : $c = -1$ et $d = -2$ => $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2}$

b- La courbe Cf passe par le point A$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, Alors $f(1) = -2 \Leftrightarrow \dfrac{1 + a + b}{-2} = -2 \Leftrightarrow$

$1 + a + b = 4$ => $a + b = 3$ **(1)**

Cf admet au point A$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ une tangente de coefficient directeur – 5 => $f'(1) = -5$ avec

$f'(x) = \dfrac{x^2(-a-1) + x(-4-2b) + b - 2a}{(x^2 - x - 2)^2}$ alors $f'(1) = -5 \Leftrightarrow \dfrac{-3a - b - 5}{4} = -5 \Leftrightarrow$

$3a + b = 15$ **(2)**

Formons ainsi le système avec les équations **(1)** et **(2)** => $\begin{cases} a + b = 3 \\ 3a + b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} -a - b = -3 \\ 3a + b = 15 \end{cases}$

$2a = 12$ => $a = 6$ et $b = -3$. D'où $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x - 3}{x^2 - x - 2}$

2) Etudions la fonction f puis représente sa courbe Cf dans le repère.

Df = $\mathbb{R} - \{-1 \ ; \ 2\} =]-\infty \ ; \ -1[\cup]-1 \ ; 2[\cup]2 \ ; \ +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Alors les droites d'équations $y = 1$ est asymptotes horizontales en $-\infty$ et $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$. Alors la droite d'équation $x = -1$ est asymptote Verticale

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$. Alors la droite d'équation $x = 2$ est asymptote Verticale

$f(x) = \dfrac{x^2 + 6x - 3}{x^2 - x - 2}$ => $f'(x) = \dfrac{-7x^2 + 2x - 15}{(x^2 - x - 2)^2}$

Or $\forall \ x \in Df, (x^2 - x - 2)^2 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe du numérateur $-7x^2 + 2x - 15$. Posons $-7x^2 + 2x - 15 = 0$ => $\Delta = -416$ => $\Delta < 0$

Alors $\forall \ x \in Df, f'(x)$ à même signe que $a = -7$. Donc $f'(x) < 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$		$-$		
$f(x)$	1	$\searrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\searrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\searrow$	1

23 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 + ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

Déterminons les réels a ; b c ; m ; n et p tel que :

a- La courbe Cf admet comme asymptote les droites $x = 2$ et $x = -1$.

Alors $mx^2 + nx + p = (x - 2)(x + 1) \Leftrightarrow mx^2 + nx + p = x^2 - x - 2$ par identifications, on a : $m = 1$; $n = -1$ et $p = -2$ => $f(x) = \dfrac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x^2 - x - 2}$

b- La courbe Cf passe par les points A$\binom{1}{-1}$ et B$\binom{0}{3}$, alors $f(0) = 3 \Leftrightarrow \frac{c}{-2} = 3$ => $c = -6$

=> $f(x) = \dfrac{x^3 + ax^2 + bx - 6}{x^2 - x - 2}$

La courbe Cf admet au point A$\binom{0}{3}$, une tangente de coefficient -3 alors $f'(0) = -3$ avec $f'(x) = \dfrac{x^4 - 2x^3 + x^2(-a - b - 6) + x(-4a + 12b) - 2b - 6}{(x^2 - x - 2)^2}$.

Alors $f'(0) = -3 \Leftrightarrow \frac{-2b-6}{4} = -3 \Leftrightarrow -2b-6 = -12 \Rightarrow b = 3$

D'où $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + 3x - 6}{x^2 - x - 2}$

La courbe Cf admet au point A$\binom{1}{-1}$ Alors $f'(1) = -1 \Leftrightarrow \frac{1 + a + 3 - 6}{1 - 1 - 2} = -1 \Leftrightarrow a - 2 = 2$

$\Rightarrow a = 4$

D'où $f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + 3x - 6}{x^2 - x - 2}$

24 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{2(x^2 - 1)}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Etudions les variations de f puis précisons les asymptotes à la courbe Cf.

Df = $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\} =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Alors on a une possibilité d'asymptote oblique.

La recherche de l'asymptote oblique nous conduit à $y = \frac{1}{2}x$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$.

Alors la droite d'équation $x = -1$ est asymptote Verticale

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$. Alors la droite d'équation $x = 1$ est asymptote Verticale

$f(x) = \frac{x^3 - 9x}{2(x^2 - 1)} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^4 + 6x^2 + 9}{[2(x^2 - 1)]^2}$

Or $\forall\ x \in Df, [2(x^2 - 1)]^2 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe du numérateur $x^4 + 6x^2 + 9$. Alors effectuons un changement de variable en posant $X = x^2$.

Alors $x^4 + 6x^2 + 9$ dévient : $X^2 + 6X + 9 = (X + 3)^2 > 0$

D'où $\forall\ x \in Df, f'(x) > 0$

Conclusion : $\forall\ x \in Df$, la fonction f est strictement croissante.

2) Soit Δ l'asymptote non parallèle aux axes de coordonnées, c'est-à-dire $= \frac{1}{2}x$.

Déterminons la position de Cf par rapport à Δ dans l'intervalle $]-1 ; 1[$.

Pour ce la étudions le signe de $f(x) - y$. Posons $f(x) - y = 0 \Leftrightarrow \frac{-4x}{x^2 - 1} = 0$.

Etudions le signe de $-4x$ et $x^2 - 1$. Posons $-4x = 0$ et $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ et $x = -1$ ou $x = 1$

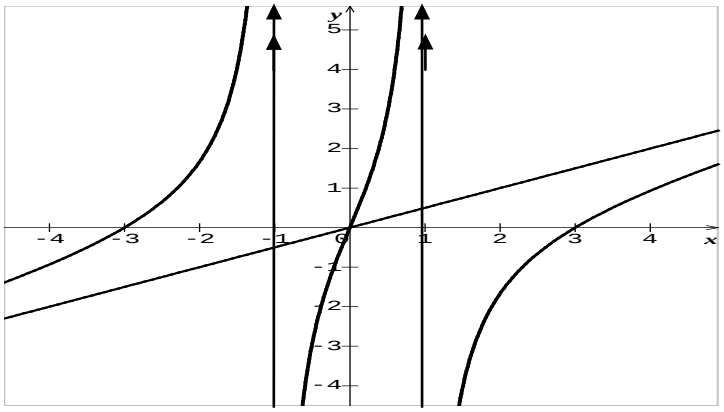
D'où le tableau de signe est le suivant :

x	-1		0		1
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	

D'après le tableau de signe de $f(x)-y$, on a :
$\forall x \in]-1\,;\,0[\,,\ f(x)-y<0$. Alors $\forall x \in]-1\,;\,0[$, (C) est en dessous de (D).

$\forall x \in]0\,;\,1[\,,\ f(x)-y>0$. Alors $\forall x \in]0\,;\,1[$, (C) est au dessus de (D).

4) Construisons Cf.



25 Soit la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x^2+2x+4}{2x}$
Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
1) Etudions et construisons la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
Déterminons l'ensemble de définition Df.
$D_f = \mathbb{R}-\{0\} =]-\infty\ ;\ 0\,[\cup]0\ ;\ +\infty\,[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x+4}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+4}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2+2x+4}{2x}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+2x+4}{2x}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

$f(x)=\frac{x^2+2x+4}{2x}$ => $f'(x)=\frac{2x^2-8}{(2x)^2}$

Or $\forall\ x\in Df, (2x)^2>0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe du

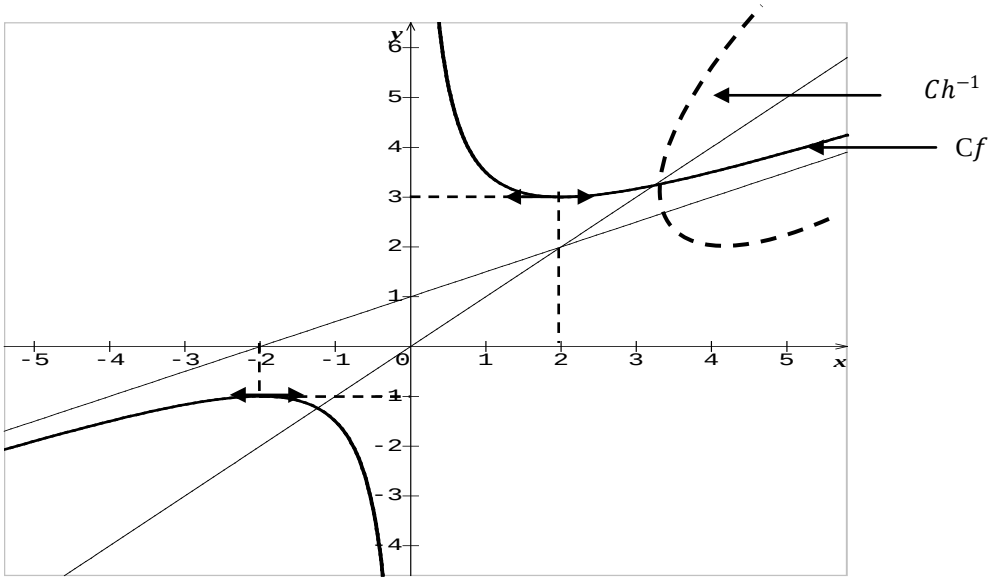
Numérateur $2x^2-8$. Posons $2x^2-8=0$ => $x=-2$ ou $x=2$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

Construisons la courbe (C).

- $x=0$ est asymptote verticale.
- $y=\frac{1}{2}x+1$ est asymptote oblique.



2) Montrons que le point d'intersection des asymptotes est un centre de symétrie de (Cf)

Cherchons d'abords le point d'intersection des deux asymptotes. Pour cela formons le système avec les deux asymptotes ($=0$ asymptote verticale) et ($y=\frac{1}{2}x+1$ asymptote oblique)

=> $\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{2}x+1 \end{cases}$ => $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ .Ainsi le point (0 ; 1) est centre de symétrie pour la courbe (C) de f si et seulement si : $f(2(0)-x)+f(x)=2(1) \Leftrightarrow f(-x)+f(x)=2$

$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 2(-x) + 4}{2(-x)} = \frac{x^2 - 2x + 4}{-2x} = \frac{-x^2 + 2x - 4}{2x}$

$=> f(-x) + f(x) = \frac{-x^2 + 2x - 4}{2x} + \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} = \frac{4x}{2x} = 2$

Puisque $(-x) + f(x) = 2$ alors le point (0 ; 1) est un centre de symétrie pour la courbe (C)

3) Discutons graphiquement suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines de l'équation : $x^2 + 2(1 - m)x + 4 = 0$

Pour cela, exprimons m en fonction de x :

$x^2 + 2(1 - m)x + 4 = 0 => m = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} = f(x)$

En faisant glisser une règle du bas vers le haut tout le long du graphique, on remarque que :

- $\forall\, m \in]-\infty\ ;\ -1[$ coupe deux fois la courbe et par conséquent l'équation $x^2 + 2(1 - m)x + 4 = 0$ admet deux solutions distinctes négatives.
- $\forall\, m \in]3\ ;\ +\infty[$, la règle coupe deux fois la courbe et par conséquent l'équation $x^2 + 2(1 - m)x + 4 = 0$ admet deux solutions distinctes positives.
- $\forall\, m \in]-1\ ;\ 3[$, la règle ne coupe pas la courbe et par conséquent l'équation $x^2 + 2(1 - m)x + 4 = 0$ n'admet pas de solution.

4) Montrons que la restriction h de f à l'intervalle I = [2 ; $+\infty$ [est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

En observant le tableau de variation de f, on remarque que $\forall\, x \in]2\ ;\ +\infty[$, la restriction h de f est définie, continue et strictement croissante de l'intervalle I = [2 ; $+\infty$ [vers l'intervalle J = [3 ; $+\infty$ [. Par conséquent h réalise une bijection de l'intervalle I = [2 ; $+\infty$ [vers l'intervalle J = [3 ; $+\infty$ [

5) Construisons la courbe représentative de la fonction réciproque h^{-1} de h dans le même repère que (C). **(voir figure)**

NB : N'oublier jamais que la courbe représentative d'une fonction et celle de sa bijection réciproque son symétrique par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

Ainsi la construction de la courbe la fonction réciproque h^{-1} de h visualisée sur la figure.

Fonctions biologiques.

26 Une population de bactéries (exprimer en millier) a un rythme de croissance modélisé par la fonction $f(t) = \frac{60t + 40}{t + 10}$ où $t \in$ [0 ; $+\infty$ [est le temps écoulé en jours.

1) Déterminons la population de cette culture au bout de 3 jours ; 5 jours et 21 jours

- La population au bout de 3 jours est : $f(3) = \frac{60\times3 + 40}{3 + 10} = 16{,}92 \approx 17$ jours

- La population au bout de 5 jours est : $f(5) = \frac{60\times5 + 40}{5 + 10} = 22{,}66 \approx 23$ jours

- La population au bout de 21 jours est : $f(21) = \frac{60\times21 + 40}{21 + 10} = 41{,}93 \approx 42$ jours

2) Déterminons les réels a et b tels que $f(t) = a + \frac{b}{t+10}$ pour $t \in [0 ; +\infty[$.
$f(t) = \frac{60t+40}{t+10}$. La divisions Euclidienne de $(60t + 40)$ par $(t + 10)$ donne pour quotient $q = 60$ et pour reste $R = -560$. Alors $f(t) = quotient + \frac{Reste}{Diviseur}$
$=> f(t) = 60 + \frac{-560}{t+10}$
et par comparaisons avec $f(t) = a + \frac{b}{t+10}$, on a : $a = 60$ et $b = -560$

3) a- Calculons la dérivée $f'(t)$ de la fonction $f(t)$.

$f(t) = \frac{60t+40}{t+10} => f'(t) = \frac{560}{(t+10)^2}$.

b- Justifions que la population est croissante.
D'après la question : a) ,$f'(t) > 0$. Alors $\forall\, t \in [0 ; +\infty[$, f est strictement croissante.
D'où la population est croissante.

4) a- Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(t) = 52$.
$f(t) = 52 \Leftrightarrow \frac{60t+40}{t+10} = 52 \Leftrightarrow 60t + 40 = 52(t + 10) \Leftrightarrow 8t = 480 => t = 60$ et S = $\{60\}$

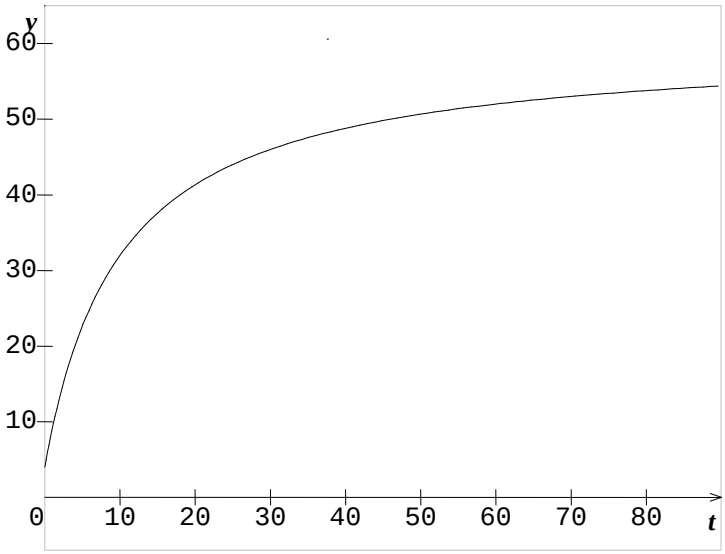
b- En déduisons le nombre de jours à partir du quel la population de cette culture sera égale à 52.000 individus.
D'après la question : b), la population de cette culture sera égale à 52.000 individus au bout de 60000 jours.

5) a- Déterminons la limite de f en $+\infty$

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{60t+40}{t+10} = \lim_{t \to +\infty} \frac{60t}{t} = 60$

b- En déduisons une interprétation quant à la population de cette culture.
D'après la limite ci-dessus, on dira que la population seuil de cette culture est de 60 individus.

6) Trace la courbe (Cf) de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
Echelle : 1 $cm \to 10$ ans sur l'axe (ot) et 1 $cm \to 10.000$ individus sur l'axe (oy).



27 Un laboratoire médical désire mesurer le nombre de personne contaminés par jour du à un virus à partir d'une « fonction de contagion » f, définie sur l'intervalle $[1\ ;\ 30]$ par :
$f(t) = 0{,}02t^3 - 1{,}4t^2 + 22t + 640$ où t désigne la durée en jour de propagation.
On appelle f' la dérivée de la fonction f comme la fonction « contagion ».
On dit qu'il y a « contagion » lorsque f'est positive. Sinon on dit qu'il y a « non contagion ».
1) Déterminons le nombre de personne contaminé entre le 1er jour et le 21 jour
Le nombre de personne contaminé entre le 1er jour et le 21 jour est : $f(21) = 669{,}82 \approx 670$ personnes.
2) Détermine les intervalles de temps où il ya contagion et non contagion.
La dérivée $f'(t) = 0{,}06t^2 - 2{,}8t + 22$ et l'étude du signe de f' sur $[1; 30]$ donne le tableau suivant :

t	1		10		30
$f'(t)$		+	0	−	

D'après le tableau :

- Il y a contagion entre le 1er et 10ième jour
- Il y a non contagion entre le 10ième et 30ième jour

3) On désigne par $S = \int_{10}^{15} f(t)dt$, l'aire en m^2 de la zone contaminée par la virus.
Déterminons cette aire

$S = \int_{10}^{15} f(t)dt \Rightarrow S = \int_{10}^{15} (0{,}02t^3 - 1{,}4t^2 + 22t + 640)dt$

$\Rightarrow S = \left[\frac{0{,}02}{4}t^4 - \frac{1{,}4}{3}t^3 + \frac{22}{2}t^2 + 640t\right]_{10}^{15} = 3685{,}625\ m^2 = 3685{,}625\ m^2$

28 Une culture de bactéries a un rythme de croissance $(exprimé\ en\ mm/jour)$modélisé par la fonction $C(x) = \frac{3000}{(1+0{,}25x)^2}$ où $x \in [0\ ;\ +\infty[$ est le temps écoulé en jours.
On admet que ce rythme de croissance est la dérivée de la fonction population $p(x)$c'est-à-dire que $p'(x) = C(x)$ et au temps $x = 0$, la culture compte 1000 bactéries c'est-a-dire : $p(0) = 1000$.
1) a- Déterminons $p(x)$désignant la population des bactéries après x jours.

$$p'(x) = C(x) = \frac{3000}{(1+0{,}25x)^2} = \frac{0{,}25}{0{,}25} \times \frac{3000}{(1+0{,}25x)^2} = \frac{3000}{0{,}25} \times \frac{0{,}25}{(1+0{,}25x)^2}$$

$$= 12000 \times \frac{0{,}25}{(1+0{,}25x)^2}$$

D'où

$$p(x) = \int C(x)\,dx = \int 12000 \times \frac{0{,}25}{(1+0{,}25x)^2}\,dx = 12000 \int \frac{0{,}25}{(1+0{,}25x)^2}\,dx = \frac{-1}{1+0{,}25x} + k$$

Or $p(0) = 1000 \Leftrightarrow -1 + k = 1000$ => $k = 1001$

D'où $p(x) = \frac{-1}{1+0{,}25x} + 1001 = \frac{250{,}25x + 1000}{1+0{,}25x}$

b- Evaluons le nombre de bactérie ainsi que leur rythme de croissance au bout de 3 jours.
-Le nombre de bactérie au bout de 3 jours est : $p(3) = \frac{250{,}25(3) + 1000}{1+0{,}25(3)} \approx 1000$ individus.
-Leur rythme de croissance au bout de 3 jours est : $C(3) = \frac{3000}{(1+0{,}25\times 3)^2} \approx 980 mm/jrs$

c- Déterminons au bout de combien de jours le nombre de bactéries atteindra t-il 1500 individus
Pour cela résolvons l'équation $p(x) = 1500$

$$p(x) = 1500 \Leftrightarrow \frac{250{,}25x + 1000}{1+0{,}25x} = 1500 \Leftrightarrow -124{,}75x = 500 \Rightarrow x \approx -4$$

Alors le nombre de bactéries atteindra t-il 1500 dans moins de 4 jours.

2) a- Etudions les variations de p sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

$$p(x) = \frac{250{,}25x + 1000}{1+0{,}25x} \Rightarrow p'(x) = \frac{0{,}25}{(1+0{,}25x)^2}$$

Alors $\forall x \in [0\ ;\ +\infty[$, p est strictement croissante

b- Calculons la limite de $p(x)$en $+\infty$.

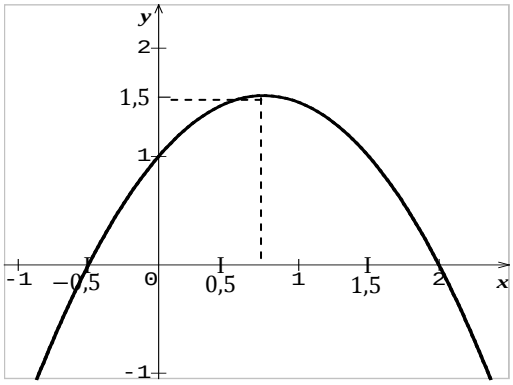
$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{250{,}25x + 1000}{1+0{,}25x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{250{,}25x}{0{,}25x} = \frac{250{,}25}{0{,}25} = 1001$$

29 Un malade contracte une fièvre dont la température en degré est modélisée par la fonction t définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $t(x) = -x^2 + 1{,}5x + 1$. Où : x est le temps écoulé exprimé en seconde et $t(x)$ est la température de la fièvre exprimé en degré.

1) Déterminons la température du malade à : 0 s ; 1s et 2s

- A 0s, la température du malade est : $t(0) = -(0)^2 + 1{,}5(0) + 1 = 1$ degré
- A 1s, la température du malade est : $t(1) = -(1)^2 + 1{,}5(1) + 1 = 1{,}5$ degré
- A 2s, la température du malade est : $t(2) = -(2)^2 + 1{,}5(2) + 1 = 0$ degré

2) La fonction t est représentée par la courbe ci-dessous :



a. Indiquons à qu'elle instant la fièvre atteint sa température maximale.
D'après le graphique ci-dessus, la courbe atteint son maximum à 0,75 s. Par conséquent la fièvre atteint sa température maximale à 0,75 s.

b. Donnons les intervalles respectifs de montée et de descente de la fièvre.
D'après le graphique ci-dessus, la fièvre monte entre 0s et 0,75 s et chute entre 0s et 2 s

3) On désigne par T une primitive de la fonction t définie sur l'intervalle $[0\,;2]$.

a. Calculons T.

$t(x) = -x^2 + 1{,}5x + 1$ => $\mathrm{T}(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$

b. Calculons la température moyenne du malade pendant l'intervalle de temps $[0\,;2]$.

$m = \frac{1}{2-0}\int_0^2(-x^2 + 1{,}5x + 1)dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^2 = 0{,}66$ degré.

Fonctions circulaires.

30 Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\frac{Sin3x}{Cos^3x}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Déterminons Df

Df = $\{x\ /\ x\ \in\ \mathbb{R}\ ;\ cos^3x \neq 0\}$ $cos^3x\ \neq 0 \Leftrightarrow cosx\ \neq 0 \Leftrightarrow cosx\ \neq cos\frac{\pi}{2}$ <=>
$x\ \neq\ \frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $x\ \neq\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi$ =>$D_f\ =\ \left]-\infty\ ;\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi\right[\ \cup\ \left]\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ;\ +\infty\right[$

2) Etudions la parité et la périodicité de f puis en déduisons un intervalle d'étude D_E.

- **Parité** :

$f(-x)=\frac{sin(-3x)}{cos^3(-x)}=\frac{-sin3x}{cos^3x}=-\frac{sin3x}{cos^3x}\ =-f(x)$ (car $cos(-\alpha)=cos\alpha\ et\ \sin(-\alpha)=-sin\alpha$)

Alors f est impaire et admet donc l'origine O$(0\ ;0)$ du repère comme centre de symétrie.

- **Périodicité** :

NB : Les fonctions Cos $(ax+b)$ et Sin $(ax+b)$ sont périodique et de période T = $\frac{2\pi}{|a|}$

Pour $sin3x$, on a : $T_1=\frac{2\pi}{3}$ et pour cos^3x, on a : $T_2=\frac{2\pi}{1}\ =2\pi$ => T = $T_1 \cap T_2\ =2\pi$

Alors l'étude peut donc se fait sur le domaine $\left[-\frac{T}{2}\ ;\ \frac{T}{2}\right]$ => $D_E=\left[-\frac{2\pi}{2}\ ;\ \frac{2\pi}{2}\right]=[-\pi\ ;\ \pi\ ]$
De plus la fonction est paire alors nous pouvons résumer le domaine d'étude à [0 ; π]
D'où D_E = [0 ; π]

3) Montrons que $\forall\ x\ \in$ D$f, f'(x)=\frac{3Cos2x}{Cos^4x}$ puis dressons le tableau de variation de f.

$f(x)=\frac{Sin3x}{Cos^3x}$. ($u=sin3x$ => $u'=3cos3x$; $v=Cos^3x$ => $v'=-3sinxCos^2x$)

=> $f'(x)=\frac{(3cos3x)(Cos^3x)-(-3sinx\,Cos^2x)(sin3x)}{(Cos^3x)^2}=\frac{3cos3x\times Cos^3x+3sinx\,Cos^2x\times sin3x}{Cos^6x}$

=> $f'(x)=\frac{3Cos^2x(cos3x\bullet cosx\ +\ sin3x\bullet sin3x)}{Cos^6x}$ Or $cos3x\bullet cosx+sin3x\bullet sin3x=cos2x$

Car $cosa\bullet cosb+sina\bullet sinb=cos(a-b)$ et en simplifiant la fraction par Cos^2x, on a :

$f'(x)=\frac{3Cos2x}{Cos^4x}$ (ce qu'il fallait Démontre)

$\forall x \in$ Df, $Cos^2x>0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui du numérateur $3Cos2x$

Alors étudions le signe de $3Cos2x$. Posons $3Cos2x=0\ \Leftrightarrow\ Cos2x=0\ \Leftrightarrow$

$Cos2x=Cos\frac{\pi}{2}$ <=> $2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $2x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ =>

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

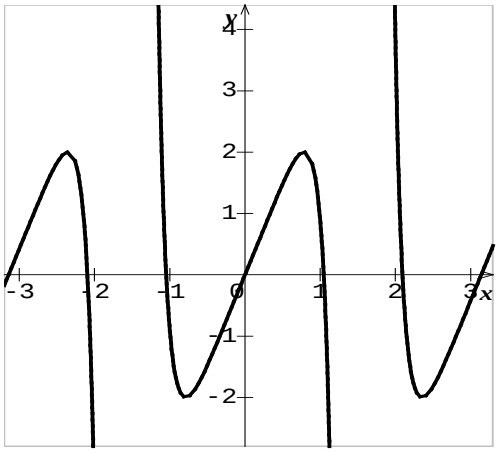
En utilisant le cercle trigonométrique ; $\forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right[\ f'(x) > 0$ et $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}\right[\ f'(x) < 0$

D'autre part $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = -\infty$

D'où le tableau de variation de f sur [0 ; π]est le suivant :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	
$f(x)$	0	↗	1	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	0

4) Tracé de la courbe Cf par symétrie sur $[-\pi\,;\ \pi\ ]$



31 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 + Cos3x}{Cos^3 x}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Déterminons l'ensemble de définition Df.

Df = $\{x\ /\ x \in \mathbb{R}\,;\ Cos^3 x \neq 0\}$

$Cos^3 x \neq 0 \iff Cosx \neq 0 \iff Cosx \neq Cos\frac{\pi}{2} \iff x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\boldsymbol{\pi}$ ou

$x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\Rightarrow D_f = \left]-\infty\,;\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[\cup \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ +\infty\right[$

2) Etudions la parité et la périodicité de f puis en déduisons un intervalle d'étude D_E.

- **Parité :**

$f(-x) = \frac{1 + Cos(-3x)}{Cos^3(-x)} = \frac{1 + Cos3x}{Cos^3x} = f(x)$ (car $cos(-\alpha) = cos\alpha$)

Alors f est paire et admet donc l'axe $y'oy$ comme axe de symétrie.

- **Périodicité :**

NB : Les fonctions Cos $(ax + b)$ et Sin $(ax + b)$ sont périodique et de période T = $\frac{2\prod}{|a|}$

Pour $cos3x$, on a : $T_1 = \frac{2\pi}{3}$ et pour cos^3x, on a : $T_2 = \frac{2\pi}{1}$ => $T = T_1 \cap T_2 = 2\pi$

Alors l'étude peut donc se fait sur le domaine $\left[-\frac{T}{2} ; \frac{T}{2}\right]$ => $D_E = \left[-\frac{2\pi}{2} ; \frac{2\pi}{2}\right] = [-\pi ; \pi]$

Et puisque la fonction est paire alors nous pouvons résumer le domaine d'étude à [0 ; π]

D'où D_E = [0 ; π]

3) Montrons que $\forall x \in Df, f'(x) = \frac{3(1 - 2Cosx)Sinx}{Cos^4x}$

$f(x) = \frac{1 + Cos3x}{Cos^3x}$

Posons $u(x) = 1 + cos3x$ => $u'(x) = -3sin3x$

$v(x) = Cos^3x$ => $v'(x) = -3sinxCos^2x$

=> $f'(x) = \frac{(-3sin3x)(Cos^3x) - (-3sinx\,Cos^2x)(1+cos3x)}{(Cos^3x)^2}$

$= \frac{-3sin3xCos^3x + 3sinx\,Cos^2x(1+cos3x)}{Cos^6x}$

$= \frac{3Cos^2x(-cosxsin3x + sinxcos3x + sinx)}{Cos^6x} = \frac{3(sinxcos3x - sin3xcosx + sinx)}{Cos^4x}$

$= \frac{3[sin(x - 3x) + sinx]}{Cos^4x} = \frac{3[sin(-2x) + sinx]}{Cos^4x} = \frac{3(-sin2x + sinx)}{Cos^4x}$

$= \frac{3(-2cosxsinx + sinx)}{Cos^4x} = \frac{3(-2cosx + 1)sinx}{Cos^4x} = \frac{3(1 - 2Cosx)Sinx}{Cos^4x}$

D'où $f'(x) = \frac{3(1 - 2Cosx)Sinx}{Cos^4x}$

4) Etudions le signe de $(1 - 2cosx)$ puis en déduis le tableau de variations de f sur D_E.

D'autre par $\forall x \in [0 ; \pi]$ on a : $Sinx > 0$ et $Cos^4x > 0$

Donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $1 - 2cosx$. Posons : $1 - 2Cosx = 0$ =>

$cosx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow cosx = cos\frac{\pi}{3}$ => $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

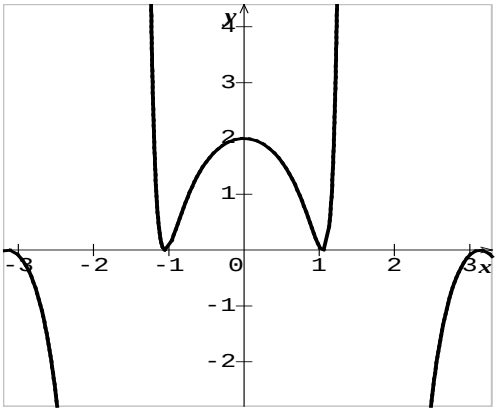
D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	2 ↘	0 ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗	0

5) Détermine les coordonnées des points d'intersections de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.

- (C)∩ (ox) => $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + cos3x = 0 \Leftrightarrow cos3x = -1 \Leftrightarrow cos3x = \text{Cos}\,\pi$
$\Leftrightarrow 3x = \pi$ ou $3x = -\pi$ => $-\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{3}$. Donc (C) coupe l'axe (ox) en $-\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{3}$
- (C) ∩ (oy) => $y = f(0) = 2$. Donc (C) coupe l'axe oy en 2

5) Tracé de la courbe Cf par symétrie sur $[-\pi\ ;\ \pi\ ]$



32 On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = sin2xcosx$.

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) a- Prouvons que la verticale $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe Cf et étudions la parité de f.

$x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe Cf si et seulement si $f\left(2 \times \frac{\pi}{2} - x\right) = f(x) \Leftrightarrow$
$f(\pi - x) = f(x)$

$f(\pi - x) = sin2(\pi - x)cos(\pi - x) = sin(2\pi - 2x)cos(\pi - x) = [-sin(2x)][-cos(x)\ ]$

Car $sin(2\pi - \alpha) = -sin\alpha$ et $cos(\pi - \alpha) = -cos\alpha$

=> $f(\pi - x) = sin2xcosx = f(x)$.

Alors la verticale $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe Cf

Etude de la parité de f :

NB : Les fonctions Cos $(ax + b)$ et Sin $(ax + b)$ sont périodique et de période T = $\frac{2\pi}{|a|}$

Pour $sin2x$, on a : $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$ et pour $cosx$, on a : $T_2 = \frac{2\pi}{1}$ => $T = T_1 \cap T_2 = \pi$

Calculons $f(x + T)$

$f(x+T) = f(x+2\pi) = sin2(x+2\pi)cos(x+2\pi)$ = $sin(2x+4\pi)cos(x+2\pi)$

= $sin(2x)cos(x) = f(x)$

D'où f est périodique et de période $T = \pi$

b- Justifions que l'on peut étudier f sur D_E = [0 ; π] puis décrivons les étapes à suivre pour avoir la courbe Cf sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

$D_E = \left[-\frac{T}{2}\ ;\ \frac{T}{2}\right]$ => $D_E = \left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$

D'autre part la fonction est paire alors nous pouvons résumer le domaine d'étude à $\left[\ 0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$

D'où $D_E = \left[\ 0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$

2) a- Déterminons $f'(x)$ et justifions que $f'(x) = 2cosx(3cos^2x - 2)$ pour tout $x \in D_E$

$f(x) = sin2xcosx$. $\boldsymbol{u = sin2x}$ => $\boldsymbol{u' = 2cos2x}$; $\boldsymbol{v = cosx}$ => $\boldsymbol{v' = -sinx}$

=> $f'(x) = (2cos2x)(cosx) + (-sinx)(sin2x) = 2(cos2x)(cosx) - (sinx)(sin2x)$

= $2(cos^2x - sin^2x)(cosx) - (sinx)(2sinxcosx)$

(car $cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$ et $sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha$)

=> $f'(x) = 2cos^3x - 2cosxsin^2x - 2cosxsin^2x = 2cos^3x - 4cosxsin^2x$

Or $sin^2x = 1 - cos^2x$

=> $f'(x) = 2cos^3x - 4cosx(1 - cos^2x) = 2cos^3x - 4cosx + 4cos^3x$

= $6cos^3x - 4cosx = 2cosx(3cos^2x - 2)$.

D'où $\forall\ x\ \in D_E$, $f'(x) = 2cosx(3cos^2x - 2)$

b- Etablissons le tableau de variation de f sur $\left[\ 0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$

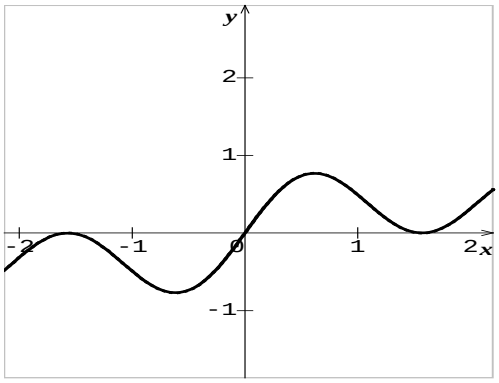
$\forall\ x\ \in \left[\ 0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $2cosx > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $3cos^2x - 2$.

Posons $3cos^2x - 2 = 0 \Leftrightarrow cos^2x = \frac{2}{3}$ => $cosx = \sqrt{\frac{2}{3}}$ => $x = cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ = 0,61

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	0		0,61		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	0,76	↘	0

4) Traçons (C) sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$



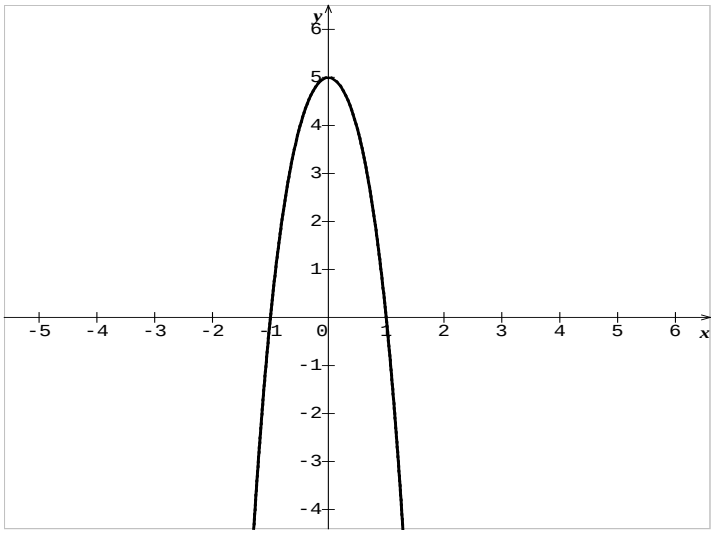
Fonctions paramétriques.

33 Soit f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = (2m-1)x^4 - (m+4)x^2 - m + 5$.
Où x est la variable et m est un paramètre réel.
Soit (C_m) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
1) Montre que toutes les courbes (C_m) passent par deux points fixes dont on Déterminera les coordonnées.
Toutes les courbes (C_m) passent par deux points fixes si et seulement si $f_0(x) = f_1(x)$
Soient A et B ces deux points.
$f_0(x) = f_1(x) \Leftrightarrow -x^4 - 4x^2 + 5 = x^4 - 5x^2 + 4 \Leftrightarrow -2x^4 + x^2 + 1 = 0$
Cette équation étant bicarrée, effectuons un changement de variable en posant $X = x^2$ =>
$2X^4 + X + 1 = 0$ => $X_1 = 1$ et $X_2 = -\frac{1}{2}$
$-$ Si $X = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = -1$ ou $x_2 = 1$
Par conséquent : pour $x_1 = -1$, on a : $y_1 = f_0(-1) = 0$. D'où $A(-1\,;0)$
pour $x_2 = 1$, on a : $y_2 = f_0(1) = 0$. D'où $B(1\,;0)$
$-$ Si $= -\frac{1}{2}$, on a une absurdité car si $x^2 = -1$, l'équation n'a pas de solution.
2) Etudie les fonctions f_0 et f_1 puis représente leur courbe respectives (C_0) et (C_1).
$f_0(x) = -x^4 - 4x^2 + 5$ et $f_1(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
Etude de la fonction f_0 puis représentation de sa courbe (C_0)
Df_0= $\mathbb{R}$ = $]-\infty\,;+\infty[$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f_0(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = -\infty$

$f_0(x) = -x^4 - 4x^2 + 5$ => $f'_0(x) = -4x^3 - 8x = -4x(x^2 + 2)$
$\forall x$Df_0 ; $(x^2 + 2) > 0$. Alors le signe de $f'_0(x)$ dépend du signe de $-4x$. Posons $-4x = 0$
=> $x = 0$
D'où le tableau de variation de f_0 est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'_0(x)$		$+$	0	$-$	
$f_0(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	$-\infty$

La courbe représentative de f_0 est le suivant :



$Df_1 = \mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$

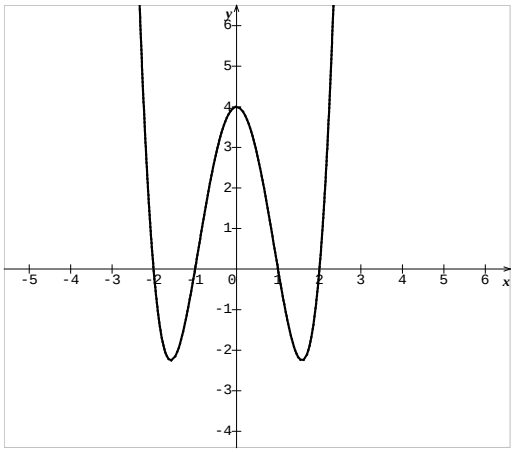
$lim\ f_1(x) = +\infty$ et $lim\ f_1(x) = +\infty$
$x \to -\infty$ $\quad$ $x \to +\infty$

$f_1(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ => $f'_1(x) = 4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5)$. Posons $f'_1(x) = 0$ $\Leftrightarrow$ $2x(2x^2 - 5) = 0$ => $x = 0$ ou $2x^2 - 5$ => $x = -\sqrt{\frac{5}{2}}$ ou $x = \sqrt{\frac{5}{2}}$

D'où le tableau de variation de f_1 est le suivant :

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{5}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{5}{2}}$		$+\infty$
$f'_1(x)$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$ ↘	$-\frac{111}{16}$	↗	4	↘	$-\frac{111}{16}$	↗	$+\infty$
				$-\infty$				

La courbe représentative de f_1 est le suivant :



34 Soit f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = \frac{x^2 + 3x + 4m}{x^2 + (5m + 1)x + 3}$.

Où x est la variable et m est un paramètre réel.

Soit (C_m) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Montrons que toutes les courbes (C_m) passent par trois points fixes dont on Déterminera les coordonnées.

Toutes les courbes (C_m) passent par trois points fixes si et seulement si $f_0(x) = f_1(x)$

Soient A; B et C ces trois points.

$f_0(x) = f_1(x) \Leftrightarrow \frac{x^2 + 3x}{x^2 + x + 3} = \frac{x^2 + 3x + 4}{x^2 + 6x + 3}$

$\Leftrightarrow (x^2 + 3x)(x^2 + 6x + 3) = (x^2 + x + 3)(x^2 + 3x + 4)$

$\Leftrightarrow 5x^3 + 11x^2 - 4x - 12 = 0$ $(1\ est\ une\ racine\ de\ cette\ équation)$

Alors la forme factorisée de $5x^3 + 11x^2 - 4x - 12$ est $(x - 1)(x + 2)\left(x + \frac{6}{5}\right)$

$5x^3 + 11x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2)\left(x + \frac{6}{5}\right) = 0$

=> $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = -\frac{6}{5}$

− Pour $x_1 = 1$, on a : $y_1 = f_0(1) = \frac{1 + 3}{1 + 1 + 3} = \frac{4}{5}$ => $A\left(1 ; \frac{4}{5}\right)$

− Pour $x_2 = -2$, on a : $y_2 = f_0(-2) = \frac{4 - 6}{4 - 2 + 3} = -\frac{2}{5}$ => $B\left(-2 ; -\frac{2}{5}\right)$

− Pour $x_3 = -\frac{6}{5}$, on a : $y_3 = f_0\left(-\frac{6}{5}\right) = \frac{\frac{54}{25}}{\frac{81}{25}} = -\frac{2}{3}$ => $C\left(1 ; \frac{4}{5}\right)$

D'où toutes les courbes (C_m) passent par les points $A\left(1 ; \frac{4}{5}\right)$; $B\left(-2 ; -\frac{2}{5}\right)$; $C\left(1 ; \frac{4}{5}\right)$

2) Déterminons m pour que le point d'intersection I de (C_m) et l'asymptote parallèle à $(x'ox)$ ait pour abscisse $\frac{3}{2}$.

Cherchons d'abords l'asymptote parallèle à l'axe $(x'ox)$, c'est-à-dire l'asymptote horizontale.

$\lim\limits_{x \to \infty} f_m(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3x + 4m}{x^2 + (5m + 1)x + 3} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ => $y = 1$ est asymptote horizontale.

Cherchons de même les coordonnées du point I

I étant le point d'intersection de la courbe (C_m) avec l'asymptote horizontale $y = 1$, on a :

$f_m(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 3x + 4m}{x^2 + (5m + 1)x + 3} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 4m = x^2 + (5m + 1)x + 3$

$\Leftrightarrow m = \frac{2x - 3}{5x - 4}$. Or l'abscisse en ce point est $x = \frac{3}{2}$ => $m = \frac{2\left(\frac{3}{2}\right) - 3}{5\left(\frac{3}{2}\right) - 4} = \frac{0}{\frac{7}{2}} = 0$

D'où $m = 0$

3) Etudions la fonction f_0 puis représentons sa courbe (C_0)

$f_0(x) = \frac{x^2 + 3x}{x^2 + x + 3}$ et $f_1(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{x^2 + 6x + 3}$

Etude de la fonction f_0 puis représentation de sa courbe (C_0)

$Df_0 = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

$lim\ f_0(x) = 1$ et $lim\ f_0(x) = 1$

$x \to -\infty$ $x \to +\infty$

$f_0(x) = \frac{x^2 + 3x}{x^2 + x + 3}$ => $f'_0(x) = \frac{-2x^2 + 6x - 9}{(x^2 + x + 3)^2}$

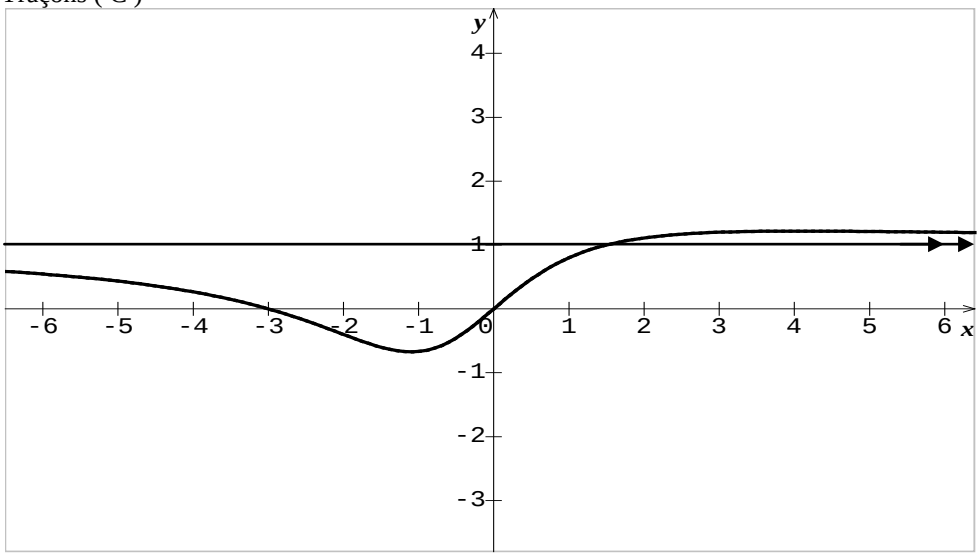
Or $\forall\ x \in Df_0, (x^2 + x + 3)^2 > 0$ alors le signe de $f_0'(x)$ dépend donc du signe du Numérateur $-2x^2 + 6x - 9$. Posons $-2x^2 + 6x - 9 = 0 => \Delta = 108$

=> $x_1 = \frac{3 + 3\sqrt{3}}{2} \approx 4$ et $x_2 = \frac{3 - 3\sqrt{3}}{2} \approx -1$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f_0'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_0(x)$	1	↘	$-\frac{2}{3}$	↗	$\frac{28}{3}$	↘	1

Traçons (C)



35 Soit f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = \frac{x^2 - mx}{x^2 - 1}$.

Où x est la variable et m est un paramètre réel différent de 1 ($m \neq 1$).
Soit (C_m) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
1) Donnons le tableau de variation de la fonction f_m suivant les valeurs de m.
(On distinguera les cas où $m = -2$; $m = 2$).

1er cas : $m = -2$. Alors $f_{-2}(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$.

$Df_{-2} = \mathbb{R} - \{-1 ; 1\} =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f_{-2}(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_{-2}(x) = 1$.

$\lim\limits_{x \to -1^-} f_{-2}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f_{-2}(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f_{-2}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f_{-2}(x) = +\infty$.

$f_{-2}(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} \Rightarrow f'_{-2}(x) = -\frac{2(x^2 + x + 1)}{(x^2 - 1)^2} < 0$ car $\frac{2(x^2 + x + 1)}{(x^2 - 1)^2} > 0$

D'où le tableau de variation de f_{-2} est le suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'_{-2}(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f_{-2}(x)$	1	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	1

2ième cas : $m = 2$. Alors $f_2(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 1}$.
$Df_2 = \mathbb{R} - \{-1 ; 1\} =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f_2(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = 1$.

$\lim\limits_{x \to -1^-} f_2(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f_2(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f_2(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f_2(x) = -\infty$.

$f_2(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 1} \Rightarrow f'_2(x) = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x^2 - 1)^2} > 0$

D'où le tableau de variation de f_2 est le suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'_2(x)$	$+$		$+$		$+$		
$f_2(x)$	1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	1

2) Comparons $f_m(x)$ et $f_{-m}(-x)$ puis donnons la position relative des courbes (C_m) et (C_{-m}).

$f_m(x) = \frac{x^2 - mx}{x^2 - 1}$ => $f_{-m}(-x) = \frac{(-x)^2 - (-m)(-x)}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^2 - mx}{x^2 - 1} = f_m(x)$

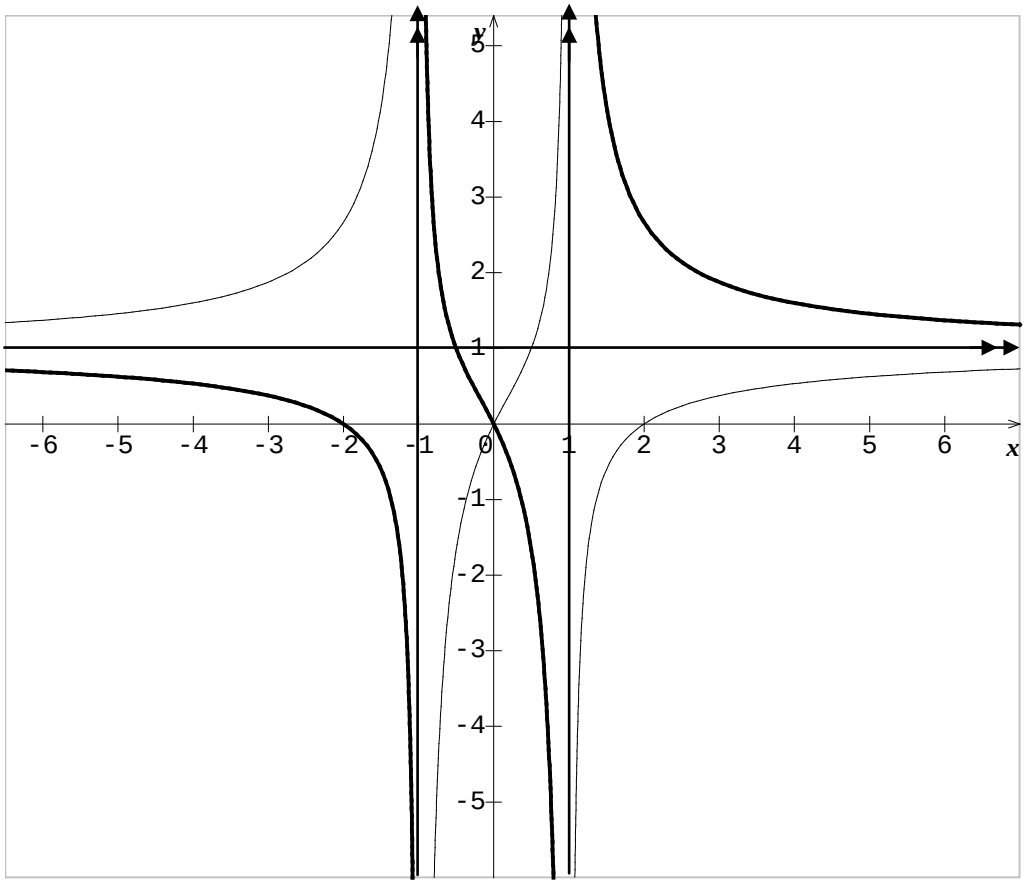
D'où $f_{-m}(-x) = f_m(x)$

4) Montrons que toutes les courbes (C_m) passent par un même point fixe dont on Déterminera les coordonnées.

Toutes les courbes (C_m) passent par un même point fixe si et seulement si $f_0(x) = f_1(x)$

$f_0(x) = f_1(x) \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \Leftrightarrow x^2 = x^2 - x \Leftrightarrow -x = 0$ => $x = 0$ et $y = f_1(0)$ => $y = \frac{0}{-1} = 0$. Alors toutes les courbes (C_m) passent par le point $A(0\,;0)$, origine du repère.

5) Représentons les courbes (C_{-2}) et (C_2).



NB : la courbe (C_{-2}) est représentée en gras celle de la courbe (C_2) est représentée en fin.

Fonctions auxiliaires.

36 **Partie A :** On considère le polynôme P définie : $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1) Dressons le tableau de variation de P.

D$P = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

$lim\ P(x) = -\infty$ et $lim\ P(x) = +\infty$.
$x \to -\infty$ $x \to +\infty$

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ => $P'(x) = 6x^2 - 6x$. Posons $P'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow$

$6x(x-1) = 0$ => $x = 0$ ou $x = 1$

D'où le tableau de variation de P est le suivant :

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			
$P(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	0	↗	$+\infty$

2) Démontrons que l'équation $P(x) = 0$ a une solution unique α dans l'intervalle$]1{,}6\ ;\ 1{,}7\ [$.

- D'après le tableau de variation de P, $\forall\ x\ \in\ ]\ 1\ ;\ +\infty[$, P est définie, continue et strictement croissante de $]\ 1\ ;\ +\infty[$ vers $]-2\ ;\ +\infty[$. Alors l'équation $P(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $P(\alpha) = 0$
- De plus $P(1{,}6) = -0{,}48$ et $P(1{,}7) = 0{,}15$ => $P(1{,}6) \times P(1{,}7) < 0$. Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\alpha \in]1{,}6\ ;\ 1{,}7\ [$.
  Conclusion : l'équation $P(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle$]1{,}6\ ;\ 1{,}7\ [$.

3) Donnons le signe de $P(x)$ dans l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty\ [$.

D'après le tableau de variation de P, $\forall\ x\ \in\ ]-1\ ;\ \alpha[$, $P(x) < 0$.

$$\forall\ x\ \in\ ]\alpha\ ;\ +\infty[\ , P(x) > 0.$$

Partie B : On considère la fonction $f\ :]-1\ ;\ +\infty\ [\to \mathbb{R}$ et $x\ \to\ \frac{1-x}{1+x^3}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) a) Justifions la dérivabilité de f sur $]-1\ ;\ +\infty\ [$.

- $1 - x$ est définie et dérivable sur $]-1\ ;\ +\infty\ [$.
- $1 + x^3$ est définie et dérivable sur $]-1\ ;\ +\infty\ [$.

Alors $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$ est dérivable sur $]-1\ ;\ +\infty\ [$.

b) Calculons $f'(x)$ puis établir que $f'(x) = \frac{P(x)}{(\ 1+x^3\ )^2}$

$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$. Posons $u = 1 - x$ => $u' = -1$ et $v = 1 + x^3$ => $v' = 3x^2$

=> $f'(x) = \frac{(-1)(1+x^3) - (3x^2)(1-x)}{(1+x^3)^2} = \frac{-1-x^3-3x^2+3x^3}{(1+x^3)^2} = \frac{2x^3-3x^2-1}{(1+x^3)^2} = \frac{P(x)}{(1+x^3)^2}$

2) Donnons le tableau de variation de f.
$\forall x \in]-1 ; +\infty[$, $(1+x^3)^2 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $P(x)$.
Or d'après la partie A) 3), on a :
$\forall x \in]-1 ; \alpha[$, $P(x) < 0$, alors $\forall x \in]-1 ; \alpha[$, $f'(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha ; +\infty[$, $P(x) > 0$, alors $\forall x \in]\alpha ; +\infty[$, $f'(x) > 0$

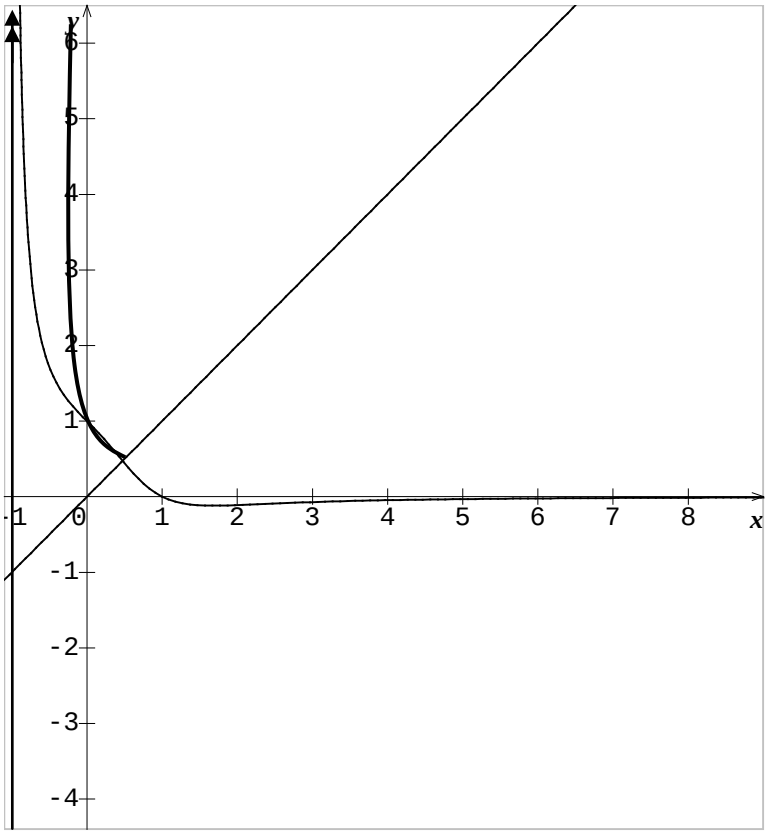
D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	-1		α		2	$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$-\frac{1}{9}$	0

3) Déterminons les équations des asymptotes à la courbe Cf de f.
$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ Alors la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ Alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale.

4) Plaçons α puis traçons Cf.



5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[\ 2\ ;\ +\infty\ [$.
Montrons que g réalise une bijection de $[\ 2\ ;\ +\infty\ [$ sur un intervalle J que l'on précisera.
D'après le tableau de variation de f, $\forall x \in [\ 2\ ;\ +\infty\ [$, f est définie, continue et strictement croissante de $[\ 2\ ;\ +\infty\ [$ vers $\left[-\frac{1}{9}\ ;\ +\infty\right[$. D'où la restriction de g à l'intervalle $[\ 2\ ;\ +\infty\ [$ réalise une bijection de $[\ 2\ ;\ +\infty\ [$ vers J = $\left[-\frac{1}{9}\ ;\ +\infty\right[$.
6) Traçons Cg^{-1} où g^{-1} est la bijection réciproque de la fonction g restriction de f à l'intervalle $[\ 2\ ;\ +\infty\ [$.
NB : la courbe représentative d'une fonction et celle de sa bijection réciproque sont symétrique par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.
Pour le tracé de Cg^{-1}, (Voir figure en gras ci-dessus)

37

Partie A : On donne la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 3x - 4$
1) Etudions les variations de g et Dresse son tableau de variation.
$Dg = \mathbb{R} = \ ]-\infty\ ;\ +\infty[$
$lim\ g(x) = -\infty$ et $lim\ g(x) = +\infty$.
$x \to -\infty$ $\quad$ $x \to +\infty$

$g(x) = x^3 - 3x - 4 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 3$. Posons $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 = 1$ => $x = -1$ ou $x = 1$

D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	$-\infty$		-1		1	α	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	-6	↗ 0	$+\infty$

2) Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $2{,}19 < \alpha < 2{,}20$.

- D'après le tableau de variation de g, $\forall\, x \in\,]\,1\,;\,+\infty[$, g est définie, continue et strictement croissante de $]\,1\,;\,+\infty[$ vers $]-6\,;\,+\infty[$. Alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha) = 0$
- De plus $g(2{,}19\,) = -0{,}06$ et $g(2{,}20) = 0{,}04$ => $g(2{,}19\,) \times g(2{,}20) < 0$. Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\alpha \in\,]2{,}19\;\;;\;2{,}20\,[$.

Conclusion : l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]2{,}19\;\;;\;2{,}20\,[$.

3) En déduisons le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

D'après le tableau de variation de g, $\forall\, x\, \in\,]-\infty\;;\;\alpha[$, $g(x) < 0$.

$$\forall\, x\, \in\,]\alpha\;;\;+\infty[\,,\, g(x) > 0.$$

Partie B : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\;;\;1\}$ par $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$
Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Calculons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition Df.

Df= $\mathbb{R} - \{-1\;;\;1\} =]-\infty\,;\,-1[\cup\,]-1\,;1[\cup\,]1\,;\,+\infty[$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

2) Montrons que $\forall\, x\, \in \mathbb{R} - \{-1\;;\;1\}$, on a : $f'(x) = \frac{x \times g(x)}{(x^2 - 1\,)^2}$

$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ => $f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2 - 4x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x(x^3 - 3x - 4)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x \times g(x)}{(x^2 - 1)^2}$

3) Etudions le signe de $f'(x)$ et en déduisons les variations de f puis son tableau de variation de la fonction f.

$\forall\, x \in]-\infty\ ;\ +\infty\ [\ ,\ (x^2-1)^2 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $x \times g(x)$.
Or d'après la partie A) 3), on a :
$\forall\, x\ \in\ ]-\infty\ ;\ \alpha[\ ,\ g(x) < 0$ et $\forall\, x\ \in\ ]\alpha\ ;\ +\infty[\ ,\ g(x) > 0$.
D'autre part, $\forall x \in]-\infty\ ; 0[,\ x < 0$ et $\forall x \in]0\ ; +\infty[,\ x > 0$
D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$+$		
$g(x)$	$-$		$-$		$-$		$-$		$+$		
$f'(x)$	$+$		$+$	$\|\|$	$-$		$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$	

4) Montrons que la droite (D) d'équation $y\ =\ x\ +\ 2$ est une asymptote oblique à la courbe Cf .
La droite (D) d'équation $y\ =\ x\ +\ 2$ est asymptote oblique à la courbe Cf si et seulement si

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - y] = 0$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} - (x + 2) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} - x - 2$$

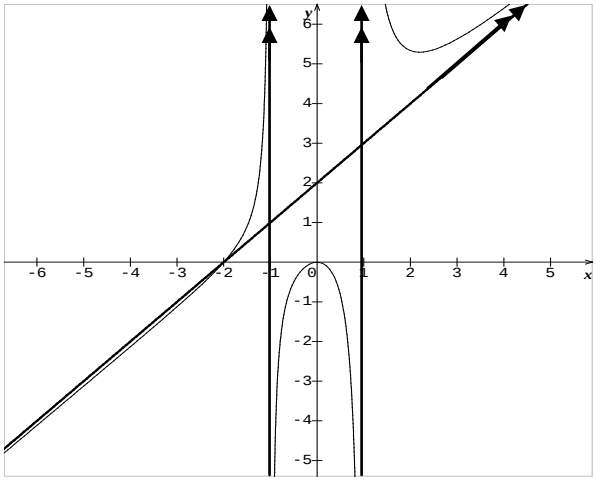
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

D'où la droite (D) d'équation $y\ = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe Cf

Etudions la position de Cf et (D).
Pour ce la étudions le signe de $f(x) - y$. Posons $f(x) - y = 0 \Leftrightarrow \frac{x + 2}{x^2 - 1} = 0$
Posons $x\ + 2 = 0$ => $x = -2$ et $x^2 - 1 = 0$ => $x = -1$ ou $x = 1$
$x = -1$. D'où le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$f(x) - y$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

D'après le tableau de signe de $f(x) - y$, on a :
$\forall x \in]-\infty\ ;\ -2[\ \cup\ ]-1\ ;\ 1[,\ f(x) - y < 0$. Alors $\forall x \in]-\infty\ ;\ -2[\ \cup\ ]-1\ ;\ 1[$, , (C) est en dessous de (D).
$\forall x \in]-2\ ;\ -1[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[,\ f(x) - y > 0$. Alors $\forall x \in]-2\ ;\ -1[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[$, , (C) est au dessus de (D).
5) Traçons Cf.



38 1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x - \sqrt{x^2+1}$

a- Etudions les variations de la fonction g.

$Dg = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x - \sqrt{x^2+1} = \lim_{x \to -\infty} 2x - \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to -\infty} 2x - |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 2x - (-x)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} 2x + x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} x\left(2+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= (-\infty)(2+1) = (-\infty)(3) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x - \sqrt{x^2+1} = \lim_{x \to +\infty} 2x - \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 2x - |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} 2x - (x)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} 2x - x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = (+\infty)(2-1) = (+\infty)(1) = +\infty$$

$$g(x) = 2x - \sqrt{x^2+1} \Rightarrow g'(x) = 2 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = 2 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\forall x \in Dg, \sqrt{x^2+1} > 0,$ alors le signe de $g'(x)$ dépend du signe du numérateur.

Posons $2\sqrt{x^2+1} - x > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+1} > x \Leftrightarrow \left(2\sqrt{x^2+1}\right)^2 > x^2 \Leftrightarrow$

$4(x^2+1) > x^2 \Leftrightarrow 4x^2+4 > x^2 \Leftrightarrow 3x^2+4 > 0$ Vraie.

D'où $\forall x \in Dg,\ g'(x) > 0$

Ainsi $\forall x \in Dg$, g est strictement croissante et le tableau de variation suivant:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$		0 $+$	
$g(x)$	$-\infty$		$+\infty$

b- Montrons que $g(x) = 0$ admet une solution unique α que l'on Déterminera.

D'après le tableau de variation de g, $\forall x \in]-\infty\ ;\ +\infty[$, g est définie, continue et strictement croissante de $]-\infty\ ;\ +\infty[$ vers $]-\infty\ ;\ +\infty[$. Alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha) = 0$
En utilisant la méthode de dichotomie, on obtient $\alpha = 0{,}57$.

c- En déduisons le signe de g sur $\mathbb{R}$

D'après le tableau de variation de g, $\forall x \in]-\infty\ ;\ \alpha[$, $g(x) < 0$.

$$\forall x \in]\alpha\ ;\ +\infty[\ ,\ g(x) > 0.$$

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sqrt{x^2+1} - x$.
Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
On note (D) et (D') les droites d'équations respectives : $y = -3x$ et $y = x$.

a- Etudions les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2\sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x\to-\infty} 2|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x = \lim_{x\to-\infty} -2x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -x\left(2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1\right) = -(-\infty)(2+1) = (+\infty)(3) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x\to+\infty} 2|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x = \lim_{x\to+\infty} 2x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1\right) = (+\infty)(2-1) = (+\infty)(1) = +\infty$$

b- Montrons que $\forall\, x \in \mathbb{R}\,;\, f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

$f(x) = 2\sqrt{x^2+1} - x \Rightarrow f'(x) = 2\times\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{2x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

c- En déduisons le tableau de variation de f.

$\forall\, x \in Df, \sqrt{x^2+1} > 0$, alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$
Or d'après 1) c) $\forall\, x \in]-\infty\,;\,\alpha[\,, g(x) < 0 \Rightarrow \forall\, x \in]-\infty\,;\,\alpha[,\ f'(x) < 0$

$\forall\, x \in]\alpha\,;\,+\infty[\,, g(x) > 0 \Rightarrow \forall\, x \in]\alpha\,;\,+\infty[, f'(x) > 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

d- Déterminons la limite en $-\infty$ de $f(x) - (-3x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (-3x) = \lim_{x\to-\infty} 2\sqrt{x^2+1} - x + 3x = \lim_{x\to-\infty} 2\sqrt{x^2+1} + 2x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(2\sqrt{x^2+1}+2x\right)\left(2\sqrt{x^2+1}-2x\right)}{2\sqrt{x^2+1}-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(2\sqrt{x^2+1}\right)^2-(2x)^2}{2\sqrt{x^2+1}-2x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4(x^2+1)-4x^2}{2\sqrt{x^2+1}-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+4-4x^2}{2\sqrt{x^2+1}-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{2\sqrt{x^2+1}-2x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{2|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{-2x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{-2x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{-x(1+1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Conséquence graphique : la droite d'équation $y = -3x$ est asymptote oblique à la courbe (C) de f en $-\infty$ car : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (-3x) = 0$

e- Montrons que la droite (D') est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$

La droite (D') est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$ si et seulement si :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x) = \lim_{x \to +\infty} 2\sqrt{x^2 + 1} - x - x = \lim_{x \to +\infty} 2\sqrt{x^2 + 1} - 2x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(2\sqrt{x^2+1}-2x\right)\left(2\sqrt{x^2+1}+2x\right)}{2\sqrt{x^2+1}+2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(2\sqrt{x^2+1}\right)^2-(2x)^2}{2\sqrt{x^2+1}+2x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4(x^2+1)-4x^2}{2\sqrt{x^2+1}+2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2+4-4x^2}{2\sqrt{x^2+1}+2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{2\sqrt{x^2+1}+2x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{2|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{2x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{2x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x(1+1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Conséquence graphique : la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe (C) de f en $+\infty$ car : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x) = 0$

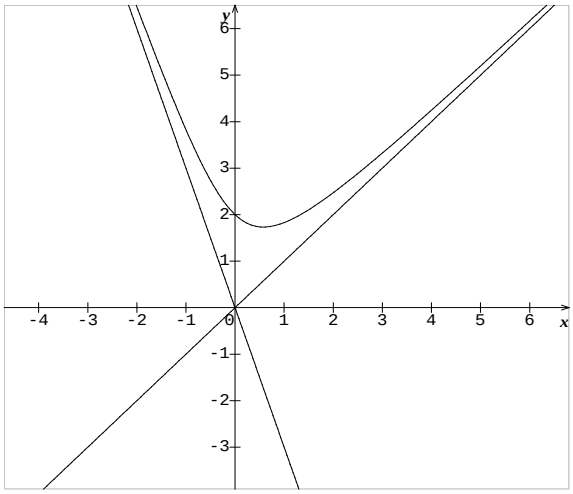
f- Etudions la position de (C) par rapport aux deux droites (D) et (D').
Pour cela, étudions le signe de $(-3x) - (x)$. Posons $(-3x) - (x) = 0 \Leftrightarrow -3x + x = 0$ $\Leftrightarrow -2x = 0$ => $x = 0$ et le tableau de signe de $(-3x) - (x)$ est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	

D'après le tableau de signe de $(-3x) - (x)$,
$\forall\, x \in\,]-\infty\,;\, 0[\,,\ (-3x) - (x) > 0$. Alors $\forall\, x \in\,]-\infty\,;\, 0[\,,$ (D) est au dessus de (D')

$\forall\, x \in\,]0\,;\, +\infty[\,,\ (-3x) - (x) < 0$. Alors $\forall\, x \in\,]0\,;\, +\infty[\,,$ (D) est en dessous de (D')

g- Traçons la courbe (C), les droites (D) et (D').



Fonction irrationnelle –fonction avec valeur absolue.

39 Soit la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Donnons l'ensemble de définition Df de f .

Df = $\left\{x/x \in \mathbb{R},\ \frac{1+x}{1-x} \geq 0\ et\ 1-x \neq 0\right\}$

(1) $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$. Résolvons l'inéquation $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$ en étudiant le signe de $\frac{1+x}{1-x}$.

Posons $1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$ et $1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$.

D'où le tableau de signe de $\frac{1+x}{1-x}$ est le suivant :

x		-1		1	
$1+x$		0	+		
$1-x$		+		0	
$\frac{1+x}{1-x}$		0	+	||	

Ainsi l'ensemble solution correspondant à l'inéquation $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$ est $[-1\ ;\ 1]$

D'autre part **(2)** $1 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

Alors la réunion de ces deux ensembles donne : Df = $[-1\ ;\ 1[$

2) Etudions les variations de f, puis traçons avec soins sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On donne : $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}6$ et $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -0{,}3$

$f(-1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$

$f(x) = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. $u = x$ => $u' = 1$ et $v = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ => $v' = \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

=> $f'(x) = (u')(v) + (v')(u) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{x}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} =$

=> $f'(x) = \frac{(1-x)(-x^2+x+1)}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$

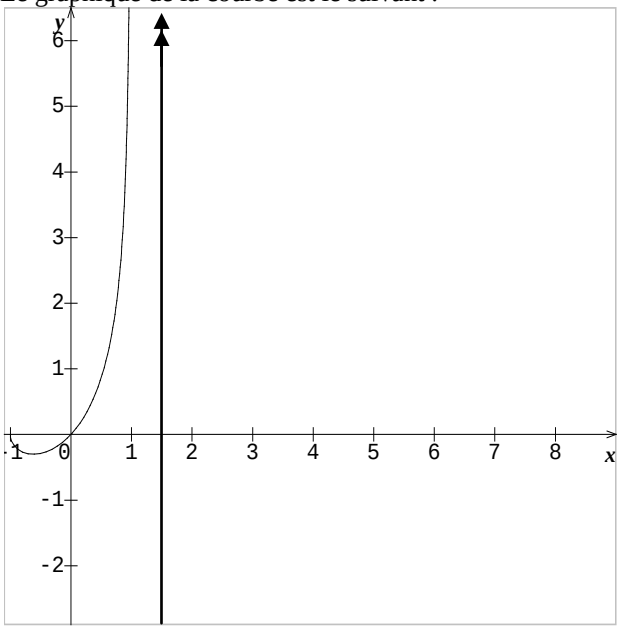
$\forall x \in Df$, $(1-x)^2\sqrt{1-x^2} > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $-x^2 + x + 1$

Car $1 - x \neq 0$. Posons $-x^2 + x + 1 = 0$ => $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}6$ et $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -0{,}3$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	-1		$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}6$		1
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f(x)$	‖ 0	↘	$-0{,}3$	↗	$+\infty$ ‖

Le graphique de la courbe est le suivant :



40 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 8}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) a) Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $x - \sqrt{x^2 + 8} < 0$

$x - \sqrt{x^2 + 8} < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{x^2 + 8} < -x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 8} > x \Leftrightarrow x^2 + 8 > x^2$

$\Leftrightarrow x^2 - x^2 - 8 < 0 \Leftrightarrow -8 < 0$ Vraie. Alors $x - \sqrt{x^2 + 8} < 0$

b) Etudions les limites de f aux bornes de Df puis en déduisons que la courbe (C) de f admet une asymptote horizontale dont on précisera une équation.

$Df = \mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x+\sqrt{x^2+8} = \lim_{x\to-\infty} -x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{8}{x^2}\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} -x+|x|\sqrt{\left(1+\frac{8}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} -x-x\sqrt{\left(1+\frac{8}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} -x\left(1+\sqrt{\left(1+\frac{8}{x^2}\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -x(1+1) = \lim_{x\to-\infty} -2x = -2(-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x+\sqrt{x^2+8} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(-x+\sqrt{x^2+8}\right)\left(-x-\sqrt{x^2+8}\right)}{\left(-x-\sqrt{x^2+8}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(-x)^2-\left(\sqrt{x^2+8}\right)^2}{-x-\sqrt{x^2+8}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-\left(x^2+8\right)}{-x-\sqrt{x^2+8}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x^2-8}{-x-\sqrt{x^2+8}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-8}{-x-\sqrt{x^2+8}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-8}{-x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{8}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-8}{-x-|x|\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-8}{-x-x\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-8}{-x\left(1+\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-8}{-2x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

c) Démontrons que la droite (D) d'équation $y = -2x$ est asymptote à (C) en $-\infty$

La droite (D) d'équation $y = -2x$ est asymptote à (C) en $-\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-y = \lim_{x\to-\infty} -x+\sqrt{x^2+8}-(-2x) = \lim_{x\to-\infty} -x+\sqrt{x^2+8}+2x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+8}+x = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+8}+x\right)\left(\sqrt{x^2+8}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+8}-x\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+8}\right)^2-x^2}{\left(\sqrt{x^2+8}-x\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+8-x^2}{\sqrt{x^2+8}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8}{\sqrt{x^2+8}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{8}{x^2}\right)}-x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{8}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{8}{x^2}\right)} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{8}{-x\sqrt{\left(1+\frac{8}{x^2}\right)} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{8}{-x\left(\sqrt{\left(1+\frac{8}{x^2}\right)} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{8}{-x(2)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{8}{-2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{-x} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

D'où la droite (D) d'équation $y = -2x$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

2) a) Calculons $f'(x)$ puis en déduisons de 1) a) le sens et le tableau de variation de f.

$f(x) = -x + \sqrt{x^2+8}$ => $f'(x) = -1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+8}} = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$

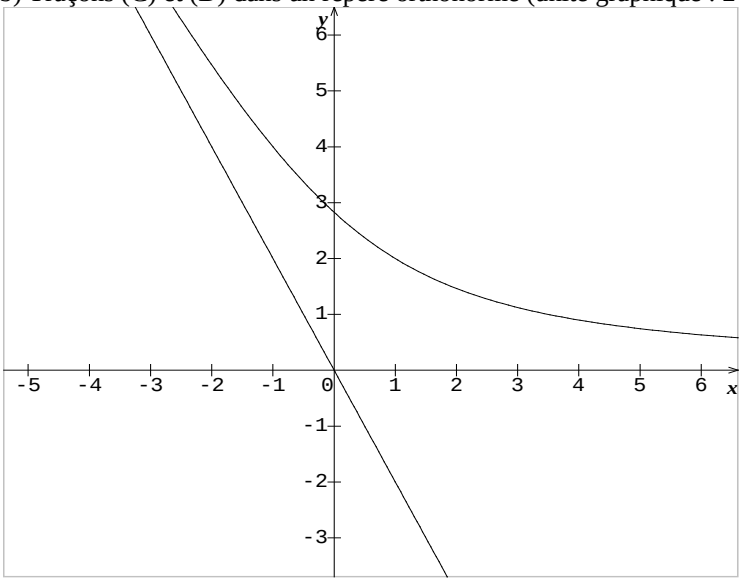
=> $f'(x) = \frac{-\sqrt{x^2+8} + x}{\sqrt{x^2+8}} = \frac{x - \sqrt{x^2+8}}{\sqrt{x^2+8}}$

$\forall x \in Df$, $\sqrt{x^2+8} > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe du numérateur

$x - \sqrt{x^2+8}$. Or d'après 1) a) $x - \sqrt{x^2+8} < 0$. D'où $\forall x \in Df$, $f'(x) < 0$.

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 0

b) Traçons (C) et (D) dans un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm)



41 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{|x^2 + x| + 1}{|x| + 1}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Déterminons le domaine de définition de f .

Df = $\{x / x \in \mathbb{R},\ |x| + 1 \neq 0\}$

$|x| + 1 \neq 0$ => $|x| \neq -1$ Vraie. Alors Df $= \mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$

Ecrivons $f(x)$ sans les symboles "valeur absolue".

Posons $x^2 + x = 0$ => $x = -1$ ou $x = 0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x^2 + x$	$+$	0	$-$	0	$+$		
$\|x^2 + x\|$	$x^2 + x$		$-x^2 - x$		$x^2 + x$		
x	$-$		$-$	0	$+$		
$\|x\|$	$-x$		x		x		

D'après le tableau ci-dessus, on a :

$\forall\, x \in\ ]-\infty\ ;\ -1]\ ,\ f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{-x + 1}$

$\forall\, x \in\ [-1\ ;\ 0]\ ,\ f(x) = \frac{-x^2 - x + 1}{-x + 1}$

$\forall\, x \in\ [0\ ;\ +\infty[\ ,\ f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

2) Etudions la dérivabilité de f en -1 et en 0, puis interprétons géométriquement les résultats.

- **Etude de la dérivabilité de f en -1**

f est dérivable en $x_0 = -1$ si sa dérivabilité à gauche est égale à sa dérivabilité à droite, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = l \in \mathbb{R}$

Dérivabilité à gauche :

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{\left(\frac{x^2 + x + 1}{-x + 1}\right) - \frac{1}{2}}{x + 1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{\left[\frac{2(x^2 + x + 1) - (-x + 1)}{2(-x + 1)}\right]}{x + 1} =$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{2x^2 + 3x + 1}{-2(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \to -1^-} \frac{2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x + 1)}{-2(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \to -1^-} \frac{2x + 1}{-2x + 2} = -\frac{1}{4}$$

Dérivabilité à droite :

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{\left(\frac{-x^2 - x + 1}{-x + 1}\right) - \frac{1}{2}}{x + 1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{\left[\frac{2(-x^2 - x + 1) - (-x + 1)}{2(-x + 1)}\right]}{x + 1} =$$

$\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{-2x^2 - x + 1}{-2(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{-2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1)}{-2(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{-2x+1}{-2x+2} = \frac{3}{4}$

Alors f n'est pas dérivable à gauche et à droite de $x_0 = -1$, mais elle admet deux demi-tangentes de coefficients directeurs respectives $f'(-1) = -\frac{1}{4}$ et $f'(-1) = \frac{3}{4}$

- **Etude de la dérivabilité de f en 0**

f est dérivable en $x_0 = 0$ si sa dérivabilité à gauche est égale à sa dérivabilité à droite, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = l \in \mathbb{R}$

Dérivabilité à gauche :

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\left(\frac{-x^2 - x + 1}{-x + 1}\right) - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\left[\frac{(-x^2 - x + 1) - (-x + 1)}{(-x + 1)}\right]}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-x^2}{x(-x+1)} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-x}{-x+1} = 0$

Dérivabilité à droite :

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\left(\frac{x^2 + x + 1}{x + 1}\right) - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\left[\frac{(x^2 + x + 1) - (x + 1)}{(x + 1)}\right]}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x(x+1)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{x+1} = 0$

Alors f est dérivable à gauche et à droite de $x_0 = 0$, et son nombre dérivée $f'(0) = 0$

3) Etudions les variations de f.

$\forall\, x \in\,]-\infty\, ;\, -1]\, ,\ f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{-x + 1}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{-x + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ et $f(-1) = \frac{1}{2}$

$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{-x + 1}$ => $f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{(-x + 1)^2}$

$\forall x \in Df, (-x + 1)^2 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $-x^2 + 2x + 2$.

Posons $-x^2 + 2x + 2 = 0$ => $x_1 = 1 - \sqrt{3} \in\,]-\infty\, ;\, -1]$ ou $x_1 = 1 + \sqrt{3} \in\,]-\infty\, ;\, -1]$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		-1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$

$\forall\, x \in\, [-1\, ;\, 0]\, ,\ f(x) = \frac{-x^2 - x + 1}{-x + 1}$

$f(-1) = \frac{1}{2}$ et $f(0) = 1$

$f(x) = \frac{-x^2 - x + 1}{-x + 1}$ => $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(-x + 1)^2}$

$\forall x \in Df, (-x + 1)^2 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $x^2 - 2x$.
Posons $x^2 - 2x = 0$ => $x_1 = 0 \in [-1 ; 0]$ ou $x_1 = 2 \in [-1 ; 0]$
D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		-1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↗	1

$\forall x \in [0 ; +\infty[$, $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

$lim\ f(x) = lim\ \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = lim\ \frac{x^2}{x} = lim\ x = +\infty$ et $f(0) = 1$
$x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$

$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ => $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$

$\forall x \in Df, (x + 1)^2 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $x^2 + 2x$.
Posons $x^2 + 2x = 0$ => $x_1 = 0 \in [0 ; +\infty[$ ou $x_1 = -2 \in [0 ; +\infty[$
D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		-1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$

Ainsi la réunion de ces tableaux de variations donne celui de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖		
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1	↗	$+\infty$

4) Montrons que les droites d'équations $y = -x - 2$ et $y = x$ sont asymptotes à la courbe (C) de f respectivement en $-\infty$ et $+\infty$.

La droite d'équation $y = -x - 2$ est asymptote à la courbe (C) de f en $-\infty$ si et seulement si : $lim\ f(x) - y = 0$
$x \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - y = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{-x + 1} - (-x - 2) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{-x + 1} + x + 2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{-x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{-x} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

Puis que $\lim_{x \to -\infty} f(x) - y = 0$

Alors La droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe (C) de f en $-\infty$

La droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) de f en $+\infty$ si et seulement si :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = 0$$

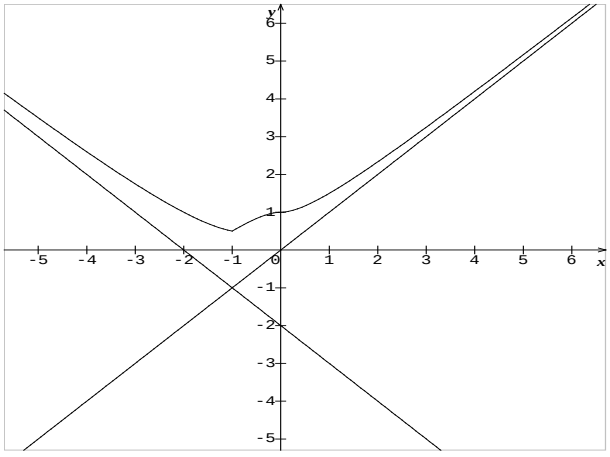
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} - (x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Puis que $\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = 0$

Alors La droite d'équation $y = x$est asymptote à la courbe (C) de f en $+\infty$

5) Traçons (C)



42 Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}$
Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
1) Déterminons l'ensemble de définition de f.

D$f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

2) Ecrivons $f(x)$ sans valeur absolue.

Posons $x^2 - 2x - 3$ => $x = -1$ ou $x = 3$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\|x^2 - 2x - 3\|$	$x^2 - 2x - 3$		$-x^2 + 2x + 3$		$x^2 - 2x - 3$		

D'après le tableau ci-dessus, on a :

$\forall\, x \in]-\infty ; -1] \cup [3 ; +\infty[\,,\ f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

$\forall\, x \in [-1 ; 3]\,,\ f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$
3) Etudions la dérivabilité de f en $x_0 = -1$ et en $x_0 = 3$ puis interprétons graphiquement les résultats.

- **Etude de la dérivabilité de f en -1**

f est dérivable en $x_0 = -1$ si sa dérivabilité à gauche est égale à sa dérivabilité à droite,
c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = l \in \mathbb{R}$

Dérivabilité à gauche :

$\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 0}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{(x + 1)\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$

$= \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{(x + 1)(x - 3)}{(x + 1)\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \frac{-4}{0} = \infty$

Alors f n'est pas dérivable en $x_0 = -1$ à gauche

Dérivabilité à droite :

$\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{\sqrt{-x^2 + 2x + 3} - 0}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x + 1)\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}$

$= \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{-(x + 1)(x - 3)}{(x + 1)\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{-x + 3}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} = \frac{4}{0} = \infty$

Alors f n'est pas dérivable en $x_0 = -1$ à droite
Conclusion : f n'est pas dérivable à gauche et à droite de -1.

- **Etude de la dérivabilité de f en 3**

f est dérivable en $x_0 = 3$ si sa dérivabilité à gauche est égale à sa dérivabilité à droite,

c'est-à-dire : $\lim\limits_{\substack{x \to 3^- \\ x<3}} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x \to 3^+ \\ x>3}} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = l \in \mathbb{R}$

Dérivabilité à gauche :

$\lim\limits_{\substack{x \to 3^- \\ x<3}} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x \to 3^- \\ x<3}} \frac{\sqrt{-x^2+2x+3}\ -0}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x \to 3^- \\ x<3}} \frac{\sqrt{-x^2+2x+3}}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x \to 3^- \\ x<3}} \frac{-(x+1)(x-3)}{(x-3)\sqrt{-x^2+2x+3}}$

$= \lim\limits_{\substack{x \to 3^- \\ x<3}} \frac{-x-1}{\sqrt{-x^2+2x+3}} = \frac{-4}{0} = \infty$

Alors f n'est pas dérivable en $x_0 = 3$ à gauche

Dérivabilité à droite :

$\lim\limits_{\substack{x \to 3^- \\ x<3}} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x \to 3^- \\ x<3}} \frac{\sqrt{x^2-2x-3}\ -0}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x \to 3^- \\ x<3}} \frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x \to 3^- \\ x<3}} \frac{(x+1)(x-3)}{(x-3)\sqrt{x^2-2x-3}}$

$= \lim\limits_{\substack{x \to 3^- \\ x<3}} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-2x-3}} = \frac{4}{0} = \infty$

Alors f n'est pas dérivable en $x_0 = 3$ à droite

Conclusion : f n'est pas dérivable à gauche et à droite de 3.

4) Montrons que la courbe (C) de f admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $-\infty$ et une asymptote oblique (D) au voisinage de $+\infty$.

NB : Toutes fonctions de la forme : $f(x) = \sqrt{|ax^2 + bx + c|}$ (avec $a \neq 0$ et $a > 0$), admet deux asymptotes :

- L'une en $-\infty$ d'équation : $y = -\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{a}\right)$
- L'une en $+\infty$ d'équation : $y = \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{a}\right)$

Alors $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}$ admet deux asymptotes :

- L'une en $-\infty$ d'équation (Δ) : $y = -\sqrt{1}\left(x + \frac{-2}{1}\right) = -(x-2) = -x+2$
- L'une en $+\infty$ d'équation (D) : $y = \sqrt{1}\left(x + \frac{-2}{1}\right) = (x-2) = x-2$

6) Dressons son tableau de variation.

$\forall\, x \in\ ]-\infty\ ;\ -1]\ \cup [3\ ;\ +\infty[\,,\ f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 2x - 3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} |x| = \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 2x - 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} |x| = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$f(-1) = 0$ et $f(3) = 0$

$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ => $f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x-3}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$

$\forall x \in Df, \sqrt{x^2 - 2x - 3} > 0.$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe du numérateur $x - 1$. Posons $x - 1 = 0$ => $x = 1$

D'où le tableau de variation de f sur $]-\infty ; -1] \cup [3 ; +\infty[$ est le suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0		0	↗	$+\infty$

$\forall x \in [-1 ; 3]$, $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$

$f(-1) = 0$ et $f(3) = 0$

$f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$ => $f'(x) = \frac{-2x + 2}{2\sqrt{-x^2+2x+3}} = \frac{-x + 1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$

$\forall x \in Df, \sqrt{-x^2 + 2x + 3} > 0.$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe du numérateur $-x + 1$. Posons $-x + 1 = 0$ => $x = 1$

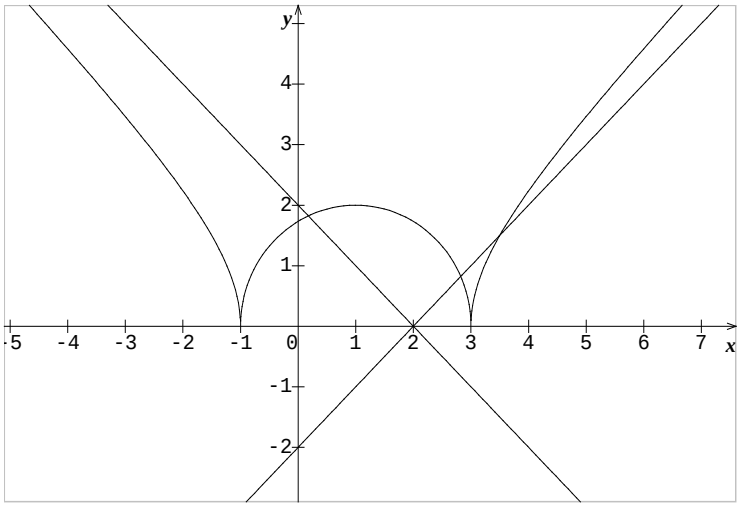
D'où le tableau de variation de f sur $[-1 ; 3]$ est le suivant :

x		-1		1		3	
$f'(x)$		0	$+$	0	$-$	0	
$f(x)$		0	↗	2	↘	0	

La réunion de ces deux tableaux donne le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

6) Traçons dans un repère orthonormé la courbe (C) de f.



43 Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|\sqrt{\frac{x}{x-1}}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Déterminons l'ensemble de définition Df de f

$$Df = \left\{x \,/ x \in \mathbb{R};\ \frac{x}{x-1} > 0 \ et\ x-1 \neq 0\right\}$$

(1) $\frac{x}{x-1} \geq 0$. Résolvons l'inéquation $\frac{x}{x-1} \geq 0$ en étudiant le signe de $\frac{x}{x-1}$.

Posons $x = 0$ et $x - 1 = 0$ => $x = 1$.

D'où le tableau de signe de $\frac{x}{x-1}$ est le suivant :

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x	$-$	0			$+$
$x-1$	$-$			0	$+$
$\frac{x}{x-1}$	$+$	0		$\|$	$+$

Ainsi l'ensemble solution correspondant à l'inéquation $\frac{x}{x-1} \geq 0$ est $]-\infty\,;0] \cup [1\,;+\infty[$

D'autre part **(2) :** $x - 1 \neq 0$ => $x \neq 1$

Alors la réunion de ces deux ensembles donne : Df = $]-\infty\,;0] \cup]1\,;+\infty[$

2) a) Etudions la dérivabilité de f au point $x_0 = 0$, en déduisons l'ensemble de dérivabilité de f.

f est dérivable en $x_0 = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{x}{x-1} - 0}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{x-1}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(x-1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x-1} = -1$$

D'où f est dérivable en $x_0 = 0$ et son nombre dérivé est : $f'(0) = -1$ et l'ensemble de dérivabilité de f est Df' = $]-\infty ; 0[\cup]1 ; +\infty[$

b) Calculons $f'(x)$ pour x élément des intervalles de dérivabilité.

$f(x) = |x|\sqrt{\frac{x}{x-1}}$

- Pour $x \in]-\infty ; 0]$; $f'(x) = \frac{x(x-1)(-2x+3)}{2(x-1)^2\sqrt{x^2-x}}$.

- Pour $x \in [1 ; +\infty[$; $f'(x) = \frac{x(x-1)(2x-3)}{2(x-1)^2\sqrt{x^2-x}}$.

c) Calculons les limites de $f(x)$ aux bornes de Df et précisons les équations des asymptotes à la courbe (C) de f.

- Pour $x \in]-\infty ; 0]$; $f(x) = -x\sqrt{\frac{x}{x-1}}$
- Pour $x \in [0 ; +\infty[$; $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x-1}}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -x\sqrt{\frac{x}{x-1}} = \lim_{x \to -\infty} -x\sqrt{\frac{x}{x}} = \lim_{x \to -\infty} -x\sqrt{1} = \lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\sqrt{\frac{x}{x-1}} = \lim_{x \to +\infty} x\sqrt{\frac{x}{x}} = \lim_{x \to +\infty} x\sqrt{1} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x\sqrt{\frac{x}{x-1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

d) Dressons le tableau de variation de f.

- Pour $x \in]-\infty ; 0]$; $f'(x) = \frac{x(x-1)(-2x+3)}{2(x-1)^2\sqrt{x^2-x}}$.

$\forall x \in$ Df, $2(x-1)^2\sqrt{x^2-x} > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe du numérateur :

$x(x-1)(-2x+3)$. Posons $x(x-1)(-2x+3) = 0$ => $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = \frac{3}{2}$

D'où le tableau de variation de f sur $]-\infty ; 0]$ est le suivant :

x	$-\infty$ $\quad$ 0
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow 0$

- Pour $x \in [0\ ;\ +\infty[$; $f'(x) = \frac{x(x-1)(2x-3)}{2(x-1)^2\sqrt{x^2-x}}$.

$\forall\, x \in Df$, $2(x-1)^2\sqrt{x^2-x} > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe du numérateur :

$x(x-1)(2x-3)$. Posons $x(x-1)(2x-3) = 0$ => $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = \frac{3}{2}$

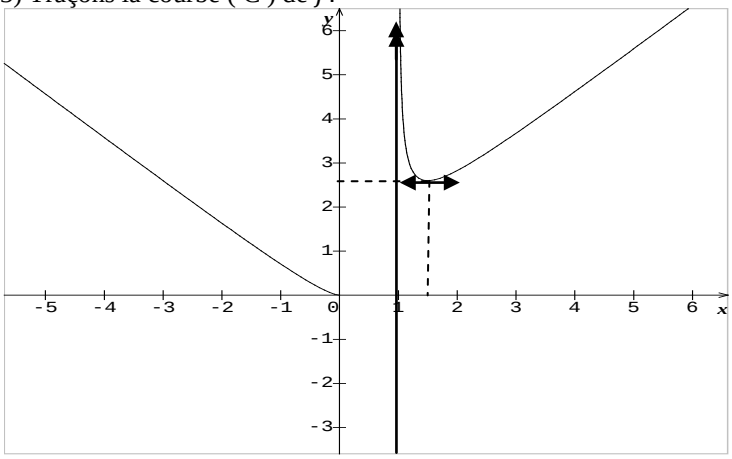
D'où le tableau de variation de f sur $[1\ ;\ +\infty[$ est le suivant :

x	1 $\quad$ $\frac{3}{2}$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ $\quad$ $+$
$f(x)$	$+\infty \searrow \frac{3}{2}\sqrt{3} \nearrow +\infty$

La réunion de ces deux tableaux donne le tableau suivant :

x	1 $\quad$ 0 $\quad$ 1 $\quad$ $\frac{3}{2}$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ $\quad$ $-$ $\quad$ $+$
$f(x)$	$+\infty \searrow 0$ $\quad$ $+\infty \searrow \frac{3}{2}\sqrt{3} \nearrow +\infty$

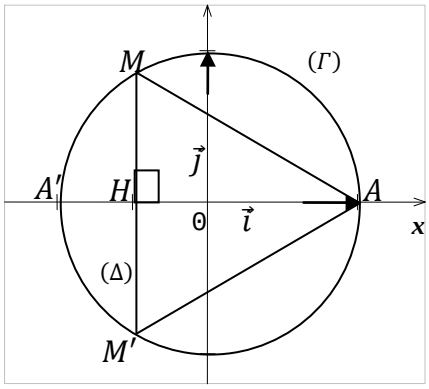
3) Traçons la courbe (C) de f.



44 On considère, dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$), le cercle (Γ) de centre O et de rayon 1.

Soit A le point de coordonnées (1 ; 0) et A' le point de coordonnées (-1 ; 0) .

1) Pour tout point H du segment$[AA']$, distinct de A et A', on mène la perpendiculaire (Δ) à la droite (AA'). La droite (Δ) coupe le cercle (Γ) en M et M'. On pose $\overline{OH} = x$.



Calculons en fonction de x l'aire du triangle AMM'.

$\overline{OH} = x$. Comme H appartient au segment $[AA']$, et est distincte de A et A', x est élément de l'intervalle $]-1\,;1[$ alors $AH = 1 - x$.

Le triangle OHM étant rectangle en H, on a : $OM^2 = 1 = OH^2 + MH^2$.

D'où $MH^2 = 1 - OH^2 = 1 - x^2$ => $MH = \sqrt{1 - x^2}$.

Soit $\mathscr{A}$ l'aire du triangle AMM' tel que : $\mathscr{A} = \frac{base \times hauteur}{2} = \frac{MM' \times AH}{2}$. Or $MM' = 2MH$

=> $\mathscr{A} = \frac{2MH \times AH}{2} = MH \times AH$. Or $MH = \sqrt{1 - x^2}$ et $AH = 1 - x$.

D'où $\mathscr{A} = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$

2) Soit f la fonction définie sur $]-1\ ;\ 1[$ par $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$.
a- Etudions les variations de f.
$f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$ => $f'(x) = (-1)\sqrt{1-x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x)$ =>
$f'(x) = -\sqrt{1-x^2} - \frac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-(1-x^2)-x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-(1-x)(1+x)-x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}$ =>
$f'(x) = \frac{(1-x)[-(1+x)-x]}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(x-1)(2x+1)}{\sqrt{1-x^2}}$
$\forall x \in]-1\ ;1[, \sqrt{1-x} > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe du numérateur :

$(x-1)(2x+1)$. Posons $(x-1)(2x+1) = 0$ => $x = 1$ ou $x = -\frac{1}{2}$

D'où le tableau de variation de f sur $]-1\ ;1[$ est le suivant :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	‖	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	‖

b- Montrons que le triangle AMM' d'aire maximale est équilatéral.
Le triangle d'aire maximale est obtenu pour $= -\frac{1}{2}$.
Maintenant vérifions si le triangle AMM' est équilatéral pour cette valeur de x obtenue.
$MM' = 2MH = 2\sqrt{1-x^2} = 2\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 2\sqrt{1-\frac{1}{4}} = 2\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$
$AM^2 = MH^2 + AH^2 = \left(\frac{MM'}{2}\right)^2 + (1-x)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (1-x)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{2}\right)^2$ =>
$AM^2 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = 3$ => $AM = \sqrt{3}$. Or $AM = AM' = \sqrt{3}$.
Conclusion : $MM' = AM = AM' = \sqrt{3}$. Alors le triangle AMM' d'aire maximale est équilatéral.

Problèmes

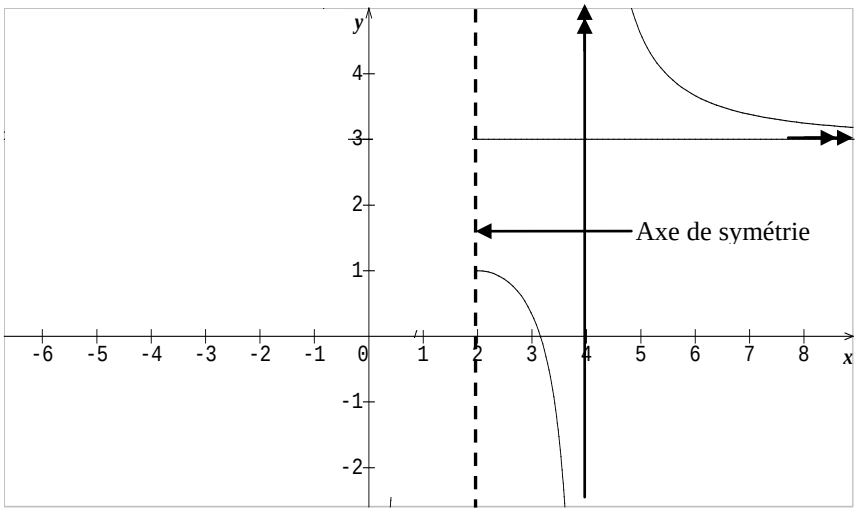
45 La fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est donnée par une partie de son tableau de variation.
On sait de plus que la droite d'équation $x = 2$ est axe de symétrie pour la courbe C de f.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖		0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	‖		1	↘	‖ $-\infty$	↘	3

1) Traçons la courbe C de f.
- La droite d'équation $x = 2$ est axe de symétrie.
- La droite d'équation $x = 4$ est asymptote verticale.
- La droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale.

- Le point $(2\,;1)$ est extremum locale de la courbe (C) de f.

De ces renseignements nous obtenons une partie de la courbe qui est le suivant :



2) Complétons le tableau de variation de f .

Par symétrie par rapport à la droite d'équation $x = 2$, on a :

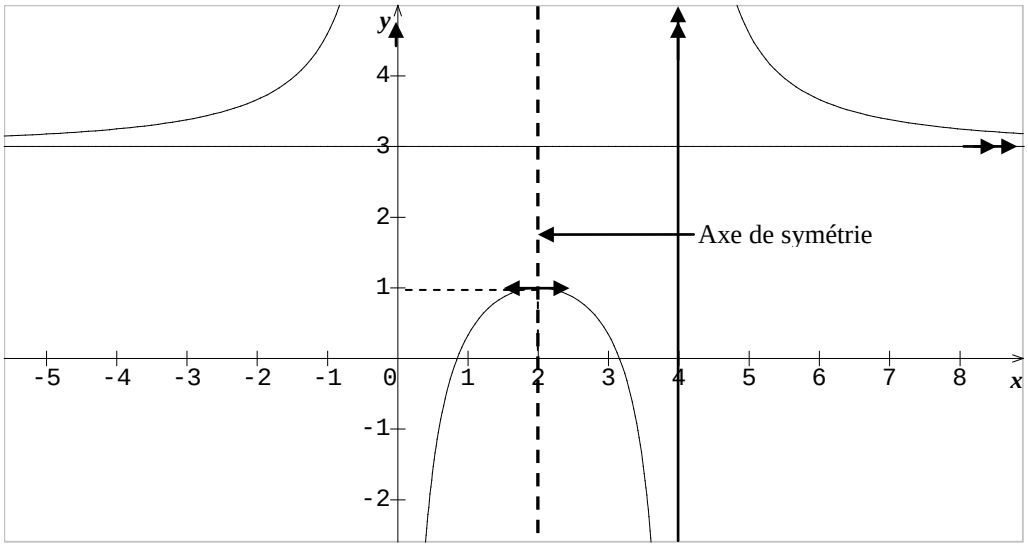
- La droite d'équation $x = 0$ est aussi asymptote verticale.
- La droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale.

D'où le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}-\{0\,;4\}$ est le suivant :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$		0	$-$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	3	↗	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	↗	1	↘	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	↘	3

1) Traçons la courbe (C) de f.

En utilisant le tableau de variation ci-dessus, la courbe représentative de f est donc le suivant :



3) On suppose que $f(x)$ est de la forme $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + \beta x + \alpha}$

a- Déterminons les réels a ; b ; c ; β et α

- $Df = \mathbb{R} - \{0\,;4\} => x^2 + \beta x + \alpha = (x-0)(x-4) \Leftrightarrow x^2 + \beta x + \alpha = x^2 - 4x$

Par identification, on obtient : $\beta = -4$ et $\alpha = 0$

=> $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4x}$ et $f'(x) = \frac{-x^2(4a+b) - 2cx + 4c}{(x^2 - 4x)^2}$

- La droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale => $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 3 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4x} = 3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{ax^2}{x^2} = 3 => a = 3$

=> $f(x) = \frac{3x^2 + bx + c}{x^2 - 4x}$ et $f'(x) = \frac{-x^2(12+b) - 2cx + 4c}{(x^2 - 4x)^2}$

D'après le tableau de variation, le point $(2\,;1)$ est extremum alors $f'(2) = 0$ et $f(2) = 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(2) = 0 \\ f(2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 + b = 0 \\ 2b + c = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -12 \\ -24 + c = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -12 \\ c = 8 \end{cases}$

D'où $a = 3$; $b = -12$; $c = 8$; $\beta = -4$ et $\alpha = 0$ et $f(x) = \frac{3x^2 - 12x + 8}{x^2 - 4x}$

b- Montrons que la restriction g de f à I =] 2 ; 4] réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

D'après le tableau de variation ;$\forall x \in$] 2 ; 4], f est définie, continue et strictement décroissante] 2 ; 4] vers J = $]-\infty$; 1].

D'où la restriction g de f réalise une bijection de] 2 ; 4] sur l'intervalle J= $]-\infty$; 1].

c- Donnons l'équation de la tangente à la courbe C′ de g^{-1} au point d'abscisse 1.

$y = [g^{-1}(x_0)]'(x - x_0) + g^{-1}(x_0)$. Or $x_0 = 1$ => $= [g^{-1}(1)]'(x - 1) + g^{-1}(1)$.

$[g^{-1}(1)]' = \frac{1}{g' o g^{-1}(1)} = \frac{1}{g'[g^{-1}(1)]}$ avec $g^{-1}(x) = \frac{-6 + 2x + 2\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x - 3}$

=> $[g^{-1}(1)]' = \frac{1}{g'(2)} = \frac{1}{2}$ et $g^{-1}(1) = 2$

=> $y = \frac{1}{2}(x - 1) + 2$ => $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

d- Traçons C′

NB : La courbe représentative d'une fonction et celle de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

Pour le tracé de C′, (Voir figure).

e- Discutons graphiquement suivant les valeurs du paramètre m, du nombre et des signes des solutions de $l'équation$ $(3 - m)x^2 - (12 - 4m)x + 8 = 0$

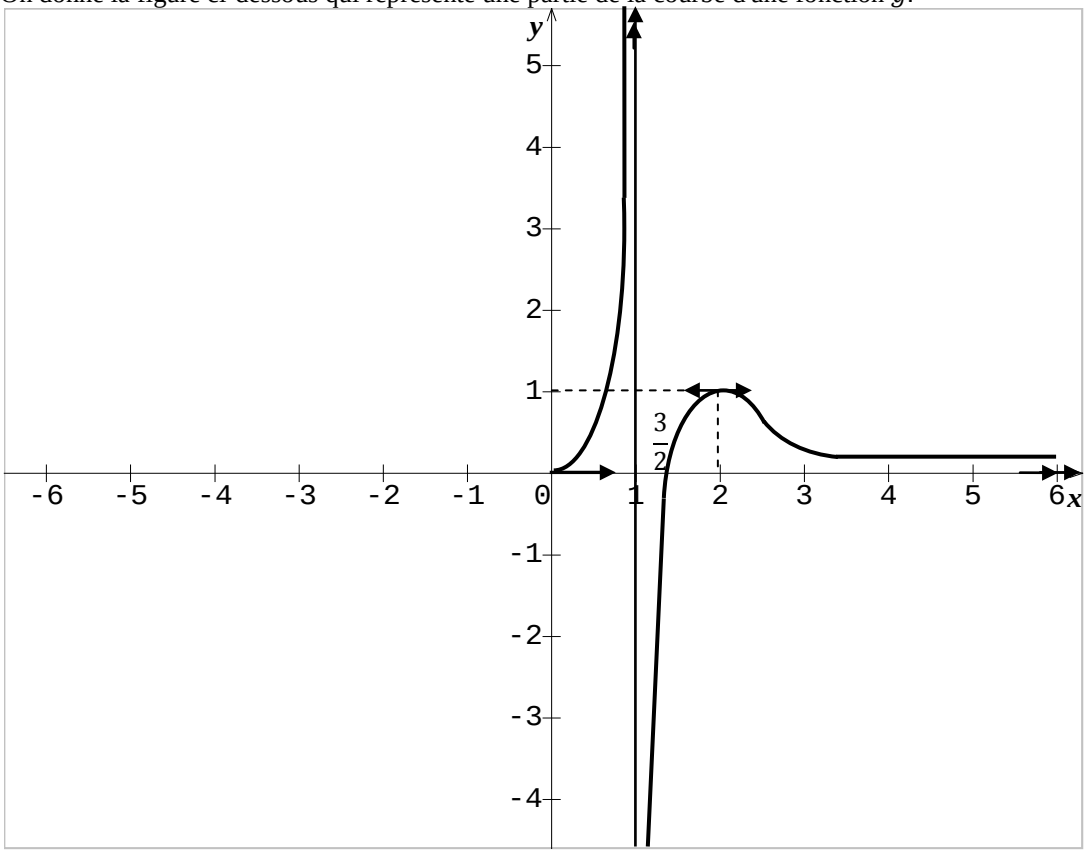
Pour cela, exprimons m en fonction de x :
$(3 - m)x^2 - (12 - 4m)x + 8 = 0$ => $m = \frac{3x^2 - 12x + 8}{x^2 - 4x} = f(x)$

En faisant glisser une règle du bas vers le haut tout le long du graphique, on remarque :

- $\forall\, m \in]-\infty\,;\, 1[\cup]3\,;\, +\infty[$, la règle coupe deux fois la courbe et par conséquent l'équation $x^2 + 2(1 - m)x + 4 = 0$ admet deux solutions distinctes x_1 et x_1 .

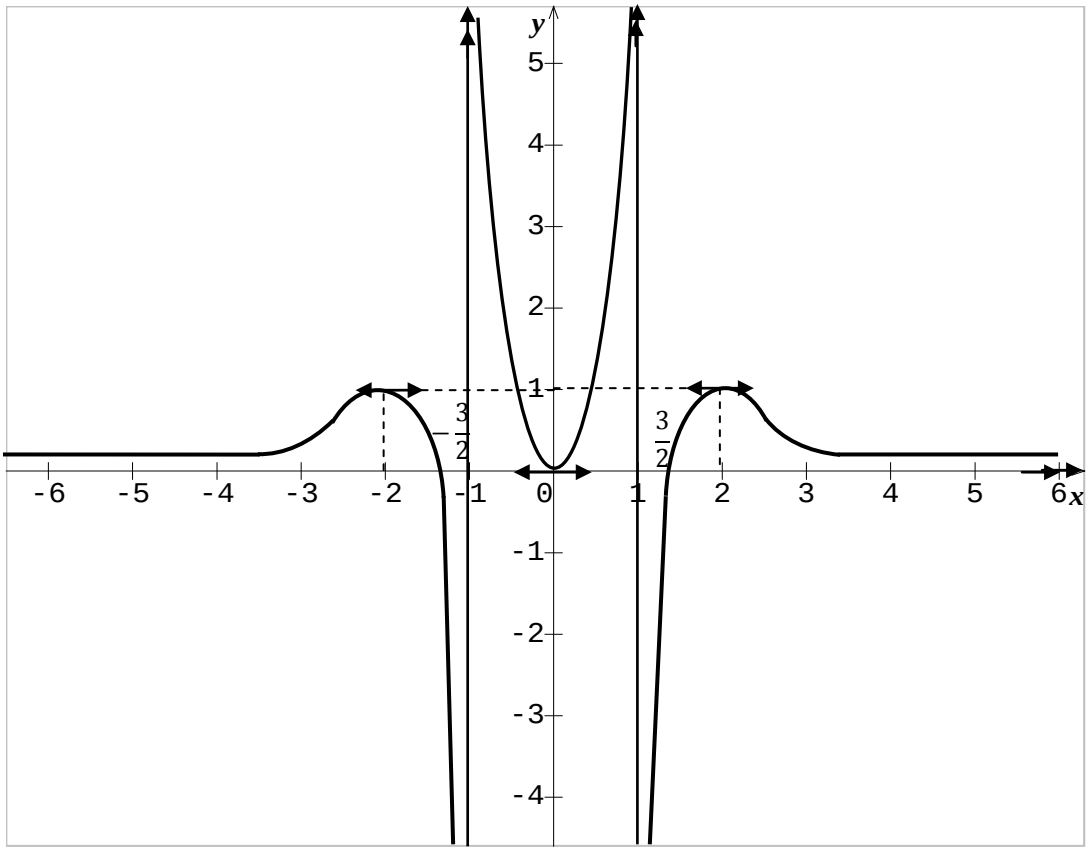
- $\forall\, m \in]1\,;\, 3[$, la règle ne coupe pas la courbe et par conséquent l'équation $x^2 + 2(1 - m)x + 4 = 0$ n'admet pas de solution.

46 On donne la figure ci-dessous qui représente une partie de la courbe d'une fonction g.



1) Complétons la courbe de la fonction g sachant que g est impaire.

NB : toute fonction paire admet l'axe $(y'Oy)$ comme axe de symétrie. D'où le complément de la courbe est le suivant :



1) Donnons les équations des asymptotes à (Cg)

D'après le graphique, les asymptotes à la courbe sont :

- Les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 1$ sont asymptotes verticales.
- La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale.

2) Déterminons le domaine de définition de g sous forme de réunion d'intervalles puis Donnons les limites de g aux bornes de Dg.

Dg = $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\} =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = -\infty$.

3) Dressons le tableau de variation de g.

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	↗	1	↘	0

47 Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$ où a ; b ; c et d sont des réels et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$

1) Trouvons les réels a ; b ; c et d sachant que la droite d'équation $x = 3$ est asymptote et (C_f) passe par les points A(2 ; 3) et B(4 ; 7) puis admet au point d'abscisse 2 une tangente horizontale.

- La droite d'équation $x = 3$ est asymptote => $x + d = x - 3$ => $d = -3$

=> $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 3}$

- La courbe (C_f) passe par les points A(2 ; 3) et B(4 ; 7) => $f(2) = 3$ et $f(4) = 7$

=> $\begin{cases} f(2) = 3 \\ f(4) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = -3 \\ 16a + 4b + c = 7 \end{cases}$ **(2)**

- La courbe (C_f) admet au point d'abscisse 2 une tangente horizontale => $f'(2) = 0$

Avec $f'(x) = \frac{ax^2 - 6ax - 3b - c}{(x - 3)^2}$. Alors $f'(2) = 0 \Leftrightarrow 8a + 3b + c = 0$ **(3)**

Ainsi formons le système avec les équations **(1)** ; **(2)** et **(3).** Ce qui donne :

$\begin{cases} 4a + 2b + c = -3 & \textbf{(1)} \\ 16a + 4b + c = 7 & \textbf{(2)} \\ 8a + 3b + c = 0 & \textbf{(3)} \end{cases}$

Par la méthode du pivot de Gauss, la résolution de ce système donne :

$a = 1$; $b = -1$; $c = -5$

D'où $f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x - 3}$

2) Dans la suite du problème on prendra $a = 1$; $b = -1$; $c = -5$ et $d = -3$

a- Etudions la fonction f

Déterminons l'ensemble de définition D_f.

$D_f = \mathbb{R} - \{3\} =]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$

2) Calculons les limites aux bornes de D_f.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x - 5}{x - 3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x - 5}{x - 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \frac{x^2 - x - 5}{x - 3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{x^2 - x - 5}{x - 3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Calculons la dérivée f' de la fonction f puis dressons le tableau de variation de f.

Posons $u = x^2 - x - 5$ => $u' = 2x - 1$ et $v = x - 3$ => $v' = 1$

=> $f'(x) = \frac{u' \times v - v' \times u}{(v)^2} = \frac{(2x - 1)(x - 3) - (1)(x^2 - x - 5)}{(x - 3)^2}$ => $f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 3)^2}$

Or $\forall\ x\ \in Df, (x-3)^2 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe du Numérateur $x^2 - 6x + 8$.
Posons $x^2 - 6x + 8 = 0 => x = 2 \quad ou \quad x = 4$
D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$	α	2	β	3	4	$+\infty$
$f'(x)$	+		−		−	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ 3	0	↘ $-\infty$ | $+\infty$	↘ 7	↗ $+\infty$

b- Etudions la position de (Cf) par rapport à son asymptote oblique.
Pour ce la étudions le signe de $f(x) - y$. Posons $f(x) - y = 0$. Avec $y = x + 2$, l'équation de l'asymptote oblique. Alors $f(x) - y = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-3} = 0$. Le signe de $f(x) - y$ depend du signe de $x - 3$, car 1> 0 Posons $x - 3 = 0 => x = 3$
. D'où le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x) - y$	−	0	+

D'après le tableau de signe de $f(x) - y$, on a :
$\forall x \in]-\infty\ ;\ 3[\ ,\ f(x) - y < 0$. Alors $\forall x \in]-\infty\ ;\ 3[$, (C) est en dessous de la droite (D).
$\forall x \in]3\ ;\ +\infty[\ ,\ f(x) - y > 0$. Alors $\forall x \in]3\ ;\ +\infty[$, (C) est au dessus de la droite (D).

c- Montrons que la restriction g de f à l'intervalle $[4\ ;\ +\infty[$ réalise une bijection de $[4\ ;\ +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

$\forall\ x\ \in [4\ ;\ +\infty[$, f est définie, continue et strictement croissante ; donc la restriction g de f réalise une bijection de $[4\ ;\ +\infty[$ vers l'intervalle J =$[7\ ;\ +\infty[$.
3) Montrons que (Cf) admet un centre de symétrie que l'on Déterminera.
NB : le point d'intersection de l'asymptote verticale et oblique représente toujours les coordonnées du centre de symétrie.

- La droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale.
- La droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique.

Pour obtenir leur point d'intersection, on résous le système suivant $\begin{cases} x = 3 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$ => I(3 ; 5) est le centre de symétrie.
4) Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β
D'après le tableau de variation, $\forall\ x \in]-\infty\ ;\ 2[$, f est définie, continue et strictement croissante de $]-\infty\ ;\ 2[$ Vers $]-\infty\ ;\ 3[$.Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une première solution α tel que $f(\alpha) = 0$.
De même, D'après le tableau, $\forall\ x \in]\ 2\ ;\ 3[$, f est définie, continue et strictement décroissante de $]\ 2\ ;\ 3[$ Vers $]-\infty\ ;\ 3[$Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une deuxième solution β tel que $f(\beta) = 0$.
Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha \in\ ]-\infty\ ;\ 2[$ et $\beta \in\ ]\ 2\ ;\ 3[$ tel que $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

5) a- Montrons que $\forall x \in [4;5]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

$f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x - 3} => f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}$

Or $x \in [4;5] <=> 4 \leq x \leq 5$

En appliquant la fonction dérivée f' à l'inégalité, on a :

Or $f'(4) = 0$ et $f'(5) = \frac{3}{4}$

$=> \quad 0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$

En appliquant la valeur absolue à l'inégalité, on a :

$=> |0| \leq |f'(x)| \leq \left|\frac{3}{4}\right|$

$=> \quad 0 \leq |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

D'où $\forall x \in [4;5]$, $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

b- En déduisons que $\forall x \in [4;5]$, on a : $\left|f(x) - \frac{15}{2}\right| \leq \frac{3}{4}|x-5|$

D'après la question a), on a : $\forall x \in [4;5]$, $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

Or si $|f'(x)| \leq k$, on a : d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis

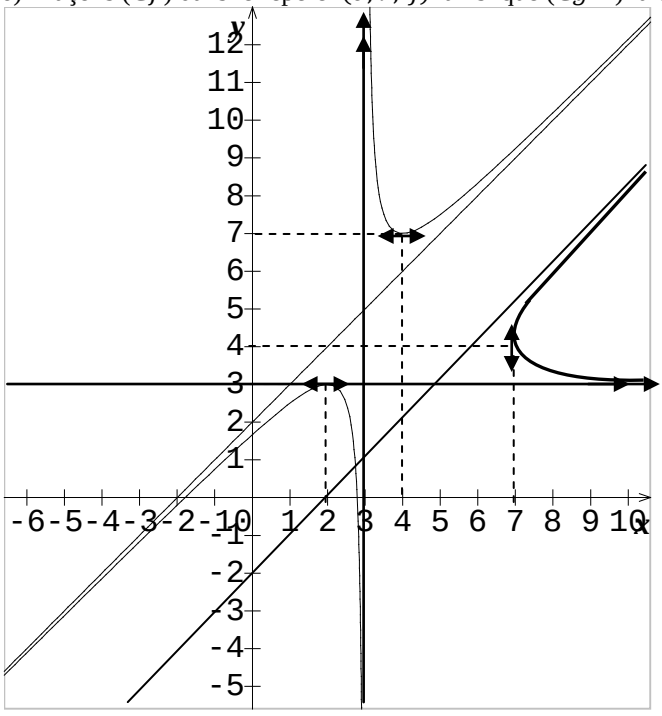
$|f(x) - f(a)| \leq k|x-a|$

Ainsi puisque $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$, alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis on a : $|f(x) - f(5)| \leq \frac{3}{4}|x-5|$. Avec $k = \frac{3}{4}$ et $a = 5$

Or $f(5) = \frac{15}{2} => \left|f(x) - \frac{15}{2}\right| \leq \frac{3}{4}|x-5|$

D'où $\forall x \in [4;5]$, on a : $\left|f(x) - \frac{15}{2}\right| \leq \frac{3}{4}|x-5|$

6) Traçons (Cf) dans le repère $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ ainsi que (Cg^{-1}) la courbe de g^{-1}.



NB : La partie de la courbe en gras représente la courbe ($C_{g^{-1}}$) de la fonction g^{-1}.

48 **Partie A** : Soit f la fonction numérique définie sur Df =] 1 ; +∞[par : $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

1) Montrons que la dérivée de f garde un signe constant sur Df.

$f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$ => $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) < 0$

D'où la dérivée de f garde un signe constant sur Df.

2) Etudions les variations de f (limite et sens de variation).

Df =] 1 ; +∞[

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = -\left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) < 0$. Alors f est strictement décroissante sur Df =] 1 ; +∞[.

x	1		α		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖		0	−	‖		
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	:	↘	$1-\sqrt{2}$	↘	$-\infty$

En déduisons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle] 1 ; 2[

- D'après le tableau de variation de f, $\forall x \in$] 1 ; +∞[, f est définie, continue et strictement croissante de] 1 ; +∞[vers]−∞ ; +∞[. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $f(\alpha) = 0$
- De plus $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ et $f(2) = -0{,}41$.

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\alpha \in$] 1 ; 2[

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in$] 1 ; 2[.

Partie B: On se propose de Résous l'équation $f(x) = 0$ dans] 1 ; 2[.

1) Montrons que l'équation $f(x) = 0$, a même ensemble de solution que: $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}(1-x) = 1 \Leftrightarrow 1 - x = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow$

$x = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$. D'où l'équation $f(x) = 0$, a même ensemble de solution que $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$.

2) On appelle g la fonction définie sur] 0 ; +∞[par : $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ et soit α la solution de l'équation $f(x) = 0$ (On a donc $g(\alpha) = \alpha$ et $1 \leq \alpha \leq 2$

a- Montrons que si x est élément de] 1 ; 2[alors $g(x)$ est aussi élément de] 1 ; 2[.

x est élément de] 1 ; 2[$\Leftrightarrow 1 < x < 2$

$g(x)$ est strictement décroissante sur] 1 ; 2[, alors on a :

$1 < x < 2 \Leftrightarrow g(2) < g(x) < g(1) \Leftrightarrow 1{,}7 < g(x) < 2 \Leftrightarrow g(x) \in$] 1,7 ; 2[.

Or] 1 ; 2[$\subset$] 1,7 ; 2[. D'où si x est élément de] 1 ; 2[alors $g(x)$ est aussi élément de] 1 ; 2[

b- Justifions la dérivabilité de g sur[0 ; $+\infty$[.

- x est une fonction définie et dérivable sur [0 ; $+\infty$[.
- $\sqrt{x}$ est une fonction définie et dérivable sur [0 ; $+\infty$[.

Par conséquent $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ est une fonction définie et dérivable sur [0 ; $+\infty$[.

Calculons la dérivée de g

$g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ => $g'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

Montrons que pour tout $x \in [1\ ; 2]$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

$g'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$. Donnons un encadrement de $g'(x)$ sur $[1\ ; 2]$.

On sait que : $1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{2}$ $(\mathbf{1})$

De même : $1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq 2x \leq 4$ $(\mathbf{2})$

En effectuant le produit des équations $(\mathbf{1})$ et $(\mathbf{2})$**,** on obtient :

$2 \leq 2x\sqrt{x} \leq 4\sqrt{2}$. Alors l'inverse de cette nouvelle inégalité donne : $\frac{1}{4\sqrt{2}} \leq 2x\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}$

En multipliant cette inégalité par le signe$(-)$, on obtient : $-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \leq -\frac{1}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

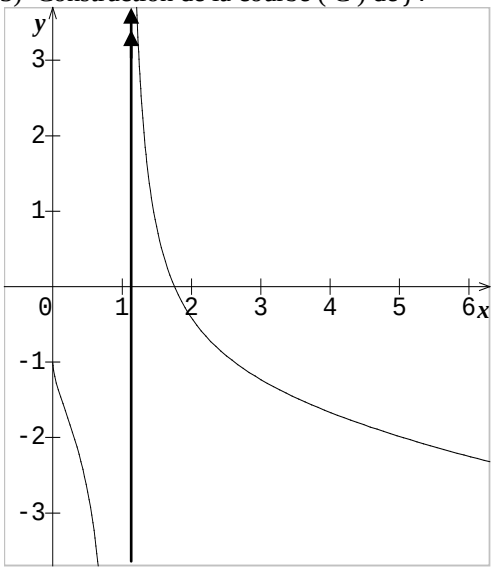
$-\frac{1}{2} \leq g'(x) \leq -\frac{1}{4\sqrt{2}}$ En appliquant la valeur absolue à chaque membre de cette inégalité, on obtient : $\left|-\frac{1}{4\sqrt{2}}\right| \leq |g'(x)| \leq \left|-\frac{1}{2}\right| \Leftrightarrow \frac{1}{4\sqrt{2}} \leq |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ => $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

c- En déduisons que pour tout x de $[1\ ; 2]$, on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

Puis que $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$. Alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$ Or $(\alpha) = \alpha$. D'où $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

3) Construction de la courbe (C) de f.



49 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x+1}$ et (C) sa courbe.

1) a- Démontrons que la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ est au dessus de sa tangente en tout point.

Soit $x_0 \in [0 ; +\infty[$; l'équation de la tangente en x_0 est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ avec

$f'(x_0) = -\frac{1}{(x_0+1)^2}$ => $y = -\frac{(x-x_0)}{(x_0+1)^2} + \frac{1}{x_0+1} = \frac{2x_0 - x + 1}{(x_0+1)^2}$

Ainsi déterminons le signe de $f(x) - y = 0$

$f(x) - y = \left(\frac{1}{x+1}\right) - \left(\frac{2x_0 - x + 1}{(x_0+1)^2}\right) = \frac{(x_0 - x)^2}{(x+1)(x_0+1)^2} \geq 0 \ \forall x \ [0 ; +\infty[$

=> $\forall x \ [0 ; +\infty[; f(x) - y \geq 0$

D'où $\forall x \ [0 ; +\infty[$; la courbe (Cf) est au dessus de sa tangente en tout point.

b- En déduisons que $\forall \alpha \in [0 ; +\infty[$, on a : $\frac{1}{\alpha+1} \geq 1 - \alpha$ **(1)**

On sait que : $\forall x \ [0 ; +\infty[; \ y = \frac{2x_0 - x + 1}{(x_0+1)^2}$ et $f(x) \geq y$

En posant $x_0 = 0$ et $x = \alpha$, on a : $f(\alpha) \geq y(0) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha+1} \geq \frac{2(0) - \alpha + 1}{(0+1)^2} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{\alpha+1} \geq 1 - \alpha$ **(1)** (Ce qu'il fallait Démontre)

2) Soit la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[;$ par $g(x) = \sqrt{x+1}$ et soit k un réel strictement positif.

a- Déterminons la dérivée première et seconde de g sur $[0 ; +\infty[$

$g(x) = \sqrt{x+1}$ => $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ et $g''(x) = \frac{-1}{4(1+x)\sqrt{1+x}}$

b- Vérifions que : $\forall x \in [0 ; k[$ on a : $\frac{1}{2\sqrt{1+k}} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$

On sait que $\forall x \in [0 ; +\infty[, \ g''(x) < 0$. Alors $g'(x)$ est strictement décroissante.

D'où $x \in [0 ; k] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq k$. En appliquant $g'(x)$ à cette inégalité, on a :

$g'(k) \leq g'(x) \leq g'(0) \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{1+k}} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$ (Ce qu'il fallait Démontre)

c- En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis à la fonction g sur l'intervalle $[0 ; k]$, démontrons que : $1 + \frac{k}{2\sqrt{1+k}} \leq \sqrt{1+k} \leq 1 + \frac{k}{2}$ **(2)**

On sait que $x \in [0 ; k]$, g est dérivable.

D'autre part d'après la question b), on a : $\frac{1}{2\sqrt{1+k}} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$

Alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis à la fonction g sur$[0 ; k]$, on a : $\frac{k-0}{2\sqrt{1+k}} \leq g(k) - g(0) \leq \frac{k-0}{2} \Leftrightarrow \frac{k}{2\sqrt{1+k}} \leq \sqrt{1+k} - 1 \leq \frac{k}{2}$

En ajoutant 1 à chaque membre de l'inégalité, on a bien :

$1 + \frac{k}{2\sqrt{1+k}} \leq \sqrt{1+k} \leq 1 + \frac{k}{2}$ **(2)** (Ce qu'il fallait Démontre)

d- Déduisons des relations **(1)** et **(2)** que : $\forall \alpha \in [0 ; +\infty[$, on a :

$1 + \frac{k}{2} - \frac{k^2}{4} \leq \sqrt{1+k} \leq 1 + \frac{k}{2}$

D'après la relation **(1) ,** on a : $\frac{1}{\alpha+1} \geq 1-\alpha \Leftrightarrow 1 \geq (\alpha+1)(1-\alpha) \Leftrightarrow 1 \geq 1-\alpha^2$

En posant $\alpha = \frac{k}{2}$, on a : $1 \geq 1-\left(\frac{k}{2}\right)^2$

En ajoutant $\frac{k}{2}$ à chaque membre de cette inégalité, on a : $1 + \frac{k}{2} \geq 1-\left(\frac{k}{2}\right)^2 + \frac{k}{2} \Leftrightarrow$

$1 + \frac{k}{2} \geq 1 - \frac{k^2}{4} + \frac{k}{2}$. Or d'après la relation **(2)** , on a : $1 + \frac{k}{2\sqrt{1+k}} \leq \sqrt{1+k} \leq 1 + \frac{k}{2}$ =>

$1 + \frac{k}{2} - \frac{k^2}{4} \leq \sqrt{1+k} \leq 1 + \frac{k}{2}$ (Ce qu'il fallait Démontre)

e- Etablissons alors l'inégalité suivante : $1{,}0475 \leq \sqrt{1{,}1} \leq 1{,}05$

D'après d) , on a : $1 + \frac{k}{2} - \frac{k^2}{4} \leq \sqrt{1+k} \leq 1 + \frac{k}{2}$. En posant $k = 0{,}1$ on a :

$1 + \frac{0{,}1}{2} - \frac{(0{,}1)^2}{4} \leq \sqrt{1+0{,}1} \leq 1 + \frac{0{,}1}{2} \Leftrightarrow 1 + 0{,}05 - 0{,}002 \leq \sqrt{1{,}1} \leq 1 + 0{,}05 \Leftrightarrow$

$1{,}0475 \leq \sqrt{1{,}1} \leq 1{,}05$ (Ce qu'il fallait Démontre)

f- En déduisons une valeur approchée de $\sqrt{1{,}1}$ tout en précisant la marge d'incertitude.

- La valeur approchée de $\sqrt{1{,}1}$ correspond au centre de l'intervalle $[1{,}0475 \ ; \ 1{,}05\ ]$ => $c = \frac{1{,}0475 \ + \ 1{,}05}{2} = 1{,}04875$.
- La marge d'incertitude de $\sqrt{1{,}1}$ correspond au rayon de l'intervalle $[1{,}0475 \ ; \ 1{,}05\ ]$ => $r = \frac{1{,}05 - 1{,}0475}{2} = 0{,}00125$.

Primitives – Intégrales –Calculs d'aires

Primitives

OBJECTIFS :

Ce chapitre vise à :

• mettre en place la notion de primitive

•initier les élèves au calcul de primitives à partir des formules de dérivation.

Commentaires

La notion de primitive servira à définir la fonction logarithme népérien et sera réinvestie dans le calcul intégral.

Volume horaire : 6 heures

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
• Définition d'une primitive. •Existence de primitives d'une fonction continue sur un intervalle (admis). •Ensemble des primitives d'une fonction continue •Unicité de la primitive d'une fonction prenant une valeur donnée en un point donné •primitives des fonctions de référence. • Primitive de u + v, λu ($\lambda \in$ IR), v'× (u'ov), u'× u^m ($m \in Q - \{-1\}$) ;	• Détermine les primitives d'une fonction en utilisant les primitives des fonctions de référence. • Détermine la primitive d'une fonction qui prend une valeur donnée en un point donné. • Détermine les primitives d'une fonction du type : - $\alpha u + \beta v$, $(\alpha; \beta) \in IR^2$; - v'x (u' ov) ; - u'x u^m ($m \in Q - \{-1\}$).

Remarques et suggestions

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont toutes continues sur un intervalle et toutes les primitives sont définies sur un intervalle.

On introduira les primitives comme opération inverse des dérivées. Cette mise en place pourra se faire par les fonctions polynômes. On fera fonctionner abondamment le tableau des

primitives de fonctions de référence, ce qui permettra de les mémoriser, avant d'aborder des exemples plus complexes.

Il ne faut pas présenter le tableau des primitives des fonctions de référence ou les opérations sur les primitives comme de nouvelles formules à savoir toutes par cœur mais plutôt comme des savoirs qui découlent directement de la dérivation et qu'on peut donc retrouver. Notamment, la connaissance d'une primitive de u'u^r où r ϵ $\mathbb{Q} - \{-1\}$ permet d'en retrouver beaucoup d'autres. On pourra faire remarquer aux élèves que pour vérifier un calcul de primitive, il suffit de dériver la fonction trouvée.

Les différentes techniques pour Détermine des primitives (décomposition en éléments simples, linéarisation, utilisation des formules de trigonométrie) doivent être guidées.

Intégrales

OBJECTIFS :

Ce thème vise à :

• calcule des intégrales à l'aide de techniques particulières (utilisation des primitives, intégration par partie, changement de variable affine) ;

• réinvestir dans les calculs aires les techniques du calcul intégral ;

• élargir le champ des fonctions étudiées à des fonctions définies par une intégrale.

Commentaires

La notion de calcul intégral est nouvelle en Terminale. Elle est introduite à partir de celle de primitive. Aussi, le professeur veillera à ce que cette dernière notion soit acquise par les élèves. Le calcul intégral est un outil qui permettra de Détermine des primitives de fonction. Ici, toutes les fonctions considérées sont continues sur les intervalles d'intégration. Ill permettra en outre de calcule les aires des surfaces planes ou d'en donner une valeur approchée. Cet outil sera réinvesti en physique (volume, moment inertie d'un solide, etc.…).

Volume horaire : 16 heures

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Définition de l'intégrale d'une fonction continue f : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f. • La fonction $x \mapsto \int_a^x \mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt}$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a. • Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction continue positive. • Propriétés : - Linéarité ; - Relation de Chasles ; - Positivité ; - Si $f \leq$ g sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b \mathrm{g}(t)dt$; - Inégalité de la moyenne : - Si $\mathrm{m} \leq f \leq M$ sur $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ alors $\mathrm{m}(\mathrm{b}-\mathrm{a}) \leq \int_a^b f(t)dt \leq \mathrm{M}\ (b-a)$; Si $\lvert f \rvert \leq \mathrm{M}$, alors $\left\lvert \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt} \right\rvert \leq \mathrm{M}\lvert \mathrm{b}-\mathrm{a} \rvert$. • Valeur moyenne d'une fonction ; • Intégration par parties ; •Changement de variable affine. •application au calcul d'aire. •La fonction du type F : $x \mapsto \int_a^x \mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt}$	• Calcule une intégrale : - En utilisant les primitives des fonctions usuelles ; - En utilisant une intégration par partie ; - En utilisant un changement de variable affine • Utiliser la relation de Chasles pour effectuer un calcul intégral. • Connaissant un encadrement d'une fonction f sur [a,b], trouver un encadrement de $\int_a^b f(t)dt$. • Calcule l'aire d'une partie du plan limitée par : -La courbe représentative d'une fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = a et x = b. - Les courbes représentatives de deux fonctions et les droites d'équation x = a et x = b. • Etant donné la fonction F : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$: -à partir d'une majoration et d'une minoration donnée, déduis l'existence ou non de la limite de F aux bornes de son ensemble de définition ; -étudier les variations de F ; -donner une allure de la présentation graphique de F.

Remarques et suggestions

Il faut faire le lien entre intégrale et aire dès l'introduction des intégrales ou tout de suite après la définition. Cela permet alors d'illustrer graphiquement les propriétés de l'intégrale. Lors d'une évaluation, si le calcul d'une intégrale utilise une intégration par parties ou un changement de variable affine, l'énoncé devra l'indiquer.

A l'occasion d'un calcul d'aire, l'unité attendue doit être précisée dans l'énoncé. On pourra calcule, sur des exemples, une valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles. Dans ce cas, on prendra soin de tracer la courbe et de choisir des fonctions pour lesquelles une primitives n'est pas connue. La méthode des rectangles n'est pas à évaluer.

L'étude de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ sera guidée.

I- Primitives :

1) Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On appelle primitive de la fonction f sur l'intervalle I toute fonction F dérivable sur I telle que $\forall\, x \in I\ ;\ \boldsymbol{F'(x) = f(x)}$

2) Propriétés

P_1 : Toute fonction continue sur un intervalle I admet une infinité de primitives sur cet intervalle.

P_2 : L'ensemble des primitives d'une fonction f sur un intervalle I est l'ensemble des fonctions définies sur cet intervalle par $x \to F(x) + k$ où k est un nombre réel.

3) Tableaux des primitives :

a) Primitives des fonctions usuelles

Fonctions	Primitives
a avec $a \in \mathbb{R}$	$ax + k$
x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
ax^n avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{ax^{n+1}}{n+1} + k$
$\frac{1}{x^2}$ avec $x \neq 0$	$\frac{-1}{x} + k$
$\frac{a}{x^n}$ avec $x \neq 0\ ;\ n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\ eta \in \mathbb{R}^*$	$\frac{-a}{(n-1)x^{n-1}} + k$
$\frac{a}{\sqrt{x}}$ avec $x > 0\ et\ a \in \mathbb{R}^*$	$2a\sqrt{x} + k$
$\sqrt{x}$ avec $x > 0$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + k$
$\sqrt{ax+b}$ avec $ax + b > 0$	$\frac{2}{3a}(ax+b)\sqrt{ax+b} + k$
$cosx$ avec $\in [-\pi\ ;\ \pi]$	$sinx + k$
$sinx$ avec $\in [-\pi\ ;\ \pi]$	$-cosx + k$
$tangx$ avec $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$	$cosx + k$
$cos(ax + b)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{a}Sin(ax+b) + k$
$sin(ax + b)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{a}cos(ax+b) + k$
$tang(ax+b)$ avec $(ax+b) \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{a}cos(ax+b) + k$
$\frac{1}{Cos^2 x} = 1 + tang^2 x$ avec $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$	$tangx + k$
$\frac{1}{Sin^2 x} = 1 + cotang^2 x$ avec $x \neq k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$	$-\text{cotg}x + k$

b) Opérations sur les Primitives :

Fonctions	Primitives
$u' + v'$	$u + v + k$
$u'v + v'u$	$u \times v + k$
au' ($a \in \mathbb{R}$)	$au + k$
$u' \times u^n$	$\frac{-1}{x} + k$
$\frac{u'}{(u)^n}$	$\frac{(u)^{n+1}}{n+1} + k$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k$
$sin(u)$	$-\frac{1}{u'}Cos(u) + k$
$\cos(u)$	$\frac{1}{u'}Sin(u) + k$
$\frac{u'}{Cos^2 u} = 1 + tang^2 u$	$sinx + k$
$\frac{u'}{Sin^2 u} = 1 + cotang^2 u$	$-cotg(u) + k$

II- Intégrale d'une fonction

1) Définition :

Soit f une fonction définie, dérivable sur un intervalle I = [a ; b] et F une primitive de f sur I.

On appelle intégrale de la fonction f entre a et b le nombre réel A tel que :

$$A = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

2) Propriétés :

Propriété 1 : (linéarité)

Soient f et g deux fonctions continues sur I = [a ; b]on a :

- $\int_a^b f'(x)dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$
- $\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}$; $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \int_a^b \alpha f(x)dx + \int_a^b \beta g(x)dx$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

- Si $f \geq 0$; alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Si $f \geq g$; alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
- Si $|f|$ est continue sur I, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Propriété 2 : (Relation de Chasles).

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Soient trois réels a ; b ; c éléments de l'intervalle I

D'après Chasles : $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b g(x)dx + \int_b^c g(x)dx$

Conséquences :

- si $a = b$ alors $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Propriété 3 : (Inégalité et valeur de la moyenne)

a) Inégalité de la moyenne :

Si $a \leq b \quad et \quad m \leq f \leq M$, alors on a : $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$

b) Valeur moyenne :

On appelle valeur moyenne de f, le réel $\bar{M}$ tel que :

$\bar{M} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ et il existe un réel $c \in [a ; b]$ tel que : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

III- Intégration par parties – Intégration par changement de variable affine

1) Intégration par Parties

Théorème :

Si u et v sont deux fonctions différentiables sur un l'intervalle I = $[a ; b]$, tel que : $(u \times v)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$.

On appelle intégration par parties, toutes opérations définie par :

$\int_a^b u(x) \times v'(x)dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x)dx.$

Preuve :

$\int_a^b (u \times v)'(x)dx = \int_a^b [u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)]dx$

$= \int_a^b u'(x) \times v(x)dx + \int_a^b u(x) \times v'(x)dx$

Or $\int_a^b (u \times v)'(x)dx = [u(x) \times v(x)]_a^b$

=> $[u(x) \times v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x) \times v(x)dx + \int_a^b u(x) \times v'(x)dx$

=> $\int_a^b u(x) \times v'(x)dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x)dx.$

Intégration par substitution ou par changement de variable

Dans certaines intégrales, l'intégration est effectuée plus facilement lorsqu'on substitue à la place de la variable x une autre variable qui est fonction de x.

Méthode pratique :

Pour calcule l'intégrale : $\int_a^b f(\alpha t + \beta)dt \quad (\alpha \neq 0)$; on utilise la méthode suivante :

- Faire le changement de variable en posant : $u = \alpha t + \beta$ et on obtient $du = \alpha dt$
- Utiliser l'égalité : $\int_a^b f(\alpha t + \beta)dt = \int_{\alpha b+\beta}^{\alpha b+\beta} f(u)du$

IV- Calculs de valeurs approchées d'une intégrale :

Méthode de rectangles :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[\ a\ ;\ b]$, tel que $|f'|$ admet un majorant M sur cet intervalle.

Lorsque l'on partage [a ; b] en n intervalles de même amplitude et d'extrémités

$a = x_0\ ;\ x_1\ ;\ x_2\ ;\ x_3\ ;\ \ldots\ x_n = b$; On a:

Une suite $(S_n)\ \ n \in \mathbb{N}^*$ de termes général S_n tel que : $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n=1} f(x_i)$ qui converge vers $A = \int_a^b f(t)dt$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}^*\ ;\ |A - S_n| \leq \frac{M}{2n}(b-a)^2$

V- Calcul d'aires :

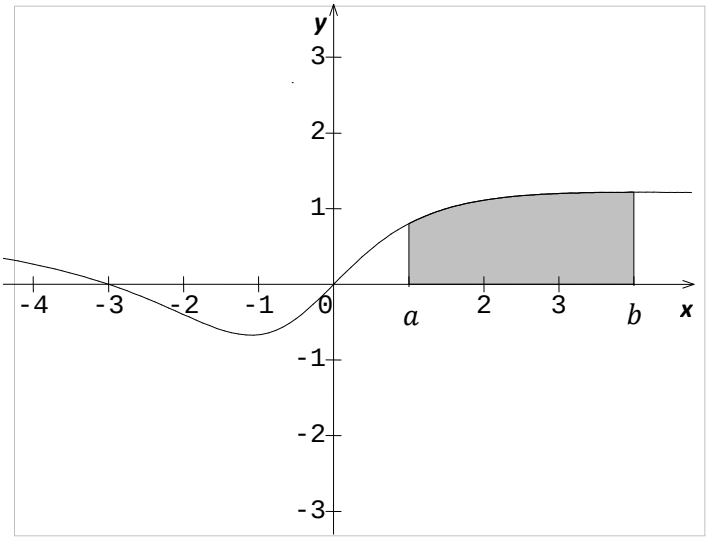
De façon générale nous admettrons que lorsque f est une fonction continue sur un intervalle $[\ a\ ;\ b]$, alors l'aire du domaine colorié ci-contre est égale à $F(b) - F(a)$ ou F est une primitive de f sur $[\ a\ ;\ b]$; (l'unité d'aire étant l'aire du rectangle $OIAJ$).

Par la définition de l'intégrale définie, la surface entre une fonction $f(x)$ et l'axe des abscisses ou encore entre deux fonctions f et g ($f > g$) et l'axe des abscisses est donnée respectivement comme suit, lorsque x va de a vers b ($a < b$).

$S = \int_a^b f(x)dx$ (Unité d'aire) ou $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ (Unité d'aire).

NB : Dans cette intégration, les portions de surfaces au dessus de l'axe des abscisses donnent une contribution positive, tandis que les portions en dessous de l'axe des abscisses donnent une contribution négative. Voici quelques cas de calculs de surfaces :

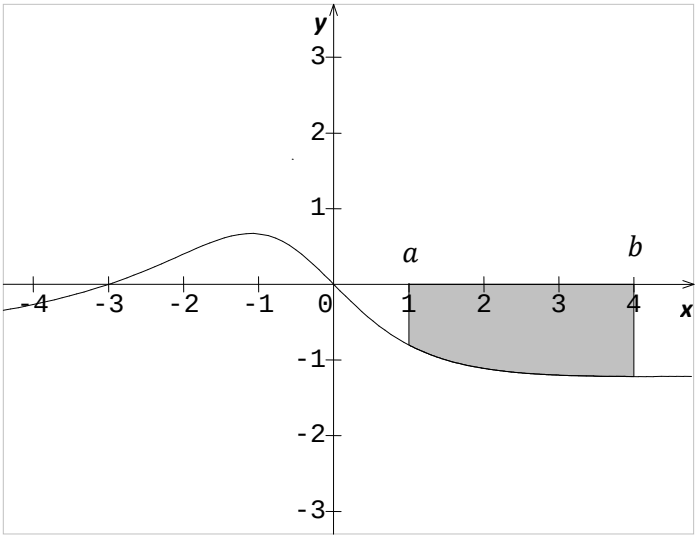
1er Cas de figure :



L'aire du domaine plan hachuré par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites

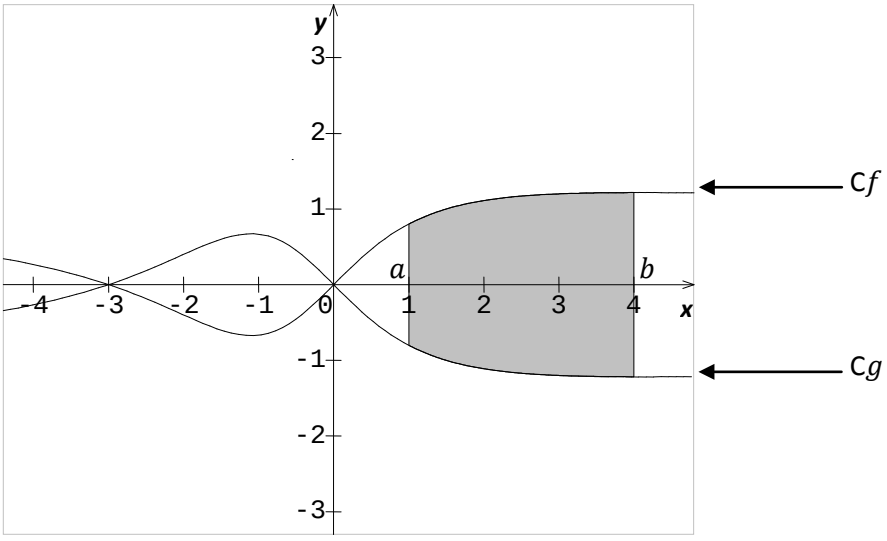
d'équation : $x = a$ **et** $x = b$ **est :** $S = \int_a^b f(x)dx$ **(Unité d'aire)**

2ième Cas de figure :



L'aire du domaine plan hachuré par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = a$ et $x = b$ est : $S = -\int_a^b f(x)dx$ **(Unité d'aire)**

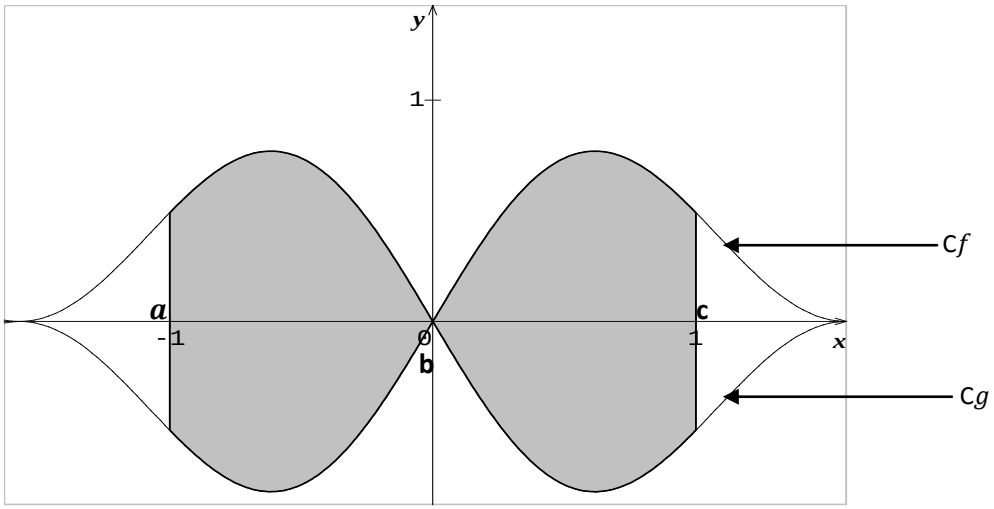
3ième Cas de figure :



L'aire du domaine plan hachuré par les courbes (Cf) , (Cg) , l'axe des abscisses et les droites d'équation : $\boldsymbol{x = a}$ **et** $\boldsymbol{x = b}$ **est :** $\boldsymbol{S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx}$ **(Unité d'aire)**

NB : la différence $\boldsymbol{f(x) - g(x)}$ est très importante car la courbe (Cf) est au dessus de la courbe (Cg) dans l'intervalle $[a\ ; b]$

4ième Cas de figure :



L'aire du domaine plan hachuré par les courbes (Cf) , (Cg) , l'axe des abscisses et les droites d'équation : $\boldsymbol{x = a}$ **;** $\boldsymbol{x = b}$ **et** $\boldsymbol{x = c}$ **est :**

$\boldsymbol{S = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx + \int_b^c [f(x) - g(x)]dx}$ **(Unité d'aire)**

NB : On a la différence $\boldsymbol{g(x) - f(x)}$ **sur l'intervalle** $[a\ ; b]$ car la courbe (Cf) est au dessus de la courbe (Cg) et la différence $\boldsymbol{f(x) - g(x)}$ dans l'intervalle $[b\ ; c]$

Exercices

Primitives

Primitives directes

1 En utilisant les formules de primitives directes, calcule l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

1- $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4$; 2- $f(x) = (x^2 - 3)^3$; 3- $f(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{4}{3}x^2 - 1$

4- $f(x) = \sqrt{-3x + 2}$; 5- $f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$; 6- $f(x) = 3(-x + 2)(3x + 2)^2$

7- $f(x) = Cos(-6x + 5)$; 8- $f(x) = 3Sin(1 - 4x)$; 9- $f(x) = \frac{1}{3Cos^2 3x}$

10- $f(x) = \frac{3}{(3x + 1)^3}$; 11- $f(x) = (4x - 4)(2x^2 - 4x + 1)^2$; 12- $f(x) = \frac{-6}{\sqrt{-6x + 5}}$

13- $f(x) = \frac{-5}{(7x + 3)^3}$; 14- $f(x) = (x - 1)(-3x^2 + 6x + 7)^2$; 15- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-8x + 1}}$

16- $f(x) = \frac{Sinx - Cosx}{(Cosx + Sinx)^3}$

Primitives et linéarisation

2 En utilisant les formules de primitives directes, linéarise puis calcule l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \text{Sin}^3 x$; 2) $f(x) = Cos^5 \frac{x}{2}$; 3) $f(x) = \text{Sin}^3 x \bullet \text{Cos}^3 x$; 4) $f(x) = \text{Sin}^3(-x + 3)$

Primitives vérifiant une condition

3 Détermine la primitive F de la fonction f vérifiant les conditions indiquées :

1- $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ et F(0) = 7 ; 2- $f(x) = (x - 3)^6$ et F(3) = 0

3- $f(x) = \frac{2}{(3 - x)^3}$ et F(0) = 0 ; 5- $f(x) = \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}}$ et F(0) = $\sqrt{5}$

6- $f(x) = \frac{Sinx}{Cos^2 x}$ et $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$; 7- $f(x) = \frac{Sinx - Cosx}{Cos^3 x}$ et $F(\pi) = 1$

4 Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x + 1}{(x - 1)^2}$$

1) Détermine l'ensemble de définition

2) Détermine les réels a ; b et c tel que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$

3) En déduis la primitive de f qui s'annule en 0

5 Soit les fonctions f et F définies par : $f(x) = x\sqrt{3 - 2x}$ et F$(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3-2x}$

Détermine les réels a ; b et c tel que$\forall\, x \in \left]-\infty ; \frac{3}{2}\right]$, F soit une primitive de f sur $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right]$

Intégrales

Intégrations à l'aide d'une primitive

6 En utilisant les formules des primitives, calcule les intégrales suivantes :

1) I $= \int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 2x - 5)dx$; **7)** I $= \int_1^2 \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$

2) I $= \int_{-\pi}^{\pi} Sin(-2x+\pi)dx$; **8)** I $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{Sinx - Cosx}{(Cox + Sinx)^2}dx$

3) I $= \int_0^4 \sqrt{4x+9}dx$; **9)** I $= \int_0^1 (x^2 - 1)(x^3 - 3x + 1)^3 dx$

4) I $= -4\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{5}{x^2}dx$; **10)** I $= \int_0^1 (-2x+1)\sqrt{5x^2 - 5x + 4}\,dx$

5) I $= \int_{-1}^2 (x+2)\sqrt{x+2}dx$; **11)** I $= \int_0^2 |x^2 - 3x + 2|dx$

6) I $= \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; **12)** I $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} |cos(2x-\pi)|dx$

Intégrations par parties

7 En utilisant la formule de l'intégration par partie, calcule les intégrales suivantes :

1) I $= \int_0^{\pi} xSin2xdx$; **4)** I $= \int_{-2}^1 (x-5)\sqrt{2-x}dx$

2) I $= \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$; **5)** I $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 Cos(x+\pi)dx$

3) I $= \int_0^4 x\sqrt{4x+9}dx$

8 Soient les intégrales I et J définies par : I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)Cos^2 2xdx$ et J = $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)Sin^2 2xdx$

1) Calcule : I + J.

2) Calcule : I – J en utilisant la technique de l'intégration par parties.

3) Déduisez – en les valeurs de I et J.

Intégrations par changement de variable

9 En utilisant un changement de variable, calcule les intégrales suivantes :

1) I = $\int_{-1}^{2}\frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$; **2)** I = $\int_{-1}^{2}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$

10 Soit le polynôme p définie par : $p(x) = x^3 - 12x - 16$.

1) Montre que -2 est un zéro double de p.

2) En utilisant la méthode de l'intégration par partie et la méthode par changement de variable, calcule l'intégrale : $I = \int_4^5 \sqrt{p(x)}dx$

Intégrales et suites

11 Soit l'intégrale I_n définie par :

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^n x dx$

1) En utilisant la technique d'intégration par parties, trouver une relation entre I_n et I_{n-2} (On posera : $Sin^n x = Sin^{n-1}x \cdot Sinx$).
2) On donne $I_0 = \frac{\pi}{2}$. Calcule : I_2 et I_4

12 Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}}dx$ ($n \geq 0$)

1) Calcule I_0
2) En intégrant par parties, Montre que $\forall n \geq 1$ on a : $(2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1}$.
3) En déduis la valeur de I_1 ; I_2 et I_3.

13 Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_{-1}^1 (t^2-1)^n dt$ ($n \in \mathbb{N}$)

1) Démontre que $I_n = 2\int_0^1 (t^2-1)^n dt$ puis calcule I_0

2) Démontre que $I_n = -\frac{2n}{1+2n} I_{n-1}$

14 Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{Cos^{2n+1}x}$

1) Détermine le seul réel a tel que : $\forall\ x \left[0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$ on a : $\frac{1}{Cosx} = \frac{aCosx}{1-Sinx} + \frac{aCosx}{1+Sinx}$.
2) Calcule la valeur de I_0.

3) Démontre à l'aide d'une intégration par parties que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ on a :
$2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^{-n}}{\sqrt{2}}$ $\left(\text{On pourra poser : } \frac{1}{Cos^{2n+1}x} = \frac{1}{Cos^{2n-1}x} \times \frac{1}{Cos^2 x}\right)$

15 Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$

1) Calcule I_1.
2) En intégrant par parties, Montre que $I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$ (on posera $x^n = x \bullet x^{n-1}$)

16 Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{1}{x^n+1}dx$ avec $n \in \mathbb{N}$

1) Montre que $\forall\ n \in \mathbb{N}$; I_n est croissante et majorée.
2) Montre que$\forall\ n \in \mathbb{N}$; on a : $1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1$ .En déduis la limite de la suite I_n.

17 Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n(x) = \int_1^x t^n lnt\,dx$ ($n \in \mathbb{N} - \{-1\}$ et $x > 0$)

1) En utilisant une intégration par parties ; calcule $I_n(x)$
2) En déduis le calcul de $J_n(x) = \int_1^x t^n (lnt)^2\,dt$
3) a) Calcule $I_n(e) - J_n(e)$.
b) Détermine la limite de $\frac{I_n(e)-J_n(e)}{e^{n+1}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Intégrales linéaires

18 Soient les intégrales I et J définies par : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^2 x}dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^4 x}dx$

1) Calcule I

2) Soit la fonction définie sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \frac{sinx}{cos^3 x}$.

a) Montre que $\forall\ x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$ on a : $f'(x) = \frac{3}{cos^4 x} - \frac{2}{cos^2 x}$.
b) En déduis une relation entre I et J.
c) Calcule J.

19 Soient les intégrales suivantes :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4 x dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 x dx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sin^2 x cos^2 x dx$

1) Calcule $I - J$ et $I + J + K$

2) En déduis la valeur de : $I + J - 3K$ puis celles de I ; J et K.

20 Soient les intégrales I et J définies par :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{cosx + sinx} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{cosx + sinx} dx$

Calcule $I + J$ et $I - J$ puis en déduis les valeurs de I et J.

21 On se propose de calcule l'intégrale J définie par $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3} dx$

1) Calcule les deux intégrales A et B tel que $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$ et $B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$

2) Détermine les réels a ; b et c tel que : $\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2}$ **(1)**

3) En posant $t = e^x$ dans l'égalité **(1),** calculé $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$

4) a- A l'aide d'une intégration par partie, exprimer J en fonction de I.

b- En déduis la valeur de J.

22 On considère les intégrales $I = \int_0^{\pi} cos^4 x dx$ et $J = \int_0^{\pi} sin^4 x dx$.

1) a- Montre que l'intégrale I peut s'écrire $I = \int_0^{\pi} cosx(cosx - cosxsin^2 x) dx$

b- A l'aide d'une intégration par parties, Montre que $I = \int_0^{\pi} sin^2 x dx - \frac{1}{3} J$

c- Montre de même que $J = \int_0^{\pi} cos^2 x dx - \frac{1}{3} I$

2) a- Montre que $I + J = \frac{3\pi}{4}$.

b- Montre que $J - I = 0$

c- En déduis les intégrales I et J.

Calculs de valeurs moyennes

23 L'intensité du courant qui circule dans une bobine en fonction du temps t, a été modélisée par la fonction i telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$; $i(t) = 5sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$.

1) Détermine la période de cette fonction.

2) Calcule la valeur moyenne de l'intensité $\boldsymbol{i}$ du courant sur cette période.

24 La variation de la température de la larve d'un volcan, a été modélisée par la fonction f telle que pour tout$t \in [10\,;30]$, $f(t) = 3t^2 + 2t$ où t est exprimé en degré Celsius.

- Si la larve est à la température de $10°C$ alors le volcan est au repos.
- Si la larve est à la température de $30°C$ alors le volcan rentre en éruption.

Qu'elle est la température moyenne de la larve ?

25 Suite à un début de contamination de la maladie à **Virus Ebola** dans notre pays, on a constaté que le nombre de personnes ayant contracté la maladie $\boldsymbol{t}$ jours après l'apparition des premiers cas est donné par : $f(t) = 45t^2 - t^3$ Avec $t \in [0\,;25]$.

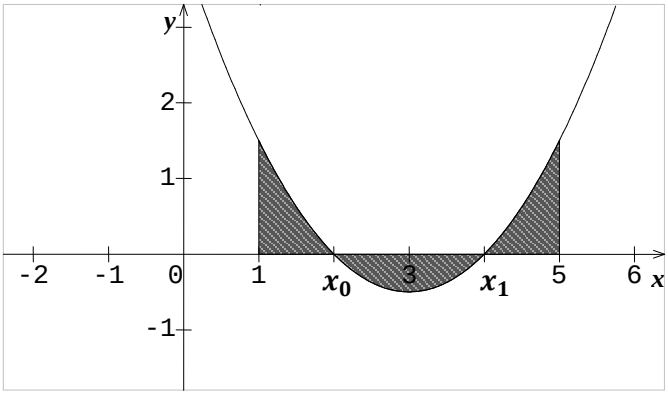
Calcule le nombre moyen de personnes malades durant les huit premiers jours.

Calculs d'aires

26 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$

1) Détermine la valeur de l'intégrale $\int_1^5 f(x)dx$

2) Ci-dessous est donnée la courbe C_f représentative de la fonction f dans un repère orthonormé$(o\ ;\vec{\imath}\ ;\vec{\jmath})$.



On souhaite Détermine la valeur de l'aire du domaine plan grisé.

a- Détermine les zéros $\boldsymbol{x_0}$ et $\boldsymbol{x_1}$ de la fonction f (avec $\boldsymbol{x_0 < x_1}$).

b- Détermine la valeur de l'intégrale $\int_1^{x_0} f(x)dx + \int_{x_1}^{5} f(x)dx$.

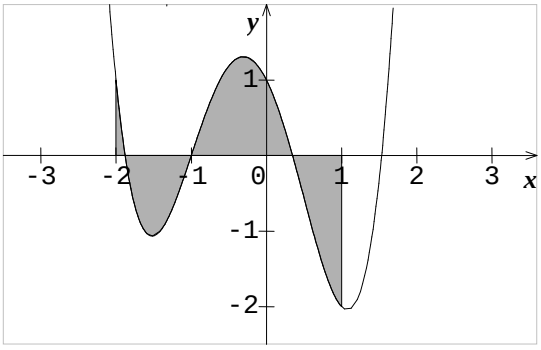
c- Détermine la valeur de l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$.

d- En déduis l'aire de la partie grisée sur le graphique. (Unité graphique : $2cm$)

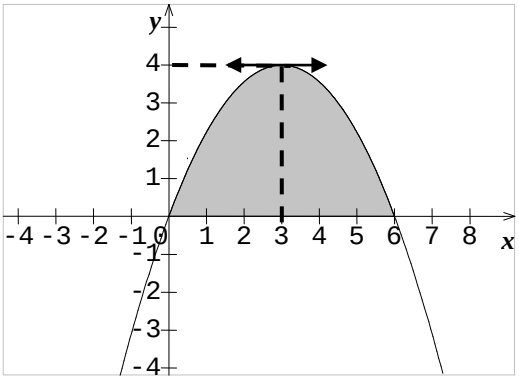
27 Soit la fonction f définie par $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 1$.

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (0 ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) dont les unités graphiques sont : $6cm$ sur l'axe des abscisses et $2cm$ sur l'axe des ordonnées

Calcule l'aire du domaine hachuré en cm^2



28 On considère la courbe ci-dessous représentant une fonction polynôme f de degré **2** dans un repère orthonormé (0 ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) d'unité graphique : $2cm$.



On rappel que $f(x) = ax^2 + bx + c$

1) En utilisant le graphique, déterminer les réels a ; b et c.

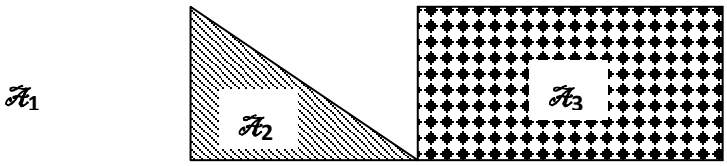
2) En déduire en cm^2 l'aire de la partie

Hachurée sur le graphique.

29 Soient $f: \mapsto 2x^2 - 2x + 1$ et $g: \mapsto x^3 - 3x + 3$ deux fonctions de courbes respectives (C_f) et (C_g)dans un repère orthonormé (0 ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) d'unité graphique : $2cm$.

1) Tracer (C_f) et (C_g) dans le même repère.
2) Calcule en cm^2 l'aire $\mathscr{A}$ de l'ensemble des points M compris entre les courbes (C_f) ; (C_g) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$.

30 On donne la figure suivante dans un repère (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) d'unité graphique 1 cm .



1) Calcule en cm^2 les aires $\mathcal{A}_1$; $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$ hachurer sur le graphique désignant respectivement l'aire d'un demi-cercle, d'un triangle et d'un rectangle.

2) En déduis l'aire totale.

Solutions

Primitives directes

1 En utilisant les formules de primitives directes, calculons l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

1- $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4$ => $F(x) = \frac{4}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 4x + k = x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 4x + k$

2- $f(x) = (x^2 - 3)^3 = x^6 - 9x^4 + 27x^2 - 27$ => $F(x) = \frac{1}{7}x^7 - \frac{9}{5}x^5 + 3x^3 - 27x + k$

3- $f(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{4}{3}x^2 - 1$ => $F(x) = \frac{3}{8}x^4 - \frac{4}{9}x^5 - x + k$

4- $f(x) = \sqrt{-3x + 2}$ => $F(x) = -\frac{2}{9}(-3x + 2)\sqrt{-3x + 2} + k$

5- $f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ => $F(x) = -\frac{3}{x} - 2\sqrt{x} + k$

6- $f(x) = 3(-x + 2)(3x + 2)^2 = -27x^3 - 31x^2 + 60x + 24$ =>

$F(x) = -\frac{27}{4}x^4 - \frac{31}{3}x^3 - 30x^2 + 24x + k$

7- $f(x) = Cos(-6x + 5)$ => $F(x) = -\frac{1}{6}sin(-6x + 5) + k$

8- $f(x) = 3Sin(1 - 4x)$=> $F(x) = \frac{3}{4}cos(1 - 4x) + k$

9- $f(x) = \frac{1}{3Cos^2 3x} = \frac{1}{9} \times \frac{3}{Cos^2 3x}$ => $F(x) = \frac{1}{9} \times (1 + tang^2 3x) + k$

10- $f(x) = \frac{3}{(3x + 1)^3}$ => $F(x) = \frac{-1}{2(3x + 1)^2} + k$

11- $f(x) = (4x - 4)(2x^2 - 4x + 1)^2$ => $F(x) = \frac{1}{3}(2x^2 - 4x + 1)^3 + k$

12- $f(x) = \frac{-6}{\sqrt{-6x + 5}}$ => $F(x) = 2\sqrt{-6x + 5} + k$

13- $f(x) = \frac{-5}{(7x + 3)^3} = \frac{7}{7} \times \frac{-5}{(7x + 3)^3} = \frac{-5}{7} \times \frac{7}{(7x + 3)^3}$ => $F(x) = \frac{-5}{7} \times \frac{-1}{2(7x + 3)^2} + k$

=> $F(x) = \frac{5}{14(7x+3)^2} + k$

14- $f(x) = (x-1)(-3x^2+6x+7)^2 = \frac{-6}{-6} \times (x-1)(-3x^2+6x+7)^2$

$= -\frac{1}{6} \times (-6x+6)(-3x^2+6x+7)^2$ => $F(x) = \frac{-1}{18} \times (-3x^2+6x+7)^3 + k$

15- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-8x+1}} = \frac{-8}{-8} \times \frac{1}{\sqrt{-8x+1}} = \frac{1}{-8} \times \frac{-8}{\sqrt{-8x+1}}$ => $F(x) = -\frac{1}{8} \times 2\sqrt{-8x+1} + k$

=> $F(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{-8x+1} + k$

16- $f(x) = \frac{Sinx - Cosx}{(Cosx + Sinx)^3} = \frac{-(-Sinx + Cosx)}{(Cosx + Sinx)^3} = \frac{1}{2(Cosx + Sinx)^2} + k$

Primitives et linéarisation

2 En utilisant les formules de primitives directes, linéarisons puis calculons l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \text{Sin}^3 x$

Posons θ = x = > $f(x)$ = $\text{Sin}^3\theta = (Sin\theta)^3 = \left(\frac{Z-\bar{Z}}{2i}\right)^3 = \frac{(Z-\bar{Z})^3}{(2i)^3} = \frac{Z^3 - 3Z^2\bar{Z} + 3Z\bar{Z}^2 - \bar{Z}^3}{-8i}$

= > $f(x) = \frac{(Z^3-\bar{Z}^3) + (-3Z^2\bar{Z} + 3Z\bar{Z}^2)}{-8i} = \frac{(Z^3-\bar{Z}^3) - 3Z\bar{Z}(Z-\bar{Z})}{-8i}$

Or $Z^n - \bar{Z}^n = 2i\text{Sin}(n\theta)$ = >$Z^3 - \bar{Z}^3 = 2i\text{Sin}(3\theta)$ et $Z - \bar{Z} = 2i\text{Sin}\theta$

De même $Z^n\bar{Z}^n = 1$ = > $Z\bar{Z} = 1$

= > $f(x) = \frac{2i\text{Sin}(3\theta) + 3(2i\text{Sin}(\theta))}{-8i} = \frac{2i\text{Sin}3\theta + 6i\text{Sin}\theta}{-8i} = \frac{2i}{-8i}(Sin3\theta + 3Sin\theta)$

= > $f(x) = -\frac{1}{4}(Sin3\theta + 3Sin\theta)$ or θ = x

= > $f(x) = -\frac{1}{4}(Sin3x + 3Sinx)$ => $F(x) = -\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{3}cos3x - 3cosx\right] + k$

=> $F(x) = \frac{1}{12}cos3x + \frac{3}{4}cosx + k$

2) $f(x) = Cos^5\frac{x}{2}$

Posons θ = $\frac{x}{2}$ = > $f(x) = \cos^5\theta = (Cos\theta)^5 = \left(\frac{Z+\bar{Z}}{2}\right)^5 = \frac{(Z+\bar{Z})^5}{(2)^5}$

$f(x) = \frac{Z^5 + 5Z^4\bar{Z} + 10Z^3\bar{Z}^2 + 10Z^2\bar{Z}^3 + 5Z\bar{Z}^4 + \bar{Z}^5}{32}$

$=> f(x) = \frac{(Z^5 + \bar{Z}^5) + (5Z^4\bar{Z} + 5Z\bar{Z}^4) + (10Z^3\bar{Z}^2 + 10Z^2\bar{Z}^3)}{32}$

$=> f(x) = \frac{(Z^5 + \bar{Z}^5) + 5Z\bar{Z}(Z^3 + \bar{Z}^3) + 10Z^2\bar{Z}^2(Z + \bar{Z})}{32}$

Or $Z^n + \bar{Z}^n = 2\text{Cos}(n\theta) => Z^5 + \bar{Z}^5 = 2\text{Cos}(5\theta)$; $Z^3 + \bar{Z}^3 = 2\text{Cos}(3\theta)$ et

$Z + \bar{Z} = 2\text{Cos}\theta$

De même $Z^n\bar{Z}^n = 1 => Z\bar{Z} = 1$ et $Z^2\bar{Z}^2 = 1$

$=> f(x) = \frac{2\text{Cos}(5\theta) + 5(2\text{Cos}(3\theta)) + 10(2\text{Cos}\theta)}{32} = \frac{2}{32}(Cos5\theta + 5\,Cos3\theta + 10Cos\theta)$

$=> f(x) = \frac{1}{16}(Cos5\theta + 5\,Cos3\theta + 10Cos\theta)$ or $\theta = \frac{x}{2}$

$=> f(x) = \frac{1}{16}\left(Cos\frac{5x}{2} + 5\,Cos\frac{3x}{2} + 10Cos\frac{x}{2}\right)$

$=> F(x) = \frac{1}{16}\left[\frac{2}{5}sin\frac{5x}{2} + \frac{10}{3}\,sin\frac{3x}{2} + 20sin\frac{x}{2}\right] + k = \frac{1}{40}sin\frac{5x}{2} + \frac{5}{24}\,sin\frac{3x}{2} + \frac{5}{4}sin\frac{x}{2} + k$

3) $f(x) = \text{Cos}^3x \bullet \text{Sin}^3x$

Posons $\theta = x => f(x) = \cos^3\theta \bullet \sin^3\theta = (Cos\theta)^3(Sin\theta)^3 = \left(\frac{Z+\bar{Z}}{2}\right)^3\left(\frac{Z-\bar{Z}}{2i}\right)^3$

$=> f(x) = \frac{(Z+\bar{Z})^3}{(2)^3} \times \frac{(Z-\bar{Z})^3}{(2i)^3} = \frac{(Z+\bar{Z})^3(Z-\bar{Z})^3}{-64i}$

$=> f(x) = \frac{(Z^3 + 3Z^2\bar{Z} + 3Z\bar{Z}^2 + \bar{Z}^3)(Z^3 - 3Z^2\bar{Z} + 3Z\bar{Z}^2 - \bar{Z}^3)}{-64i}$

Après development, on a :

$f(x) = \frac{(Z^6 - \bar{Z}^6) + (-3\,Z^4\bar{Z}^2 + 3Z^2\bar{Z}^4)}{-64i} = \frac{(Z^6 - \bar{Z}^6) - 3Z^2\bar{Z}^2(Z^2 - \bar{Z}^2)}{-64i}$

Or $Z^n - \bar{Z}^n = 2i\text{Sin}(n\theta) => Z^6 - \bar{Z}^6 = 2i\text{Sin}(6\theta)$ et $Z^2 - \bar{Z}^2 = 2i\text{Sin}(2\theta)$

De même $Z^n\bar{Z}^n = 1 => Z^2\bar{Z}^2 = 1$

$=> f(x) = \frac{2i\text{Sin}(6\theta) - 3(2i\text{Sin}(2\theta))}{-64i} = \frac{2i}{-64i}(Sin6\theta - 3Sin2\theta) = \frac{1}{32}(Sin6\theta - 3Sin2\theta)$

Or $\theta = x => f(x) = \frac{1}{32}(Sin6x - 3Sin2x)$

=> $F(x) = \frac{1}{32}\left[-\frac{1}{6}cos6x + \frac{3}{2}cos2x\right] + k = -\frac{1}{192}cos6x + \frac{3}{64}cos2x + k$

4) $f(x) = \text{Sin}^3(-x+3)$

Posons $\theta = -x+3$ => $f(x) = \text{Sin}^3\theta = (Sin\theta)^3 = \left(\frac{Z-\bar{Z}}{2i}\right)^3 = \frac{(Z-\bar{Z})^3}{(2i)^3} = \frac{Z^3 - 3Z^2\bar{Z} + 3Z\bar{Z}^2 - \bar{Z}^3}{-8i}$

=> $f(x) = \frac{(Z^3-\bar{Z}^3)+(-3Z^2\bar{Z}+3Z\bar{Z}^2)}{-8i} = \frac{(Z^3-\bar{Z}^3) - 3Z\bar{Z}(Z-\bar{Z})}{-8i}$

Or $Z^n - \bar{Z}^n = 2i\text{Sin}(n\theta)$ => $Z^3 - \bar{Z}^3 = 2i\text{Sin}(3\theta)$ et $Z - \bar{Z} = 2i\text{Sin}\theta$

De même $Z^n\bar{Z}^n = 1$ => $Z\bar{Z} = 1$

=> $f(x) = \frac{2i\text{Sin}(3\theta) + 3(2i\text{Sin}(\theta))}{-8i} = \frac{2i\text{Sin}3\theta + 6i\text{Sin}\theta}{-8i} = \frac{2i}{-8i}(Sin3\theta + 3Sin\theta)$

=> $f(x) = -\frac{1}{4}(Sin3\theta + 3Sin\theta)$ or $\theta = -x+3$

=> $f(x) = -\frac{1}{4}[Sin3(-x+3) + 3Sin(-x+3)]$

=> $f(x) = -\frac{1}{4}[Sin(-3x+9) + 3Sin(-x+3)]$

=> $F(x) = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}cos(-3x+9) - 3cos(-x+3)\right] + k$

=> $F(x) = -\frac{1}{12}cos(-3x+9) + \frac{3}{4}cos(-x+3) + k$

Primitives vérifiant une condition

3 Détermine la primitive F de la fonction f vérifiant les conditions indiquées :

1- $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ et F(0) = 7

$f(x) = x^3 - x^2 - 1$ => $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x + k$. Or F(0) = 7 $\Leftrightarrow k = 7$.

D'où $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x + 7$

2- $f(x) = (x-3)^6$ et F(3) = 0

$f(x) = (x-3)^6$ => $F(x) = \frac{(x-3)^7}{7} + k$. Or F(3) = 0 $\Leftrightarrow k = 0$

D'où $F(x) = \frac{(x-3)^7}{7}$

3- $f(x) = \frac{2}{(3-x)^3}$ et F(0) = 0

$f(x) = \frac{2}{(3-x)^3} = -2 \times \frac{-1}{(3-x)^3}$ => $F(x) = -2 \times \frac{-1}{2(3-x)^2} + k = \frac{1}{(3-x)^2} + k$

Or F(0) = 0 $\Leftrightarrow$ $k = \frac{1}{9}$. D'où $F(x) = \frac{1}{(3-x)^2} + \frac{1}{9}$

5- $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}$ et F(0) = $\sqrt{5}$

$f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \frac{2}{2} \times \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \frac{1}{2} \times \frac{2x-6}{\sqrt{x^2-6x+5}}$

=> $F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2-6x+5} + k$ => $F(x) = \sqrt{x^2-6x+5} + k$. Or F(0) = $\sqrt{5}$ $\Leftrightarrow$

$\sqrt{5} + k = \sqrt{5} \Leftrightarrow k = 0$. D'où $F(x) = \sqrt{x^2-6x+5} +$

6- $f(x) = \frac{Sinx}{Cos^2x}$ et F$\left(\frac{\pi}{3}\right)$ = 1

$f(x) = \frac{Sinx}{Cos^2x}$ => $F(x) = -\frac{1}{cosx} + k$. Or F$\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{\frac{1}{2}} + k = 1 \Leftrightarrow -2 + k = 1$

=> $k = 3$. D'où $F(x) = -\frac{1}{cosx} + 3$

4 Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to \frac{3x^3-7x^2+5x+1}{(x-1)^2}$$

1) Déterminons l'ensemble de définition.

D$f = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

2) Déterminons les réels a, b et c tel que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$

La division Euclidienne de $(3x^3 - 7x^2 + 5x + 1)$ par $(x-1)^2$ donne :

$f(x) = 3x - 1 + \frac{2}{(x-1)^2}$. Par identification avec $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$

On a : $a = 3$; $b = -1$ et $c = 2$

3) En déduisons la primitive de f qui s'annule en 0

$f(x) = 3x - 1 + \frac{2}{(x-1)^2}$ => $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{2}{x-1} + k$. Or F(0) = 0 ⇔ $k = -2$

D'où $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{2}{x-1} - 2$

5 Soit les fonctions f et F définies par : $f(x) = x\sqrt{3 - 2x}$ et F(x) = $(ax^2 + bx + c)\sqrt{3-2x}$

Déterminons les réels a ; b et c tel que∀ $x \in \left]-\infty ; \frac{3}{2}\right]$, F soit une primitive de f sur $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right]$

NB : F est une primitive de f si et seulement si F'$(x) = f(x)$

F(x) = $(ax^2 + bx + c)\sqrt{3-2x}$ => F'$(x) = \frac{-5ax^2 + x(6a - 3b) + (3b - c)}{\sqrt{3-2x}}$. Or

$f(x) = x\sqrt{3 - 2x}$. Par identification : F'$(x) = f(x)$ ⇔

$\frac{-5ax^2 + x(6a - 3b) + (3b - c)}{\sqrt{3-2x}} = x\sqrt{3 - 2x}$ ⇔

$-5ax^2 + x(6a - 3b) + (3b - c) = x(3 - 2x)$ ⇔

$-5ax^2 + x(6a - 3b) + (3b - c) = -2x^2 + 3x$. Par identification, on a :

$a = \frac{2}{5}$; $b = -\frac{1}{5}$ et $c = -\frac{3}{5}$

D'où $F(x) = \left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}\right)\sqrt{3-2x} = \frac{1}{5}(2x^2 - x - 3)\sqrt{3-2x} + k$

Intégrales

Intégrations à l'aide d'une primitive

6 En utilisant les formules des primitives, calculons les intégrales suivantes :

1) $I = \int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 2x - 5)dx$ => $I = [x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x]_0^1$

=> $I = F(1) - F(0) = (-3) - (0) = -3$

2) $I = \int_{-\pi}^{\pi} Sin(-2x + \pi)dx$ => $I = \left[\frac{1}{2}cos(-2x + \pi)\right]_{-\pi}^{\pi}$

=> $I = F(\pi) - F(-\pi) = \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

3) $I = \int_0^4 \sqrt{4x + 9}dx$ => $I = \left[\frac{1}{6}(4x + 9)\sqrt{4x + 9}\right]_0^4$

$=> I = F(4) - F(0) = \left(\frac{125}{6}\right) - \left(\frac{9}{2}\right) = \frac{49}{3}$

4) $I = -4\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{5}{x^3}dx = -20\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^3}dx = -20\left[-\frac{1}{x^2}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \left[\frac{20}{x^2}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}$

$=> I = F(\sqrt{3}) - F(\sqrt{2}) = \left(\frac{20}{3}\right) - \left(\frac{20}{2}\right) = -\frac{10}{3}$

5) $I = \int_{-1}^{2}(x+2)\sqrt{x+2}dx = \int_{-1}^{2}(x+2)^{\frac{3}{2}}dx \Rightarrow I = \left[\frac{(x+2)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_{-1}^{2}$

$=> I = \left[\frac{2}{5}(x+2)^2\sqrt{x+2}\right]_{-1}^{2} => I = F(2) - F(-1) = \left(\frac{64}{5}\right) - \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{62}{5}$

6) $I = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} => I = \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx => I = \left[2\sqrt{x-1}\right]_2^5$

$=> I = F(5) - F(2) = (4) - (2) = 2$

7) $I = \int_1^2 \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx \Rightarrow I = \int_1^2 \frac{-2}{-2} \times \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx = \frac{1}{-2} \times \int_1^2 \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$

$=> I = -\frac{1}{2} \times \left[2\sqrt{x^2-2x+5}\right]_1^2 = \left[-\sqrt{x^2-2x+5}\right]_1^2$

$=> I = F(2) - F(1) = \left(-\sqrt{5}\right) - (-2) = -\sqrt{5} + 2$

8) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{Sinx - Cosx}{(Cox + Sinx)^2}dx => I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-(-Sinx + Cosx)}{(Cox + Sinx)^2}dx = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-Sinx + Cosx}{(Cox + Sinx)^2}dx$

$=> I = -\left[\frac{-1}{Cox + Sinx}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{1}{Cox + Sinx}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} => I = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (1) - (-1)$

$=> I = 2$

9) $I = \int_0^1 (x^2 - 1)(x^3 - 3x + 1)^3 dx => I = \int_0^1 \frac{3}{3}(x^2 - 1)(x^3 - 3x + 1)^3 dx$

$=> I = \frac{1}{3}\int_0^1 (3x^2 - 3)(x^3 - 3x + 1)^3 dx => I = \left[\frac{(x^3-3x+1)^4}{4}\right]_0^1$

$=> I = F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) = 0$

10) $I = \int_0^1 (-2x+1)\sqrt{5x^2-5x+4}\,dx = \int_0^1 (-2x+1)(5x^2-5x+4)^{\frac{1}{2}}dx$

$=> I = \frac{-5}{-5} \times \int_0^1 (-2x+1)(5x^2-5x+4)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{-5}\int_0^1 (10x-5)(5x^2-5x+4)^{\frac{1}{2}} dx$

$=> I = \frac{1}{-5}\left[\frac{(5x^2-5x+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \left[-\frac{2}{15}(5x^2-5x+4)\sqrt{5x^2-5x+4}\right]_0^1$

$=> I = F(1) - F(0) = \left(-\frac{16}{15}\right) - \left(-\frac{16}{15}\right) = 0$

11) $I = \int_0^2 |x^2-3x+2| dx = \int_0^1 (x^2-3x+2) dx + \int_1^2 (-x^2+3x-2) dx$

$=> I = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x\right]_1^2$

$=> I = [F(0) - F(1)] + [F(1) - F(2)] = [F(0) - F(1)] + [F(1) - F(2)]$

$=> I = \left[\left(-\frac{1}{6}\right) - (0)\right] + \left[\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{5}{6}\right)\right] = -\frac{1}{6} - \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = 0$

12) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |cos(2x-\pi)| dx => I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos(2x-\pi) dx => I = \left[\frac{1}{2}sin(2x-\pi)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=> I = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \left(-\frac{1}{2}\right) - (0) = -\frac{1}{2}$

Intégrations par parties

7 En utilisant la formule de l'intégration par partie, calculons les intégrales suivantes :

1) $I = \int_0^{\pi} xSin2x dx$

Posons : $u(x) = x => u'(x) = 1$

$v'(x) = sin2x => v(x) = -\frac{1}{2}cos2x$

Alors $I = \left[-\frac{x}{2}cos2x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{2}cos2x dx = \left[-\frac{x}{2}cos2x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} cos2x dx =>$

$I = \left[-\frac{x}{2}cos2x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}sin2x\right]_0^{\pi} = \left[-\frac{x}{2}cos2x\right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{4}sin2x\right]_0^{\pi} = \left[-\frac{x}{2}cos2x + \frac{1}{4}sin2x\right]_0^{\pi}$

$=> I = F(\pi) - F(0) = \left(-\frac{\pi}{2}\right) - (0) = -\frac{\pi}{2}$

2) $I = \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx = \int_{-1}^2 x \times \frac{1}{\sqrt{x+2}} dx$

Posons : $u(x) = x => u'(x) = 1$

$$v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} \Rightarrow v(x) = 2\sqrt{\square + 2}$$

Alors $I = \left[2x\sqrt{x+2}\right]_{-1}^{2} - \int_{-1}^{2} 2\sqrt{x+2}dx = \left[2x\sqrt{x+2}\right]_{-1}^{2} - 2\int_{-1}^{2}\sqrt{x+2}dx \Rightarrow$

$I = \left[2x\sqrt{x+2}\right]_{-1}^{2} - 2\left[\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}\right]_{-1}^{2} = \left[2x\sqrt{x+2}\right]_{-1}^{2} - \left[\frac{4}{3}(x+2)\sqrt{x+2}\right]_{-1}^{2}$

$\left[2x\sqrt{x+2} - \frac{4}{3}(x+2)\sqrt{x+2}\right]_{-1}^{2}$

$\Rightarrow I = F(2) - F(-1) = \left(-\frac{8}{3}\right) - \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{2}{3}$

3) I = $\int_0^4 x\sqrt{4x+9}dx$

Posons : $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$$v'(x) = \sqrt{4x+9} \Rightarrow v(x) = \frac{1}{6}(4x+9)\sqrt{4x+9}$$

Alors $I = \left[\frac{1}{6}(4x^2+9x)\sqrt{4x+9}\right]_0^4 - \int_0^4 \frac{1}{6}(4x+9)\sqrt{4x+9}dx$

$\Rightarrow I = \left[\frac{1}{6}(4x^2+9x)\sqrt{4x+9}\right]_0^4 - \frac{1}{6}\int_0^4 (4x+9)\sqrt{4x+9}dx$

$= \left[\frac{1}{6}(4x^2+9x)\sqrt{4x+9}\right]_0^4 - \frac{1}{24}\int_0^4 4(4x+9)^{\frac{3}{2}}dx$

$= \left[\frac{1}{6}(4x^2+9x)\sqrt{4x+9}\right]_0^4 - \frac{1}{24}\left[\frac{(4x+9)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^4$

$= \left[\frac{1}{6}(4x^2+9x)\sqrt{4x+9}\right]_0^4 - \frac{1}{60}\left[(4x+9)^{\frac{5}{2}}\right]_0^4$

$= \left[\frac{1}{6}(4x^2+9x)\sqrt{4x+9}\right]_0^4 - \frac{1}{60}\left[(4x+9)^2\sqrt{4x+9}\right]_0^4$

$= \left[\frac{1}{6}(4x^2+9x)\sqrt{4x+9}\right]_0^4 - \left[\left(\frac{x}{15}+\frac{3}{20}\right)\sqrt{4x+9}\right]_0^4$

$= \left[\frac{1}{6}(4x^2+9x)\sqrt{4x+9} - \left(\frac{x}{15}+\frac{3}{20}\right)\sqrt{4x+9}\right]_0^4$

$\Rightarrow I = F(4) - F(0) = \left(\frac{250}{3}\right) - \left(\frac{25}{12}\right) = \frac{325}{4}$

4) I = $\int_{-2}^{1}(x-5)\sqrt{2-x}dx$

Posons : $u(x) = x - 5$ => $u'(x) = 1$

$v'(x) = \sqrt{2-x}$ => $v(x) = -\frac{2}{3}(2-x)\sqrt{2-x}$

Alors $I = \left[-\frac{2}{3}(2-x)(x-5)\sqrt{2-x}\right]_{-2}^{1} + \int_{-2}^{1}\frac{2}{3}(2-x)\sqrt{2-x}dx$

=> $I = \left[-\frac{2}{3}(2-x)(x-5)\sqrt{2-x}\right]_{-2}^{1} + \frac{2}{3}\int_{-2}^{1}(2-x)^{\frac{3}{2}}dx$

$= \left[-\frac{2}{3}(2-x)(x-5)\sqrt{2-x}\right]_{-2}^{1} - \frac{2}{3}\int_{0}^{4} -(2-x)^{\frac{3}{2}}\,dx$

$= \left[-\frac{2}{3}(2-x)(x-5)\sqrt{2-x}\right]_{-2}^{1} - \frac{2}{3}\left[\frac{(2-x)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_{-2}^{1}$

$= \left[-\frac{2}{3}(2-x)(x-5)\sqrt{2-x}\right]_{-2}^{1} - \frac{4}{15}\left[(2-x)^{\frac{5}{2}}\right]_{-2}^{1}$

$= \left[-\frac{2}{3}(2-x)(x-5)\sqrt{2-x}\right]_{-2}^{1} - \frac{4}{15}\left[(2-x)^{\frac{5}{2}}\right]_{-2}^{1}$

$= \left[-\frac{2}{3}(2-x)(x-5)\sqrt{2-x}\right]_{-2}^{1} - \frac{4}{15}\left[(2-x)^{2}\sqrt{2-x}\right]_{-2}^{1}$

$= \left[-\frac{2}{3}(2-x)(x-5)\sqrt{2-x} - \frac{4}{15}(2-x)^{2}\sqrt{2-x}\right]_{-2}^{1}$

=> $I = F(1) - F(-2) = \left(\frac{12}{5}\right) - \left(\frac{144}{5}\right) = -\frac{132}{5}$

5) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 Cos(x+\pi)dx$

Posons : $u(x) = x^2$ => $u'(x) = 2x$

$v'(x) = cos(x+\pi)$ => $v(x) = sin(x+\pi)$

Alors $I = [x^2 sin(x+\pi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2xsin(x+\pi)\,dx$ =>

$I = [x^2 sin(x+\pi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xsin(x+\pi)\,dx$. Posons $A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xsin(x+\pi)\,dx$

=> $I = [x^2 sin(x+\pi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 2A$. Intégrons ainsi par partie $A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xsin(x+\pi)\, dx$

$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xsin(x+\pi)\, dx$

Posons : $u(x) = x$ => $u'(x) = 1$

$v'(x) = sin(x+\pi)$ => $v(x) = -cos(x+\pi)$

Alors $A = [-xcos(x+\pi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos(x+\pi)dx = [-xcos(x+\pi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + [sin(x+\pi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

=> $A = [-xcos(x+\pi) + sin(x+\pi)\ ]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

=> $I = [x^2 sin(x+\pi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 2A$. Avec $A = [-xcos(x+\pi) + sin(x+\pi)\ ]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

=> $I = [x^2 sin(x+\pi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 2[-xcos(x+\pi) + sin(x+\pi)\ ]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

=> $I = [x^2 sin(x+\pi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + [2xcos(x+\pi) - 2sin(x+\pi)\ ]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

=> $I = [x^2 sin(x+\pi) + 2xcos(x+\pi) - 2sin(x+\pi)\ ]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

=> $I = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{-\pi^2+8}{4}\right) - \left(\frac{\pi^2-8}{4}\right) = \frac{-\pi^2}{2}$

8 Soient les intégrales I et J définies par : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)Cos^2 2x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)Sin^2 2x dx$

1) Calculons : $I + J$.

$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)Cos^2 2x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)Sin^2 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)(cos^2 2x + sin^2 2x) dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

=> $I = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \left(\frac{\pi^2+4\pi}{8}\right) - (0) = \frac{\pi^2+4\pi}{8}$

2) Calculons : I – J en utilisant la technique de l'intégration par parties.

$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)Cos^2 2x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)Sin^2 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)(cos^2 2x - sin^2 2x)dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)(cos4x)dx$

Posons : $u(x) = x + 1 \Rightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = cos4x \Rightarrow v(x) = \frac{1}{4}sin4x$

Alors $I - J = \left[\frac{(x+1)}{4}sin4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}sin4x\, dx$

$\Rightarrow I - J = \left[\frac{(x+1)}{4}sin4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin4x\, dx = \left[\frac{(x+1)}{4}sin4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{4}cos4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left[\frac{(x+1)}{4}sin4x + \frac{1}{16}cos4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow I - J = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \left(\frac{1}{16}\right) - \left(\frac{1}{16}\right) = 0$

3) En déduisons les valeurs de I et J.

D'après les questions **1)** et **2)**, on a : $I + J = \frac{\pi^2 + 4\pi}{8}$ et $I - J = 0$

Formons ainsi le système avec $I + J$ et $I - J$

$$\begin{cases} I + J = \frac{\pi^2 + 4\pi}{8} & \textbf{(1)} \\ I - J = 0 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

La somme des équations **(1) et (2)** donne : $2I = \frac{\pi^2 + 4\pi}{8} \Rightarrow I = \frac{\pi^2 + 4\pi}{16}$

En remplaçant I par sa valeur dans l'équation **(2),** on obtient $\frac{\pi^2 + 4\pi}{16} - J = 0 \Rightarrow$

$J = \frac{\pi^2 + 4\pi}{16}$

Intégrations par changement de variable

9 En utilisant un changement de variable, calculons les intégrales suivantes :

1) $I = \int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$

Posons $u = x + 2 \Rightarrow x = u - 2$. Alors $dx = du$

Si $x = -1$ alors $u = 1$ et Si $x = 2$ alors $u = 4$

=> $I = \int_1^4 \frac{u-2}{\sqrt{u}} du = \int_1^4 \frac{u}{\sqrt{u}} du - \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{u}} du = \int_1^4 \sqrt{u}\, du - \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{u}} du$

$= \int_1^4 \sqrt{u}\, du - 2\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{u}} du$ => $I = \left[\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_1^4 - 2\left[2\sqrt{u}\right]_1^4 = \left[\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_1^4 - \left[4\sqrt{u}\right]_1^4$

=> $I = \left[\frac{2}{3}u\sqrt{u} - 4\sqrt{u}\right]_1^4$

=> $I = F(4) - F(1) = \left(-\frac{8}{3}\right) - \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{2}{3}$

2) $I = \int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$

Posons $u = x^2 - 1$ => $x^2 = u + 1$ => $x = \sqrt{u+1}$. Alors $2xdx = du$

=> $dx = \frac{du}{2x}$. Or $x = \sqrt{u+1}$ => $dx = \frac{du}{2\sqrt{u+1}}$

Si $x = -1$ alors $u = 0$ et Si $x = 2$ alors $u = 3$

=> $I = \int_0^3 \frac{\sqrt{u+1}}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2\sqrt{u+1}} = \int_0^3 \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{u}} du$

=> $I = \frac{1}{2}\left[2\sqrt{u}\right]_0^3 = \left[\sqrt{u}\right]_0^3$ => $I = F(3) - F(0) = \sqrt{3} - 0 = \sqrt{3}$

10 Soit le polynôme p définie par : $p(x) = x^3 - 12x - 16$.

1) Montrons que -2 est un zéro double de P.

-2 est un zéro double de P si et seulement si $x^3 - 12x - 16$ est divisible par $(x+2)^2$

La division Euclidienne de $x^3 - 12x - 16$ par $(x+2)^2$ donne pour quotient $x - 4$ et pour reste 0. D'où -2 est un zéro double de P. Ainsi la forme factorisée de P est :

$p(x) = (x-4)(x+2)^2$.

2) En utilisant la méthode de l'intégration par partie et la méthode par changement de variable, calculons l'intégrale : $I = \int_4^5 \sqrt{p(x)} dx$

$I = \int_4^5 \sqrt{p(x)} dx = \int_4^5 \sqrt{(x-4)(x+2)^2} dx = \int_4^5 (x+2)\sqrt{x-4} dx$.

- Méthode d'intégration par parties :

$I = \int_4^5 (x+2)\sqrt{x-4}dx$

Posons : $u(x) = x+2 \Rightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = \sqrt{x-4} \Rightarrow v(x) = \frac{2}{3}(x-4)\sqrt{x-4}$

Alors $I = \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4}\right]_4^5 - \int_4^5 \frac{2}{3}(x-4)\sqrt{x-4}dx$

$\Rightarrow I = \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4}\right]_4^5 - \frac{2}{3}\int_4^5 (x-4)^{\frac{3}{2}}dx$

$= \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4}\right]_4^5 - \frac{2}{3}\left[\frac{(x-4)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_4^5$

$= \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4}\right]_4^5 - \frac{4}{15}\left[(x-4)^{\frac{5}{2}}\right]_4^5$

$= \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4}\right]_4^5 - \frac{4}{15}\left[(x-4)^{\frac{5}{2}}\right]_4^5$

$= \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4}\right]_4^5 - \frac{4}{15}\left[(x-4)^2\sqrt{x-4}\right]_4^5$

$= \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4} - \frac{4}{15}(x-4)^2\sqrt{x-4}\right]_4^5$

$\Rightarrow I = F(5) - F(4) = \left(\frac{22}{5}\right) - (0) = \frac{22}{5}$

- Méthode d'intégration par changement de variable :

$I = \int_4^5 (x+2)\sqrt{x-4}dx$

Posons $u = x-4 \Rightarrow = u+4$. Alors $dx = du$

Si $x = 4$ alors $u = 0$ et Si $x = 5$ alors $u = 1$

$\Rightarrow I = \int_0^1 (u+4+2)\sqrt{u}\,du = \int_0^1 (u+6)\sqrt{u}\,du = \int_0^1 \left(u\sqrt{u} + 6\sqrt{u}\right)du$

$= \int_0^1 \left(u^{\frac{3}{2}} + 6\sqrt{u}\right)du = \int_0^1 u^{\frac{3}{2}}\,du + \int_0^1 6\sqrt{u}\,du = \int_0^1 u^{\frac{3}{2}}\,du + 6\int_0^1 \sqrt{u}\,du$

$\Rightarrow I = \left[\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^1 + 6\left[\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{5}u^2\sqrt{u}\right]_0^1 + \left[4u\sqrt{u}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{5}u^2\sqrt{u} + 4u\sqrt{u}\right]_0^1$

=> $I = F(1) - F(0) = \left(\frac{22}{5}\right) - (0) = \frac{22}{5}$

Intégrales et suites

11 Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^n x\, dx$

1) En utilisant la technique d'intégration par parties, trouvons une relation entre I_n et I_{n-2} (On posera : $Sin^n x = Sin^{n-1}x \bullet Sinx$)

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{n-1}x \bullet Sinx\, dx$

Posons : $u(x) = Sin^{n-1}x$ => $u'(x) = (n-1)cosxSin^{n-2}x$

$v'(x) = Sinx$ => $v(x) = -cosx$

Alors $I_n = [-cosxSin^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -cosx(n-1)cosxSin^{n-2}x\, dx$

=> $I_n = [-cosxSin^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 xSin^{n-2}x\, dx$

$= [-cosxSin^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - sin^2 x)Sin^{n-2}x\, dx$

$= [-cosxSin^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (Sin^{n-2}x - sin^n x)\, dx$

$= [-cosxSin^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{n-2}x\, dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^n x\, dx$

$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{n-2}x\, dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^n x\, dx.$ Avec $[-cosxSin^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$

=> $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \Leftrightarrow I_n + (n-1)I_n = (n-1)I_{n-2} \Leftrightarrow$

$I_n(1 + n - 1) = (n-1)I_{n-2} \Leftrightarrow nI_n = (n-1)I_{n-2} \Leftrightarrow$ => $I_n = \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$

D'où la relation entre I_n et I_{n-2} est $I_n = \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$.

2) On donne $I_0 = \frac{\pi}{2}$. Calculons : I_2 et I_4

On sait que : $I_n = \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$.

- Pour $n = 2$; on a : $I_2 = \frac{(2-1)}{2} I_{2-2} = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

- Pour $n = 4$; on a : $I_4 = \frac{(4-1)}{4} I_{4-2} = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{16}$.

12 Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$ $(n \geq 0)$

1) Calculons I_0

$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$ => $I_0 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{2}{2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

=> $I_0 = \frac{1}{2}\left[2\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1$. => $I_0 = F(1) - F(0) = \left(\sqrt{2}\right) - (1) = \sqrt{2} - 1$

=> $I_0 = \sqrt{2} - 1$

2) En intégrant par parties, montrons que $\forall\, n \geq 1$ on a : $(2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1}$.

$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x^{2n} \bullet x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 x^{2n} \bullet \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{2n} \bullet \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

Posons $u(x) = x^{2n}$ => $u'(x) = 2nx^{2n-1}$

$v'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ => $v(x) = 2\sqrt{1+x^2}$

=> $I_n = \frac{1}{2}\left[2x^{2n}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 4nx^{2n-1}\sqrt{1+x^2}\, dx$

$= \left[x^{2n}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - 2n\int_0^1 x^{2n-1}\sqrt{1+x^2}\, dx$

En rendant rationnelle $\sqrt{1+x^2}$; on a : $\sqrt{1+x^2} = \frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)\left(\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

=> $I_n = \left[x^{2n}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - 2n\int_0^1 x^{2n-1} \times \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$

$= \left[x^{2n}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - 2n\int_0^1 \frac{(1+x^2)x^{2n-1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$

$= \left[x^{2n}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - 2n\int_0^1 \frac{x^{2n-1} + x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$

$= \left[x^{2n}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - 2n\int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{1+x^2}} dx - 2n\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$

Or $\left[x^{2n}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \sqrt{2}$ => $I_n = \sqrt{2} - 2n\int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{1+x^2}} dx - 2n\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$

$$= -2nI_{n-1} \ -2nI_n$$

=> $I_n + 2nI_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1} \Leftrightarrow (2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1}$

D'où la relation : $(2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1}$

3) En déduisons la valeur de I_1 ; I_2 et I_3.

- Pour $n = 1$; on a : $3I_1 = \sqrt{2} - 2I_0 = \sqrt{2} - 2\left(\sqrt{2} - 1\right) = 2 - \sqrt{2}$ => $I_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$
- Pour $n = 2$; on a : $5I_2 = \sqrt{2} - 4I_1 = \sqrt{2} - 4\left(\frac{2-\sqrt{2}}{3}\right)$ => $I_2 = \frac{-8+7\sqrt{2}}{15}$
- Pour $n = 3$; on a : $7I_3 = \sqrt{2} - 6I_2$ => $I_3 = \frac{48-27\sqrt{2}}{105}$

13 Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_{-1}^{1}(t^2-1)^n dt$ ($n \in \mathbb{N}$)

1) Démontrons que $I_n = 2\int_0^1(t^2-1)^n dt$ puis calculons I_0

Appliquons la relation de Chasles entre -1 et 1.

=> $I_n = \int_{-1}^{1}(t^2-1)^n dt = \int_{-1}^{0}(t^2-1)^n dt + \int_0^1(t^2-1)^n dt$

Ainsi posons $A = \int_{-1}^{0}(t^2-1)^n dt$ puis Effectuons un changement de variable.

Posons $t = -X$ => $X = -t$. Alors $dt = -dX$

Si $t = -1$ alors $X = 1$ et Si $t = 0$ alors $X = 0$

=> $A = \int_{-1}^{0}(t^2-1)^n dt = -\int_{-1}^{0}(t^2-1)^n dt = \int_0^1(t^2-1)^n dt$

D'où $I_n = \int_0^1(t^2-1)^n dt + \int_0^1(t^2-1)^n dt = 2\int_0^1(t^2-1)^n dt$

=> $I_n = 2\int_0^1(t^2-1)^n dt$ (ce qu'il fallait Démontre)

En déduisons la valeur de I_0

$I_n = 2\int_0^1(t^2-1)^n dt$ => $I_0 = 2\int_0^1(t^2-1)^0 dt = 2\int_0^1 1dt = [2t]_0^1 = 2.$

=> $I_0 = 2$

2) Démontrons que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; on a : $I_n = -\frac{2n}{1+2n} I_{n-1}$

On sait que $I_n = 2\int_0^1(t^2-1)^n dt$ => $I_{n-1} = 2\int_0^1(t^2-1)^{n-1} dt$

$I_n = 2\int_0^1 (t^2-1)^n dt = 2\int_0^1 (t^2-1)^{n-1+1} = 2\int_0^1 (t^2-1)^{n-1} \times (t^2-1)dt$

$= 2\int_0^1 t^2(t^2-1)^{n-1} dt - 2\int_0^1 (t^2-1)^{n-1} dt$

$= 2\int_0^1 t \times t(t^2-1)^{n-1} dt - 2\int_0^1 (t^2-1)^{n-1} dt$

$= \int_0^1 t \times 2t(t^2-1)^{n-1} dt - 2\int_0^1 (t^2-1)^{n-1} dt = \int_0^1 t \times 2t(t^2-1)^{n-1} dt - I_{n-1}$

=> $I_n = \int_0^1 t \times 2t(t^2-1)^{n-1} dt - I_{n-1}$

Intégrons par partie l'intégrale $\int_0^1 t \times 2t(t^2-1)^{n-1} dt$

Posons $u(t) = t$ => $u'(t) = 1$

$v'(t) = 2t(t^2-1)^{n-1}$ => $v(t) = \frac{(t^2-1)^n}{n}$

=> $\int_0^1 t \times 2t(t^2-1)^{n-1} dt = \left[\frac{t\times(t^2-1)^n}{n}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(t^2-1)^n}{n} dx$. Or $\left[\frac{t\times(t^2-1)^n}{n}\right]_0^1 = 0$

=> $\int_0^1 t \times 2t(t^2-1)^{n-1} dt = -\frac{1}{2n}\int_0^1 2(t^2-1)^n dx = -\frac{1}{2n} I_n$

D'où $I_n = \int_0^1 t \times 2t(t^2-1)^{n-1} dt - I_{n-1} = -\frac{1}{2n} I_n - I_{n-1}$

=> $I_n = -\frac{1}{2n} I_n - I_{n-1} \Leftrightarrow I_n + \frac{1}{2n} I_n = -I_{n-1} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{2n}\right) I_n = -I_{n-1} \Leftrightarrow$

$\left(\frac{2n+1}{2n}\right) I_n = -I_{n-1}$ => $I_n = -\frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$

D'où $I_n = -\frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$ (ce qu'il fallait Démontre)

14 Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{Cos^{2n+1}x}$

1) Déterminons le seul réel a tel que : $\forall\ x \left[0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$ on a : $\frac{1}{Cosx} = \frac{aCosx}{1-Sinx} + \frac{aCosx}{1+Sinx}$.

$\frac{1}{Cosx} = \frac{aCosx}{1-Sinx} + \frac{aCosx}{1+Sinx} \Leftrightarrow \frac{1}{Cosx} = \frac{aCosx\,(1+Sinx) + aCosx\,(1-Sinx)}{(1-Sinx)(1+Sinx)}$

=> $\frac{1}{Cosx} = \frac{aCosx\,(1+Sinx+1-sinx)}{1-sin^2x} = \frac{2aCosx}{cos^2x} = \frac{2a}{cosx}$. => $\frac{1}{Cosx} = \frac{2a}{cosx}$

Par identification, on a : $2a = 1$ => $a = \frac{1}{2}$

D'où $\frac{1}{Cosx} = \frac{Cosx}{2(1-Sinx)} + \frac{Cosx}{2(1+Sinx)}$.

2) Calculons la valeur de I_0.

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{Cos^{2n+1}x}$ => $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{Cosx}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{Cosx}{2(1-Sinx)} + \frac{Cosx}{2(1+Sinx)}\right) dx$

=> $I_0 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{Cosx}{1-Sinx} + \frac{Cosx}{1+Sinx}\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{Cosx}{1-Sinx}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{Cosx}{1+Sinx}\,dx$

=> $I_0 = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-Cosx}{1-Sinx}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{Cosx}{1+Sinx}\,dx$

=> $I_0 = -\frac{1}{2}[ln(1-sinx)]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}[ln(1+sinx)]_0^{\frac{\pi}{4}}$. Puisque $\frac{1}{2}\,lna = \sqrt{a}$, alors :

$I_0 = \left[-ln\sqrt{1-sinx} + ln\sqrt{1+sinx}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[ln\sqrt{1+sinx} - ln\sqrt{1-sinx}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

Puisque $lna - lnb = ln\frac{a}{b}$, alors $I_0 = \left[ln\left(\frac{\sqrt{1+sinx}}{\sqrt{1-sinx}}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[ln\left(\sqrt{\frac{1+sinx}{1-sinx}}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

=> $I_0 = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

3) Démontrons à l'aide d'une intégration par parties que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ on a :
$2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^{-n}}{\sqrt{2}}$ $\left(\text{On pourra poser : } \frac{1}{Cos^{2n+1}x} = \frac{1}{Cos^{2n-1}x} \times \frac{1}{Cos^2 x}\right)$

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{Cos^{2n+1}x}$ => $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{Cos^{2n-1}x} \bullet \frac{1}{Cos^2 x}\,dx$

Posons $u(x) = \frac{1}{Cos^{2n-1}x}$ => $u'(x) = \frac{(2n-1)sinx}{Cos^{2n}x}$

$v'(x) = \frac{1}{Cos^2 x}$ => $v(x) = tangx = \frac{sinx}{cosx}$

=> $I_n = \left[\frac{1}{Cos^{2n-1}x} \times \frac{sinx}{cosx}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2n-1)sinx}{Cos^{2n}x} \times \frac{sinx}{cosx}\,dx$

$= \left[\frac{sinx}{Cos^{2n}x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2n-1)sinx}{Cos^{2n}x} \times \frac{sinx}{cosx}\,dx = \left[\frac{sinx}{Cos^{2n}x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2n-1)sin^2 x}{Cos^{2n+1}x}\,dx$

$= \left[\frac{sinx}{Cos^{2n}x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2n-1)(1-cos^2 x)}{Cos^{2n+1}x}\,dx = \left[\frac{sinx}{Cos^{2n}x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-cos^2 x}{Cos^{2n+1}x}\,dx$

$$= \left[\frac{sinx}{Cos^{2n}x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{Cos^{2n+1}x}\,dx + (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{cos^2 x}{Cos^{2n+1}x}\,dx$$

$$= \left[\frac{sinx}{Cos^{2n}x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{Cos^{2n+1}x}\,dx + (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{Cos^{2n+1}x \bullet cos^{-2}x}\,dx$$

$$= \left[\frac{sinx}{Cos^{2n}x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{Cos^{2n+1}x}\,dx + (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{Cos^{2n-1}x}\,dx$$

$$= \left[\frac{sinx}{Cos^{2n}x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - (2n-1)I_n + (2n-1)I_{n-1}.$$

Or $\left[\frac{sinx}{Cos^{2n}x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \left(\frac{sin\frac{\pi}{4}}{\left(cos\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}\right) - (0) = \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n}}\right) = \left[\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^n}\right]$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{2}{4}\right)^n} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2^n = \sqrt{2} \times 2^n \times 2^{-1} = \sqrt{2} \times 2^{n-1}$$

=> $I_n = \sqrt{2} \times 2^{n-1} - (2n-1)I_n + (2n-1)I_{n-1}$. Or $\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

=> $I_n = \frac{2}{\sqrt{2}} \times 2^{n-1} - (2n-1)I_n + (2n-1)I_{n-1}$

=> $I_n = \frac{2^n}{\sqrt{2}} - (2n-1)I_n + (2n-1)I_{n-1} \Leftrightarrow I_n + (2n-1)I_n = \frac{2^n}{\sqrt{2}} + (2n-1)I_{n-1}$

$\Leftrightarrow (1+2n-1)I_n = \frac{2^n}{\sqrt{2}} + (2n-1)I_{n-1} \Leftrightarrow 2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$

D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ on a : $2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$

15 Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$

1) Calculons I_1.

$I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$ => $I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\int_0^1 -\frac{2}{2}x\sqrt{1-x^2}\,dx$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 -2x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 -2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{3}\left[(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}\left[(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\right]_0^1$$

=> $I_1 = F(1) - F(0) = (0) - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

2) En intégrant par parties, montrons que $I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$ (on posera $x^n = x \bullet x^{n-1}$)

$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int_0^1 x \bullet x^{n-1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int_0^1 x^{n-1} \bullet x\sqrt{1 - x^2}\, dx$

Posons $u(x) = x^{n-1}$ => $u'(x) = (n-1)x^{n-2}$

$v'(x) = x\sqrt{1 - x^2}$ => $v(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$. (D'après la question1°)

=> $I_n = \left[-\frac{1}{3}x^{n-1} \times (1-x^2)\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 + \frac{1}{3}(n-1)\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\, dx$

=> $I_n = \left[-\frac{1}{3}x^{n-1} \times (1-x^2)\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 + \frac{1}{3}(n-1)\int_0^1 (x^{n-2} - x^n)\sqrt{1-x^2}\, dx$

Or $\left[-\frac{1}{3}x^{n-1} \times (1-x^2)\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = 0$

=> $I_n = \frac{1}{3}(n-1)\int_0^1 (x^{n-2} - x^n)\sqrt{1-x^2}\, dx$

=> $I_n = \frac{1}{3}(n-1)\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3}(n-1)\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\, dx$

=> $I_n = \frac{1}{3}(n-1)I_{n-2} - \frac{1}{3}(n-1)I_n \Leftrightarrow I_n + \frac{1}{3}(n-1)I_n = \frac{1}{3}(n-1)I_{n-2} \Leftrightarrow$

$\left(1 + \frac{1}{3}(n-1)\right)I_n = \frac{1}{3}(n-1)I_{n-2} \Leftrightarrow \frac{n+2}{3}I_n = \frac{n-1}{3}I_{n-2} \Leftrightarrow$

$(n+2)I_n = (n-1)I_{n-2}$ => $I_n = \frac{n-1}{n+2}I_{n-2}$.

D'où $I_n = \frac{n-1}{n+2}I_{n-2}$ (ce qu'il fallait Démontre)

16 Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{1}{x^n+1}dx$ avec $n \in \mathbb{N}$

1) Montrons que $\forall\, n \in \mathbb{N}$; I_n est croissante et majorée.

Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$; on a : $x^{n+1} \leq x^n$

=> $1 < 1 + x^{n+1} \leq 1 + x^n$. D'où $\frac{1}{x^n+1} \leq \frac{1}{x^{n+1}+1}$

En intégrant sur $[0\ ;\ 1]$; on a : $\int_0^1 \frac{1}{x^n+1}dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x^{n+1}+1}dx$ soit $I_n \leq I_{n+1}$

Ainsi on en déduit que $\forall\, n \in \mathbb{N}$; I_n est croissante.

D'autre part $0 \leq x^n \leq 1$ donc $1 \leq x^n + 1 \leq 2$ d'où $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x^n+1} \leq 1$ et en intégrant sur $[0\ ;\ 1]$; on a : $\frac{1}{2} \leq I_n \leq 1$ **(1)**

I_n est une suite croissante et majorée donc elle est convergente.

2) Montrons que$\forall\ n \in \mathbb{N}$; on a : $1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1$ .En déduisons la limite de la suite I_n.

Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ;1]$; on a : $\frac{1}{x^n+1} = \frac{x^n+1-x^n}{x^n+1} = 1 - \frac{x^n}{x^n+1}$

$x^n + 1 \geq 1$. D'où $\frac{1}{x^n+1} \leq 1$ soit $-\frac{x^n}{x^n+1} \geq -x^n \Leftrightarrow 1 - \frac{x^n}{x^n+1} \geq 1 - x^n$

En intégrant sur $[0\ ;\ 1]$; on a : $\int_0^1 \left(1 - \frac{x^n}{x^n+1}\right) dx \geq \int_0^1 (1 - x^n) dx.$

D'où $I_n \geq 1 - \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$ soit $I_n \geq 1 - \frac{1}{n+1}$.

A l'aide de la relation **(1) ,** on obtient $1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1$ et en utilisant le théorème des gendarmes, on a : $lim\ I_n = 0$

$n \to +\infty$

17 Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n(x) = \int_1^x t^n lnt\ dx$ $(n \in \mathbb{N} - \{-1\}$ et $x > 0)$

1) En utilisant une intégration par parties ; calculons $I_n(x)$

Posons $u(t) = lnt$ => $u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = t^n$ => $v(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$

$=> I_n(x) = \left[\frac{t^{n+1} \times lnt}{n+1}\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^{n+1}}{t(n+1)} dx. = \left[\frac{t^{n+1} \times lnt}{n+1}\right]_1^x - \frac{1}{n+1}\int_1^x t^n dx$

$= \left[\frac{t^{n+1} \times lnt}{n+1}\right]_1^x - \frac{1}{n+1}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_1^x = \left[\frac{t^{n+1} \times lnt}{n+1}\right]_1^x - \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^x$

$= \left[\frac{t^{n+1} \times lnt}{n+1} - \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^x = \left[\frac{(n+1)t^{n+1} \times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^x$

$=> I_n(x) = F(x) - F(1) = \frac{(n+1)x^{n+1} lnx - x^{n+1} + 1}{(n+1)^2}$

2) En déduisons le calcul de $J_n(x) = \int_1^x t^n (lnt)^2\ dt$

$J_n(x) = \int_1^x t^n (lnt)^2\, dt = \int_1^x t^n \times lnt \times lnt\, dt = \int_1^x lnt \times t^n lnt\, dt$

Posons $u(t) = lnt$ => $u'(t) = \frac{1}{t}$

$$v'(t) = t^n lnt \Rightarrow v(t) = \frac{(n+1)t^{n+1}\times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow J_n(x) = \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1}\times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right] lnt\right]_1^x - \int_1^x \frac{(n+1)t^{n+1}\times lnt - t^{n+1}}{t(n+1)^2}\, dx.$$

$$= \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1}\times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right] lnt\right]_1^x - \int_1^x \frac{(n+1)t^{n+1}\times lnt}{t(n+1)^2}\, dx + \int_1^x \frac{t^{n+1}}{t(n+1)^2}\, dx.$$

$$= \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1}\times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right] lnt\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^n \times lnt}{n+1}\, dx + \int_1^x \frac{t^n}{(n+1)^2}\, dx.$$

$$= \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1}\times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right] lnt\right]_1^x - \frac{1}{n+1}\int_1^x t^n \times lnt\, dx + \frac{1}{(n+1)^2}\int_1^x t^n dx.$$

$$= \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1}\times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right] lnt\right]_1^x - \frac{1}{n+1} I_n(x) + \frac{1}{(n+1)^2}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_1^x.$$

$$= \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1}\times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right] lnt\right]_1^x - \frac{1}{n+1}\left[\frac{(n+1)t^{n+1}\times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^x + \frac{1}{(n+1)^2}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_1^x.$$

Avec $I_n(x) = \left[\frac{(n+1)t^{n+1}\times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^x$

$$\Rightarrow J_n(x) = \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1}\times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^2}\right] lnt - \frac{(n+1)t^{n+1}\times lnt - t^{n+1}}{(n+1)^3} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)^3}\right]_1^x$$

$$\Rightarrow J_n(x) = F(x) - F(1) = \frac{(n+1)x^{n+1}\times lnx\,[(n+1)lnx - 2] - 2}{(n+1)^3}$$

3) a) Calculons $I_n(e) - J_n(e)$.

$I_n(x) = \frac{(n+1)x^{n+1}lnx - x^{n+1} + 1}{(n+1)^2}$ et $J_n(x) = \frac{(n+1)x^{n+1}\times lnx\,[(n+1)lnx - 2] - 2}{(n+1)^3}$

$$\Rightarrow I_n(e) - J_n(e) = \frac{(n+1)(e^{n+1}+1)+2}{(n+1)^3}$$

b) Déterminons la limite de $\frac{I_n(e)-J_n(e)}{e^{n+1}}$ quand n tend vers $+\infty$.

$lim\ \frac{I_n(e)-J_n(e)}{e^{n+1}} = lim\ \frac{\frac{(n+1)(e^{n+1}+1)+2}{(n+1)^3}}{e^{n+1}} = lim\ \frac{(n+1)(e^{n+1}+1)+2}{(n+1)^3 e^{n+1}}$

$n \to +\infty$ $n \to +\infty$ $n \to +\infty$

$= lim\ \frac{ne^{n+1}}{n^3 e^{n+1}} = lim\ \frac{1}{n^2} = 0$

$n \to +\infty$ $n \to +\infty$

D'où $lim\ \frac{I_n(e)-J_n(e)}{e^{n+1}} = 0$

$n \to +\infty$

Intégrales linéaires

18 Soient les intégrales I et J définies par : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^2 x} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^4 x} dx$

1) Calculons I

$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^2 x} dx$ => $I = [tan(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - tan(0) = 1$

=> $I = 1$

2) Soit la fonction définie sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \frac{sinx}{cos^3 x}$.

a- Montrons que $\forall\ x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$ on a : $f'(x) = \frac{3}{cos^4 x} - \frac{2}{cos^2 x}$.

$f(x) = \frac{sinx}{cos^3 x}$.

Posons $u(x) = sinx$ => $u'(x) = cosx$

$v(x) = cos^3 x$ => $v'(x) = -3sinxcos^2 x$

=> $f'(x) = \frac{(cosx)(cos^3 x) - (-3sinx\ cos^2 x)(sinx)}{(cos^3 x)^2} = \frac{cos^4 x + 3sin^2 x cos^2 x}{cos^6 x}$

$= \frac{cos^2 x(cos^2 x + 3sin^2 x)}{cos^6 x} = \frac{cos^2 x + 3sin^2 x}{cos^4 x} = \frac{cos^2 x + 3(1 - cos^2 x)}{cos^4 x}$

$= \frac{cos^2 x + 3 - 3cos^2 x}{cos^4 x} = \frac{3 - 2cos^2 x}{cos^4 x} = \frac{3}{cos^4 x} - \frac{2cos^2 x}{cos^4 x} = \frac{3}{cos^4 x} - \frac{2}{cos^2 x}$.

D'où $f'(x) = \frac{3}{cos^4 x} - \frac{2}{cos^2 x}$.

b- En déduisons une relation entre I et J.

On sait que : $f'(x) = \frac{3}{cos^4 x} - \frac{2}{cos^2 x}$. En intégrant $f'(x)$ sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$; on a :

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{cos^4 x}\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{cos^2 x}\,dx = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^4 x}\,dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^2 x}\,dx \Leftrightarrow$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\,dx = 3J - 2I$. Or $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\,dx = [f(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(0) = 2$

=> $3J - 2I = 2$

c- Calculons J.

$3J - 2I = 2$ => $J = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}I = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(1) = \frac{4}{3}$. D'où $J = \frac{4}{3}$

19 Soient les intégrales suivantes :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4 x dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 x dx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sin^2 x cos^2 x dx$

1) Calculons $I - J$ et $I + J + K$

$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^4 x - sin^4 x) dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^2 x - sin^2 x)(cos^2 x + sin^2 x) dx$

Or $cos^2 x - sin^2 x = cos2x$ et $cos^2 x + sin^2 x = 1$

=> $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos2x\,dx$ => $I - J = \left[\frac{1}{2} sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = 0$

=> $I - J = 0$

Cacul de $I + J + K$

$I + J + K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sin^2 x cos^2 x dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^4 x + sin^4 x + 2sin^2 x \square os^2 x) dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^4 x + 2sin^2 x cos^2 x + sin^4 x) dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^2 x + sin^2 x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

=> $I + J + K = \frac{\pi}{2}$

2) Calcule : $I + J - 3K$ puis en déduis les valeurs de I ; J et K.

$$I + J - 3K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 x dx - 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sin^2 x cos^2 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 x dx - 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 x cos^2 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 x dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 x cos^2 x dx - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 x cos^2 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^4 x - 2sin^2 x cos^2 x + sin^4 x) dx \ - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4sin^2 x cos^2 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^2 x - sin^2 x)^2 dx \ - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2cosxsinx)^2 dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos2x)^2 dx \ - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin2x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^2 2x - sin^2 2x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos4x dx \ = \left[\frac{1}{4} sin4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = 0$$

=> $I + J - 3K = 0$

Ainsi pour en déduis les valeurs de I ; J et K ; on forme le système avec les équations :

$I - J = 0$; $I + J + K = \frac{\pi}{2}$ et $I + J - 3K = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} I - J = 0 & (\mathbf{1}) \\ I + J + K = \frac{\pi}{2} & (\mathbf{2}) \\ I + J - 3K = 0 & (\mathbf{3}) \end{cases}$$

L'équation **(1)** donne $I - J = 0$ => $I = J$ puis en remplaçant I par J dans les equations : **(2)** et **(3)** , on a :

$$\begin{cases} J + J + K = \frac{\pi}{2} \\ J + J - 3K = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2J + K = \frac{\pi}{2} \\ 2J - 3K = 0 \end{cases}$$

La resolution de ce système Donne: $J = \frac{3\pi}{16}$ et $K = \frac{\pi}{8}$.

En remplaçant J par sa valeur dans l'équation **(1) ,** on a : $I = \frac{3\pi}{16}$

20 Soient les intégrales I et J définies par :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{cosx + sinx} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{cosx + sinx} dx$

Calculons $I + J$ et $I - J$ puis en déduisons les valeurs de I et J.

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{cosx + sinx} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{cosx + sinx} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{cosx}{cosx + sinx} + \frac{sinx}{cosx + sinx} \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{cosx + sinx}{cosx + sinx} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

=> $I + J = \frac{\pi}{2}$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{cosx + sinx} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{cosx + sinx} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{cosx}{cosx + sinx} - \frac{sinx}{cosx + sinx} \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{cosx - sinx}{cosx + sinx} \right) dx = [ln(cosx + sinx)]_0^{\frac{\pi}{2}} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = 0$$

=> $I - J = 0$

Ainsi pour en déduis les valeurs de I et J ; on forme le système avec les équations :

$I + J = \frac{\pi}{2}$ et $I - J = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} I + J = \frac{\pi}{2} \\ I - J = 0 \end{cases}$$

La resolution de Ce système Donne: $I = \frac{\pi}{4}$ et $J = \frac{\pi}{4}$.

21 On se propose de calcule l'intégrale J définie par $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3} dx$

1) Calculons les deux intégrales A et B tel que $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$ et $B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$

$A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$ => $A = [ln(1 + e^x)]_0^1$ => $A = F(1) - F(0) = ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$

$B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ => $B = \left[ln\left(\frac{-1}{1+e^x}\right)\right]_0^1$ => $B = F(1) - F(0) = \frac{e-1}{2(1+e)}$

2) Déterminons les réels a ; b et c tel que : $\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2}$ **(1)**

$\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{a(1+t)^2 + bt(1+t)\ ct}{(1+t)^2} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{(1+t)^2} = \frac{a(1+t)^2 + bt(1+t)\ ct}{(1+t)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{(a+b)t^2 + (2a+b+c)t + a}{(1+t)^2}$

Par identification ; on a : $a = 1$; $b = -1$ et $c = -1$

D'où $\frac{1}{(1+t)^2} = 1 - \frac{t}{1+t} - \frac{t}{(1+t)^2}$ **(1)**

3) En posant $t = e^x$ dans l'égalité **(1),** calculons $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^{\square})^2} dx$

$\frac{1}{(1+t)^2} = 1 - \frac{t}{1+t} - \frac{t}{(1+t)^2}$ En posant $t = e^x$; on a :

$\frac{1}{(1+e^x)^2} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

Alors $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\right) dx$

$= \int_0^1 1dx - \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx - \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \int_0^1 1dx - A - B$

$=[x]_0^1 - A - B = 1 - A - B = 1 - ln\left(\frac{1+e}{2}\right) - \frac{e-1}{2(1+e)}$

$\Rightarrow I = \frac{3+e}{2(1+e)} - ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$

4) a- A l'aide d'une intégration par partie, exprimons J en fonction de I.

$J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3} dx = \int_0^1 x \bullet \frac{e^x}{(1+e^x)^3} dx$

Posons $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^3} \Rightarrow v(x) = \frac{-1}{2(1+e^x)^2}$

$\Rightarrow J = \left[\frac{-x}{2(1+e^x)^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2(1+e^x)^2}\ dx = \left[\frac{-x}{2(1+e^x)^2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}\ dx$

$\Rightarrow J = \frac{-1}{2(1+e)^2} + \frac{1}{2}I$

b- En déduisons la valeur de J.

$J = \frac{-1}{2(1+e)^2} + \frac{1}{2}I$. Or $I = \frac{3+e}{2(1+e)} - ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$

$=> J = \frac{-1}{2(1+e)^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{3+e}{2(1+e)} - ln\left(\frac{1+e}{2}\right)\right] = \frac{-1}{2(1+e)^2} + \frac{3+e}{4(1+e)} - \frac{1}{2}ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$

$= \frac{1+4e+e^2}{4(1+e)^2} - \frac{1}{2}ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$. D'où $= \frac{1+4e+e^2}{4(1+e)^2} - \frac{1}{2}ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.

22 On considère les intégrales $I = \int_0^\pi cos^4 x dx$ et $J = \int_0^\pi sin^4 x dx$.

1) a- Montrons que l'intégrale I peut s'écrire $I = \int_0^\pi cosx(cosx - cosxsin^2 x)dx$

$I = \int_0^\pi cos^4 x dx = \int_0^\pi cos^2 x \times cos^2 x dx = \int_0^\pi cos^2 x \times (1 - sin^2 x)dx$

$= \int_0^\pi cosx \times cosx(1 - sin^2 x)dx = \int_0^\pi cosx(cosx - cosxsin^2 x)dx$

D'où $I = \int_0^\pi cosx(cosx - cosxsin^2 x)dx$

b- A l'aide d'une intégration par parties, montrons que $I = \int_0^\pi sin^2 x dx - \frac{1}{3}J$

$I = \int_0^\pi cosx(cosx - cosxsin^2 x)dx$

Posons $u(x) = cosx$ => $u'(x) = -sinx$

$v'(x) = cosx - cosxsin^2 x$ => $v(x) = sinx - \frac{1}{3}sin^3 x$

=> $I = \left[\left(sinx - \frac{1}{3}sin^3 x\right)cosx\right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(-sin^2 x + \frac{1}{3}sin^4 x\right)dx$

Or $\left[\left(sinx - \frac{1}{3}sin^3 x\right)cosx\right]_0^\pi = 0$

=> $I = -\int_0^\pi \left(-sin^2 x + \frac{1}{3}sin^4 x\right)dx = \int_0^\pi \left(sin^2 x - \frac{1}{3}sin^4 x\right)dx$

$= \int_0^\pi sin^2 x dx - \int_0^\pi \frac{1}{3}sin^4 x dx = \int_0^\pi sin^2 x dx - \frac{1}{3}\int_0^\pi sin^4 x dx$

=> $I = \int_0^\pi sin^2 x dx - \frac{1}{3}J$

c- Montrons de même que $J = \int_0^\pi cos^2 x dx - \frac{1}{3}I$

$J = \int_0^\pi sin^4 x dx$.

$J = \int_0^\pi sin^4 x dx = \int_0^\pi sin^2 x \times sin^2 x dx = \int_0^\pi sin^2 x \times (1 - cos^2 x)dx$

$= \int_0^\pi sinx \times sinx(1 - cos^2 x)dx = \int_0^\pi sinx(sinx - sinxcos^2 x)dx$

Ainsi intégrons par parties $\int_0^{\pi} sinx(sinx - sinxcos^2x)dx$

Posons $u(x) = sinx$ => $u'(x) = cosx$

$v'(x) = sinx - sinxcos^2x$ => $v(x) = -cosx + \frac{1}{3}cos^3x$

=> $J = \left[\left(-cosx + \frac{1}{3}cos^3x\right)sinx\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(-cosx + \frac{1}{3}cos^3x\right)cosxdx$

Or $\left[\left(-cosx + \frac{1}{3}cos^3x\right)sinx\right]_0^{\pi} = 0$

=> $J = -\int_0^{\pi}\left(-cos^2x + \frac{1}{3}cos^4x\ \right)dx = \int_0^{\pi}\left(cos^2x - \frac{1}{3}cos^4x\right)dx$

$= \int_0^{\pi} cos^2xdx - \int_0^{\pi}\frac{1}{3}cos^4 \square dx = \int_0^{\pi} cos^2xdx - \frac{1}{3}\int_0^{\pi} cos^4xdx$

=> $J = \int_0^{\pi} cos^2xdx - \frac{1}{3}I$

2) a- Montrons que $I + J = \frac{3\pi}{4}$.

On sait que : $I = \int_0^{\pi} sin^2xdx - \frac{1}{3}J$ et $J = \int_0^{\pi} cos^2xdx - \frac{1}{3}I$

$I = \int_0^{\pi} sin^2xdx - \frac{1}{3}J$ et $J = \int_0^{\pi} cos^2xdx - \frac{1}{3}I$

=> $I + J = \int_0^{\pi}(cos^2 + sin^2x)dx - \frac{1}{3}(I + J) = \int_0^{\pi} dx - \frac{1}{3}(I + J)$

=> $I + J = [x]_0^{\pi} - \frac{1}{3}(I + J) = \pi - \frac{1}{3}(I + J)$

=> $I + J = \pi - \frac{1}{3}(I + J) \Leftrightarrow 3(I + J) = 3\pi - (I + J) \Leftrightarrow 3(I + J) + (I + J) = 3\pi$

$\Leftrightarrow 4(I + J) = 3\pi$ => $I + J = \frac{3\pi}{4}$.

b- Montrons que $J - I = 0$

De même : $I - J = \left[\frac{1}{2}sin2x\right]_0^{\pi} - \frac{1}{3}(I - J) = \frac{1}{3}(I - J)$

=> $I - J = \frac{1}{3}(I - J) \Leftrightarrow 3(I - J) = I - J \Leftrightarrow 3(I - J) - (I - J) = 0 \Leftrightarrow 2(I - J) = 0$

=> $I - J = 0$

c- En déduisons les intégrales I et J.

Ainsi pour en déduis les valeurs de $I\ et\ J$; on forme le système avec les équations :

$I + J = \frac{\pi}{2}$ et $I - J = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} I + J = \frac{3\pi}{4} \\ I - J = 0 \end{cases}$ La resolution de Ce système Donne: $I = \frac{3\pi}{8}$ et $J = \frac{3\pi}{8}$

Calculs de valeurs moyennes

23 L'intensité du courant qui circule dans une bobine en fonction du temps t, a été modélisée par la fonction i telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$; $i(t) = 5sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$.

1) Déterminons la période de cette fonction.

NB : Toute fonction de la forme $t \mapsto cos(at + b)$ ou $t \mapsto sin(at + b)$, admet comme période $t = \frac{2\pi}{|a|}$

Alors la fonction $t \mapsto 5sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, admet comme période $t = \frac{2\pi}{|100\pi|} = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50}$

2) Calculons la valeur moyenne de l'intensité $\boldsymbol{i}$ du courant sur cette période.

La valeur moyenne de l'intensité $\boldsymbol{i}$ du courant sur $\left[-\frac{1}{50}\ ;\ \frac{1}{50}\right]$ est :

$$\bar{M} = \frac{1}{\left(\frac{1}{50}\right) - \left(-\frac{1}{50}\right)} \int_{-\frac{1}{50}}^{\frac{1}{50}} 5sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right) dt$$

$$\Rightarrow \bar{M} = \frac{1}{\frac{1}{50} + \frac{1}{50}} \int_{-\frac{1}{50}}^{\frac{1}{50}} 5sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right) dt = \frac{1}{\frac{1}{25}} \int_{-\frac{1}{50}}^{\frac{1}{50}} 5sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right) dt$$

$$= 25 \int_{-\frac{1}{50}}^{\frac{1}{50}} 5sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right) dt$$

$$\Rightarrow \bar{M} = 25\left[-\frac{5}{100\pi} cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\right]_{-\frac{1}{50}}^{\frac{1}{50}} = \left[-\frac{125}{100\pi} cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\right]_{-\frac{1}{50}}^{\frac{1}{50}}$$

$$= \left[-\frac{4}{5\pi} cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\right]_{-\frac{1}{50}}^{\frac{1}{50}}$$

$$\Rightarrow \bar{M} = \left[-\frac{4}{5\pi} cos\left(\frac{100\pi}{50} + \frac{\pi}{3}\right)\right] - \frac{4}{5\pi} cos\left(-\frac{100\pi}{50} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\frac{4}{5\pi}cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{4}{5\pi}cos\left(-2\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\frac{4}{5\pi}cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{4}{5\pi}cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{4}{5\pi}\times\frac{1}{2} - \frac{4}{5\pi}\times\frac{1}{2} = -\frac{2}{5\pi} - \frac{2}{5\pi} = -\frac{4}{5\pi} = -0{,}25$$

$=>\bar{M} = -0{,}25\ A.$

Alors la valeur moyenne de l'intensité $\boldsymbol{i}$ du courant sur cette période est $-0{,}25\ A$.

24 La température moyenne entre $10°C$ et $30°C$ est donnée par : $\bar{M} = \frac{1}{30-10}\int_{10}^{30}(3t^2 + 2t)dt$

$$=>\bar{M} = \frac{1}{20}\int_{10}^{30}(3t^2 - 2t)dt = \frac{1}{20}[t^3 - t^2]_{10}^{30} = \left[\frac{t^3}{20} - \frac{t^2}{20}\right]_{10}^{30} = \left[\frac{(30)^3}{20} - \frac{(30)^2}{20}\right] - \left[\frac{(10)^3}{20} - \frac{(10)^2}{20}\right]$$

$$= \left[\frac{(30)^3}{20} - \frac{(30)^2}{20}\right] - \left[\frac{(10)^3}{20} - \frac{(10)^2}{20}\right] = (1395) - (100) = 1295°C$$

25 Le nombre moyen de personnes malades durant les huis premiers jours est donné par :

$$\bar{M} = \frac{1}{8-1}\int_1^8(45t^2 - t^3)dt =>\bar{M} = \frac{1}{7}\left[\frac{45t^3}{3} - \frac{t^4}{4}\right]_1^8 = \frac{1}{7}\left[15t^3 - \frac{t^4}{4}\right]_1^8$$

$$= \frac{1}{7}\left[15(8)^3 - \frac{(8)^4}{4}\right]_1^8 - \frac{1}{7}\left[15(1)^3 - \frac{(1)^4}{4}\right] = 948{,}75 \approx 949$$

D'où Le nombre moyen de personnes malades durant les huis premiers jours est 949.

Calculs d'aires

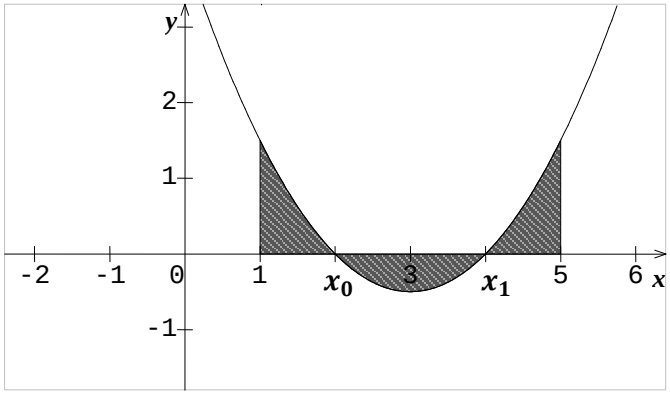
26 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$

1) Déterminons la valeur de l'intégrale $\int_1^5 f(x)dx$

$$\int_1^5 f(x)dx = \int_1^5\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\right)dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x\right]_1^5$$

$$=> \int_1^5 f(x)dx = F(5) - F(1) = \frac{10}{3} - \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$$

2) Ci-dessous est donnée la courbe C_f représentative de la fonction f dans un repère orthonormé$(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.



On souhaite Détermine la valeur de l'aire du domaine plan grisé.

a- Déterminons les zéros $\boldsymbol{x_0}$ et $\boldsymbol{x_1}$ de la fonction f (avec $\boldsymbol{x_0 < x_1}$).

En observant le graphique, on remarque que $\boldsymbol{x_0 = 2}$ et $\boldsymbol{x_1 = 4}$

b- Détermine la valeur de l'intégrale $\int_1^{\boldsymbol{x_0}} f(x)dx + \int_{\boldsymbol{x_1}}^{\boldsymbol{5}} f(x)dx$.

$\int_1^{\boldsymbol{x_0}} f(x)dx + \int_{\boldsymbol{x_1}}^{\boldsymbol{5}} f(x)dx = \int_1^{\boldsymbol{2}} f(x)dx + \int_{\boldsymbol{4}}^{\boldsymbol{5}} f(x)dx$

$= \int_1^{\boldsymbol{2}} \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\right) dx + \int_{\boldsymbol{4}}^{\boldsymbol{5}} \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\right) dx$

$= \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x\right]_1^2 + \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x\right]_4^5 = \left(\frac{3}{2}\right) + (6) = \frac{15}{2}$

c- Déterminons la valeur de l'intégrale $\int_{\boldsymbol{x_0}}^{\boldsymbol{x_1}} f(x)dx$ c'est-à-dire $\int_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{4}} f(x)dx$

D'après le graphique on a : $\int_1^5 f(x)dx = \int_1^{\boldsymbol{x_0}} f(x)dx + \int_{\boldsymbol{x_0}}^{\boldsymbol{x_1}} f(x)dx + \int_{\boldsymbol{x_1}}^{\boldsymbol{5}} f(x)dx$.

$\Rightarrow \int_{\boldsymbol{x_0}}^{\boldsymbol{x_1}} f(x)dx = \int_1^5 f(x)dx - \int_1^{\boldsymbol{x_0}} f(x)dx - \int_{\boldsymbol{x_1}}^{\boldsymbol{5}} f(x)dx$. Or $\boldsymbol{x_0 = 2}$ et $\boldsymbol{x_1 = 4}$

$\Rightarrow \int_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{4}} f(x)dx = \int_1^5 f(x)dx - \int_1^{\boldsymbol{2}} f(x)dx - \int_{\boldsymbol{4}}^{\boldsymbol{5}} f(x)dx$

$\Rightarrow \int_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{4}} f(x)dx = \int_1^5 f(x)dx - \left(\int_1^{\boldsymbol{2}} f(x)dx + \int_{\boldsymbol{4}}^{\boldsymbol{5}} f(x)dx\right) = \left(\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{15}{2}\right) = -\frac{41}{6}$

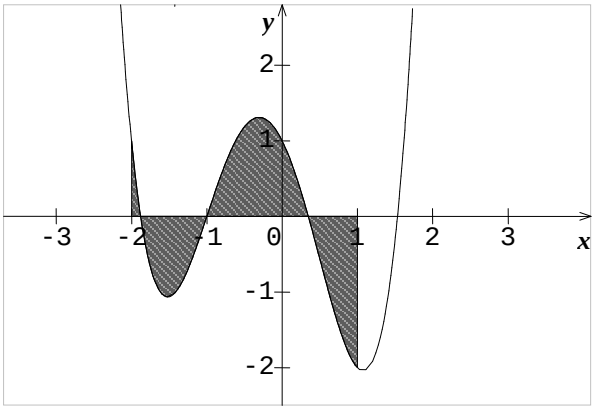
d- En déduisons l'aire de la partie grisée sur le graphique. (Unité graphique : $2cm$)

$\mathbf{A} = \left(\frac{2}{3}\right)(2cm)^2 = \frac{8}{3}\,cm^2$

27 Soit la fonction f définie par $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 1$.

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (0 ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) dont les unités graphiques sont : $6cm$ sur l'axe des abscisses et $2cm$ sur l'axe des ordonnées

Calculons l'aire du domaine hachuré en cm^2



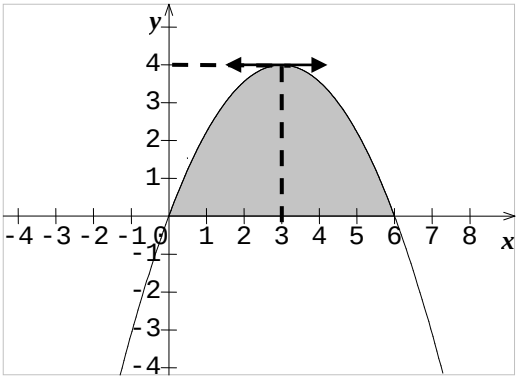
L'aire du domaine hachuré est $A = 6cm \times 2cm \int_{-2}^{1} f(x)dx = 12cm^2 \int_{-2}^{1} f(x)dx$

$$\Rightarrow A = 12cm^2 \int_{-2}^{1}(x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 1)dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - x^3 - x^2 + x\right]_{-2}^{1}$$

$$= 12cm^2 \left[\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4} - 1 - 1 + 1\right) - \left(-\frac{32}{5} - \frac{16}{4} + 8 - 4 - 2\right)\right] = -0{,}15 \times 12\ cm^2$$

$$= -1{,}8cm^2$$

28 On considère la courbe ci-dessous représentant une fonction polynôme f de degré **2** dans un repère orthonormé (0 ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) d'unité graphique : $2cm$.



On rappelle que f est de la forme : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1) Déterminons les réels a ; b et c.

D'après le graphique, on a : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(3) = 4 \\ f(6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 9a + 3b = 4 \\ 36a + 6b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 9a + 3b = 4 \\ 6a + b = 0 \end{cases}$

Ainsi la résolution du système $\begin{cases} 9a + 3b = 4 \\ 6a + b = 0 \end{cases}$ donne : $a = -\frac{4}{9}$ et $b = \frac{8}{3}$

Ainsi en remplaçant les réels a ; b et c par leur valeur on a : $f(x) = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x$

2) En déduisons en cm^2 l'aire de la partie hachurée sur le graphique.

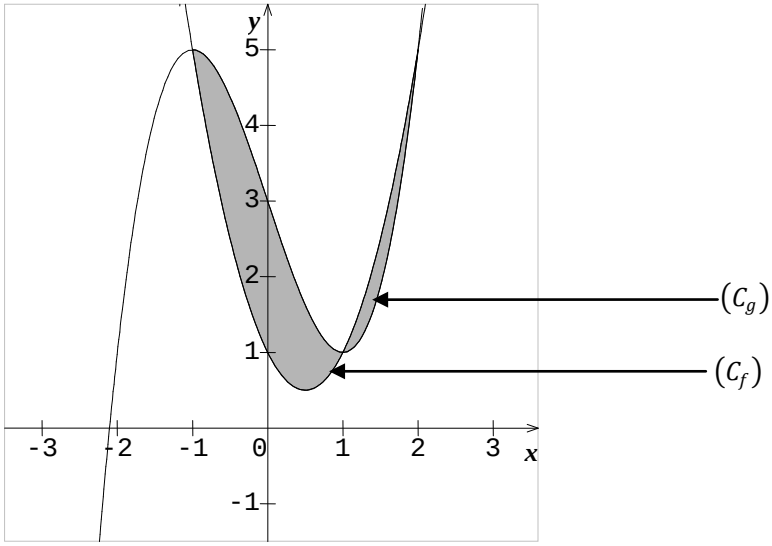
L'aire de la partie hachurée sur le graphique est $A = (2cm)^2 \int_0^6 f(x)dx$

$=> A = 4cm^2 \int_0^6 \left(-\frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x\right) dx = 4cm^2 \left[-\frac{4}{27}x^3 + \frac{8}{6}x^2\right]_0^6$

$=> A = 4cm^2 \left[-\frac{4}{27}x^3 + \frac{4}{3}x^2\right]_0^6 = 4cm^2(16) = 64cm^2$

29 Soient $f: \mapsto 2x^2 - 2x + 1$ et $g: \mapsto x^3 - 3x + 3$ deux fonctions de courbes représentatives respectives (C_f) et (C_g)dans un repère orthonormé (0 ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) d'unité graphique : $2cm$.

1) Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) sont les suivantes :



2) Calculons en cm^2 l'aire $\mathscr{A}$ de l'ensemble des points M compris entre les courbes (C_f) ; (C_g) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$.

Cette aire est donnée par : $\mathscr{A} = 4cm^2 \left(\int_{-1}^{1}[g(x) - f(x)]\,dx + \int_{1}^{2}[f(x) - g(x)]\,dx\right)$

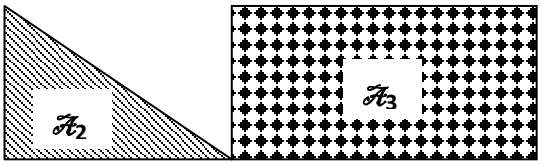
$\Rightarrow \mathscr{A} = 4cm^2 \left[\int_{-1}^{1}(x^3 - 2x^2 - x + 2)\,dx + \int_{1}^{2}(-x^3 + 2x^2 + x - 2)\,dx\right]$

$\Rightarrow \mathscr{A} = 4cm^2 \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{1} + 4cm^2 \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{1}^{2}$

$\Rightarrow \mathscr{A} = 4cm^2 \times \left(\frac{8}{3}\right) + 4cm^2 \times \left(\frac{5}{12}\right) = 4cm^2 \times \frac{37}{12} = 12{,}33cm^2$

30 On donne les cas de figures suivantes dans un repère (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) d'unité graphique 1 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

$\mathcal{A}_1$



1) Calculons l'aire $\mathcal{A}_1$; $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$ du domaine plan hachurer dans les cas des figures : (fig 1) ; (fig 2) et (fig 3).

La figure (1) représente un demi-cercle :

L'aire d'un cercle est : πr^2. Alors l'aire du demi-cercle représentée sur la figure est :

$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}\pi r^2$ avec $r = 2cm$ => $\mathcal{A}_1 = 2\pi = 6{,}28\ cm^2$

La figure (2) représente un triangle :

L'aire d'un triangle est : $\frac{base \times hauteur}{2}$ alors l'aire du triangle représentée sur la figure est :

$\mathcal{A}_2 = \frac{3\times 2}{2}$ avec $base = 3cm$ et $hauteur = 2cm$ => $\mathcal{A}_2 = 3\ cm^2$

La figure (3) représente un rectangle :

L'aire d'un rectangle est : **Longueur** + **largeur**. Alors l'aire du triangle représentée sur la figure est :

$\mathcal{A}_3 = \mathbf{4} + \mathbf{2}$ avec **Longueur** = $4cm$ **largeur** = $2cm$ => $\mathcal{A}_3 = \mathbf{6}\ cm^2$

2) En déduis l'aire totale hachurée.

Ainsi l'aire totale hachurée est : $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 = (6{,}28 + 3 + 6)cm^2$

=> $\mathcal{A} = 15{,}28\ cm^2$

Fonction Logarithme Népérien

OBJECTIFS :

Ce thème vise à :

• définir et étudier la fonction logarithme népérien

• mettre en place les primitives de fonction de la forme $\frac{u'}{u}$

Commentaires

La fonction In est nouvelle en terminale. Son introduction vient compléter et enrichir les fonctions étudiées à ce niveau.

Volume horaire : 8 heures

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
• Fonction logarithme népérien : - Définition, notation, propriétés, représentation graphique. - Limite de référence. - Primitives de $\frac{u'}{u}$ • Logarithme décimal : définition. •Dérivée des fonctions du type *In* o *u* et *In* o $\|u\|$.	• Résous des équations ou inéquations faisant intervenir la fonction logarithme népérien. •Détermine les primitives d'une fonction du type $\frac{u'}{u}$. • Etant donnée une fonction f faisant intervenir la fonction logarithme népérien : - Trouve les limites de f aux bornes de son ensemble de définition ; - Etudie les variations de f - Représenter graphiquement f.

Remarques et suggestions

La manière d'introduire la fonction logarithme népérien n'est pas imposée. Il y a plusieurs approches possibles :

• approche historique (comme dans le livre CIAM de TSM, page 239) ;

• approche avec la calculatrice (comme dans le livre CIAM, TSE page 82).

•approche avec l'utilisation des propriétés des primitives.

L'usage de la calculatrice renforce les possibilités d'étude de cette notion aussi bien pour effectuer des calculs que pour permettre de conjecturer des résultats.

La représentation graphique de la fonction logarithme népérien doit être connue des élèves car elle permet de reTrouve de nombreux résultats (ensemble de définition, variations, signe, limites, valeurs particulières, branches paraboliques).

La bijectivité de la fonction logarithme népérien permet d'introduire le **nombre e.**

Aucune étude des propriétés de la fonction logarithme décimal ne sera faite mais on l'Utilisea dans les exercices. La croissance "lente" de la fonction logarithme népérien (illustration de la branche parabolique) pourra être étayée avec des calculs numériques. Ce résultat sera réinvesti lors de l'étude des croissances comparées des fonctions logarithme, exponentielles et puissances.

1- Définition :

On appelle fonction Logarithme Népérien notée (***ln***), la primitive de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$ qui prend la valeur 0 en 1 sur l'intervalle] 0 ; $+\infty$ [

2- Ensemble de définition des fonctions logarithmiques :

- Si $f(x) = lnx$ => D$f =]0 ; +\infty[$
- Si $f(x) = ln(ax + b)$ => D$f = \{x/x \in \mathbb{R}; ax + b > 0\}$
- Si $f(x) = ln\,[u(x)]$ => D$f = \{x/x \in \mathbb{R}\,;\, u(x) > 0\}$
- Si $f(x) = ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)$ => D$f = \{x/x \in \mathbb{R}\,;\, \frac{u(x)}{v(x)} > 0\}$
- Si $f(x) = ln|u(x)|$ => D$f = \{x/x \in \mathbb{R}\,;\, u(x) \neq 0\}$

3- Propriétés Remarquables :

$\forall\, a > 0$ et $\forall\, b > 0$, on a les propriétés suivantes:

- **P$_1$** : $ln(a \times b) = ln(a) + ln(b)$ **P$_6$** : $ln\sqrt{a} = lna^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} lna$
- **P$_2$** : $ln\left(\frac{a}{b}\right) = lna - lnb$ **P$_7$** : $ln(a) = ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- **P$_3$** : $ln\left(\frac{1}{a}\right) = -lna$ **P$_8$** : $ln\, e^a = a$ et $e^{lna} = a$
- **P$_4$** : $ln(a)^n = nlna$ **P$_9$** : $lna = b \Leftrightarrow a = e^b$
- **P$_5$** : $lne = 1\ et\ ln1 = 0$ **P$_{10}$** : $lna = lnb \Leftrightarrow a = b$

P$_{11}$: $ln(a) \geq ln\,(b) \Leftrightarrow a \geq b$

4- Limites remarquables

$lim\ \ ln\,x = -\infty$; $lim\ \ ln\,x = +\infty$

$x \rightarrow 0$ $x \rightarrow +\infty$

$lim\ \ x\,ln\,x = 0\ \ et$ $lim\ \ x^n ln\,x = 0$

$x \rightarrow 0$ $x \rightarrow 0$

$lim \quad x \ln x = +\infty \quad et \qquad lim \quad x^n \ln x = +\infty$

$x \to +\infty \qquad\qquad x \to +\infty$

$lim \quad \frac{lnx}{x} = -\infty \quad et \qquad lim \quad \frac{\ln x}{x^n} = -\infty$

$x \to 0 \qquad\qquad x \to 0$

$lim \quad \frac{\ln x}{x} = 0 \quad et \qquad lim \quad \frac{\ln x}{x^n} = 0$

$x \to +\infty \qquad\qquad x \to +\infty$

$lim \quad \frac{\ln (x+1)}{x} = 1 \quad et \qquad lim \quad \frac{\ln x}{x-1} = 1$ (Nombre dérivé de la fonction $ln \ au \ point \ 1$)

$x \to 0 \qquad\qquad x \to 1$

5- <u>Dérivées logarithmiques</u>:

La dérivée logarithmique d'une fonction u, est la dérivée de $ln|u|$

- $Si \ f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
- $Si \ f(x) = ln|ax + b| \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{ax+b}$
- Si $f(x) = ln\big(U(x)\big) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$
- Si $f(x) = ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{v'(x)}{v(x)}$
- Si $f(x) = ln\big(U(x) \bullet v(x)\big) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)}$.
- Si $f(x) = ln\,[u(x)]^n \Rightarrow f'(x) = n\frac{u'(x)}{u(x)}$.

6- <u>Primitives remarquables :</u>

En appliquant la technique de l'intégration par parties, calcule une primitive des fonctions : $x \to ln\, x$ et $x \to ln\,(ax + b)$. Ainsi on retiendra :

$Si \ f(x) = \ln x \Rightarrow F(x) = x \ln x - x + k$

- $Si \ f(x) = ln\,(ax + b) \Rightarrow F(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right) ln\,(ax+b) - x + k$

- $Si\ f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} => F(x) = ln|u(x)| + k$

7- Fonction logarithme de base a :

a) Définition :

Soit $\boldsymbol{a}$ un réel strictement positif et différent de 1. On appelle logarithme de base $\boldsymbol{a}$, la fonction définie par : $log_a(x) : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto log_a(x) = \frac{l_n\ x}{l_n\ a}.$$

N.B : Lorsque $\boldsymbol{a}$ = 10, la fonction logarithme de base 10 est appelé fonction logarithme décimale. Ainsi la fonction logarithme d'un nombre réel positif est noté $log\ x = \frac{l_n\ x}{l_n\ 10}$

M = $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{ln10}}$ est appelée la **Mantisse** du logarithme décimal ; ainsi $log\ x$ = M• lnx.

b) Propriétés :

P₁ : $log(ab) = loga + logb$ **P₃ :** $log(\frac{a}{b}) = loga - logb$

P₂ : $log(a)^n = nloga$ **P₄ :** $log(10)^n = n$

P₅ : $(logx)' = \frac{1}{xln\,10}$

8- Etude de la fonction $\boldsymbol{log_a(x)}$:

Soit $f(x) = log_a(x)$et de courbe représentative (C_a).

1er Cas : 0 $< a <$ 1 **(** $\boldsymbol{lna} < 0$ **)**

Df =] 0 ; + ∞[

$lim\ \ f(x) = +\infty \quad et \quad lim\ \ f(x) = -\infty.$

$x \to 0$ $x \to +\infty$

Alors la courbe (C) admet des branches : $x = 0$ est asymptote verticale pour la courbe (C).

($x'Ox$) est branche parabolique (car $lim\ \ \frac{ln\ x}{x} = 0$)

$x \to +\infty$

$f(x) = log_a(x) => f'(x) = \frac{1}{xlna} < 0$

D'où le tableau de variation est le suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

- $(C) \cap (OX) \Leftrightarrow ln\, x = 0 \Leftrightarrow x = e^{o} = 1$

Donc (C) coupe l'axe (ox) en 1

- $(C) \cap (OY) => x = 0\, et\, f(0) = ln\,(0)$ qui n'existe pas.

  Donc (C) ne coupe pas l'axe (oy).

2ième Cas : $a > 1$ ($ln a > 0$)

Df =] 0 ; + ∞[

$lim \quad f(x) = -\infty \quad et \quad lim \quad f(x) = +\infty.$

$x \to 0 \qquad\qquad x \to +\infty$

Alors la courbe (C) admet des branches : $x = 0$ est asymptote verticale pour la courbe (C).

($x'Ox$) est branche parabolique (car $lim \quad \frac{ln\, x}{x} = 0$)

$x \to +\infty$

$f(x) = log_a(x) => f'(x) = \frac{1}{xlna} > 0$

D'où le tableau de variation est le suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

- $(C) \cap (OX) \Leftrightarrow ln\, x = 0 \Leftrightarrow x = e^{o} = 1$

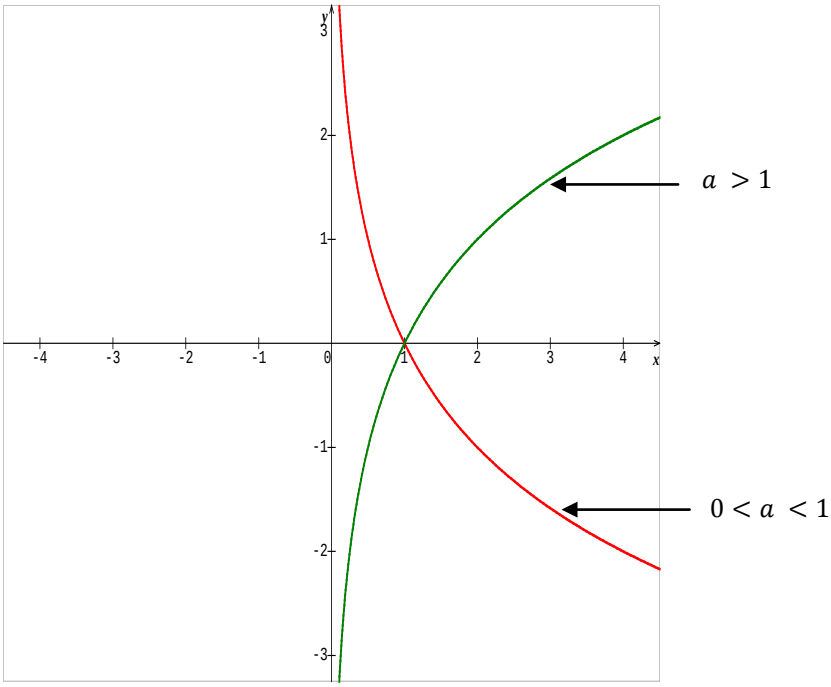
Donc (C) coupe l'axe (ox) en 1

- $(C) \cap (OY) => x = 0\, et\, f(0) = ln\,(0)$ qui n'existe pas.

Donc (C) ne coupe pas l'axe (oy).

NB : dans tous les cas, $\boldsymbol{log_a(x) = 1 <=> x = e}$

Représentation



Exercices

Propriétés de la fonction logarithme

1 1) En utilisant les propriétés logarithmiques, exprime en fonction de $ln2$ les réels suivants :

A = $ln8 + \frac{1}{2} ln16 - ln\sqrt{2}$; B = $ln\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + ln\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + ln\left(2+\sqrt{2}\right)$

C = $ln2\sqrt{2} + ln4 - ln\frac{1}{\sqrt{2}} + ln\sqrt{2^3}$; D = $ln64 + \frac{5}{3} ln8 - ln\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$

2) En utilisant les propriétés logarithmiques, résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a- $ln(2x + 7) = ln(x - 3)$; **b-** $ln(x^2 - 2x - 3) = ln(x + 7)$

c- $lnx + ln(3x + 2) = ln(2x + 3)$; **d-** $ln(x - 3) = ln(x + 7) - ln(x + 1)$.

e- $ln(2x - 2) + ln(x + 2) = 3ln2$; ***f*-** $ln(x - 2) + ln(x + 3) = 2ln(x + 1)$.

g- $ln\sqrt{2x - 3} = ln(6 - x) - \frac{1}{2}lnx$; ***h*-** $ln|x - 1| + ln|2x - 1| = 0$

***i*-** $(lnx)^2 - 7lnx + 6 = 0$; ***j*-** $3[ln(x + 1)]^2 - 2ln(x + 1) - 5 = 0$

3) En utilisant les propriétés logarithmiques, résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a- $ln(x + 8) - ln(x + 14) + ln(x + 2) \leq 0$; **b-** $ln(2x - 1) - ln(1 - x) < ln3$

c- $ln(x + 1) > ln(4x - 1) - ln(x - 1)$

4) En utilisant les propriétés logarithmiques, résous dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ les systèmes suivantes :

a- $\begin{cases} x + y = 15 \\ lnx + lny = ln36 \end{cases}$; **b-** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ lnx + lny = ln6 \end{cases}$; **c-** $\begin{cases} 2lnx - lny = 0 \\ 4lnx + lny = 3 \end{cases}$

d- $\begin{cases} lnx \times lny = -10 \\ lnx + lny = 3 \end{cases}$; **e-** $\begin{cases} X \times Y = 4 \\ 4\left(log_x y + log_y x\right) = 17 \end{cases}$

2 Soit le polynôme q définie par $q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

1) Calcule $q(1)$ puis résous les équations $q(x) = 0\ et\ q(x) \geq 0$

2) En déduis la résolution de :

a- l'équation : $2(ln\,x)^3 + 3(ln\,x)^2 - 8ln\,x + 3 = 0$

b- l'inéquation $2(ln\,x)^3 + 3(ln\,x)^2 - 8ln\,x + 3 \geq 0$

Application des limites de la fonction logarithme

3 Calcule la limite des fonctions suivantes aux bornes de leur ensemble de définitions :

1) $f(x) = ln(2 - x)$; **2)** $f(x) = ln(-x^2 + 2x + 3)$; **3)** $f(x) = (x + 1)ln\,x - x$

4) $f(x) = ln|-x^2 + 2x + 3|$; **5)** $f(x) = ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$; **6)** $f(x) = \frac{ln(x+1)}{x^2}$

7) $f(x) = x^3 - x - 2\,lnx + 1$; **8)** $f(x) = \frac{ln|cosx|}{x^2}$; **9)** $f(x) = (2x - 1)ln(2x - 1)$

Dérivées et primitives de la fonction logarithme

4 1) Calcule la dérivée des fonctions suivantes :

a- $f(x) = ln\,(2x\ +7)$; **b-** $f(x) = ln\,(x^2 - 2x - 3)$; **c-** $f(x) = (x\ +\ 7)ln(3x\ +\ 2)$

d- $f(x) = ln\sqrt{2x-3}$; **e-** $f(x) = [ln\,(x\ +1)\,]^3$; ***f*-** $f(x) = ln\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right)$

g- $f(x) = ln(x^3 - x)(x^2+2)$; ***h*-** $f(x) = \sqrt{x-1}\,ln(-x\ +\ 1)$

2) Calcule la primitive des fonctions suivantes :

a- $f(x) = ln\,(2x\ +7)$; **b-** $f(x) = \frac{Sinx\ -Cosx}{cosx\ +\ sinx}$; **c-** $f(x) = \frac{-x\ +\ 1}{x^2-2x-5}$

d- $f(x) = ln\,(\,3 - x\,)$; **e-** $f(x) = \frac{7}{2x\ -5}$; ***f*-** $f(x) = lnx + \frac{-3x\ +\ 3}{x^2+2x-5}$

g- $f(x) = \frac{2}{xlnx}$; ***h*-** $f(x) = \frac{2-\frac{2}{x}}{x-lnx}$

5 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ – {-1 ; 0 ; 1} par $g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$

1) Détermine les nombres réels a, b et c tel que $\forall\ x\ \in\ ]1\ ;\ +\infty[$
On ait $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$

2) En déduis une primitive de la fonction g sur $]1\ ;\ +\infty[$

Fonction logarithmes dans les cas pratiques

6 La magnétude apparente d'un astre d'éclat E est M = $log_a\left(\frac{E}{E_0}\right)$ où E_0 est l'éclat de référence.

1) Exprime M en fonction de lna et $ln\left(\frac{E}{E_0}\right)$.
2) Calcule lna sachant que $E_0 = \frac{E}{10}$ et M= 5
3) En déduis la magnétude apparente des astres suivants :

a- Soleil : $E = 4{,}786\times10^{10}E_0$; b- Lune : $E = 1{,}2\times10^5E_0$

7 L'aire A (en cm^2) de la peau d'un cobaye, en fonction de son poids P (en gramme) est donnée par l'égalité suivante : $lnA\ =\ ln(9{,}85)\ +\ 0{,}64lnP$. ($ln$ désignant le logarithme népérien).

1°/ Quelle est l'aire A de la peau d'un cobaye de poids $P\ =\ 780g$?

2°/ Quel est le poids P d'un cobaye dont la peau a pour aire A = 30cm^2 ?

8 Pour Détermine l'âge d'un fossile ou d'un os on mesure le pourcentage de "carbone 14" présent dans l'objet. En effet, à la mort d'un être vivant si k est le pourcentage de "carbone 14" restant au bout de N années, alors on a : $N = -8310 \times lnk$.

1°/ Le squelette d'un « homme du Cro-Magnon » contient 5% de carbone 14 initial. Quel âge a-t-il ?

2°/ Le pourcentage k de carbone 14 contenu dans un fossile vérifie :

$51{,}8\% < k < 53{,}8\%$. Donne un encadrement de l'âge de ce fossile.

9 Une culture de bactéries a un rythme de croissance modélisé par la fonction $R(x) = \frac{3000}{1+0{,}25x}$
Où x est le temps écoulé en jours.
On admet que ce rythme de croissance est la dérivée de la fonction population $P(x)$ c'est-à-dire que $P'(x) = R(x)$ et au temps $x = 0$, la culture compte 1000 bactéries c'est-a-dire : $P(0) = 1000$.
1) a- Détermine $P(x)$ désignant la population des bactéries après x jours.
b- Evaluer le nombre de bactérie au bout de 3 jours.
c- Après combien de jours le nombre de bactéries atteindra t-il 12000 individus ?
2) Etudie le sens de variation de $P(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
(on Calculera la limite de $P(x)$ en $+\infty$)
3) On donne la fonction H définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :
$H(x) = 48000(1+0{,}25x)ln(1+0{,}25x) - 11000x$
a- Montre que H est une primitive de P sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
b- Calcule l'intégrale $I = \int_5^{10} P(x)\,dx$ puis en déduis une interprétation concrète du résultat.
c- En déduis le nombre moyen de bactéries entre le 5ième et le 10ième jour.

10 **Partie A**
Soit la fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur $[\mathbf{10}\ ;\mathbf{100}]$ par : $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{lnx-2}}{\boldsymbol{x}}$.
1) Calcule $\boldsymbol{f'}$
2) Démontre $\boldsymbol{que\ f'(x)}$ est positive sur l'intervalle $[\mathbf{10}\ ;\mathbf{e^3}]$ et négative sur $[\mathbf{e^3}\ ;\mathbf{100}]$
3) Dresse le tableau de variations de $\boldsymbol{f}$.
Partie B
On se propose d'Exprime la capacité pulmonaire de l'être humain en fonction de son âge $\boldsymbol{x}$, représenté en années et, $\boldsymbol{g(x)}$ la capacité pulmonaire en litres. On admet que sur l'intervalle $[\mathbf{10}\ ;\mathbf{100}]$on a : $\boldsymbol{g(x)} = \mathbf{110}\boldsymbol{f(x)}$ où f est la fonction définie dans la partie A
1) Calcule la capacité pulmonaire à 10ans, 15ans, 30ans et 60ans.
2) Trace la courbe représentative de $\boldsymbol{g}$ dans un repère orthogonal.
(On prendra en abscisse : $\mathbf{1}\boldsymbol{cm}$ pour 10 ans et en ordonnées $\mathbf{1}\boldsymbol{cm}$ pour 10 litres).
3) A quel âge la capacité pulmonaire est-elle maximale ? Quelle est cette capacité maximale ?
4) Détermine graphiquement l'intervalle du temps durant lequel la capacité pulmonaire reste supérieure ou égale à 5 litres.

Problèmes

11 **Partie A :**

Soit la fonction g définie sur] 0 ; $+\infty$[par $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$

1) Dresse le tableau de variation de g.

2) Calcule $g(1)$ puis en déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B :

Soit la fonction f définie sur] 0 ; $+\infty$[par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$ et (C) sa courbe dans le repère orthonormé $(o ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm)

1) Dresse le tableau de variation de f.

2) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec ($\alpha < \beta$)

3) a) Montre que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f.

b) Etudie le signe de $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$ puis en déduis la position de (C) et (Δ).

4) Trace (C) et (Δ) dans le même repère.

12 **<u>Partie A</u>** :

On considère la fonction g définie sur] 0 ; $+\infty$[par $g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$

1- Etudie les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

2- Dresse le tableau de variation de g puis en déduis son signe sur] 0 ; $+\infty$[

<u>Partie B</u> :

On considère la fonction f définie sur] 0 ; $+\infty$[par : $f(x) = x + 2\frac{\ln x}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm)

1) a- Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b- Etudie les variations de f et Dresse sont tableau de variation.

c-Montre que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C), puis étudier la position de (C) par rapport à la droite (Δ).

2) Détermine les coordonnées du point A sachant que la courbe (C) admet au point A une tangente (T) parallèle à (Δ).

3) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que α $[0{,}5\ ;\ 1]$

4) Trace (C) et (Δ) dans le même repère.

5) Hachure puis Calcule l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) ; la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

13 **Partie A** :

1) On considère la fonction numérique g définie par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 lnx$

a- Dresse le tableau de variation de g.

b- Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que : $1{,}89 < \alpha < 1{,}90$.

c- Déduis de ce qui précède le signe de $g(x)$.

2) On considère la fonction numérique f définie sur] 0 ; $+\infty$[par $f(x) = \frac{lnx}{1 + x^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm)

a) Dresse le tableau de variation de f.
b) Vérifie que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$. En déduis un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude $2 \cdot 10^{-1}$
c) Trace (C) dans le repère.

Partie B :

On considère la fonction numérique définie sur] 0 ; $+\infty$[par : $F(x) = \int_1^x f(t)dt$

1) a) Prouve que F est dérivable sur] 0 ; $+\infty$[et Précise $F'(x)$.

b) En déduis le sens de variation de F.

2) a) Vérifie que $\forall\ t \geq 1$; on a : $\frac{lnt}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{lnt}{t^2}$

b) Pour tout $x > 0$ et $t \neq 0$; on pose $I(x) = \int_1^x \frac{lnt}{t^2} \mathrm{dt}$ et $J(x) = \int_1^x \frac{lnt}{(1+t)^2} \mathrm{dt}$

- A l'aide d'une intégration par parties, Calcule $I(x)$
- A l'aide d'une intégration par partie et de l'égalité : $\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{1+t}$, Calcule $J(x)$.

c) Déduis de ce qui précède que $\forall\, x > 1$; on a :
$ln2 + ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{lnx}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{lnx}{x} - \frac{1}{x}$

d) On admet que $lim \quad F(x) = \theta$. Sans Calcule θ Vérifie que ln 2 ≤ θ ≤ 1

$x \to +\infty$

14 L'objectif de ce problème est l'étude complète de la fonction numérique f définie pour tout nombre réel x différent de -1 par :

$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| \; si\; x \neq 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

Les parties A et B sont indépendantes.

On notera (Cf)la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

<u>Partie A</u> : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$

1) Détermine Dg et Détermine les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Etudie les variations de g ; on ne demande pas de Calcule ses limites en -1 et en 0.

3) Calcule $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ puis Démontre que l'on a :

$\forall\, x \in\,]-\infty\,;\,-1[\cup \left]-\frac{1}{2}\,;0\right[\,;g(x) < 0$ et $\forall\, x \in \left]-1\,;\,-\frac{1}{2}\right[\cup\,]0\,;+\infty[\,;g(x) > 0$

<u>Partie B</u> : Etude de la limite de f à l'infini.

1) Soient les fonctions h et k définies sur l'intervalle $[0\;;\;+\infty[$ par :

$h : t \to ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2}\right)$ et $k : t \to ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)$

Après une brève étude sur $[0\;;\;+\infty[$ des fonctions h et k ; Démontre que :

$\forall\, t \geq 0\,;$ on a : $t - \frac{t^2}{2} \leq ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$

2) En déduis que $lim\ \frac{t-ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$

$t \to 0$

3) En utilisant les résultats précédents, Démontre que $lim\ f(x) = \frac{1}{2}$

$x \to -\infty$

Donne une interprétation graphique des résultats de la question précédente.

Partie C : Etude de la fonction f.

1) Détermine Df et Détermine la limite de f en -1
2) Etudie la continuité de f en 0
3) Démontre que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$
4) Calcule la dérivée de f et Démontre que $f'(x) = x \times g(x)$
5) Dresse le tableau de variations de f
6) Détermine une équation de la tangente (T)à (Cf)au point d'abscisse 0
Détermine les asymptotes à (Cf).

7) Montre que l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions 0 et β avec $-0{,}8 < \beta < -0{,}7$.

8) Trace (T) ; les asymptotes et la courbe (Cf).

15 **Partie A** :

Le but de ce problème est d'étudier dans la partie A la fonction numérique f définie sur

$]\,0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2}$, de Détermine ensuite dans la **partie B** la position de sa courbe représentative par rapport à son asymptote oblique et enfin d'étudier une suite récurrente dans la partie (Γ), cette dernière partie étant dans une large mesure indépendante des deux autres.

1) Soit g la fonction numérique définie sur $]\,0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^3 - x - 2\,lnx + 1$

a) Montre que la fonction g est dérivable et que $\forall\, x \in Dg\ g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$

b) Etudie les variations de la fonction g puis Détermine le signe de $g(x)$.

2) a- Détermine les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b- Montre que pour tout $x \in]\,0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ puis donne le tableau de variations de la fonction f.

Partie B :

Γ Désigne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ unité graphique 2 cm.

Soit h la fonction définie sur] 0 ; $+\infty$[par $h(x) = x + \ln x$.

1) Etudie le sens de variation de h puis Montre que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle[0,4 ; 0,7]

2) Montre que l'on a : $e^{-\alpha} = \alpha$

3) a- Vérifie que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à Γ en + ∞.

b- Utilise les résultats de la question **1)** pour Détermine les positions relatives de Γ et Δ.

4) Construire Γ et Δ dans le repère ortho normal $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$

5) a- Calcule au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale I = $\int_1^2 \frac{\ln t}{t^2}\,dt$

b- En déduis l'aire, en cm^2 de la portion de plan limitée par la courbe Γ, la droite Δ et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

Partie C : Etude d'une suite

Dans cette partie :

- I désigne l'intervalle [0,4 ; 0,7]
- α est le réel mis en évidence au **B. 1**.
- φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^{-x}$

1) u est la suite récurrente définie par $\forall\ n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_0 = 0{,}4 \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}$

Montre qu'on a pour tout $x \in I$:

a) $\varphi(x) \in I$

b) $|\varphi'(x)| \leq 0{,}7$

c) $|\varphi(x) - \alpha| \leq 0{,}7|x - \alpha|$

2) a) Montre que $\forall\ n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}7|u_n - \alpha|$ puis en déduis par récurrence que $\forall\ n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_n - \alpha| \leq 0{,}3(0{,}7)^n$

b) Conclus alors quant à la convergence de la suite u.

3) Détermine un entier p tel que pour $n \geq p$ on ait: $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ puis donné à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de u_p à 10^{-3}près.

En déduis une valeur approchée par défaut et par excès de α à 10^{-3}près

16 **Partie A :** On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I = \left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ par :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x}{1+x} - ln(1 + x)$

1) a) Détermine l'ensemble de définition de f et les limites aux bornes de cet ensemble.
b) Détermine la fonction dérivée de f et établir son tableau de variations.

2) Démontre que $\forall\, x \in\,]1 ; +\infty[$; l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α. Vérifie qu'une valeur décimale approchée de α à 10^{-3}près est 3,9.
3) Précise, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$

Partie B : soit g la fonction définie par : $g(0) = 0$ et $g(t) = \frac{ln(1+t)}{\sqrt{t}}$ si $t > 0$

1) Démontre que g est continue en 0. Etudie la dérivabilité de g en 0.
2) Calcule $g'(t)$ et Exprime $g'(t)$ en fonction de $f(t)$
3) a) Détermine la limite en $+\infty$ de g.
b) Dresse le tableau des variations de g.

4) Le plan est rapporté au repère orthogonal$(o ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$. Construire la courbe (Γ) représentative de g.

Partie C : Cette partie a pour objectif de Détermine l'aire A, en unités d'aires, de la portion de plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe (Γ) et la droite d'équation $x = 1$.

1) a) Démontre que la fonction g_1 définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g_1(x) = \sqrt{x}ln(1 + x)$ est dérivable en 0.
b) Soit φ la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $\varphi(x) = 2\sqrt{x}ln(1 + x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$

Démontre que φ est dérivable en tout point de $[0 ; +\infty[$ et que $\varphi'(x) = g(x)$

2) En déduis que $A = \int_0^1 g(t)dt = 2ln2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$

3) Soit h la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $h(x) = \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$ et k la fonction définie sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ par $k(\theta) = tan^2\theta$

a) Calcule $(hok)(0)$

b) Prouve que $\forall\, \theta \in I$; on a : $(hok)'(\theta) = 4tan^2\theta$

c) En écrivant $tan^2\theta = (tan^2\theta + 1) - 1$; Détermine une primitive de $(hok)'$ puis donne l'expression de (hok)

d) Calcule $h(1)$

4) déduis des résultats précédents la valeur exacte de A.

17 **Partie A :**

On considère la fonction f définie par $f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$

1) Détermine l'ensemble de définition D_f de f.

2) Calcule les limites aux bornes de D_f puis en déduis que (C) admet deux asymptotes dont on Précisera les équations.

3) Dresse le tableau de variation de f

4) a-Ecris une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse I où I est le point d'inflexion de la courbe (C).

b-Etudie la position de (C) et (T) puis Trace (C) et (T) dans le même repère.

5) On considère l'intégrale I définie par $= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx$.

a-Calcule I en utilisant une intégration par parties.

b-En déduis en cm^2 l'aire A de la partie du plan délimité par la courbe (C) , la tangente (T) et la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$

Partie B :

On considère dans cette partie la fonction numérique h définie sur $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$h\ (x) = \frac{1}{2}f(cosx)$ où f est la fonction définie dans la **Partie A :**

1) Vérifie que h est la primitive qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{sinx}$
2) Calcule l'intégrale $K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sinx}dx$

Soit l'intégrale (I_n); n appartenant à $\mathbb{N}$ définie par : $I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x}{sinx}dx$.

a-Calcule I_0 et I_1

b- Calcule l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} sinxcos^n xdx$

c- En déduis l'expression de $I_n - I_{n+2}$ en fonction de n puis Calcule I_2 ; I_3 et I_4

18 **PARTIE A :**

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 3x - 1 - lnx$. On désigne par C$g$ la courbe représentative de g dans un repère orthonormé(O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) d'unité graphique 1cm.

1) Etudie les limites de g en 0 et en + ∞.
2) Etudie les branches infinies de la courbe Cg.
3) Etudie les variations de g.
4) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle$[2 ; 3]$.
   Détermine un encadrement de α
5) Déduis de ce qui précède le signe de $g(x)$ en fonction de x.
   Interprète graphiquement le résultat.
6) a- Trace la courbe Cg.
   a- Discute graphiquement suivant les valeurs du périmètre réel m, le nombre de solution de l'équation $g(x) = m$

PARTIE B :

Soit la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x-1}{x^2-xlnx}$. On désigne par (C$f$) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) d'unité graphique : 1 cm.

1) a) Montre que pour tout x de $]0 ; +\infty[$, on a $x > lnx$.
   b) Justifie que la fonction f est bien définie sur $]0 ; +\infty[$.

2) Etudie les limites de f en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduis ?

3) a- Monter que pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2-xlnx)^2}$

b- Dresse le tableau de variation de f.

c – Montre que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}$ puis en déduis un encadrement de $f(\alpha)$.

4) Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (Cf) de f au point d'abscisse 1.

5) Résous l'équation $f(x) = 0$ puis Trace la courbe (Cf) et la tangente (T) dans le même repère.

6) a- Montre que pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, on a : $f(x) = \frac{1-\frac{1}{x}}{x-lnx}$

b- Soit $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (Cf) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

Montre que $A(\alpha)= 2ln(\alpha - 1)$ puis en déduis un encadrement de $A(\alpha)$.

7) Soit n un entier naturel supérieur ou égale à .
   a- Calcule $a_n = \int_1^n f(x)dx$. Interprète graphiquement ce résultat.
   b- Calcule la limite de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

PARTIE C :

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \int_1^{e^x} f(t)dt$. On désigne par (Ch)la courbe représentative de h dans un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$ d'unité graphique : 1 cm.

1) a- Montre que $h(x) = ln(e^x - x)$.
   b- Montre que pour tout nombre réel , on a : $e^x > x$.
2) a-Calcule $limite\ de\ h(x)$ puis $limite\ de\ \frac{h(x)}{x}$ en $+\infty$

   Que peut-on en déduis pour la courbe (C_f) ?

   b- Montre que pour tout nombre réel , on a : $h(x) = x + ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$.

   En déduis de $lim\ h(x)$ en $+\infty$

3) Etudie la position relative de (Ch) et de $(\Delta): y = x$
4) Dresse le tableau de variation de h puis Trace(Ch) .

19 **PARTIE A :**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right)$. On désigne par (C$f$) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé$(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$ d'unité graphique 1cm.

1) Montre que f est impaire.
2) Montre que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis Montre que sa dérivée $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$.
3) Dresse le tableau de variation de f.
4) Etudie les branches infinies de la courbe (Cf).
5) Trouve une équation cartésienne de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse nul.
6) Précise la position de (T) et (Cf).
7) Trace la droite (T) et la courbe (Cf)
8) Soit α un réel strictement positif. Calcule en fonction de α , l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (Cf) et les droites d'équations respectives $x = 0$, $y = 0$ et $x = \alpha$.

PARTIE B :

1) Montre que la fonction f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle I que l'on Précisera.
2) Construis dans le même repère que (Cf) , la courbe (Cg) de la fonction g.
3) Montre que pour tout $x \in$ I, on a : $g(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})$.
4) Montre que l'équation $g(x) = x$ admet dans l'intervalle] 0 ; $+\infty$ [une solution unique α et que $\alpha \in \left]\frac{-\sqrt{3}}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$.
5) Calcule en fonction de α l'aire du domaine limité par les deux courbes (Cf) et (Cg) et situées dans le demi-plan $x \geq 0$.

PARTIE C :

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}$.

1) Montre que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on Précisera.
2) On pose $h(x) = \varphi^{-1}(x)$. Donne les expressions de $h(x)$ et $h'(x)$.
3) Etudie puis représenter le fonction h $sur]-1 ; 1[$.

Solutions

Propriétés de la fonction logarithme

1 1) En utilisant les propriétés logarithmiques, exprimons en fonction de $ln2$ les réels suivants :

A $= ln8 + \frac{1}{2} ln16 - ln\sqrt{2}$

=> A $= ln2^3 + \frac{1}{2} ln2^4 - ln2^{\frac{1}{2}} = 3ln2 + 2\,ln2 - \frac{1}{2}\,ln2$ => A $= \frac{9}{2}\,ln2$

B $= ln\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + ln\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + ln(2+\sqrt{2})$

=> B $= ln\left[\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)(2+\sqrt{2})\right]$

$= ln\left[\left((2)^2 - \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2\right)(2+\sqrt{2})\right] = ln\left[\left(4-(2+\sqrt{2})\right)(2+\sqrt{2})\right]$

$= ln\left[(4-2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})\right] = ln(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2}) = ln\left[(2)^2 - (\sqrt{2})^2\right]$

$= ln(4-2) = ln2$ => B $= ln2$

C = $ln2\sqrt{2} + ln4 - ln\frac{1}{\sqrt{2}} + ln\sqrt{2^3}$

=> C = $ln2^{\frac{3}{2}} + ln2^2 - \left(ln1 - ln\sqrt{2}\right) + ln(2^3)^{\frac{1}{2}}$

$= ln2^{\frac{3}{2}} + ln2^2 + ln\sqrt{2} + ln2^{\frac{3}{2}} = ln2^{\frac{3}{2}} + ln2^2 + ln2^{\frac{1}{2}} + ln2^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{3}{2}ln2 + 2ln2 + \frac{1}{2}ln2 + \frac{3}{2}ln2 = \frac{3}{2}ln2 + 2ln2 + \frac{1}{2}ln2 + \frac{3}{2}ln2$

$= \frac{11}{2}ln2$ => C = $\frac{11}{2}ln2$

D = $ln64 + \frac{5}{3}ln8 - ln\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}} = ln2^6 + \frac{5}{3}ln2^3 - ln2^{\frac{15}{16}}$

$= 6ln2 + 5\,ln2 - \frac{15}{16}ln2 = \frac{161}{16}ln2$

=> D = $\frac{161}{16}ln2$

2) En utilisant les propriétés logarithmiques, résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a- $ln\,(2x + 7) = ln\,(x - 3)$ => $D_v =]3\,;\,+\infty[$

Alors $ln\,(2x + 7) = ln\,(x - 3) \Leftrightarrow 2x + 7 = x - 3 \Leftrightarrow x = -10 \notin D_v$ => S = { ∅ }

b- $ln\,(x^2 - 2x - 3) = ln\,(x + 7)$ => $D_v =]-7\,;\,-1[\cup]3\,;\,+\infty[$

Alors $ln\,(x^2 - 2x - 3) = ln\,(x + 7) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = x + 7 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$

=> $\Delta = 49$ Donc $x_1 = -2 \in D_v$ et $x_2 = 5 \in D_v$ => S = {−2 ; 5 }

c- $lnx + ln(3x + 2) = ln\,(2x + 3)$ => $D_v =]0\,;\,+\infty[$

Alors $lnx + ln(3x + 2) = ln\,(2x + 3) \Leftrightarrow ln[x(3x + 2)] = ln\,(2x + 3) \Leftrightarrow$

$x(3x + 2) = 2x + 3 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x = 2x + 3 \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 1$ => $x = -1 \notin D_v$ ou

$x = 1 \in D_v$ => S = { 1 }

d- $ln\,(x - 3) = ln\,(x + 7) - ln\,(x + 1)$ => $D_v =]3\,;\,+\infty[$

Alors $ln\,(x - 3) = ln\,(x + 7) - ln\,(x + 1) \Leftrightarrow ln\left(x - 3\right) = ln\left(\frac{x+7}{x+1}\right) \Leftrightarrow x - 3 = \frac{x+7}{x+1}$

$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 1) = x + 7 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = x + 7 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$ => $\Delta = 49$

Donc $x_1 = -2 \notin D_v$ et $x_2 = 5 \in D_v$ => S = { 5 }

e- $ln(2x-2) + ln(x+2) = 3ln2$ => $D_v =]1 ; +\infty[$

Alors $ln(2x-2) + ln(x+2) = 3ln2 \Leftrightarrow ln[(2x-2)(x+2)] = ln2^3 \Leftrightarrow$

$(2x-2)(x+2) = 2^3 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 8 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$

=> $\Delta = 25$. Donc $x_1 = -3 \notin D_v$ et $x_2 = 2 \in D_v$ => S = { 2 }

***f*-** $ln(x-2) + ln(x+3) = 2\,ln(x+1)$. => $D_v =]2 ; +\infty[$

Alors $ln(x-2) + ln(x+3) = 2\,ln(x+1) \Leftrightarrow ln[(x-2)(x+3)] = ln(x+1)^2$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+3) = (x+1)^2 \Leftrightarrow -x - 7 = 0$ => $x = -7 \notin D_v$ => S = { ∅ }

g- $ln\sqrt{2x-3} = ln(6-x) - \frac{1}{2}lnx$ => $D_v = \left]\frac{3}{2} ; +\infty\right[$

Alors $ln\sqrt{2x-3} = ln(6-x) - \frac{1}{2}lnx \Leftrightarrow ln\sqrt{2x-3} = ln(6-x) - ln\sqrt{x} \Leftrightarrow$

$ln\sqrt{2x-3} + ln\sqrt{x} = ln(6-x) \Leftrightarrow ln[(\sqrt{2x-3})(\sqrt{x})] = ln(6-x) \Leftrightarrow$

$(\sqrt{2x-3})(\sqrt{x}) = 6-x \Leftrightarrow \sqrt{x(2x-3)} = 6-x \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 3x} = 6-x \Leftrightarrow$

$\left(\sqrt{2x^2 - 3x}\right)^2 = (6-x)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x = x^2 - 12x + 36 \Leftrightarrow x^2 + 9x - 36 = 0$

=> $\Delta = 225$. Donc $x_1 = -12 \notin D_v$ et $x_2 = 3 \in D_v$ => S = { 3 }

***h*-** $ln|x-1| + ln|2x-1| = 0$ => $D_v = \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2} ; 1\right[\cup]1 ; +\infty[$

$ln|(x-1)(2x-1)| = 0 \Leftrightarrow ln|(x-1)(2x-1)| = ln1 \Leftrightarrow |(x-1)(2x-1)| = 1$

$\Leftrightarrow |2x^2 - 3x + 1| = 1$ => $2x^2 - 3x + 1 = -1$ ou $2x^2 - 3x + 1 = 1$

- Si $2x^2 - 3x + 1 = -1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 2 = 0$ => $\Delta = -7$ et $S_1 = \{ \emptyset \}$.
- Si $2x^2 - 3x + 1 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 0$ => $(2x-3) = 0$. Donc $x = 0 \in D_v$ ou $x = \frac{3}{2} \in D_v$ => S = $\left\{ 0 ; \frac{3}{2} \right\}$

***i*-** $(lnx)^2 - 7lnx + 6 = 0$.

Effectuons un changement de variable en posant : $lnx = X$

Alors l'équation $(lnx)^2 - 7lnx + 6 = 0$ devient : $X^2 - 7X + 6 = 0$ => $\Delta = 25$.

Donc $X_1 = 1$ et $X_2 = 6$

- Si $X_1 = 1 \Leftrightarrow lnx = 1$ => $x = e^1 = e$.

- Si $X_2 = 6 \Leftrightarrow lnx = 6$ => $x = e^6$

=> S = { e ; e^6 }

***j*-** $3[ln(x+1)]^2 - 2ln(x+1) - 5 = 0$

Effectuons un changement de variable en posant : $ln(x+1) = X$

Alors l'équation $3[ln(x+1)]^2 - 2ln(x+1) - 5 = 0$ devient : $3X^2 - 2X - 5 = 0$

=> $\Delta = 64$. Donc $X_1 = -1$ et $X_2 = \frac{3}{5}$

- Si $X_1 = -1 \Leftrightarrow ln(x+1) = -1$ => $x + 1 = e^{-1}$ => $x = -1 + e^{-1}$

- Si $X_2 = \frac{3}{5} \Leftrightarrow ln(x+1) = \frac{3}{5}$ => $x + 1 = e^{\frac{3}{5}}$ => $x = -1 + e^{\frac{3}{5}}$

=> S = $\left\{ -1 + e^{-1} \ ; \ -1 + e^{\frac{3}{5}} \right\}$

3) En utilisant les propriétés logarithmiques, résolvons dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a- $ln(x+8) - ln(x+14) + ln(x+2) \leq 0$ => $D_v =]-2 ; +\infty[$

$ln(x+8) - ln(x+14) + ln(x+2) \leq 0$.

Posons $ln(x+8) - ln(x+14) + ln(x+2) = 0 \Leftrightarrow ln\left(\frac{x+8}{x+14}\right) + ln(x+2) = 0 \Leftrightarrow$

$ln\left[\frac{(x+8)(x+2)}{x+14}\right] = ln1 \Leftrightarrow \frac{(x+8)(x+2)}{x+14} = 1 \Leftrightarrow (x+8)(x+2) = x + 14 \Leftrightarrow$

$x^2 + 10x + 16 = x + 14 \Leftrightarrow x^2 + 9x + 2 = 0$ => $\Delta = 73$. Donc on a :

$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{73}}{2}$ et $x_2 = \frac{-9 + \sqrt{73}}{2}$. => $S_1 = \left[\frac{-9 - \sqrt{73}}{2} \ ; \ \frac{-9 + \sqrt{73}}{2}\right]$

Ainsi l'intersection de $D_v =]-2\,;+\infty[$ et $S_1 = \left[\frac{-9-\sqrt{73}}{2}\;;\frac{-9+\sqrt{73}}{2}\right]$ donne :

$S = \left]-2\,;\frac{-9+\sqrt{73}}{2}\right]$

b- $ln\,(2x-1) - ln\,(1-x) < ln3 \Rightarrow D_v = \left]\frac{1}{2}\,;1\right[$

$ln\,(2x-1) - ln\,(1-x) < ln3$

Posons $ln\,(2x-1) - ln\,(1-x) = ln3 \Leftrightarrow ln\left(\frac{2x-1}{1-x}\right) = ln3 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{1-x} = 3 \Leftrightarrow$

$2x-1 = 3(1-x) \Leftrightarrow 5x-4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \Rightarrow S_1 = \left]-\infty\;;\frac{4}{5}\right[$

Ainsi l'intersection de $D_v = \left]\frac{1}{2}\,;1\right[$ et $S_1 = \left]-\infty\;;\frac{4}{5}\right[$ donne : $S = \left]\frac{1}{2}\;;\frac{4}{5}\right[$

c- $ln\,(x+1) > ln\,(4x-1) - ln\,(x-1) \Rightarrow D_v =]1\,;+\infty[$

$ln\,(x+1) > ln\,(4x-1) - ln\,(x-1)$.

Posons $ln\,(x+1) = ln\,(4x-1) - ln\,(x-1) \Leftrightarrow ln\,(x+1) = ln\left(\frac{4x-1}{x-1}\right) \Leftrightarrow$

$x+1 = \frac{4x-1}{x-1} \Leftrightarrow (x+1)(x-1) = 4x-1 \Leftrightarrow x^2-1 = 4x-1 \Leftrightarrow x^2-4x = 0 \Leftrightarrow$

$x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 4 \Rightarrow S_1 =]-\infty\;;0[\cup]4\;;+\infty[$

Ainsi l'intersection de $D_v =]1\,;+\infty[$ et $S_1 =]-\infty\;;0[\cup]4\;;+\infty[$ donne :

$S =]4\;;+\infty[$

4) En utilisant les propriétés logarithmiques, résolvons dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ les systèmes suivantes :

A retenir

Si $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{P}$ désignent respectivement la somme et le produit de deux termes x et y, alors :

- $x+y = \boldsymbol{S}$.
- $x\times y = \boldsymbol{P}$.
- $x^2+y^2 = \boldsymbol{S^2-2P}$
- $x^3+y^3 = \boldsymbol{S^3-3PS}$

a- $\begin{cases} x+y=15 \\ lnx+lny=ln36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=15 \\ ln(x\times y)=ln36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=15 \\ x\times y=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=15 \\ P=36 \end{cases}$

Ce système est solution de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ avec $S = 15$ et $P = 36$

Alors résolvons l'équation : $X^2 - 15X + 36 = 0$ => $\Delta = 81$. Donc $X_1 = 3$ et $X_2 = 12$

=> S= $\{(3\,;12)\ ;\ (12\,;3)\}$

b- $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ lnx + lny = ln6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ ln(x \times y) = ln6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x \times y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2P = 13 \\ P = 6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2(6) = 13 \\ P = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 12 = 13 \\ P = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 = 25 \\ P = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases}$ ou $\begin{cases} S = -5 \\ P = 6 \end{cases}$

-Pour $\begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases}$, le système est solution de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ avec $S = 5$ et $P = 6$

Alors résolvons l'équation : $X^2 - 5X + 6 = 0$ => $\Delta = 1$. Donc $X_1 = 3$ et $X_2 = 2$

=> S= $\{(3\,;2)\ ;\ (2\,;3)\}$

-Pour $\begin{cases} S = -5 \\ P = 6 \end{cases}$, le système est solution de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ avec $S = -5$ et $P = 6$

Alors résolvons l'équation : $X^2 + 5X + 6 = 0$ => $\Delta = 1$. Donc $X_1 = -3$ et $X_2 = -2$

=> S= $\{(-3\,;-2)\ ;\ (-2\,;-3)\}$

c- $\begin{cases} 2lnx - lny = 0 \\ 4lnx + lny = 3 \end{cases}$ **(2)** **(1)**

La somme des équations **(1)** et **(2)** donne : $6lnx = 3$ => $lnx = \frac{1}{2}$ => $x = e^{\frac{1}{2}}$

En remplaçant $x = e^{\frac{1}{2}}$ par sa valeur dans l'équation **(1)**, on a : $2lne^{\frac{1}{2}} - lny = 0 \Leftrightarrow$

$2 \times \frac{1}{2} - lny = 0 \Leftrightarrow 1 - lny = 0$ => $lny = 1$ => $y = e$

=> S= $\left\{\left(e^{\frac{1}{2}}\,;e\right)\ ;\ \left(e\,;e^{\frac{1}{2}}\right)\right\}$

d- $\begin{cases} lnx \times lny = -10 \\ lnx + lny = 3 \end{cases}$ Posons $lnx = X$ et $lny = Y$ => $\begin{cases} X \times Y = -10 \\ X + Y = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} P = -10 \\ S = 3 \end{cases}$

Ce système est solution de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ avec $S = 3$ et $P = -10$

Alors résolvons l'équation : $X^2 - 3X - 10 = 0$ => $\Delta = 49$. Donc $X_1 = 5$ et $X_2 = -2$

- Si $X_1 = 5 \Leftrightarrow lnx = 5$ => $x = e^5$
- Si $X_1 = -2 \Leftrightarrow lnx = -2$ => $x = e^{-2}$

=> $S = \{(e^5 ; e^{-2}) \ ; \ (e^{-2} ; e^5)\}$

e- $\begin{cases} X \times Y = 4 \\ 4(log_x y + log_y x) = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \times Y = 4 \\ 4\left(\frac{lny}{lnx} + \frac{lnx}{lny}\right) = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \times Y = 4 \\ 4\left(\frac{ln^2 y + ln^2 x}{lnx \times lny}\right) = 17 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X \times Y = 4 \\ \frac{ln^2 y + ln^2 x}{lnx \times lny} = \frac{17}{4} \end{cases}$. Posons $lnx = X$ et $lny = Y$ $\Leftrightarrow \begin{cases} X \times Y = 4 \\ \frac{Y^2 + X^2}{X \times Y} = \frac{17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} P = 4 \\ \frac{S^2 - 2P}{P} = \frac{17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 4 \\ \frac{S^2 - 2(4)}{4} = \frac{17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 4 \\ \frac{S^2 - 8}{4} = \frac{17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 4 \\ S^2 - 8 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 4 \\ S^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} P = 4 \\ S = 5 \end{cases}$

Ce système est solution de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ avec $S = 5$ et $P = 4$

Alors résolvons l'équation : $X^2 - 5X + 4 = 0$ => $\Delta = 9$. Donc $X_1 = 1$ et $X_2 = 4$

- Si $X_1 = 1 \Leftrightarrow lnx = 1$ => $x = e$
- Si $X_1 = 4 \Leftrightarrow lnx = 4$ => $x = e^4$

2 Soit le polynôme q définie par $q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

1) Calculons $q(1)$ puis résolvons les équations $q(x) = 0 \ et \ q(x) \geq 0$

$q(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 8(1) + 3 = 2 + 3 - 8 + 3 = 0$

Résolvons les équations $q(x) = 0 \ et \ q(x) \geq 0$

Pour cela, factorisons $q(x)$. La forme factorisée de $q(x)$ en trois produit de facteurs est :

$q(x) = (x - 1)(x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

Alors $q(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$ => $x = 1$ ou $x = -3$ ou $x = \frac{1}{2}$

=> S = $\left\{1 ; -3 ; \frac{1}{2}\right\}$

De même $q(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right) \geq 0$. Posons $(x-1)(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right) = 0$

=> $x = 1$ ou $x = -3$ ou $x = \frac{1}{2}$. Ainsi le tableau de signe est le suivant :

x		-3	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$x-1$		$-$		$+$	
$x+3$		$-$		$-$	
$x-\frac{1}{2}$		$+$		$-$	
$q(x)$		$+$		$+$	

D'après le tableau de signe, l'ensemble solution correspondant à l'inéquation $q(x) \geq 0$ est :

S= $\left[-3\ ;\ \frac{1}{2}\right] \cup [1\ ;\ +\infty[$

2) En déduisons la résolution de :

a- l'équation : $2(ln\ x)^3 + 3(ln\ x)^2 - 8ln\ x + 3 = 0$

$2(ln\ x)^3 + 3(ln\ x)^2 - 8ln\ x + 3 = 0$. Posons $ln\ x = X$ => $2X^3 + 3X^2 - X + 3 = 0$

$(X-1)(X+3)\left(X-\frac{1}{2}\right) = 0$ => $X = 1$ ou $X = -3$ ou $X = \frac{1}{2}$.

- Si $X = 1 \Leftrightarrow lnx = 1$ => $x = e$
- Si $X = -3 \Leftrightarrow lnx = -3$ => $x = e^{-3}$
- Si $X = \frac{1}{2} \Leftrightarrow lnx = \frac{1}{2}$ => $x = e^{\frac{1}{2}}$

=> S = $\left\{e\ ;\ e^{-3}\ ;\ e^{\frac{1}{2}}\right\}$

b- l'inéquation $2(ln\ x)^3 + 3(ln\ x)^2 - 8ln\ x + 3 \geq 0$

en utilisant la question 1) et 2) a-) , on a : S= $\left[\ e^{-3}\ ;\ e^{\frac{1}{2}}\right] \cup [e\ ;\ +\infty[$

Application des limites de la fonction logarithme

3 Calculons la limite des fonctions suivantes aux bornes de leur ensemble de définition :

1) $f(x) = ln(2-x)$

$D_f = \{x\ /\ x \in \mathbb{R}\ ;\ 2-x > 0\}$. $2-x > 0$ => $x < 2$ => $D_f =]-\infty\ ;\ 2[$

$lim\ f(x) = lim\ ln(2 - x)\ = lim\ ln(-x) = +\infty$

$x \to -\infty \qquad x \to -\infty \qquad x \to -\infty$

$lim\ f(x) = lim\ ln(2 - x)\ = -\infty$

$x \to 2^- \qquad x \to 2^-$

2) $f(x) = ln\ (-x^2 + 2x + 3)$

$D_f = \{x\ /\ x \in \mathbb{R}\ ;\ -x^2 + 2x + 3 > 0\}$. $-x^2 + 2x + 3 > 0$. Posons $-x^2 + 2x + 3 = 0$

=> $\Delta = 16$. Donc $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$. Ainsi le tableau de signe est le suivant:

x		-1		3	
$-x^2 + 2x + 3$		0	$+$	0	

=> $D_f =]-1\ ;3\ [$

$lim\ f(x) = lim\ ln\ (-x^2 + 2x + 3)\ = -\infty$

$x \to -1^+ \qquad x \to -1^+$

$lim\ f(x) = lim\ ln\ (-x^2 + 2x + 3)\ = -\infty$

$x \to 3^- \qquad x \to 3^-$

3) $f(x)\ =\ (x + 1)ln\ x - x$

$D_f = \{x\ /\ x \in \mathbb{R}\ ;\ x > 0\}$. $x > 0$ => $D_f =]0\ ; +\infty[$

$lim\ f(x) = lim\ (x + 1)ln\ x - x\ = (0 + 1)(-\infty) - 0 = (1)(-\infty) = -\infty$

$x \to 0 \qquad x \to 0$

$lim\ f(x) = lim\ (x + 1)ln\ x - x\ = (+\infty)(+\infty) - (+\infty) = +\infty - \infty = "\ FI\ "$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

Levons l'indétermination

$lim\ f(x) = lim\ (x + 1)ln\ x - x\ = lim\ xln\ x + lnx - x = lim\ x\left(\ lnx + \frac{lnx}{x} - 1\right)$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty \qquad x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

$= (+\infty)(+\infty+0-1) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$

4) $f(x) = ln|-x^2+2x+3|$

$D_f = \{x / x \in \mathbb{R}; -x^2+2x+3 \neq 0\}$. $-x^2+2x+3 \neq 0$. Posons $-x^2+2x+3=0$

=> $\Delta = 16$. Donc $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$. Alors $D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;3[\cup]3;+\infty[$

$lim\ f(x) = lim\ ln|-x^2+2x+3| = lim\ ln|-x^2| = +\infty$

$x \to -\infty \quad x \to -\infty \quad x \to -\infty$

$lim\ f(x) = lim\ ln|-x^2+2x+3| = lim\ ln|-x^2| = +\infty$

$x \to +\infty \quad x \to +\infty \quad x \to +\infty$

$lim\ f(x) = lim\ f(x) = +\infty$

$x \to -1^- \quad x \to -1^+$

$lim\ f(x) = lim\ f(x) = = +\infty$

$x \to 3^- \quad x \to 3^+$

5) $f(x) = ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$

$D_f = \left\{x / x \in \mathbb{R}; \frac{x-1}{x+2} > 0\right\}$. $\frac{x-1}{x+2} > 0$; Posons $\frac{x-1}{x+2} = 0$ => $\begin{cases} x-1=0 \\ et \\ x+2=0 \end{cases}$

=> $\begin{cases} x = 1 \\ et \\ x = -2 \end{cases}$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$\frac{x-1}{x+2}$	$+$		$\|\|$		0	$+$	

=> $D_f =]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$

$lim\ f(x) = lim\ ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = lim\ ln\left(\frac{x}{x}\right) = ln(1) = 0$

$x \to -\infty \quad x \to -\infty \quad x \to -\infty$

$lim\ f(x) = lim\ ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = lim\ ln\left(\frac{x}{x}\right) = ln(1) = 0$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

$lim\ f(x) = \ lim\ f(x) = ln\left(\frac{-3}{0^-}\right) = +\infty$

$x \to -2^- \quad x \to -2^+$

$lim\ f(x) = lim\ ln(0) = -\infty$

$x \to 1^+ \qquad x \to 1^+$

6) $f(x) \ = \frac{ln(x+1)}{x^2}$

$D_f = \{x \ / \ x \ \in \mathbb{R}\,; \ x + 1 > 0 \ et \ x^2 \neq 0\}.$

$x + 1 > 0$ => $x > -1$ et $x^2 \neq 0$ => $x \neq 0$

La reunion de ces deux conditions Donne $D_f =]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[$

$lim\ f(x) = lim\ \frac{ln(x+1)}{x^2} = \ \frac{ln(0)}{1} = -\infty$

$x \to -1 \qquad x \to -1$

$lim\ f(x) = \ lim\ \frac{1}{x} \times \frac{ln(x+1)}{x} = \ (-\infty) \times (1) = -\infty$

$x \to 0^- \qquad x \to 0^-$

$lim\ f(x) = \ lim\ \frac{1}{x} \times \frac{ln(x+1)}{x} = \ (+\infty) \times (1) = +\infty$

$x \to 0^+ \qquad x \to 0^+$

$lim\ f(x) = lim\ \frac{ln(x+1)}{x^2} = \ lim\ \frac{ln(x)}{x^2} = 0$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

7) $f(x) \ = \ x^3 - x - 2\ lnx \ + \ 1$

$D_f = \{x \ / \ x \ \in \mathbb{R}\,; \ x > 0\}. \qquad x > 0$ => $D_f =]0\,;+\infty[$

$lim\ f(x) = lim\ x^3 - \ x - \ 2\ lnx \ + \ 1 \ = 0 - 0 - 2(-\infty) + 1 = \ +\infty$

$x \to 0 \qquad x \to 0$

$lim\ f(x) = lim\ x^3 - x - 2\ lnx + 1 = +\infty - \infty = "FI"$

$x \to +\infty \quad x \to +\infty$

Levons l'indétermination:

$lim\ f(x) = lim\ x^3 - x - 2\ lnx + 1 = lim\ x^2\left(x - \frac{1}{x} - 2\frac{lnx}{x} + \frac{1}{x}\right) = (+\infty)^2(+\infty) = +\infty$

$x \to +\infty \quad x \to +\infty \qquad\qquad x \to +\infty$

8) $f(x) = \frac{ln|cosx|}{x^2}$

$D_f = \{x / x \in \mathbb{R};\ cosx \neq 0\ et\ x^2 \neq 0\}.$

$cosx \neq 0 \Leftrightarrow cosx \neq cos\frac{\pi}{2}$ => $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \quad ou \\ x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$x^2 \neq 0$ => $x \neq 0$

La reunion de ces deux conditions Donne $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{2}\ ;0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right\}$

9) $f(x) = (2x-1)ln(2x-1)$

$D_f = \{x / x \in \mathbb{R};\ 2x-1 > 0\}.\ 2x-1 > 0$ => $x > \frac{1}{2}$ => $D_f = \left]\frac{1}{2}\ ;+\infty\right[$

$lim\ f(x) = lim\ (2x-1)ln(2x-1) = (0)(-\infty) = "FI"$

$x \to \frac{1}{2} \qquad x \to \frac{1}{2}$

Levons l'indétermination en effectuant un changement de variable:

Posons $2x - 1 = X$ => $x = \frac{X+1}{2}$. Si $x \to \frac{1}{2}$ alors $X \to 0$

=> $lim\ f(x) \Leftrightarrow lim\ XlnX = 0$

$x \to \frac{1}{2} \qquad X \to 0$

D'où $lim\ f(x) = 0$

$x \to \frac{1}{2}$

$lim\ f(x) = lim\ (2x-1)ln(2x-1) = lim\ 2xln2x = +\infty$

$x \to +\infty \quad x \to +\infty \quad x \to +\infty$

Dérivées et primitives de la fonction logarithme

4 1) Calculons la dérivée des fonctions suivantes :

a- $f(x) = ln\ (2x\ +7)$ => $f'(x) = \frac{2}{2x+7}$

b- $f(x) = ln\ (x^2 - 2x - 3)$ => $f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-3}$

c- $f(x) = (x\ +\ 7)ln(3x\ +\ 2)$ => $f'(x) = ln(3x\ +\ 2) + \frac{3(x+7)}{3x+2}$

=> $f'(x) = \frac{(3x+2)ln(3x+2)+3x+21}{3x+2}$

d- $f(x) = ln\sqrt{2x-3}$ => $f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2x-3}}}{\sqrt{2x-3}} = \frac{1}{2x-3}$

e- $f(x) = [ln\ (x\ +1)\ ]^3$ => $f'(x) = 3\left(\frac{1}{x+1}\right)[ln\ (x\ +1)\ ]^2 = \frac{3ln^2(x+1)}{x+1}$

f- $f(x) = ln\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right)$ => $f'(x) = \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{x^2+4x+1}{(x^2-1)(x+2)}$

g- $f(x) = ln(x^3-x)(x^2+2)$ => $f'(x) = \frac{3x^2-1}{x^3-x} + \frac{2x}{x^2+2} = \frac{5x^4+3x^2-2}{(x^3-x)(x^2+2)}$

h- $f(x) = \sqrt{x-1}\ ln(-x\ +1)$ => $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \times ln(-x\ +1) + \frac{-1}{-x+1} \times \sqrt{x-1}$

=> $f'(x) = \frac{ln(-x+1)}{2\sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x-1}}{-x+1} = \frac{ln(-x+1)}{2\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \frac{(x-1)ln(-x+1)+2(x-1)}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$

2) Calculons la primitive des fonctions suivantes :

a- $f(x) = ln\ (2x\ +7)$

<u>NB :</u> $Si\ f(x) = ln\ (ax\ +\ b)$ => $F(x) = \left(x\ +\ \frac{b}{a}\right) ln\ (ax+b) - x + k$

Alors $f(x) = ln\ (2x\ +7)$ => $F(x) = \left(x\ +\ \frac{7}{2}\right) ln\ (2x\ +7) - x + k$

b- $f(x) = \frac{Sinx\ -Cosx}{cosx\ +\ sinx} = \frac{-(-Sinx\ +Cosx)}{cosx\ +\ sinx} = -ln|cosx + sinx| + k$

c- $f(x) = \frac{-x+1}{x^2-2x-5} = \frac{-2}{-2} \times \frac{-x+1}{x^2-2x-5} = -\frac{1}{2} \times \frac{2x-2}{x^2-2x-5}$

$=> F(x) = -\frac{1}{2} \times ln\,(x^2 - 2x - 5) + k$

d- $f(x) = ln\,(3 - x) => F(x) = (x - 3)ln\,(3 - x) - x + k$

e- $f(x) = \frac{7}{2x-5} = \frac{2}{2} \times \frac{7}{2x-5} = \frac{7}{2} \times \frac{2}{2x-5} = \frac{7}{2} \times ln|2x - 5| + k$

f- $f(x) = lnx + \frac{-x+1}{x^2-2x-5} => F(x) = x\,ln\,x - x - \frac{1}{2} \times ln\,(x^2 - 2x - 5) + k$

g- $f(x) = \frac{2}{xlnx} = 2 \times \frac{\frac{1}{x}}{lnx} => F(x) = 2 \times ln|lnx| + k = 2ln|lnx| + k$

h- $f(x) = \frac{2-\frac{2}{x}}{x-lnx} = \frac{2\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x-lnx} => F(x) = 2 \times ln|x - lnx| + k = 2ln|x - lnx| + k$

5 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{-1\,;\,0\,;\,1\}$ par $g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$

1) Déterminons les nombres réels $a\,;\,b$ et c tel que $\forall\, x \in]1\,;\,+\infty[$

On ait $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$

$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} => g(x) = \frac{a(x-1)(x+1)+bx(x+1)+cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$

$=> g(x) = \frac{a(x^2-1)+bx(x+1)+cx(x-1)}{x(x^2-1)} = \frac{x^2(a+b+c)+x(b-c)-a}{x(x^2-1)}$

D'autre pat $g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$. Ainsi par identification, on a:

$\frac{x^2(a+b+c)+x(b-c)-a}{x(x^2-1)} = \frac{1}{x(x^2-1)} \Leftrightarrow x^2(a+b+c) + x(b-c) - a = 1$

$$=> \begin{cases} a+b+c=0 \\ b-c=0 \\ -a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ b-c=0 \\ a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1+b+c=0 \\ b-c=0 \\ a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c=1 \\ b-c=0 \\ a=-1 \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} b+c=1 \\ b-c=0 \end{cases} => 2b = 1 => b = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad c = \frac{1}{2}$$

D'où $g(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$

2) En déduisons une primitive de la fonction g sur $]1\,;\,+\infty[$

$g(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} => G(x) = -lnx + \frac{1}{2}ln(x-1) + \frac{1}{2}ln(x+1) + k$

Fonction logarithmes dans les cas pratiques

6 La magnétude apparente d'un astre d'éclat E est M = $log_a\left(\frac{E}{E_0}\right)$ où E_0 est l'éclat de référence.

1) Exprimons M en fonction de lna et $ln\left(\frac{E}{E_0}\right)$

M = $log_a\left(\frac{E}{E_0}\right)$ ⇔ M = $\frac{ln\left(\frac{E}{E_0}\right)}{lna}$

2) Calculons lna sachant que $E_0 = \frac{E}{10}$ et M = 5

M = $\frac{ln\left(\frac{E}{E_0}\right)}{lna}$. Or $E_0 = \frac{E}{10}$ => M = $\frac{ln\left(\frac{E}{\frac{E}{10}}\right)}{lna}$ ⇔ M = $\frac{ln(10)}{lna}$ ⇔ $lna = \frac{ln(10)}{M}$

Or M= 5 => $lna = \frac{ln(10)}{5}$ = 0,46

2) En déduisons la magnétude apparente des astres suivants :

a- Soleil : E = 4,786×$10^{10}E_0$

M = $log_a\left(\frac{E}{E_0}\right)$ ⇔ M = $\frac{ln\left(\frac{E}{E_0}\right)}{lna}$ ⇔M = $\frac{ln\left(\frac{4,786\times10^{10}E_0}{E_0}\right)}{lna}$ = $\frac{ln(4,786\times10^{10})}{lna}$

= $\frac{10ln(4,786\times10)}{lna}$ = $\frac{10ln(47,86)}{lna}$. Or lna = 0,46 => M = $\frac{10ln(47,86)}{0,46}$ ≈ 84

b- Lune : E = 1,2×10^5E_0

M = $log_a\left(\frac{E}{E_0}\right)$ ⇔ M = $\frac{ln\left(\frac{E}{E_0}\right)}{lna}$ ⇔M = $\frac{ln\left(\frac{1,2\times10^5E_0}{E_0}\right)}{lna}$ = $\frac{ln(1,2\times10^5)}{lna}$

= $\frac{5ln(1,2\times10)}{lna}$ = $\frac{5ln(12)}{lna}$. Or lna = 0,46 => M = $\frac{5ln(12)}{0,46}$ ≈27

7 L'aire A (en cm^2) de la peau d'un cobaye, en fonction de son poids P (en gramme) est donnée par l'égalité suivante : $lnA = ln(9,85) + 0,64lnP$. (ln désignant le logarithme népérien).

1) Déterminons l'aire A de la peau d'un cobaye de poids $P = 780g$

$lnA = ln(9,85) + 0,64lnP$. Or $P = 780$

=> $lnA = ln(9,85) + 0,64ln780$ ⇔ $lnA = 2,28 + 4,26$ ⇔ $lnA = 6,54$ ⇔ $A = e^{6,54}$

=> $A = 692{,}28\ cm^2$

2) Déterminons le poids P d'un cobaye dont la peau a pour aire A = 30 cm^2

$lnA = ln(9{,}85) + 0{,}64lnP$. Or $A = 30$

=> $ln30 = ln(9{,}85) + 0{,}64lnP \Leftrightarrow 0{,}64lnP = ln30 - ln(9{,}85) \Leftrightarrow 0{,}64lnP = 3{,}40 - 2{,}28$

$\Leftrightarrow 0{,}64lnP = 1{,}12 \Leftrightarrow lnP = \frac{1{,}12}{0{,}64} \Leftrightarrow lnP = 1{,}75 \Leftrightarrow P = e^{1{,}75} = 5{,}75$

=> $P = 5{,}75\ g$.

8 Pour Détermine l'âge d'un fossile ou d'un os on mesure le pourcentage de "carbone 14" présent dans l'objet. En effet, à la mort d'un être vivant si k est le pourcentage de "carbone 14" restant au bout de N années, alors on a : $N = -8310 \times lnk$.

1) Le squelette d'un « homme du Cro-Magnon » contient 5% de carbone 14 initial.

Déterminons l'âge de ce squelette

$N = -8310 \times lnk$. Or $k = 5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$

=> $N = -8310 \times ln0{,}05 = 24894{,}53$

=> $N = 24894{,}53$ Ans.

2) Le pourcentage k de carbone 14 contenu dans un fossile vérifie : $51{,}8\% < k < 53{,}8\%$.

Donnons un encadrement de l'âge de ce fossile.

$51{,}8\% < k < 53{,}8\% \Leftrightarrow \frac{51{,}8}{100} < k < \frac{53{,}8}{100} \Leftrightarrow 0{,}518 < k < 0{,}538 \Leftrightarrow$

$ln0{,}518 < lnk < ln0{,}538 \Leftrightarrow -0{,}65 < lnk < -0{,}61 \Leftrightarrow$

$(-8310) \times (-0{,}61) < -8310 \times lnk < (-8310) \times (-0{,}65) \Leftrightarrow 5069{,}1 < N < 5401{,}5$

Alors l'âge de ce fossile est compris entre 5069 ans et 5402 ans.

9 Une culture de bactéries a un rythme de croissance modélisé par la fonction $R(x) = \frac{3000}{1 + 0{,}25x}$

Où x est le temps écoulé en jours.
On admet que ce rythme de croissance est la dérivée de la fonction population $P(x)$ c'est-à-dire que $P'(x) = R(x)$ et au temps $x = 0$, la culture compte 1000 bactéries c'est-a-dire : $P(0) = 1000$.

1) a- Déterminons $P(x)$ désignant la population des bactéries après x jours.

$P'(x) = R(x)$ => $P(x) = \int R(x)dx = \int \frac{3000}{1+0{,}25x}dx = \frac{0{,}25}{0{,}25}\int \frac{3000}{1+0{,}25x}dx = \frac{3000}{0{,}25}\int \frac{0{,}25}{1+0{,}25x}dx$

=> $P(x) = 12000\int \frac{0{,}25}{1+0{,}25x}dx = 12000[ln(1 + 0{,}25x)] + k$. Or $P(0) = 1000$

=> $P(x) = 12000ln(1 + 0{,}25x) + k$. Or $P(0) = 1000 \Leftrightarrow k = 1000$

D'où $P(x) = 12000ln(1 + 0{,}25x) + 1000$
b- Evaluons le nombre de bactérie au bout de 3 jours.

$P(3) = 12000ln(1 + 0{,}25 \times 3) + 1000 \approx 7715$

D'où le nombre de bactérie au bout de 3 jours est de 7715 individus.

c- Déterminons le nombre de jours à partir du quels le nombre de bactéries atteindra 12000 individus

Pour cela, posons $P(x) = 12000 \Leftrightarrow 12000ln(1 + 0{,}25x) + 1000 = 12000$
$\Leftrightarrow 12000ln(1 + 0{,}25x) = 11000 \Leftrightarrow ln(1 + 0{,}25x) = \frac{11000}{12000} \Leftrightarrow ln(1 + 0{,}25x) = 0{,}91$
$\Leftrightarrow 1 + 0{,}25x = e^{0{,}91} \Leftrightarrow 0{,}25x = e^{0{,}91} - 1 \Leftrightarrow 0{,}25x = 2{,}48 - 1 \Leftrightarrow 0{,}25x = 1{,}48$
$=> x = 5{,}92 \approx 6$
Alors le nombre de jours à partir du quels le nombre de bactéries atteindra 12000 individus au bout de 6 jours.

2) Etudions le sens de variation de $P(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$
(on Calculera la limite de $P(x)$ en $+\infty$)

$P(x) = 12000ln(1 + 0{,}25x) + 1000$
$P(0) = 12000ln(1 + 0{,}25 \times 0) + 1000 = 1000$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$
$P'(x) = R(x) = \frac{3000}{1+0{,}25x} > 0\ \forall\ x \in [0\ ;\ +\infty[$

Alors $\forall\ x \in [0\ ;\ +\infty[$, P est strictement croissante.

3) On donne la fonction H définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :
$H(x) = 48000(1 + 0{,}25x)ln(1 + 0{,}25x) - 11000x$
a- Montrons que H est une primitive de P sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
H est une primitive de P sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ si et seulement si $H'(x) = P(x)$

$H(x) = 48000(1 + 0{,}25x)ln(1 + 0{,}25x) - 11000x$
$= (48000 + 12000x)ln(1 + 0{,}25x) - 11000x$

=> $H'(x) = 12000 \times ln(1 + 0{,}25x) + \frac{0{,}25}{1+0{,}25x} \times (48000 + 12000x) - 11000$

$= 12000ln(1 + 0{,}25x) + \frac{(12000 + 3000x)}{1 + 0{,}25\boldsymbol{x}} - 11000$

$= 12000ln(1 + 0{,}25x) + \frac{(12000 + 3000x) - 11000(1 + 0{,}25\boldsymbol{x})}{1 + 0{,}25\boldsymbol{x}}$

$= 12000ln(1 + 0{,}25x) + \frac{12000 + 3000x - 11000 - 2750x}{1 + 0{,}25\boldsymbol{x}}$

$= 12000ln(1 + 0{,}25x) + \frac{9250x + 11000}{1 + 0{,}25\boldsymbol{x}}$

$= 12000ln(1 + 0{,}25x) + \frac{1000 + 250x}{1 + 0{,}25\boldsymbol{x}}$

$= 12000ln(1 + 0{,}25x) + \frac{1000(1 + 0{,}25\boldsymbol{x})}{1 + 0{,}25\boldsymbol{x}}$

$= 12000ln(1 + 0{,}25x) + 1000 = P(x)$

D'où H est une primitive de P sur l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$

b- Calculons l'intégrale $I = \int_5^{10} P(x)\mathrm{d}x$

$I = \int_5^{10} P(x)\mathrm{d}x = \int_5^{10} P(x)\mathrm{d}x = [H(x)]_5^{10} = H(10) - H(5)$

=> $I = 100464{,}1787 - 32580{,}46335 = 67883{,}71$

Interprétation concrète du résultat : l'intégrale I correspond l'aire en cm^2 de l'espace occupé par les bactéries entre le 5ième et le 10ième jour.

c- Calculons le nombre moyen de bactéries entre le 5ième et le 10ième jour.

$m = \frac{1}{10 - 5}\int_5^{10} P(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}I = 0{,}2I = 0{,}2 \times 67883{,}71 = 13576{,}74 \approx 13577$

Alors le nombre moyen de bactéries entre le 10ième et le 20ième jour est d'environ 13577 individus.

10 **Partie A**

Soit la fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur $[\mathbf{10}\,;\mathbf{100}]$ par : $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{lnx - 2}}{\boldsymbol{x}}$.

1) Calculons $\boldsymbol{f'}$

$\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{lnx - 2}}{\boldsymbol{x}}$ => $\boldsymbol{f'(x)} = \frac{\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right)(\boldsymbol{x}) - (\mathbf{1})(\boldsymbol{lnx - 2})}{(\boldsymbol{x})^{\mathbf{2}}} = \frac{\mathbf{1 - lnx + 2}}{(\boldsymbol{x})^{\mathbf{2}}} = \frac{\mathbf{3 - lnx}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}$

2) Démontrons que $\boldsymbol{f'(x)}$ est positive sur l'intervalle $[\mathbf{10}\,;\mathbf{e^3}]$ et négative sur $[\mathbf{e^3}\,;\mathbf{100}]$

Pour tout $\boldsymbol{x} \in [\mathbf{10}\,;\mathbf{100}]$, $\boldsymbol{x^2} > 0$ alors le signe de $\boldsymbol{f'(x)}$ dépend donc du signe de $\mathbf{3 - lnx}$

Posons $\mathbf{3 - lnx} > 0 \Leftrightarrow \mathbf{-lnx} > -3 \Leftrightarrow \mathbf{lnx} < 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} < \boldsymbol{e^3}$

=> $\forall\ \boldsymbol{x} < \boldsymbol{e^3}$, $\mathbf{3 - lnx} > 0$ et $\forall\ \boldsymbol{x} > \boldsymbol{e^3}$, $\mathbf{3 - lnx} < 0$

D'où $\forall\, \boldsymbol{x} \in [\mathbf{10}\,;\mathbf{e^3}]\,,\, \boldsymbol{f'(x)} > 0$ et $\forall\, \boldsymbol{x} \in [\mathbf{e^3}\,;\mathbf{100}]\,,\, \boldsymbol{f'(x)} < 0$

$\boldsymbol{f(10)} = \frac{\boldsymbol{ln10 - 2}}{\mathbf{10}} = \mathbf{0,03}$; $\boldsymbol{f(e^3)} = \frac{\boldsymbol{lne^3 - 2}}{\boldsymbol{e^3}} = \frac{\mathbf{3 - 2}}{\boldsymbol{e^3}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e^3}} = \boldsymbol{e^{-3}}$

et $\boldsymbol{f(100)} = \frac{\boldsymbol{ln100 - 2}}{\mathbf{100}} = \mathbf{0,02}$

3) Dressons le tableau de variations de $\boldsymbol{f}$.

$\boldsymbol{x}$	$\mathbf{10}$	$\boldsymbol{e^3}$	100
$\boldsymbol{f'(x)}$	$+$	$-$	
$\boldsymbol{f(x)}$	$\mathbf{0,03}$ ↗	$\boldsymbol{e^{-3}}$	↘ $\mathbf{0,02}$

Partie B

On se propose d'Exprime la capacité pulmonaire de l'être humain en fonction de son âge $\boldsymbol{x}$, représenté en années et,$\boldsymbol{g(x)}$ la capacité pulmonaire en litres. On admet que sur l'intervalle$[\mathbf{10}\,;\mathbf{100}]$on a : $\boldsymbol{g(x)} = \mathbf{110}\boldsymbol{f(x)}$ où $\boldsymbol{f}$ est la fonction définie dans la partie A

1) Calculons la capacité pulmonaire à 10ans, 15ans, 30ans et 60ans.

- La capacité pulmonaire à 10 ans est : $\boldsymbol{g(10)} = \mathbf{110}\boldsymbol{f(10)} = \mathbf{110} \times \mathbf{0,03} = \mathbf{3,3}\ \boldsymbol{litres}$
- La capacité pulmonaire à 15 ans est : $\boldsymbol{g(15)} = \mathbf{110}\boldsymbol{f(15)} = \mathbf{110} \times \mathbf{0,04} = \mathbf{4,4}\ \boldsymbol{litres}$
- La capacité pulmonaire à 15 ans est : $\boldsymbol{g(30)} = \mathbf{110}\boldsymbol{f(30)} = \mathbf{110} \times \mathbf{0,05} = \mathbf{5,5}\ \boldsymbol{litres}$
- La capacité pulmonaire à 15 ans est : $\boldsymbol{g(60)} = \mathbf{110}\boldsymbol{f(60)} = \mathbf{110} \times \mathbf{0,03} = \mathbf{3,3}\ \boldsymbol{litres}$

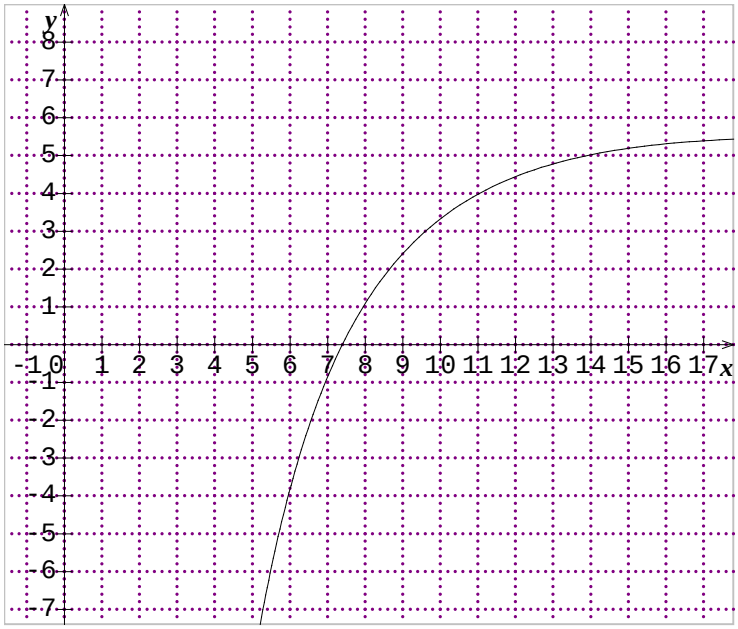
2) Traçons la courbe représentative de $\boldsymbol{g}$ dans un repère orthogonal.
(On prendra en abscisse : $1\boldsymbol{cm}$ pour 10 ans et en ordonnées $1\boldsymbol{cm}$ pour 10 litres).

En utilisant le tableau de variation de $\boldsymbol{f}$, on en déduit celui de $\boldsymbol{g}$:

$\boldsymbol{x}$	$\mathbf{10}$	$\boldsymbol{e^3}$	100
$\boldsymbol{g'(x)}$	$+$	$-$	
$\boldsymbol{g(x)}$	$\mathbf{3,3}$ ↗	$\mathbf{110}\boldsymbol{e^{-3}}$	↘ $\mathbf{2,2}$

3) Déterminons l'âge à partie du quel la capacité pulmonaire est maximale
En utilisant le tableau de variation ci-dessus, on a :
La capacité pulmonaire est maximale à l'âge de : $\boldsymbol{e^3} = \mathbf{20,08} \approx \mathbf{20}$ ans et cette capacité maximale correspond à $\mathbf{110}\boldsymbol{e^{-3}} = \mathbf{5,47}\ \boldsymbol{litres}$.

4) Déterminons graphiquement l'intervalle du temps durant lequel la capacité pulmonaire reste supérieure ou égale à 5 litres.



En observant le graphique, la capacité pulmonaire reste supérieure ou égale à 5 litres dans l'intervalle du temps $]14\ ;\ +\infty[$

Problèmes

11

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $]\ 0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 1 - ln\ x$

1) Dressons le tableau de variation de g.

$lim\ g(x) = lim\ -x^2 + 1 - ln\ x = -(0)^2 + 1 - (-\infty) = +\infty$

$x \to 0 \qquad x \to 0$

$lim\ g(x) = lim\ -x^2 + 1 - ln\ x = -(+\infty)^2 + 1 - (+\infty) = -\infty - \infty = -\infty$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

$g(x) = -x^2 + 1 - ln\ x \Rightarrow g'(x) = -2x - \frac{1}{x} = -\left(2x + \frac{1}{x}\right).$

Alors $\forall x \in]\ 0\ ;\ +\infty[\ \ g'(x) < 0$. D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	
$g(x)$	$+\infty$ ‖	0 ↘	$-\infty$

2) Calculons $g(1)$ puis en déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

$g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$ => $g(1) = 0$

Alors d'après le tableau de variation de g, on a :

$\forall x \in]0\,;\,1[\ \ g(x) > 0$ et $\forall x \in]1\,;\,+\infty[\ \ g(x) < 0$

Partie B :

Soit la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{lnx}{2x}$ et (C) sa courbe dans le repère orthonormé $(o\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm)

1) Dressons le tableau de variation de f.

$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{lnx}{2x}$

$lim\ f(x) = lim -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{lnx}{2x} = -\frac{1}{2}(0) + 1 + \frac{1}{2}(-\infty) = -\infty$

$x \to 0 \qquad x \to 0$

$lim\ f(x) = lim -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{lnx}{2x} = -\frac{1}{2}(+\infty) + 1 + \frac{1}{2}(0) = -\infty$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{lnx}{2x}$ => $f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1 - lnx}{2x^2} = \frac{-x^2 + 1 - lnx}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$

$\forall x \in]0\,;\,+\infty[\ , 2x^2 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$.

Or d'après **Partie A 2)**, on a :

$\forall x \in]0\,;\,1[\ \ g(x) > 0$ => $\forall x \in]0\,;\,1[\ \ f'(x) > 0$

et $\forall x \in]1\,;\,+\infty[\ \ g(x) < 0$ => $\forall x \in]1\,;\,+\infty[\ \ f'(x) < 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	0	α	1	β	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$ 0	$\frac{1}{2}$	$\searrow$ 0	$-\infty$

2) Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec ($\alpha < \beta$)

D'après le tableau de variation de f , $\forall x \in]\,0\,;\,1[$ f est définie, continue et strictement croissante de l'intervalle $]\,0\,;\,1[$ vers $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$.
Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une première solution α

De même , $\forall x \in]\,1\,;\,+\infty[$ f est définie, continue et strictement décroissante de l'intervalle $]\,1\,;\,+\infty[$ vers $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une deuxième solution β

3) a) Montrons que la droite (Δ)d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f.

La droite (Δ)d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f si et seulement si

$lim\ f(x) - y = 0$

$x \to +\infty$

$$lim\ f(x) - y = lim\left(-\frac{1}{2}x + 1 + \frac{lnx}{2x}\right) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = lim\ -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{lnx}{2x} + \frac{1}{2}x - 1$$

$x \to +\infty$ $\quad$ $x \to +\infty$ $\quad$ $x \to +\infty$

$$= lim\ \frac{lnx}{2x} = lim\ \frac{1}{2} \bullet \frac{lnx}{x} = \frac{1}{2}(0) = 0$$

$x \to +\infty$ $\quad$ $x \to +\infty$

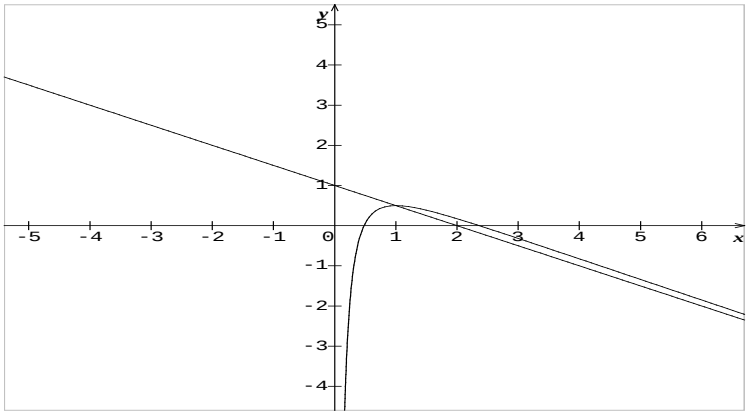
D'où la droite (Δ)d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f

b) Etudions le signe de $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$ puis en déduis la position de (C) et (Δ).

L'étude du signe de $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$ nous permet d'en déduis que :

- $\forall x \in]\,0\,;\,1[$; (C) est en dessous de la droite (Δ)
- $\forall x \in]\,1\,;\,+\infty[$; (C) est au dessus de la droite (Δ)

4) Traçons (C) et (Δ) dans le même repère.



12 **Partie A** :

On considère la fonction g définie sur] 0 ; $+\infty$[par $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$

1- Etudions les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

$lim\ g(x) = lim\ x^2 + 2 - 2\ln x = (0)^2 + 2 - 2(-\infty) = -\infty$

$x \to 0 \qquad x \to 0$

$lim\ g(x) = lim\ x^2 + 2 - 2\ln x = (+\infty)^2 + 2 - 2(+\infty) = +\infty - \infty = "FI"$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

Levons l'indétermination

$lim\ g(x) = lim\ x^2 + 2 - 2\ln x = lim\ x^2\left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{lnx}{x^2}\right) = (+\infty)^2(1 + 0 - 0) = +\infty$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty \qquad\qquad x \to +\infty$

2- Dressons le tableau de variation de g puis en déduis son signe sur] 0 ; $+\infty$[

$g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x \Rightarrow g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2-1)}{x}$

$\forall x \in$] 0 ; $+\infty$[; $x > 0$ Alors le signe de $g'(x)$ dépend du signe de $x^2 - 1$

Posons $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \notin D_g$ ou $x = 1$

D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$ ‖	↘	3	↗	$+\infty$

D'après le tableau de variation de g , $\forall x \in]\,0\,;\,+\infty[\;\; g(x) > 0$

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $]\,0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x + 2\frac{lnx}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,)$ (unité graphique 2 cm)

1) a) Calculons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

$lim\, f(x) = lim\, x + 2\,\frac{lnx}{x} = 0 + 2(-\infty) = -\infty$

$x \to 0 \qquad x \to 0$

$lim\, f(x) = lim\, x + 2\,\frac{lnx}{x} = +\infty + 2(0) = +\infty$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

b) Etudions les variations de f et Dresse sont tableau de variation.

$f(x) = x + 2\frac{lnx}{x}$ => $f'(x) = 1 + \frac{2(1-lnx)}{x^2} = \frac{x^2+2-2lnx}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

$\forall x \in]\,0\,;\,+\infty[\;, x^2 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$.

Or d'après **Partie A 2)**, on a : $\forall x \in]\,0\,;\,+\infty[\;\; g(x) > 0$ => $\forall x \in]\,0\,;\,+\infty[\;\; f'(x) > 0$

D'où $\forall x \in]\,0\,;\,+\infty[$; f est strictement croissante le tableau de variation de f est le suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

c) Montrons que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C), puis étudions la position de (C) par rapport à la droite (Δ).

La droite (Δ)d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) de f si et seulement si

$lim\ f(x) - y = 0$

$x \to +\infty$

$lim\ f(x) - y = lim\left(x\ +\ 2\ \frac{lnx}{x}\right) - (x) = lim\ x +\ 2\ \frac{lnx}{x} - x\ = lim 2\ \frac{lnx}{x}\ = 2(0)\ = 0$

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$

D'où la droite (Δ)d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) de f

Etudions le signe de $f(x) - y$ puis en déduis la position de (C) et (Δ).

L'étude du signe de $f(x) - y$ nous permet d'en déduis que :

- $\forall x \in\ ]\ 0\ ;\ 1[$; (C) est en dessous de la droite (Δ)
- $\forall x \in\ ]\ 1\ ;\ +\infty[$; (C) est au dessus de la droite (Δ)

2) Déterminons les coordonnées du point A sachant que la courbe (C) admet au point A une tangente (T) parallèle à (Δ).

- Soit (T) la tangente $y = f'(x_0)(x - x_0) +\ f(x_0)$.
- Soit la droite (Δ) d'équation $y = x$
- Soit $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ce point

La tangente (T) est parallèle à la droite (Δ) si et seulement si les coefficients directeurs sont égale c'est –à-dire$f'(x_0) = 1$. Or $f'(x_0) = \frac{{x_0}^2 + 2 - 2lnx_0}{{x_0}^2}$

$f'(x_0) = 1\ \Leftrightarrow \frac{{x_0}^2 + 2 - 2lnx_0}{{x_0}^2}\ =\ 1 \Leftrightarrow {x_0}^2 +\ 2 -\ 2lnx_0 = {x_0}^2 \Leftrightarrow 2 -\ 2lnx_0 = 0 \Leftrightarrow$

$lnx_0 = 1$ => $x_0 = e$ et $y_0 = x_0 = e$.

D'où $A\begin{pmatrix} e \\ e \end{pmatrix}$ est le point cherché.

3) Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que α $[0{,}5\ ;\ 1]$

- D'après le tableau de variation de f , $\forall x \in\ ]\ 0\ ;\ +\infty[$ f est définie, continue et strictement croissante de l'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty[$ vers $]-\infty\ ;\ +\infty\ [$.

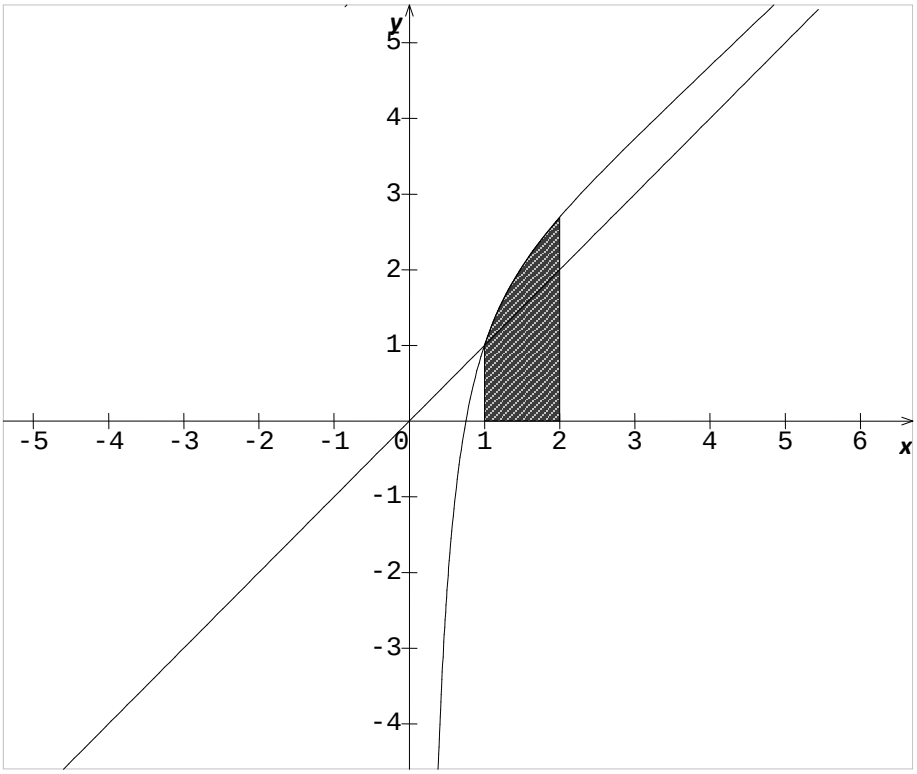
Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $f(\alpha) = 0$.

- De plus $\begin{cases} f(0{,}5) = -2{,}2 \\ f(1) = 1 \end{cases}$ => $f(0{,}5) \times f(1) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires α [0,5 ; 1]

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que α [0,5 ; 1]

4) Trace (C) et (Δ) dans le même repère.



5) Hachurons puis calculons l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) ; la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

Soit $A = \int_1^2 [f(x) - y]dx$ cette aire

$A = \int_1^2 [f(x) - y]dx \Leftrightarrow A = \int_1^2 \left[\left(x + 2\frac{lnx}{x}\right) - (x)\right]dx \Leftrightarrow A = \int_1^2 \left(2\frac{lnx}{x}\right)dx$

=> $A = 2\int_1^2 \frac{lnx}{x}dx = 2\int_1^2 \frac{1}{x}lnxdx = 2\left[\frac{(lnx)^2}{2}\right]_1^2 = [(lnx)^2]_1^2 = 1{,}92\ cm^2$

Pour le domaine hachuré, (Voir figure)

13 **Partie A** :

1) On considère la fonction numérique g définie par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 lnx$

a- Dressons le tableau de variation de g.

$D_g =]\,0\,;\,+\infty[$

$lim\ g(x) = lim\ 1 + x^2 - 2x^2 lnx = 1 + (0)^2 - 2(0) = 1$

$x \to 0 \qquad x \to 0$

$lim\ g(x) = lim\ 1 + x^2 - 2x^2 lnx = 1 + (+\infty)^2 - 2(+\infty) = +\infty - \infty = "FI"$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

Levons l'indétermination

$lim\ g(x) = lim\ 1 + x^2 - 2x^2 lnx = lim\ x^2\left(\frac{1}{x^2} + 1 - 2lnx\right) = (+\infty)^2(0 + 1 - \infty) = -\infty$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty \qquad\qquad x \to +\infty$

$g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 lnx$ => $g'(x) = -\,4xlnx$

$\forall x \in]\,0\,;\,+\infty[\,;\ -\,4x < 0$. Alors le signe de $g'(x)$ dépend du signe de lnx

Posons $lnx > 0$ => $x > e^0$ => > 1. Ainsi pour les $x > 1$, on a : $lnx > 0$

D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	0		1		α		$+\infty$
$-4x$		$-$		$-$		$-$	
lnx		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$		$-$		$-$	
$g(x)$	1	↗	2	↘	0	↘	$-\infty$

b- Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que :
$1{,}89 < \alpha < 1{,}90$.

- D'après le tableau de variation de g , $\forall x \in]\,1\,;\,+\infty[$ f est définie, continue et strictement décroissante de l'intervalle $]\,1\,;\,+\infty[$ vers $]-\infty\,;\,2\,[$.
Alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha) = 0$.

- De plus $\begin{cases} g(1{,}89) = 0{,}02 \\ g(1{,}90) = -0{,}02 \end{cases}$ => $g(1{,}89) \times g(1{,}90) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a : $1{,}89 < \alpha < 1{,}90$.

Conclusion : l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $1{,}89 < \alpha < 1{,}90$.

c- Déduis de ce qui précède le signe de $g(x)$.

Alors d'après le tableau de variation de g, on a :

$\forall x \in]\,0\,;\,\alpha[\;\; g(x) > 0$ et $\forall x \in]\,\alpha\,;\,+\infty[\;\; g(x) < 0$

2) On considère la fonction numérique f définie sur $]\,0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{lnx}{1+x^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,)$ (unité graphique 2 cm)

a- Dressons le tableau de variation de f.

$lim\, f(x) = lim\, \frac{lnx}{1+x^2} = -\infty$

$x \to 0 \qquad x \to 0$

$lim\, f(x) = lim\, \frac{lnx}{1+x^2} = lim\, \frac{lnx}{x^2} = 0$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

$f(x) = \frac{lnx}{1+x^2}$ => $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 2x(lnx)}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2 - 2x^2 lnx}{x(1+x^2)^2} = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$

$\forall x \in]\,0\,;\,+\infty[\,;\; x(1+x^2)^2 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$

Or d'après **Partie A 1) c)**, on a :

$\forall x \in]\,0\,;\,\alpha[\;\; g(x) > 0$ => $\forall x \in]\,0\,;\,\alpha[\;\; f'(x) > 0$ et

$\forall x \in]\,\alpha\,;\,+\infty[\;\; g(x) < 0$ => $\forall x \in]\,\alpha\,;\,+\infty[\;\; f'(x) < 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

b- Vérifions que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$. En déduis un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude $2 \cdot 10^{-1}$

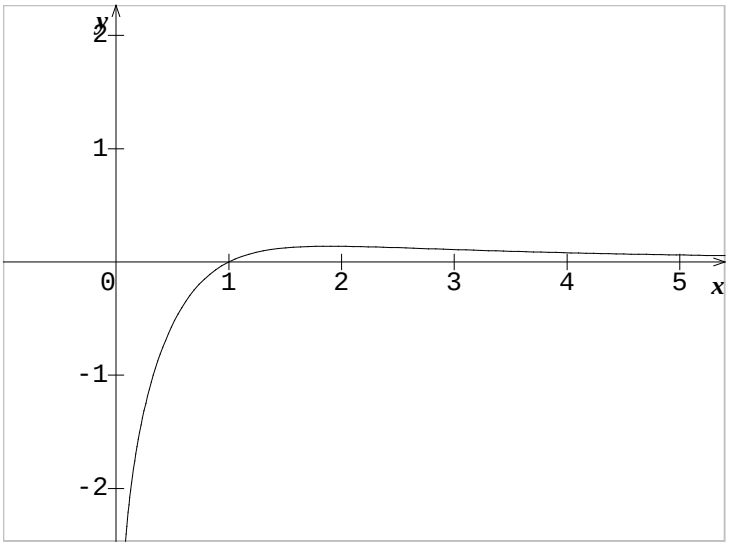
D'après **Partie A 1) b)**,on a : $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha^2 - 2\alpha^2 ln\alpha = 0$ => $ln\alpha = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$

D'autre part $f(x) = \frac{lnx}{1+x^2}$ => $f(\alpha) = \frac{ln\alpha}{1+\alpha^2}$

Remplaçons $ln\alpha = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$ par sa valeur dans $f(\alpha) = \frac{ln\alpha}{1+\alpha^2}$. Ainsi on a :

$f(\alpha) = \frac{ln\alpha}{1+\alpha^2}$ => $f(\alpha) = \frac{\frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}}{1+\alpha^2} = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2(1+\alpha^2)} = \frac{1}{2\alpha^2}$. D'où $(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$.

c- Traçons (C) dans le repère.



Partie B :

On considère la fonction numérique définie sur] 0 ; +∞[par : $F(x) = \int_1^x f(t)dt$

1) a) Prouvons que F est dérivable sur] 0 ; +∞[et précisons $F'(x)$.

f est une fonction continue sur] 0 ; +∞[. Alors F est donc dérivable sur] 0 ; +∞[

Sa fonction dérivée est $F'(x) = f(x)$ avec $f(x) = \frac{lnx}{1+x^2}$

b) En déduis le sens de variation de F.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$F(x)$	‖ ↘		0	↗	

D'après le tableau :

$\forall\, x \in]\,0\,;\,1[$; F est strictement décroissante

$\forall\, x \in]\,1\,;\,+\infty[$; F est strictement croissante

2) a) Vérifions que $\forall\, t \geq 1$; on a : $\frac{lnt}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{lnt}{t^2}$

On sait que $\forall\, t \geq 1$; on a : $t^2 \leq 1 + t^2 \leq t^2 + 2t + 1$

En prenant les inverses, on a : $\frac{1}{t^2+2t+1} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+t)^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$

En multipliant cette dernière par lnt, on a :

$\frac{lnt}{(1+t)^2} \leq \frac{lnt}{1+t^2} \leq \frac{lnt}{t^2} \Leftrightarrow \frac{lnt}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{lnt}{t^2}$ (ce qu'il fallait Démontre)

b) Pour tout $x > 0$ et $t \neq 0$; on pose $I(x) = \int_1^x \frac{lnt}{t^2}\,\mathrm{dt}$ et $J(x) = \int_1^x \frac{lnt}{(1+t)^2}\,\mathrm{dt}$

- A l'aide d'une intégration par parties, Calcule $I(x)$

$I(x) = \int_1^x \frac{lnt}{t^2}\,\mathrm{dt} = \int_1^x \frac{1}{t^2} lnt\,\mathrm{dt}$

Posons $u(t) = lnt$ => $u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = \frac{1}{t^2}$ => $v(t) = -\frac{1}{t}$

=> $I(x) = \left[-\frac{lnt}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{dt} = \left[-\frac{lnt}{t}\right]_1^x + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = \left[-\frac{lnt}{t} - \frac{1}{t}\right]_1^x$

=> $I(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{lnx}{x}$

c) A l'aide d'une intégration par partie et de l'égalité : $\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$, calculons $J(x)$.

Puis en déduisons de ce qui précède que $\forall\, x > 1$; on a :

$ln2 + ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{lnx}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{lnx}{x} - \frac{1}{\square}$

$J(x) = \int_1^x \frac{lnt}{(1+t)^2}\,\mathrm{dt} \quad = \int_1^x \frac{1}{(1+t)^2} \times lnt\,\mathrm{dt}$

Posons $u(t) = lnt \;\Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} \;\Rightarrow v(t) = -\frac{1}{1+t}$

$\Rightarrow J(x) = \left[-\frac{lnt}{1+t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t(1+t)}\,\mathrm{dt} \quad = \left[-\frac{lnt}{1+t}\right]_1^x + \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{dt}$

$\Rightarrow J(x) = \left[-\frac{lnt}{1+t}\right]_1^x + [lnt - ln(1+t)]_1^x \quad = \left[-\frac{lnt}{1+t}\; lnt - ln(1+t)\right]_1^x$

$\Rightarrow J(x) = ln2 + ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{lnx}{1+x}$

En déduisons que $\forall\, x > 1$; on a : $ln2 + ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{lnx}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{lnx}{x} - \frac{1}{x}$

D'après 2) a), on a : $\frac{lnt}{(1+t)^2} \leq \int_1^x f(t)\mathrm{dt} \leq \frac{lnt}{t^2}$. Intégrons cette inégalité sur $[1\ ;\ x]$

$\int_1^x \frac{lnt}{(1+t)^2}\,\mathrm{dt} \leq \int_1^x f(t)\mathrm{dt} \leq \int_1^x \frac{lnt}{t^2}\,\mathrm{dt} \Leftrightarrow J(x) \leq F(t) \leq I(x) \Leftrightarrow$

$ln2 + ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{lnx}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{lnx}{x} - \frac{1}{x}$

d) On admet que $lim\ \ F(x) = \theta$. Sans Calcule θ vérifions que $ln2 \leq \theta \leq 1$

$x \to +\infty$

On sait que : $ln2 + ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{lnx}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{lnx}{x} - \frac{1}{x}$

En appliquant le théorème des gendarmes à l'inégalité :

$ln2 + ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{lnx}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{lnx}{x} - \frac{1}{x}$, on a :

$lim\ ln2 + ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{lnx}{x+1} \leq lim\, F(x) \leq lim\ 1 - \frac{lnx}{x} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow$

$x \to +\infty \qquad\qquad x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

$ln2 \leq \theta \leq 1$ (Ce qu'il fallait Démontre)

14 L'objectif de ce problème est l'étude complète de la fonction numérique f définie pour tout nombre réel x différent de -1 par :

$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| \; si \; x \neq 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

Les parties A et B sont indépendantes.

On notera (Cf)la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$

1) Déterminons l'ensemble de définition Dg

$Dg = \left\{x \,/\, x \in \mathbb{R}\,; x(x+1) \neq 0 \; et \; 1 + \frac{1}{x} \neq 0\right\}$ => $Dg = \mathbb{R} - \{0\,;\,-1\}$

=> $Dg = \,]-\infty\,;\,-1[\cup]-1\,;0[\cup]0\,;\,+\infty[$

Déterminons les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$lim\; g(x) = lim\, \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = lim\, \frac{2x}{x^2} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = lim\, \frac{2}{x} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = 0$$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty \qquad\qquad x \to +\infty \qquad\qquad x \to +\infty$

$$lim\; g(x) = lim\, \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = lim\, \frac{2x}{x^2} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = lim\, \frac{2}{x} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = 0$$

$x \to -\infty \qquad x \to -\infty \qquad\qquad x \to -\infty \qquad\qquad x \to -\infty$

2) Etudions les variations de g ; on ne demande pas de Calcule ses limites en -1 et en 0.

$g(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$ => $g'(x) = \frac{-1}{x^2(x+1)^2}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R} - \{0\,;-1\}$; on a : $g'(x) < 0$

D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$-$		$-$	‖	$-$	
$g(x)$	0	↘	‖	↘	0	↘	‖	↘	0

3) Calculons $g\left(-\frac{1}{2}\right)$

$g\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

D'après le tableau de variation de g ; on a :

$\forall\, x \in\ ]-\infty\,;\,-1[\ \cup\ \left]-\frac{1}{2}\,;0\right[\ ;g(x) < 0$ et $\forall\, x \in\ \left]-1\,;\,-\frac{1}{2}\right[\ \cup\ ]0\,;+\infty[\ ;g(x) > 0$

<u>Partie B</u> : Etude de la limite de f à l'infini.

1) Soient les fonctions h et k définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$h : t \to ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2}\right)$ et $k : t \to ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)$

Après une brève étude sur $[0\ ;\ +\infty[$ des fonctions h et k ; démontrons que :

$\forall\, t \geq 0$; on a : $t - \frac{t^2}{2} \leq\ ln(1+t) \leq\ t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$

- Etude brève de $h(t) = ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2}\right)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$

$h'(t) = \frac{t^2}{1+t}$ => $\forall\, t \in ;\ [0\ ;\ +\infty[\ \ h'(t) \geq 0$. Alors h est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

De plus $h(0) = 0$. Donc $\forall\, t \geq 0$; on a : $h(t) \geq 0$ et par suite $t - \frac{t^2}{2} \leq\ ln(1+t)$

- Etude brève de $k(t) = ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$

$k'(t) = -\frac{t^3}{1+t}$ => $\forall\, t \in ;\ [0\ ;\ +\infty[\ \ k'(t) \leq 0$. Alors k est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

De plus $k(0) = 0$. Donc $\forall\, t \geq 0$; on a : $k(t) \leq 0$ et par suite $ln(1+t) \leq\ t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$

<u>Conclusion</u> $\forall\, t \geq 0$; on a : $t - \frac{t^2}{2} \leq\ ln(1+t) \leq\ t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$

2) En déduisons que $lim\ \frac{t - ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$

$t\ \to 0$

D'après ce qui précède, on a : $t - \frac{t^2}{2} \leq\ ln(1+t) \leq\ t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$

Multiplions tous les membres de l'inégalité par -1. Ainsi on a :

$-t+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\leq\ -ln(1+t)\leq\ -t+\frac{t^2}{2}$

Ajoutons t à tous les membres de l'inégalité. Ainsi on a :

$\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\leq\ t-ln(1+t)\leq\ \frac{t^2}{2}$

Divisons tous les membres de l'inégalité part^2. Ainsi on a :

$\frac{1}{2}-\frac{t}{3}\leq\ \frac{t-ln(1+t)}{t^2}\leq\ \frac{1}{2}$

$lim\ \frac{1}{2}-\frac{t}{3}=\frac{1}{2}$ et $lim\ \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$t\to 0$ $t\to 0$

Alors d'après le théorème des gendarmes, on a : $lim\ \frac{t-ln(1+t)}{t^2}=\frac{1}{2}$

$t\to 0$

3) En utilisant les résultats précédents, démontrons que $lim\ f(x)=\frac{1}{2}$

$x\to-\infty$

$f(x)=x-\ x^2ln\left|1+\frac{1}{x}\right|$. Posons $x=\frac{1}{t}$ => $f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t}-\ \frac{1}{t^2}ln(1+t)$.

Quand t tend vers 0 , alors x tend vers $+\infty$

Alors $lim\ f(x)=\ lim\ \frac{t-ln(1+t)}{t^2}\ =\frac{1}{2}$ De même $lim\ f(x)=\ lim\ \frac{t-ln(1+t)}{t^2}\ =\frac{1}{2}$

$x\ \to+\infty$ $t\to 0$ $x\ \to-\infty$ $t\to 0$

Interprétation graphique des résultats de la question précédente.

Puisque $lim\ f(x)=\ lim\ f(x)=\frac{1}{2}$. Alors la droite d'équation $y=\frac{1}{2}$

$x\ \to+\infty$ $x\ \to-\infty$

Alors la droite d'équation $y=\frac{1}{2}$ est asymptote horizontale à la courbe (Cf)

<u>Partie C</u> : Etude de la fonction f.

$f(x)=x-\ x^2ln\left|1+\frac{1}{x}\right|$

1) Déterminons Df

D$f = \left\{x \,/\, x \in \mathbb{R}\,; x \neq 0 \; et \; 1 + \frac{1}{x} \neq 0\right\}$ => D$f = \mathbb{R} - \{0\,;\, -1\}$

=> D$f = \,]-\infty\,;\, -1[\cup \,]-1\,;0[\cup \,]0\,;\, +\infty[$

Calculons la limite de f en -1

$\forall x \in$ D$f\,;\; f(x) = x - \, x^2 ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$ et on a : $lim\; ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = -\infty$

$x \to -1$

Donc $limf(x) = +\infty$

$x \to -1$

2) Etudions la continuité de f en 0

f est continue en 0 si et seulement si $limf(x) = \; f(0) = 0$

$x \to 0$

$lim\, f(x) = lim\, x - \, x^2 ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| \; = lim\, x - \, x^2 ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$

$x \to 0 \qquad x \to 0 \qquad\qquad x \to 0$

$= \; lim\, x - \, x^2 ln|x+1| + \, x^2 ln|x|$. Or $lim\; xlnx = 0$

$x \to 0 \qquad\qquad x \to 0$

Donc $limf(x) = 0$. De plus $f(0) = 0$ donc f est continue en 0

$x \to 0$

3) Démontrons que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$

f est dérivable en 0 si et seulement si $lim\; \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 1$

$x \to 0$

$lim\; \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim\; \frac{f(x)}{x} = \; lim\; \frac{x - x^2 ln\left|1+\frac{1}{x}\right|}{x} = \; lim\, 1 - \; xln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$

$x \to 0 \qquad x \to 0 \qquad x \to 0 \qquad\qquad x \to 0$

$= \lim_{x \to 0} 1 - x\ln|x+1| + x\ln|x|$. Or $\lim_{x \to 0} x\ln|x| = 0$

Donc $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$

Conclusion : f est dérivable en 0 et son nombre dérivé est $f'(0) = 1$

4) Calculons la dérivée de f et démontrons que $f'(x) = x \times g(x)$

$\forall x \in Df\ ;\ f(x) = x - x^2 ln\left|1+\frac{1}{x}\right|$ => $f'(x) = \frac{2x+1}{x+1} - 2xln\left|1+\frac{1}{x}\right|$

=> $f'(x) = x\left[\frac{2x+1}{x(x+1)} - 2ln\left|1+\frac{1}{x}\right|\right]$ => $f'(x) = x \times g(x)$ (Ce qu'il fallait Démontre)

5) Dressons le tableau de variations de f

D' après **Partie A ; 3)** , et **Partie C ; 4) on a** :

$\forall x \in\ ]-\infty\ ;\ -1[\cup \left]-\frac{1}{2}\ ;0\right[\cup\ ]0\ ;+\infty[\ ;\ f'(x) > 0$ et $\forall x \in \left]-1\ ;\ -\frac{1}{2}\right[\ ; f'(x) < 0$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$	$+$		‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	$-\frac{1}{2}$

6) Déterminons une équation de la tangente (T)à (Cf)au point d'abscisse 0

L'équation de la tangente (T)à (Cf)au point d'abscisse 0 est $y = x$

Déterminons les asymptotes à (Cf).

$\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$. Alors la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à la courbe (Cf).

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$. Alors la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote verticale à la Courbe (Cf).

7) Montrons que l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions 0 et β avec $-0{,}8 < \beta < -0{,}7$.

- $\forall\, x \in \left]-1\,;-\frac{1}{2}\right]$; f est continue et strictement décroissante de $\left]-1\,;-\frac{1}{2}\right]$ vers $\left[-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$
Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β telle que $f(\beta) = 0$

- De plus $\begin{cases} f(-0{,}8) = 0{,}O87 \\ f(-0{,}7) = -0{,}28 \end{cases}$ => $f(-0{,}8) \times f(-0{,}7) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\beta \in]-0{,}8\ ;\ -0{,}7[$

De même :

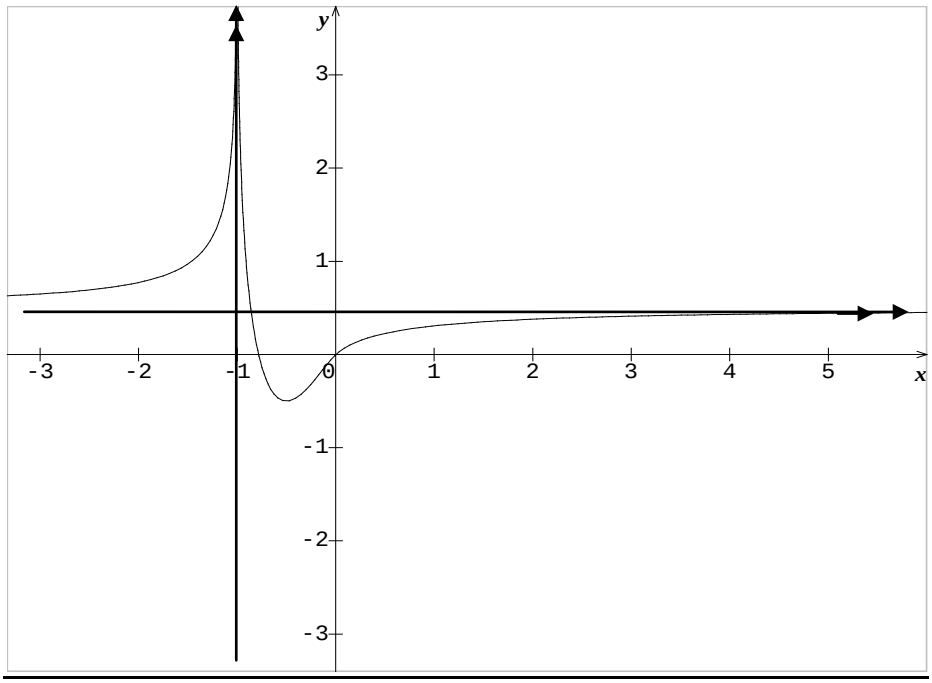
$\forall\, x \in \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$; f est continue et strictement croissante de $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ vers $\left]-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[$
Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique δ telle que $f(\delta) = 0$

Or $f(0) = 0$ donc $\delta = 0$

$\forall\, x \in]-\infty\,;\,-1[\,; f(x) > 0$.

<u>Conclusion</u> : l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions 0 et β avec $-0{,}8 < \beta < -0{,}7$.

8) Traçons (T) ; les asymptotes et la courbe (Cf)



15 **Partie A** :

Le but de ce problème est d'étudier dans la partie A la fonction numérique f définie sur

$]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2}$, de Détermine ensuite dans la **partie B** la position de sa

courbe représentative par rapport à son asymptote oblique et enfin d'étudier une suite récurrente dans la partie (Γ), cette dernière partie étant dans une large mesure indépendante des deux autres.

1) a) Dérivée de la fonction g

La fonction g, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^3 - x - 2\,lnx + 1$est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ (comme somme algébrique de telles fonctions) et sa dérivée est :

$$g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x} = \frac{(x-1)(3x^2 - x - 2)}{x}$$

b) Variations de g et signe de $g(x)$.

On peut résumer l'étude du sens de variation de g et du signe de $g(x)$ dans le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
$x-1$	‖	$-$	0	$+$	
$3x^2 + 3x + 2$	‖	$+$		$+$	
$g'(x)$	‖	$-$		$+$	
$g(x)$	$+\infty$ ‖	↘	1	↗	$+\infty$

D'après le tableau de variation, $g(x) > 0$

2) a) Limite de f en 0 et en $+\infty$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2}$$

$$lim\ f(x) = lim\ x + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2} = -\infty$$

$x \to 0$ $\quad$ $x \to 0$

$$lim\ f(x) = lim\ x + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2} = +\infty$$

$x \to +\infty$ $\quad$ $x \to +\infty$

b- Montrons que pour tout $x \in]\,0\ ;\ +\infty[$, $f\,'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ puis donnons le tableau de variations de la fonction f.

La fonction f, définie sur $]\,0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x\ + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2}$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et sa

dérivée est : $f'(x) = \ 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1-2lnx}{x^3} = \frac{x^3 - x + 1 - 2lnx}{x^3}$ => $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

$\forall x \in]\,0\ ;\ +\infty[\ ;\ x^3 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$

Or d'après **Partie A 1) b)**, on a :

$\forall x \in]0\ ;\ +\infty[\ ;\ g(x) > 0$ => $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[\ \ f'(x) > 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

<u>Partie B</u> :

Soit h la fonction définie sur $]\,0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \ x\ +\ ln\,x$.

1) Etudions le sens de variation de h puis montrons que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle$[\,0{,}4\ ;\ 0{,}7\,]$

La fonction h définie sur$]\,0\ ;\ +\infty[$ est également dérivable$]\,0\ ;\ +\infty[$ et sa fonction dérivée est $h'(x) = \ 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$ =>$\forall x \in]0\ ;\ +\infty[\ ; h'(x) > 0$

D'où le tableau de variation de h est le suivant :

x	0		α		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$	‖		
$h(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

- D'après le tableau de variation de h , $\forall x \in]\,0\ ;\ +\infty[\ \ h$ est définie, continue et strictement croissante de l'intervalle $]\,0\ ;\ +\infty[$ vers $]-\infty\ ;+\infty[$.
Alors l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $h(\alpha) = 0$.

- De plus $\begin{cases} h(0{,}4) = -0{,}52 \\ h(0{,}7) = \ 0{,}34 \end{cases}$ => $h(0{,}4) \times h(0{,}7) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a : $\alpha \in [\ 0{,}4\ ;\ 0{,}7\ ]$

Conclusion : l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [\ 0{,}4\ ;\ 0{,}7\ ]$

2) Montrons que l'on a : $e^{-\alpha} = \alpha$

D'après **Partie B 1)** on a : $h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha + ln\,\alpha = 0$ => $ln\,\alpha = -\alpha$ => $e^{-\alpha} = \alpha$

3) a- Vérifions que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à Γ en $+\infty$.

La droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (Γ) en $+\infty$ si et seulement si

$lim\ f(x) - y = 0$

$x \to +\infty$

$lim\ f(x) - y = 0 = lim\ \left(x + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2}\right) - x = lim\ \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2} = 0$

$x \to +\infty$ $\quad$ $x \to +\infty$ $\quad$ $x \to +\infty$

D'où La droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (Γ) en $+\infty$

b- Utilisons les résultats de la **Partie B** question **1)** pour Détermine les positions relatives de (Γ) et Δ.

Pour étudier la position relative (Γ) et (Δ) nous devons étudier le signe de $f(x) - y$.

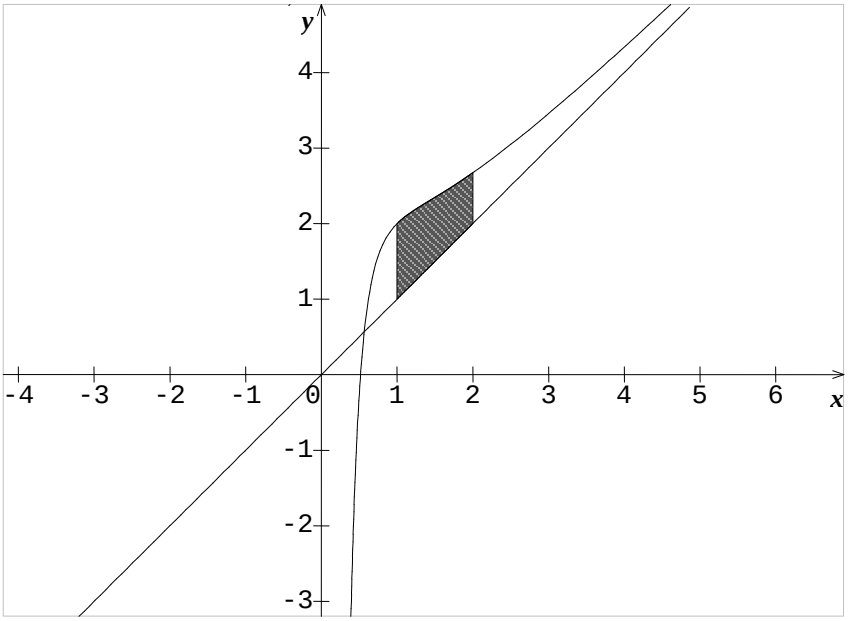
Or $f(x) - y = \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$.
Donc le signe de $f(x) - y$ dépend du signe de $h(x)$.

Or d'après le tableau de variation obtenu dans la **Partie B 1)** on a :

$\forall x \in]\ 0\ ;\ \alpha[\ \ h(x) < 0$ => $\quad \forall x \in]\ 0\ ;\ \alpha[\ \ f(x) - y < 0$ et par conséquent $\forall x \in]\ 0\ ;\ \alpha[$; la courbe (Γ) est en dessous de la droite (Δ)

De même $\forall x \in]\ \alpha\ ;\ +\infty[\ \ h(x) > 0$ => $\forall x \in]\ \alpha\ ;\ +\infty[\ \ f(x) - y > 0$ et par conséquent $\forall x \in]\ \alpha\ ;\ +\infty[$; la courbe (Γ) est au dessus de la droite (Δ)

4) Construction de la courbe (Γ) et de la droite Δ dans le repère ortho normal $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$



5) a- Calculons au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{lnt}{t^2} dt$

$I = \int_1^2 \frac{lnt}{t^2} dt = \int_1^2 \frac{1}{t^2} lnt\ dt$

Posons : $u(t) = lnt$ => $u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = \frac{1}{t^2}$ => $v(t) = -\frac{1}{t}$

=> $I = \left[-\frac{lnt}{t}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{lnt}{t}\right]_1^2 + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = \left[-\frac{lnt}{t} - \frac{1}{t}\right]_1^2 = \left[-\frac{1+lnt}{t}\right]_1^2$

=> $I = \frac{1-ln2}{2}$

b- En déduisons l'aire, en cm^2 de la portion de plan limitée par la courbe (Γ) , la droite Δ et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équation $x = 1\ et\ x = 2$.

L'aire A de la portion de plan indiquée est, en cm^2, puisque (Γ) est au dessus de (Δ) et puisque (Δ) est au dessus de l'axe des abscisses pour $1 \leq x \leq 2$

$A = (2\ cm)^2 \int_1^2 (f(x) - y) dt = 4\ cm^2 \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2}\right) dt = 4\ cm^2 \int_1^2 \frac{1}{x} dt + 4\ cm^2 \int_1^2 \frac{lnx}{x^2} dt$

$= 4\ cm^2 \int_1^2 \frac{1}{x} dt + 4I\ cm^2 = 4\ cm^2 [lnt]_1^2 + 4I\ cm^2 = 4\ cm^2 ln2 + 4I\ cm^2$

$= 4\ cm^2 ln2 + 4cm^2 \left(\frac{1-ln2}{2}\right) = 4cm^2 \left(ln2 + \frac{1-ln2}{2}\right) = 4cm^2 \left(\frac{2ln2+1-ln2}{2}\right)$

$= 4cm^2 \left(\frac{ln2+1}{2}\right) = 2cm^2(ln2+1) = (2ln2+2)cm^2 = 3{,}39cm^2$

Partie C : Etude d'une suite

Dans cette partie :

- I désigne l'intervalle [0,4 ; 0,7]
- α est le réel mis en évidence au **B. 1**.
- $\varphi(x)$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^{-x}$

1) u est la suite récurrente définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_0 = 0{,}4 \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}$

a) Montrons qu'on a pour tout $x \in I$ on a : $\varphi(x) \in I$

Pour tout x de l'intervalle $I = [\ 0{,}4\ ;\ 0{,}7\ ]$; $\varphi(x)$ appartient à l'intervalle I.

On peut résumer l'étude des variations de φ sur I dans le tableau suivant :

x	0,4	0,7
$\varphi(x)$	0,670 ↘	0,497

$\varphi(0{,}4) = 0{,}670 < 0{,}7$ et $\varphi(0{,}7) = 0{,}497 > 0{,}4$

Donc pour tout x de l'intervalle $I = [\ 0{,}4\ ;\ 0{,}7\ ]$; $\varphi(x)$ appartient à l'intervalle I.

b) Montrons qu'on a pour tout $x \in I$ on a : $|\varphi'(x)| \leq 0{,}7$

On sait que : $0{,}4 \leq x \leq 0{,}7$

Appliquons $\varphi'(x)$ à l'inégalité : $0{,}4 \leq x \leq 0{,}7$

=> $\varphi'(0{,}4) \leq \varphi'(x) \leq \varphi'(0{,}7)$

=> $-0{,}670 \leq \varphi'(x) \leq -0{,}497$

Appliquons la valeur absolue à l'inégalité : $-0{,}670 \leq \varphi'(x) \leq -0{,}497$

=> $|-0{,}4970| \leq |\varphi'(x)| \leq |-0{,}67| \Leftrightarrow 0{,}4970 \leq |\varphi'(x)| \leq 0{,}67$

=>$|\varphi'(x)| \leq 0{,}67$. Or $0{,}67 \approx 0{,}7$. D'où $|\varphi'(x)| \leq 0{,}7$

c) Montrons qu'on a pour tout $x \in I$ on a : $|\varphi(x) - \alpha| \leq 0{,}7|x - \alpha|$

Puisque $|\varphi'(x)| \leq 0{,}7$ alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction φ pour x appartenant à I, on a : $|\varphi(x) - \varphi(\alpha)| \leq 0{,}7|x - \alpha|$

Or d'après **Partie B 2)** on a $\varphi(\alpha) = e^{-\alpha} = \alpha$. Alors $|\varphi(x) - \varphi(\alpha)| \leq 0{,}7|x - \alpha| \Leftrightarrow$

$|\varphi(x) - \alpha| \leq 0{,}7|x - \alpha|$ (Ce qu'il fallait Démontre)

2) a) Montrons que $\forall\, n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}7|u_n - \alpha|$

On sait que : $|\varphi(x) - \alpha| \leq 0{,}7|x - \alpha|$. Posons $x = u_n$

=> $|\varphi(u_n) - \alpha| \leq 0{,}7|u_n - \alpha|$. Or $\varphi(u_n) = u_{n+1}$

=>$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}7|u_n - \alpha|$ (Ce qu'il fallait Démontre)

En déduisons par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_n - \alpha| \leq 0{,}3(0{,}7)^n$

On sait que $\alpha \in [\,0{,}4\ ;\ 0{,}7\,] \Leftrightarrow 0{,}4 \leq \alpha \leq 0{,}7$ et $u_0 = 0{,}4$

Il vient que $0{,}4 - 0{,}4 \leq \alpha - u_0 \leq 0{,}7 - 0{,}4$

$\Leftrightarrow 0 \leq u_0 - \alpha \leq 0{,}3$

$\Leftrightarrow 0 \leq |u_0 - \alpha| \leq 0{,}3$

$\Leftrightarrow 0 \leq |u_0 - \alpha| \leq 0{,}3(0{,}7)^0$

Alors la relation est vraie à l'ordre $n = 0$

Supposons la relation est vraie à l'ordre n c'est-à-dire $\forall\, n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_n - \alpha| \leq 0{,}3(0{,}7)^n$ puis montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n + 1$ c'est-à-dire $\forall\, n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}3(0{,}7)^{n+1}$

D'après **Partie C 2) a),** on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}7|u_n - \alpha|$

Par suite $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}7|u_n - \alpha| \leq 0{,}7[0{,}3(0{,}7)^n\,]$

D'où $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}3(0{,}7)^{n+1}$

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_n - \alpha| \leq 0{,}3(0{,}7)^n$ (Ce qu'il fallait Démontre).

b) Etudions la convergence de la suite u puis.

Calculons $lim\ u_n$

$n \to +\infty$

La suite de terme général $0{,}3(0{,}7)^n$ est convergente $\forall\ n \in \mathbb{N}$ et converge donc vers 0.

Alors $lim\ |u_n - \alpha| = 0 \Leftrightarrow\ lim\ u_n - \alpha = 0\ \Leftrightarrow lim\ u_n = \alpha$

$n \to +\infty$ $\quad$ $n \to +\infty$ $\quad$ $n \to +\infty$

D'où la suite u_n est convergente et converge vers α

3) Déterminons un entier p tel que pour $n \geq p$ on ait: $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$puis donnons à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de u_p à 10^{-3}près.

On sait que $|u_n - \alpha| \leq 0{,}3(0{,}7)^n$ et d'autre part $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$.

Par identification on a : $0{,}3(0{,}7)^n \leq 10^{-3} \Leftrightarrow (0{,}7)^n \leq \frac{10^{-3}}{0{,}3} \Leftrightarrow e^{nln\,0{,}7} \leq \frac{10^{-3}}{0{,}3}$

$\Leftrightarrow nln0{,}7 \leq ln\left(\frac{10^{-3}}{0{,}3}\right)$ => $n \geq \frac{ln\left(\frac{10^{-3}}{0{,}3}\right)}{ln\,0{,}7}$ (Car $ln0{,}7 < 0$)

=> $n \geq 15{,}99$. On peut donc prendre $p = 16$

Ainsi à l'aide de la calculatrice, on obtient à 10^{-3}près la valeur de $u_{16} \approx 0{,}567$

En déduisons une valeur approchée par défaut et par excès de α à 10^{-3}près

- 0,567 est la valeur approchée à 10^{-3}près par défaut de α.
- 0,568 est la valeur approchée à 10^{-3}près par excès de α.

16 **Partie A :**

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x}{1+x} - ln(1\ + x)$

1) a) Déterminons l'ensemble de définition de f

$Df = \{x\ /\ x \in \mathbb{R}\,;1\ + x \neq 0\ et\ 1\ + x\ > 0\}$ => $Df =]-1\,;\ +\infty[$

Calculons la limite de f aux bornes de cet ensemble.

$lim\ f(x) = lim\ \frac{2x}{1+x} - ln(1\ + x) = lim\ \frac{2x - (1+x)ln(1+x)}{1+x}$

$x \to -1$ $\quad$ $x \to -1$ $\quad$ $x \to -1$

Effectuons un changement de variable en posant $X = 1 + x$ => $x = X - 1$

Si $x = -1$ alors $X = 0$

$lim\ f(x) = lim\ \frac{2(X-1) - XlnX}{X} = lim\ \frac{2X - 2 - XlnX}{X} = \frac{2(0) - 2 - (0)}{0^+} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

$x \to -1 \quad X \to 0 \qquad X \to 0$

=> $lim\ f(x) = -\infty$

$x \to -1$

$lim\ f(x) = lim\ \frac{2x}{1+x} - ln(1 + x) = lim\ \frac{2x}{x} - ln(x) = 2 - (+\infty) = -\infty$

$x \to +\infty \quad x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

b) Déterminons la fonction dérivée de f puis établissons son tableau de variations.

$f(x) = \frac{2x}{1+x} - ln(1 + x)$ => $f'(x) = \frac{2(1+x) - (1)(2x)}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{2(1+x) - (1)(2x)}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}$

=> $f'(x) = \frac{1-x}{(1+x)^2}$

$\forall\ x \in Df\ (1 + x)^2 > 0$. Alors le signe $f'(x)$ dépend du signe de $1 - x$

Posons $1 - x = 0$ => $x = 1$.

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	-1		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0		$-$		
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	$1 - ln2$	↘	0	↘	$-\infty$

2) Démontrons que $\forall\ x \in [1\ ;\ +\infty[$; l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.
Vérifions qu'une valeur décimale approchée de α à 10^{-3}près est 3,9.

- D'après le tableau de variation de f , $\forall x \in [1\ ;\ +\infty[$ f est définie, continue et strictement décroissante de l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$vers $]-\infty\ ;\ 1 - ln2]$.
Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $f(\alpha) = 0$.

- De plus $\begin{cases} f(3,9) = 0,003 \\ f(4) = -0,009 \end{cases}$ => $f(3,9) \times f(4) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit l'encadrement suivant $3{,}9 < \alpha < 4$

3) Précisons, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$

D'après le tableau de variation de f :

$\forall x \in]-\infty\,;0[\cup]\alpha\,;+\infty[\,;\ f(x) < 0$ et $\forall x \in]0\,;\alpha\,[\,;\ f(x) > 0$

Partie B : soit g la fonction définie par : $g(0) = 0$ et $g(t) = \frac{ln(1+t)}{\sqrt{t}}$ si $t > 0$

1) Démontrons que g est continue en 0.

g est continue en 0 si te seulement si $lim\ g(t) = g(0) = 0$

$t \to 0$

$lim\ g(t) = lim \frac{ln(1+t)}{\sqrt{t}} = lim \frac{ln(1+t)}{t} \times \sqrt{t} = (1) \times (0) = 0$

$t \to 0$ $t \to 0$ $t \to 0$

Puisque $lim\ g(t) = g(0) = 0$, alors g est continue en 0.

$t \to 0$

Etudions la dérivabilité de g en 0.

g est dérivable en 0 si te seulement si $lim \frac{g(t)-g(0)}{t-0} = g'(0) = l \in \mathbb{R}$

$t \to 0$

$lim \frac{g(t)-g(0)}{t-0} = lim \frac{g(t)}{t} = lim \frac{\frac{ln(1+t)}{\sqrt{t}}}{t} = lim \frac{ln(1+t)}{t\sqrt{t}} = lim \frac{ln(1+t)}{t} \times \frac{1}{\sqrt{t}}$

$t \to 0$ $t \to 0$ $t \to 0$ $t \to 0$ $t \to 0$

$= 1 \times (+\infty) = +\infty \neq l \in \mathbb{R}$

Alors g n'est pas dérivable en 0.

2) Calculons $g'(t)$ et Exprime $g'(t)$ en fonction de $f(t)$

Pour tout $t > 0$; on a : $g(t) = \frac{ln(1+t)}{\sqrt{t}}$ => $g'(t) = \frac{\frac{1}{1+t} \times \sqrt{t} - \frac{1}{2\sqrt{t}} \times ln(1+t)}{(\sqrt{t})^2}$

$$\Rightarrow g'(t) = \frac{\frac{\sqrt{t}}{1+t} - \frac{ln(1+t)}{2\sqrt{t}}}{t} = \frac{\sqrt{t}}{t(1+t)} - \frac{ln(1+t)}{2t\sqrt{t}} = \frac{1}{2t\sqrt{t}}\left(\frac{2t}{1+t} - ln(1+t)\right)$$

$$\Rightarrow g'(t) = \frac{1}{2t\sqrt{t}} \times f(t)$$

3) a) Déterminons la limite en $+\infty$ de g.

$$lim\ g(t) = lim\ \frac{ln(1+t)}{\sqrt{t}} = lim\ \frac{ln\left[t\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]}{\sqrt{t}} = lim\ \frac{lnt + ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}}$$

$t \to +\infty \qquad t \to +\infty \qquad t \to +\infty \qquad t \to +\infty$

$$= lim\ \frac{lnt}{\sqrt{t}} + \frac{ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}} = lim\ \frac{lnt}{t^{\frac{1}{2}}} + \frac{ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}} = 0 + 0 = 0$$

$t \to +\infty \qquad\qquad t \to +\infty$

b) Dressons le tableau des variations de g.

$g'(t) = \frac{1}{2t\sqrt{t}} \times f(t)$. $\forall\, t \in D_g\ ;\ 2t\sqrt{t} > 0$. Alors le signe de $g'(t)$ dépend du signe de $f(t)$.

Or D'après **Partie B :** 3) on a :

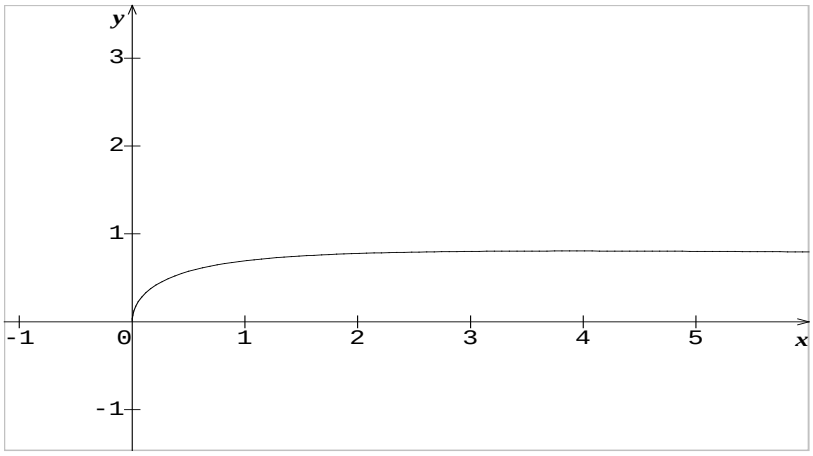
$\forall x \in]-\infty\,;0[\cup]\alpha\,;+\infty[\ ;\ f(t) > 0 \Rightarrow\ \forall x \in]-\infty\,;0[\cup]\alpha\,;+\infty[\ ;\ g'(t) < 0$

et $\forall x \in]0\,;\alpha\,[\ ;\ f(t) < 0 \Rightarrow\ \forall x \in]0\,;\alpha\,[\ ;\ g'(t) > 0$

D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	$g(\alpha)$	↘	0

4) Le plan est rapporté au repère orthogonal $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$. Construisons la courbe (Γ) représentative de g.



Partie C : Cette partie a pour objectif de Détermine l'aire A, en unités d'aires, de la portion de plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe (Γ) et la droite d'équation $x = 1$.

1) a) Démontrons que la fonction g_1 définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $g_1(x) = \sqrt{x}ln(1+x)$ est dérivable en 0.

g_1 est dérivable en 0 si te seulement si $lim\ \frac{g_1(x) - g_1(0)}{x-0} = g_1'(0) = l \in \mathbb{R}$

$x \to 0$

$lim\ \frac{g_1(x) - g_1(0)}{x-0} = lim\ \frac{g_1(x) - 0}{x-0} = lim\ \frac{g_1(x)}{x} = lim\ \frac{\sqrt{x}ln(1+x)}{x} = lim\ \frac{xln(1+x)}{x\sqrt{x}}$

$x \to 0$ $\quad x \to 0$ $\quad x \to 0$ $\quad x \to 0$ $\quad x \to 0$

$= lim\ \frac{ln(1+x)}{\sqrt{x}} = lim\ g(x) = g(0) = 0 \in \mathbb{R}$

$x \to 0$ $\quad x \to 0$

D'où la fonction g_1 est dérivable en 0 et son nombre dérivé est $g_1'(0) = 0$

b) Soit φ la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $\varphi(x) = 2\sqrt{x}ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$

Démontrons que φ est dérivable en tout point de $[0\ ;\ +\infty[$

$\varphi(x) = 2\sqrt{x}ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt = 2g_1(x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$

$\forall x \in\ ]0\ ;\ +\infty[\ ;\ g_1$ est dérivable et sa dérivée est $g'_1(x) = \frac{ln(1+x)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1+x}$ et $g_1(0) = 0$

De plus la fonction δ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $\delta(t) = \frac{2\sqrt{t}}{1+t}$ est continue sur $[0\ ;\ +\infty[$

Donc la fonction h définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$ est définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et

$h'(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$. On en déduit donc que φ est dérivable en tout point de $[0\ ;\ +\infty[$.

Montrons que $\varphi'(x) = g(x)$

$\varphi(x) = 2\sqrt{x}ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$ => $\varphi'(x) = 2\left[\frac{ln(1+x)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1+x}\right] - \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$

=> $\varphi'(x) = \frac{ln(1+x)}{\sqrt{x}} = g(x)$

2) En déduisons que A $= \int_0^1 g(t)dt = 2ln2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$

A $= \int_0^1 g(t)dt = [\varphi(t)]_0^1 = \left(2ln2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt\ \right) unité\ d'aire$

3) Soit h la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $h(x) = \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$

et k la fonction définie sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ par $k(\theta) = tan^2\theta$

a) Calculons $(hok)(0)$

$(hok)(0) = h[k(0)] = h[0] = 0$

b) Prouvons que $\forall\ \theta \in I$; on a : $(hok)'(\theta) = 4tan^2\theta$

$(hok)'(\theta) = k'(\theta) \times h'[k(\theta)]$.

Or $\forall\ \theta \in I\ ;\ h'(\theta) = 2tan\theta(tan^2\theta + 1)$ et $\forall\ x\ \in [0\ ;\ +\infty[\ ;\ h'(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$.

Donc $\forall\ \theta \in I\ \ (hok)'(\theta) = 2tan\theta(tan^2\theta + 1)\left(\frac{2\sqrt{tan^2\theta}}{1+tan^2\theta}\right) = 4tan\theta \times |tan\theta|$

$= 4tan^2\theta$ Car $\theta \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ (ce qu'il fallait Démontre)

D'où $\forall\ \theta \in I$; on a : $(hok)'(\theta) = 4tan^2\theta$

c) En écrivant $tan^2\theta = (tan^2\theta + 1) - 1$; déterminons une primitive de $(hok)'$ puis donnons l'expression de (hok)

$(hok)'(\theta) = 4tan^2\theta = 4[(tan^2\theta + 1) - 1] = 4(tan^2\theta + 1) - 4 = 4(tan)'(\theta) - 4$

Soit H une primitive de hok. Alors $H(\theta) = 4(tan)(\theta) - 4\theta$.

Or hok est une primitive de $(hok)'$. D'où $(hok)(\theta) = 4(tan)(\theta) - 4\theta + c$. ($c \in \mathbb{R}$).
De plus $(hok)(0) = 0$

Donc $(hok)(\theta) = 4(tan)(\theta) - 4\theta$

d) Calculons $h(1)$

$h(1) = h\left[k\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = (hok)\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \pi = 4 - \pi$ avec $k\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

4) déduisons des résultats précédents la valeur exacte de A.

$A = 2ln2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt = 2ln2 - h(1) = (2ln2 - 4 + \pi)unité\ d'aire$

17 **Partie A :**

On considère la fonction f définie par $f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$

1) Déterminons l'ensemble de définition D_f de f.

$Df = \left\{x / x \in \mathbb{R}\ ; 1 - x > 0\ et\ \frac{1-x}{1+x} > 0\right\}$ => $Df =]-1\ ;\ 1[$

2) Calculons les limites aux bornes de D_f puis en déduisons que (C) admet deux asymptotes dont on Précisera les équations.

$lim\ f(x) = lim\ ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = +\infty$

$x \to -1^+$ $x \to -1^+$

$lim\ f(x) = lim\ ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\infty$

$x \to 1^-$ $x \to 1^-$

Alors les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$ sont asymptotes verticales à la courbe (C) de f

3) Dressons le tableau de variation de f

$f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ => $f'(x) = -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = -\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) = -\left(\frac{2}{1-x^2}\right) = \frac{-2}{1-x^2}$

=> $f'(x) = \frac{-2}{1-x^2} < 0 \; \forall \, x \in \; D_f$. D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	-1		1
$f'(x)$	$\|$	$-$	$\|$
$f(x)$	$\|\; +\infty$	$\searrow$	$\|\; -\infty$

4) a-Ecris une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse *I* où *I* est le point d'inflexion de la courbe (C).

Déterminons le point d'inflexion de la courbe (C)

$f'(x) = \frac{-2}{1-x^2}$ => $f''(x) = \frac{-4x}{(1-x^2)^2}$. Posons $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4x}{(1-x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow -4x = 0$

=> $x = 0$. Donc $f''(x) > 0$ sur $]-1\,;\,0[$ puis $f''(x) < 0$ sur $]0\,;\,1[$ d'où le point $I(0\,;f(0)) = (0\,;0)$ => $I(0\,;0)$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

L'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point $I(0\,;0)$ est :

(T) : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Or $x_0 = 0$ => $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

=> $y = f'(0)(x) + f(0) = -2(x) + 0 = -2x$

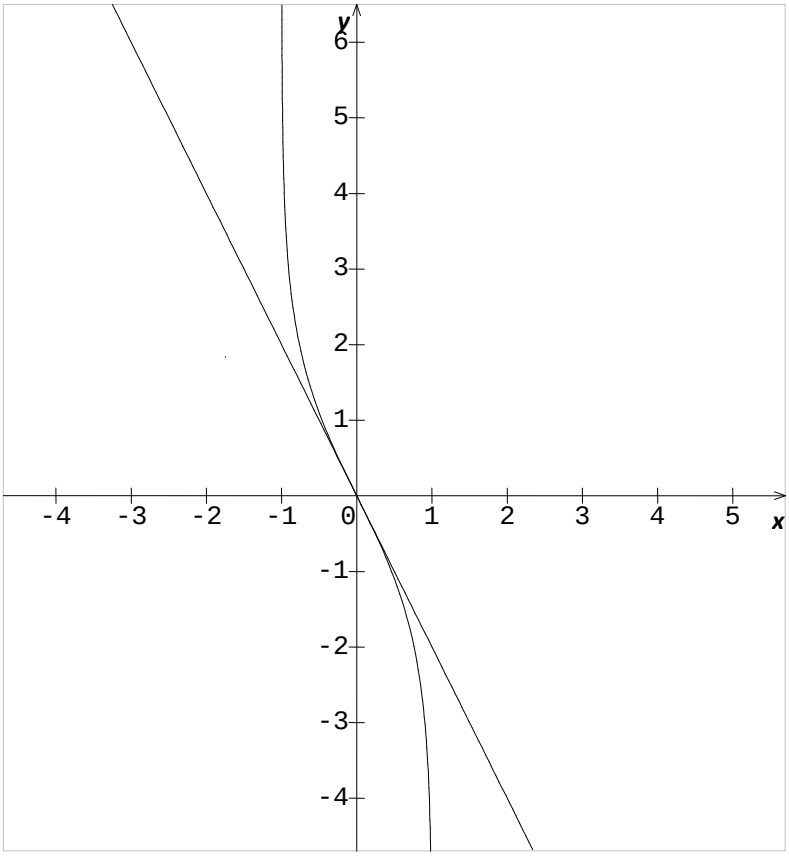
D'où (T) : $y = -2x$ est l'équation de la tangente au point $I(0\,;0)$

b-Etudions la position de (C) et (T) puis Trace (C) et (T) dans le même repère.

D'après 4) b) , on a :

$\forall \, x \in]-1\,;\,0[\,;\; f''(x) > 0$ => $\forall \, x \in]-1\,;\,0[\,;$ (C) est au dessus (T)

$\forall \, x \in]0\,;\,1[\,;\; f''(x) < 0$ => $\forall \, x \in \forall \, x \in]0\,;\,1[\,;$ (C) est en dessous (T)



5) On considère l'intégrale I définie par $= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx$.

a-Calculons I en utilisant une intégration par parties.

$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} 1 \times f(x)dx$

Posons $u(x) = f(x)$ => $u'(x) = f'(x)$

$v'(x) = 1$ => $v(x) = x$

=> $I = [xf(x)]_{-\frac{1}{2}}^{0} - \int_{-\frac{1}{2}}^{0} xf'(x)dx = \left[xln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} - \int_{-\frac{1}{2}}^{0} x \times \frac{-2}{1-x^2}\ dx$

$= \left[xln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} - \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{-2x}{1-x^2}\ dx = \left[xln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} - [ln(1-x^2)]_{-\frac{1}{2}}^{0}$

$= \left[xln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - ln(1-x^2)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = \frac{3}{2}ln3 - ln4$

b- En déduisons en cm^2 l'aire A de la partie du plan délimité par la courbe (C) , la tangente (T) et la droite d'équation $x = \frac{-1}{2}$

$$A = (2cm)^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (f(x) - y)\, dx = 4cm^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (f(x) + 2x)\, dx$$

$$= 4cm^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx + 4cm^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{0} 2x\, dx$$

$$= 4cm^2 \left[x ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - ln(1 - x^2)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} + 4cm^2 [x^2]_{-\frac{1}{2}}^{0}$$

$$\Rightarrow A = 4cm^2 \left[x ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - ln(1 - x^2) + x^2\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = (6ln3 - 4ln4 - 1)cm^2$$

Partie B :

On considère dans cette partie la fonction numérique h définie sur $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ par

$h(x) = \frac{1}{2} f(cosx)$ où f est la fonction définie dans la **Partie A :**

1) Vérifions que h est la primitive qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{sinx}$

h est la primitive de la fonction g qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ si et seulement si $h'(x) = g(x)$

$h(x) = \frac{1}{2} f(cosx)$ => $h'(x) = -\frac{1}{2} sinx f'(cosx)$. Or $f'(x) = \frac{-2}{1 - x^2}$

=> $h'(x) = -\frac{1}{2} sinx \times \frac{-2}{1 - cos^2 x} = \frac{sinx}{sin^2 x} = \frac{1}{sinx} = g(x)$

$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} f(0) = 0$. D'où h est la primitive de la fonction g qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$

2) Calculons l'intégrale $K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sinx} dx$

$$K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sinx} dx = [h(x)]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = h\left(\frac{\pi}{2}\right) - h\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 - h\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2} ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} ln\frac{1}{3}$$

D'où $K = \frac{1}{2} ln\frac{1}{3}$

3) Soit l'intégrale (I_n); n appartenant à $\mathbb{N}$ définie par : $I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x}{sinx} dx$.

a-Calculons I_0 et I_1

$I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x}{sinx} dx$ => $I_0 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^0 x}{sinx} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sinx} dx = \frac{1}{2} ln \frac{1}{3}$

$I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x}{sinx} dx$ => $I_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^1 x}{sinx} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{sinx} dx = [ln(sinx)]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -ln \frac{\sqrt{3}}{2}$

b- Calculons l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} sinx \times cos^n x \, dx$

$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} sinx \times cos^n x dx = \left[-\frac{cos^{n+1} x}{n+1} \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$

c- En déduisons l'expression de $I_n - I_{n+2}$ en fonction de n

$I_n - I_{n+2} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x}{sinx} dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^{n+2} x}{sinx} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x - cos^{n+2} x}{sinx} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x \, (1 - cos^2 x)}{sinx} dx$

$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x \, sin^2 x}{sinx} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} sinx \times cos^n x \, dx \left[-\frac{cos^{n+1} x}{n+1} \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$

=> $I_n - I_{n+2} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$ $\Leftrightarrow$ $I_{n+2} = I_n - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$

Calculons I_2 ; I_3 et I_4

$I_{n+2} = I_n - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$

- Pour $n = 0$; on a : $I_2 = I_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} ln \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$.
- Pour $n = 1$; on a : $I_3 = I_1 - \frac{1}{8} = -ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{8}$.
- Pour $n = 2$; on a : $I_4 = I_2 - \frac{1}{24} = \frac{1}{2} ln 3 - \frac{13}{24}$

18 **PARTIE A :**

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 3x - 1 - lnx$. On désigne par C$g$ la courbe représentative de g dans un repère orthonormé(O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) d'unité graphique 1cm.

1) Etudions les limites de g en 0 et en + ∞.

$lim\ g(x) = lim\ -x^2 + 3x - 1 - lnx = -(0) + 3(0) - 1 - (-\infty) = +\infty$

$x \to 0 \qquad x \to 0$

$lim\ g(x) = lim\ -x^2 + 3x - 1 - lnx = -(+\infty) + 3(+\infty) - 1 - (+\infty)$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

$= -\infty + \infty =$ " FI " . Alors levons l'indétermination.

$lim\ g(x) = lim\ -x^2 + 3x - 1 - lnx = lim\ x^2\left(-1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{lnx}{x^2}\right)$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty \qquad\qquad x \to +\infty$

$= (+\infty)(-1 + 0 - 0 - 0) = (+\infty)(-1) = -\infty$

2) Etudions les branches infinies de la courbe Cg.

$lim\ \frac{g(x)}{x} = lim\ \frac{-x^2 + 3x - 1 - lnx}{x} = lim\ -x + 3 - \frac{1}{x} - \frac{lnx}{x} = -(+\infty) + 3 + 0 - 0 = -\infty$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty \qquad\qquad x \to +\infty$

Alors la courbe (Cg) admet une branche parabolique de direction (oy)

3) Etudions les variations de g.

$g(x) = -x^2 + 3x - 1 - lnx \Rightarrow g'(x) = -2x + 3 - \frac{1}{x} = \frac{-2x^2 + 3x - 1}{x}$

$\forall\ x \in\ ]0\ ;\ +\infty[\ ;\ x > 0$. Alors le signe de $g'(x)$ dépend du signe de $-2x^2 + 3x - 1$.

Posons $-2x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{1}{2}$

D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	0		1		$\frac{1}{2}$		α		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	|		
$g(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0	↘	$-\infty$

4) Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle$[\ 2\ ;\ 3\ ]$.

- D'après le tableau de variation de g , $\forall x \in \left]\frac{1}{2}\ ; +\infty\right[$; g est définie, continue et strictement décroissante de l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\ ; +\infty\right[$vers$\left]-\infty\ ; \frac{1}{2}\right[$. Alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha) = 0$.

- De plus $\begin{cases} g(2) = 0{,}3 \\ g(3) = -2{,}09 \end{cases}$ => $g(2) \times g(3) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit l'encadrement suivant $2 \leq \alpha \leq 3$

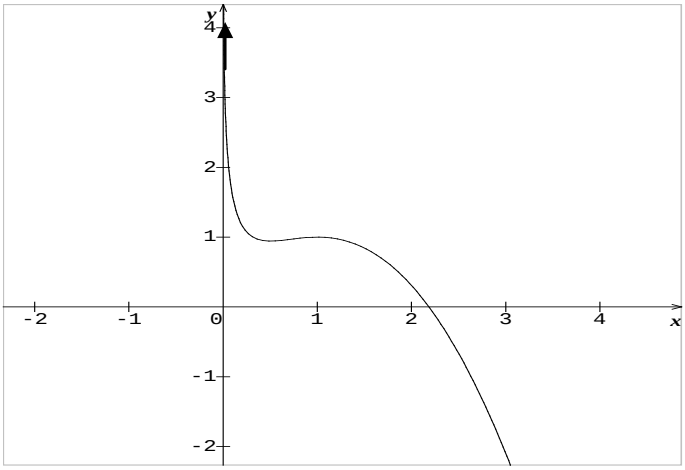
5) Déduisons de ce qui précède le signe de $g(x)$ en fonction de x.

Interprétons graphiquement le résultat.

D'après le tableau de variation de g :

$\forall x \in]0\ ; \alpha\ [\ ;\ g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha\ ;\ +\infty\ [\ ;\ g(x) < 0$

6) a- Traçons la courbe (Cg).



b- Discutons graphiquement suivant les valeurs du périmètre réel m, le nombre de solution de l'équation $g(x) = m$

D'après le graphique, $\forall\ y\ \in\ ]-\infty\ ;\ +\infty[\ ;$ l'équation $g(x) = m$ admet une solution unique.

PARTIE B :

Soit la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - x\ln x}$. On désigne par (C$f$) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(\ O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ d'unité graphique : 1 cm.

1) a) Montrons que pour tout x de $]\,0\,;\,+\infty[$, on a $x > lnx$.

Posons $p(x) = x - lnx$ puis effectuons une étude brève de la fonction p sur $]\,0\,;\,+\infty[$, affin de Détermine son signe.

$lim\ p(x) = lim\ x - lnx = (0) - (-\infty) = +\infty$

$x \to 0 \qquad x \to 0$

$lim\ p(x) = lim\ x - lnx = (+\infty) - (+\infty) = +\infty - \infty = "\ FI\ "$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

Levons l'indétermination

$lim\ p(x) = lim\ x\left(1 - \frac{lnx}{x}\right) = (+\infty)(1-0) = (+\infty)(1) = +\infty$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

$p(x) = x - lnx$ => $p'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

$\forall\ x \in]0\,;\,+\infty[\,;\ x > 0$. Alors le signe de $p'(x)$ dépend du signe de $x - 1$.

Posons $x - 1 = 0$ => $x = 1$

D'où le tableau de variation de h est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$p'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$p(x)$	$+\infty$ ‖	↘	1	↗	$+\infty$

D'après le tableau de variation de p, $\forall\ x \in]0\,;\,+\infty[\,;\ p(x) > 0 \Leftrightarrow x - lnx > 0$

=> $x > lnx$ (Ce qu'il fallait Démontre)

b) justifions que la fonction f est bien définie sur $]0\,;\,+\infty[$.

$f(x) = \frac{x-1}{x^2 - xlnx}$

- La fonction $x \to x - 1$ est définie sur $]0\,;\,+\infty[$.
- La fonction $x \to x^2 - xlnx$ est définie sur $]0\,;\,+\infty[$.

Alors $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - xlnx}$ est une fonction qui est bien définie sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2) Etudions les limites de f en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduisons ?

$lim\ f(x) = lim\ \frac{x-1}{x^2 - xlnx} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$x \to 0 \qquad x \to 0$

$lim\ f(x) = lim\ \frac{x-1}{x^2 - xlnx} = lim\ \frac{x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{lnx}{x}\right)} = lim\ \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{lnx}{x}} = \frac{0-0}{1-0} = \frac{0}{1} = 0$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty \qquad x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

Ainsi on en déduit que les droites d'équation $x = 0$ et $y = 0$ sont respectivement asymptote verticale et horizontale à la courbe (Cf)

3) a- Montons que pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f\,'(x) = \frac{g(x)}{(x^2 - xlnx)^2}$

$f(x) = \frac{x-1}{x^2 - xlnx}$ => $f'(x) = \frac{(1)(x^2 - xlnx) - (2x - lnx - 1)(x-1)}{(x^2 - xlnx)^2}$

$= \frac{(x^2 - xlnx) - (2x - lnx - 1)(x-1)}{(x^2 - xlnx)^2} = \frac{x^2 - xlnx - 2x^2 + xlnx + x + 2x - lnx - 1}{(x^2 - xlnx)^2}$

$= \frac{-x^2 + 3x - 1 - lnx}{(x^2 - xlnx)^2} = \frac{g(x)}{(x^2 - xlnx)^2}$ => $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2 - xlnx)^2}$ (Ce qu'il fallait Démontre)

b- Dressons le tableau de variation de f.

$\forall\ x \in]0\ ;\ +\infty[\ ;\ (x^2 - xlnx)^2 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$.

Or d'après **PARTIE A 5)** on a :

- $\forall x \in]0\ ;\alpha[\ ;\ g(x) > 0$ => $\forall x \in]0\ ;\alpha[\ ;\ f'(x) > 0$
  et
- $\forall x \in]\alpha\ ;\ +\infty[\ ;\ g(x) < 0$ => $\forall x \in]\alpha\ ;\ +\infty[\ ;\ f'(x) < 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$ ‖	↗	$f(\alpha)$	↘	0

c – Montrons que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}$

D'après **PARTIE A 5)** l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha) = 0$.

Alors $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\alpha^2 + 3\alpha - 1 - ln\alpha = 0$ => $ln\alpha = -\alpha^2 + 3\alpha - 1$ $(\mathbf{1})$

D'autre part $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - xlnx}$ => $f(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 - \alpha ln\alpha}$ $(\mathbf{2})$

Eliminons $ln\alpha$ entre les équations $(\mathbf{1})$ et $(\mathbf{2})$ => $f(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 - \alpha(-\alpha^2 + 3\alpha - 1)}$

=> $f(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 - \alpha(-\alpha^2 + 3\alpha - 1)} = \frac{\alpha - 1}{\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha} = \frac{\alpha - 1}{\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1)} = \frac{\alpha - 1}{\alpha(\alpha-1)^2} = \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}$

D'où $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}$ (Ce qu'il fallait Démontre)

En déduisons un encadrement de $f(\alpha)$.

On sait que : $2 \leq \alpha \leq 3$ $(\mathbf{1})$

De même : $2 \leq \alpha \leq 3 \Leftrightarrow 2 - 1 \leq \alpha - 1 \leq 3 - 1 \Leftrightarrow 1 \leq \alpha - 1 \leq 2$ $(\mathbf{2})$

$2 \leq \alpha \leq 3$ $(\mathbf{1})$

$1 \leq \alpha - 1 \leq 2$ $(\mathbf{2})$

Effectuons le produit des relations $(\mathbf{1})\boldsymbol{et}(\mathbf{2})$**. Ainsi on a :**

$(2)(1) \leq (\alpha)(\alpha - 1) \leq (3)(2)$

$\Leftrightarrow 2 \leq \alpha(\alpha - 1) \leq 6$

En prenant l'inverse de l'inégalité précédente, on a :

$\frac{1}{6} \leq \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq f(\alpha) \leq \frac{1}{2}$ (Ce qu'il fallait Démontre)

4) Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (Cf) de f au point d'abscisse 1.

L'équation de la tangente (T) à la courbe (Cf) de f au point d'abscisse 1 est :

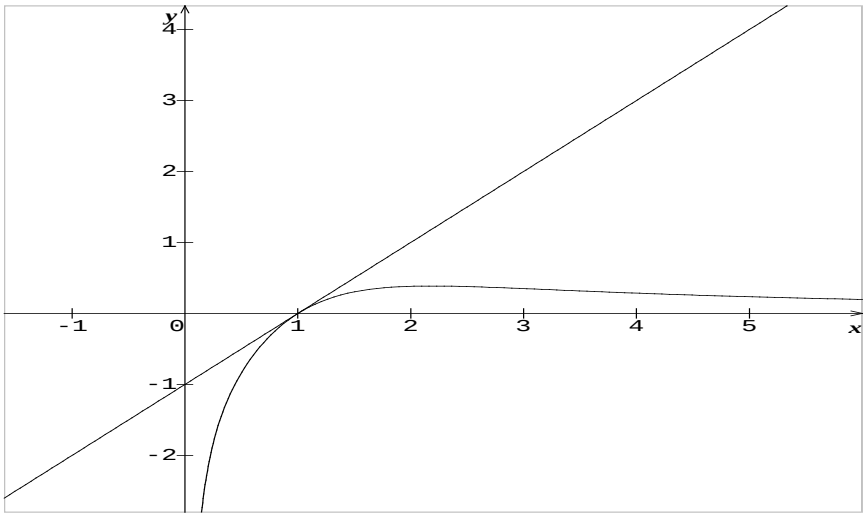
(T) : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ => $y = x - 1$

5) Résolvons l'équation $f(x) = 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2 - xlnx} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$.

Alors la courbe (Cf) coupe l'axe (ox) en $x = 1$

Traçons la courbe (Cf) et la tangente (T) dans le même repère.



6) a- Montrons que pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, on a : $f(x) = \frac{1-\frac{1}{x}}{x - lnx}$

$f(x) = \frac{x-1}{x^2 - xlnx}$ => $f(x) = \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x(x - lnx)} = \frac{1-\frac{1}{x}}{x - lnx}$ (Ce qu'il fallait Démontre)

b- Soit $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (Cf) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

Montrons que $A(\alpha) = 2ln(\alpha - 1)$

$A(\alpha) = \int_1^\alpha f(x)dx = \int_1^\alpha \frac{x-1}{x^2 - xlnx} dx = \int_1^\alpha \frac{1-\frac{1}{x}}{x - lnx} dx = [ln(x - lnx)]_1^\alpha$

=> $A(\alpha) = ln(\alpha - ln\alpha) = ln[\alpha - (ln\alpha)]$. Or dans la **PARTIE A 5),** on a :

$ln\alpha = -\alpha^2 + 3\alpha - 1$

=> $A(\alpha) = ln\left[\alpha - \left(-\alpha^2 + 3\alpha - 1\right)\right] = ln(\alpha + \alpha^2 - 3\alpha + 1) = ln(\alpha^2 - 2\alpha + 1)$

$= ln(\alpha - 1)^2 = 2ln(\alpha - 1)$

D'où $A(\alpha) = 2ln(\alpha - 1)$ (Ce qu'il fallait Démontre)

En déduisons un encadrement de $A(\alpha)$.

$2 \leq \alpha \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq \alpha - 1 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq ln(\alpha - 1) \leq ln2 \Leftrightarrow 0 \leq 2ln(\alpha - 1) \leq 2ln2 \Leftrightarrow$

$0 \leq 2ln(\alpha - 1) \leq ln4 \Leftrightarrow 0 \leq A(\alpha) \leq ln4$ (Ce qu'il fallait Démontre)

7) Soit n un entier naturel supérieur ou égale 0 .

a- Calculons $a_n = \int_1^n f(x)dx$.

$a_n = \int_1^n f(x)dx = 2ln(n-1)$

Interprétons graphiquement ce résultat.

a_n est l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (Cf) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = n$.

b- Calculons la limite de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

$lim\ a_n = lim\ 2ln(n-1) = lim\ 2ln(n) = +\infty$

$n \to +\infty \quad n \to +\infty \qquad n \to +\infty$

PARTIE C :

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \int_1^{e^x} f(t)dt$. On désigne par ($C_h$) la courbe représentative de h dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) d'unité graphique : 1 cm.

1) a- Montrons que $h(x) = ln(e^x - x)$.

$h(x) = \int_1^{e^x} f(t)dt = \int_1^{e^x} \frac{1-\frac{1}{t}}{t-lnt}dt = ln(e^x - lne^x) = ln(e^x - x)$

b- Montrons que pour tout x de $\mathbb{R}$; on a : $e^x > x$.

Posons $k(x) = e^x - x$ puis effectuons une étude brève de la fonction k sur $\mathbb{R}$; affin de Détermine son signe.

$lim\ k(x) = lim\ e^x - x = 0 - (-\infty) = +\infty$

$x \to -\infty \qquad x \to -\infty$

$lim\ k(x) = lim\ e^x - x = lim\ x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

$k(x) = e^x - x$ => $k'(x) = e^x - 1$

Posons $k'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0$ => $x = ln1 = 0$

D'où le tableau de variation de k est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	
$k(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

D'après le tableau de variation de k , $\forall x \in \mathbb{R}$; $k(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - x > 0$

=> $e^x > x$.(Ce qu'il fallait Démontre)

2) a-Calculons $limite\ de\ h(x)\ limite\ de\ \frac{h(x)}{x}$ en $+\infty$

$$lim\ \frac{h(x)}{x} = lim\ \frac{ln(e^x - x)}{x} = lim\ \frac{ln\left[e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)\right]}{x} = lim\ \frac{ln\,e^x + ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)}{x}$$

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$

$$= lim\ \frac{x + ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)}{x} = lim\ 1 + \frac{ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)}{x} = 1 + 0 = 1 \text{ => } a = 1$$

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$

$$lim\ h(x) - ax = lim\ ln(e^x - x) - x = lim\ x + ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) - x = lim\ ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)$$

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$

$$= lim\ ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = ln(1 - 0) = 0$$

$x \to +\infty$

On peut en déduis que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique pour la courbe $(Ch)\ en + \infty$

b- Montrons que pour tout nombre réel , on a : $h(x) = x + ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$.

$$h(x) = ln(e^x - x) = ln\left[e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)\right] = lne^x + ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = x + ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right).$$

D'où $h(x) = x + ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$ (Ce qu'il fallait Démontre)

En déduisons de $lim\ h(x)$ en $+\infty$

$lim\ h(x) = lim\ x + ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = +\infty + 0 = +\infty$

$x \to +\infty \quad x \to +\infty$

3) Etudions la position relative de la coure (Ch) et de la droite $(\Delta): y = x$.

Pour cela, étudions le signe de $h(x) - y$

L'étudions le signe de $h(x) - y$ montre que :

$\forall\ x \in\ ]-\infty\ ; 0]\ ;\ h(x) - y > 0$. Alors $\forall\ x \in\ ]-\infty\ ; 0]\ ;\ (Ch)$ est au dessus (Δ)

$\forall\ x \in\ [0\ ; +\infty[\ ;\ h(x) - y < 0$. Alors $\forall\ x \in\ [0\ ; +\infty[\ ;\ (Ch)$ est en dessous (Δ)

4) Dressons le tableau de variation de h puis Trace.

$lim\ h(x) = lim\ x + ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = +\infty + 0 = +\infty$

$x \to +\infty \quad x \to +\infty$

$lim\ h(x) = lim\ ln(e^x - x) = +\infty$

$x \to -\infty \quad x \to -\infty$

$h(x) = ln(e^x - x)$ => $h'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$

D'après **PARTIE C** 1) b) , on a : $e^x - x > 0$; alors le signe de $h'(x)$ dépend du signe de

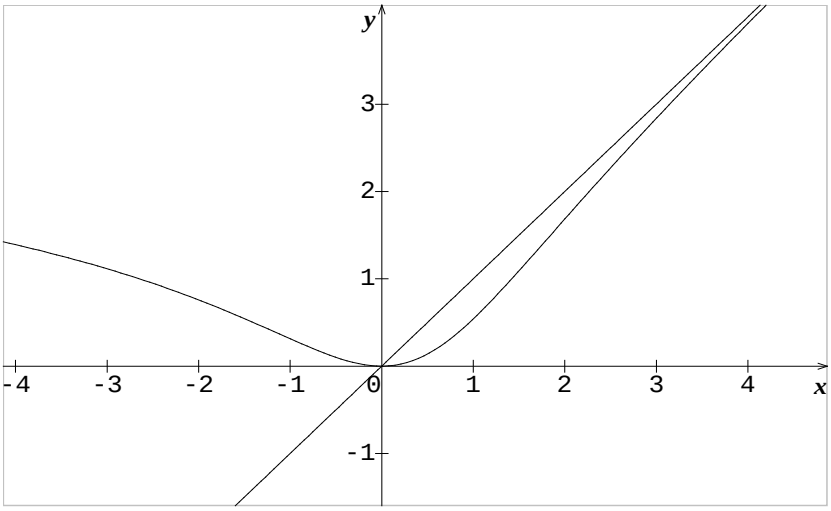
$e^x - 1$. Posons $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$ => $x > ln1 \Leftrightarrow x > 0$

Ainsi on dira que pour les $x > 0\ ;\ h'(x) > 0$

D'où le tableau de variation de h est le suivant

D'où le tableau de variation de k est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$



19 **PARTIE A :**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right)$. On désigne par (C$f$) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé$(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ d'unité graphique 1cm.

1) Montrons que f est impaire

f est impaire si et seulement si $f(-x) = -f(x)$

$$f(-x) = ln\left(-2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right) = ln\left[\frac{\left(-2x + \sqrt{4x^2+1}\right)\left(-2x - \sqrt{4x^2+1}\right)}{-2x\ -\sqrt{4x^2+1}}\right]$$

$$= ln\left[\frac{(-2x)^2 - \left(\sqrt{4x^2+1}\right)^2}{-2x\ -\sqrt{4x^2+1}}\right] = ln\left[\frac{4x^2 - (4x^2+1)}{-2x\ -\sqrt{4x^2+1}}\right] = ln\left(\frac{4x^2-4x^2-1}{-2x\ -\sqrt{4x^2+1}}\right)$$

$$= ln\left(\frac{-1}{-2x\ -\sqrt{4x^2+1}}\right) = ln\left(\frac{1}{2x + \sqrt{4x^2+1}}\right) = -ln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right) = -f(x)$$

D'où f est impaire

2) Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f(x) = ln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right)$.

- $2x$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

- $\sqrt{4x^2+1}$ est aussi une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Montrons que $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$.

$f(x) = ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)$ => $f'(x) = \frac{2+\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}}{2x+\sqrt{4x^2+1}} = \frac{2+\frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}}{2x+\sqrt{4x^2+1}} = \frac{\frac{2\sqrt{4x^2+1}+4x}{\sqrt{4x^2+1}}}{2x+\sqrt{4x^2+1}}$

$= \frac{\frac{2\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+1}}}{2x+\sqrt{4x^2+1}} = \frac{2\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+1}\right)} = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}\,;\ f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$

3) Dressons le tableau de variation de f.

$\forall x \in \mathbb{R}\,;\ f'(x) > 0$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}\,;$ f est strictement croissante.

$lim\ f(x) = lim\ ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right) = lim\ ln\left[2x + \sqrt{4x^2\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)}\right]$

$x \to +\infty \quad x \to +\infty \qquad\qquad x \to +\infty$

$= lim\ ln\left[2x + |2x|\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}\right] = lim\ ln\left[2x + 2x\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}\right]$

$x \to +\infty \qquad\qquad x \to +\infty$

$= lim\ ln\left[2x\left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}\right)\right] = ln[(+\infty)(2)] = ln(+\infty) = +\infty$

$x \to +\infty$

$lim\ f(x) = lim\ ln\left[\frac{\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)\left(2x-\sqrt{4x^2+1}\right)}{2x-\sqrt{4x^2+1}}\right] = lim\ ln\left[\frac{(2x)^2-\left(\sqrt{4x^2+1}\right)^2}{2x-\sqrt{4x^2+1}}\right]$

$x \to -\infty \quad x \to -\infty \qquad\qquad x \to -\infty$

$$= \lim_{x \to -\infty} ln\left[\frac{4x^2-(4x^2+1)}{2x\ -\sqrt{4x^2+1}}\right] = \lim_{x \to -\infty} ln\left(\frac{4x^2-4x^2-1}{2x\ -\sqrt{4x^2+1}}\right) = \lim_{x \to -\infty} ln\left(\frac{-1}{2x\ -\sqrt{4x^2+1}}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} ln\left(\frac{-1}{2x\ -\sqrt{4x^2\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)}}\right) = \lim_{x \to -\infty} ln\left(\frac{-1}{2x\ -|2x|\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} ln\left(\frac{-1}{2x\ -(-2x)\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}}\right) = \lim_{x \to -\infty} ln\left(\frac{-1}{2x+2x\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} ln\left(\frac{-1}{\left[2x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}\right)\right]}\right) = \lim_{x \to -\infty} ln\left(\frac{-1}{2x}\right) = -\infty$$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ⟶ $+\infty$

4) Etudions les branches infinies de la courbe (Cf).

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)}{x} = 0$$

Alors la courbe (Cf) admet une branche parabolique de direction (ox)

5) Trouvons une équation cartésienne de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse nul.

L'équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse nul est $y = f'(0)(x) + f(0)$

=> $y = f'(0)(x) + f(0) = 2x$. D'où on a (T) : $y = 2x$

6) Précisons la position de (T) et (Cf).

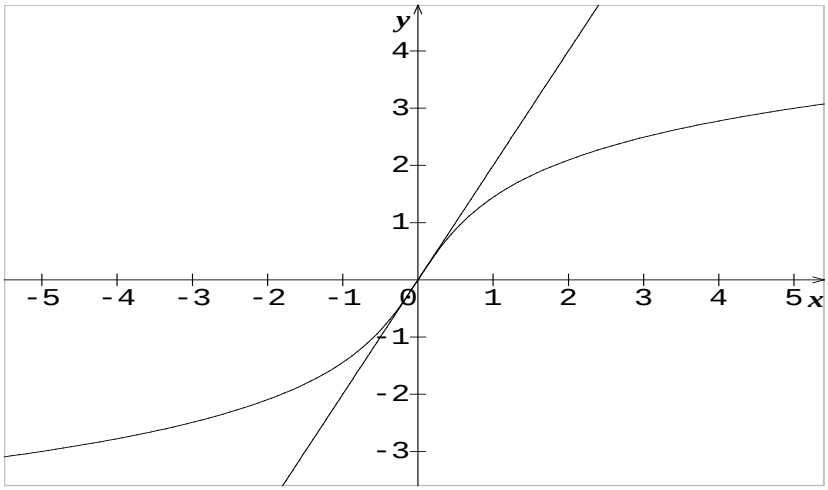
Pour cela, étudions le signe de $f(x) - y$

L'étudions le signe de $f(x) - y$ montre que :

$\forall\, x \in\,]-\infty\, ; 0]\, ;\, f(x) - y > 0$. Alors $\forall\, x \in\,]-\infty\, ; 0]\, ;\, (Cf)$ est au dessus (T)

$\forall\, x \in\, [0\, ; +\infty[\, ;\, f(x) - y < 0$. Alors $\forall\, x \in\, [0\, ; +\infty[\, ;\, (Cf)$ est en dessous (T)

7) Traçons la droite (T) et la courbe (Cf)



8) Soit α un réel strictement positif. Calculons en fonction de , l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (Cf) et les droites d'équations respectives $x = 0\, , y = 0\ et\ x =\ \alpha$.

$A(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)dx = \int_0^\alpha ln\big(\, 2x + \sqrt{4x^2 + 1}\big)dx$

Posons $u(x) =\ ln\big(\, 2x + \sqrt{4x^2 + 1}\big)$ => $u'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$

$v'(x) =\ 1$=> $v(x) = x$

=> $A(\alpha) = \big[xln\big(\, 2x + \sqrt{4x^2 + 1}\big)\,\big]_0^\alpha - \int_0^\alpha \frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}dx$

$= \big[xln\big(\, 2x + \sqrt{4x^2 + 1}\big) - 2\sqrt{4x^2 +\ 1}\big]_0^\alpha$

$= \alpha ln\big(\, 2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 + 1}\big) - 2\sqrt{4\alpha^2 +\ 1} + 2$

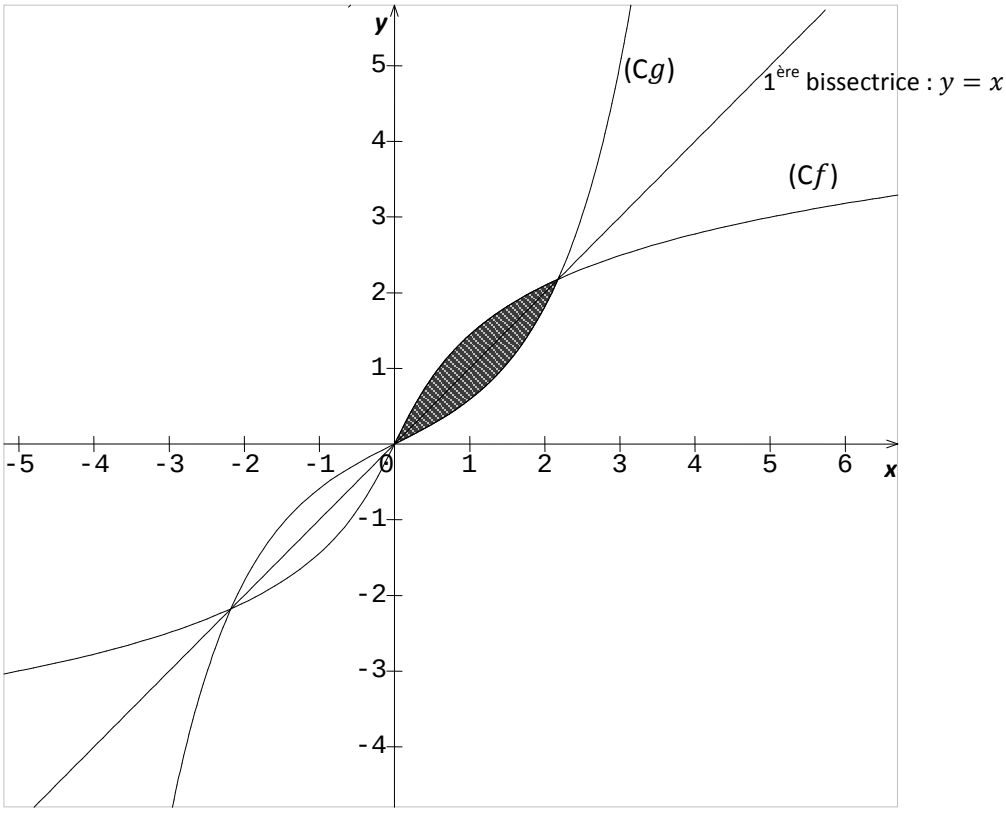
PARTIE B :

1) Montrons que la fonction f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle I que l'on Précisera.

D'après le tableau de variation f ; f est définie ; continue et strictement croissante de $]-\infty\,;\,+\infty[$ vers $]-\infty\,;\,+\infty[$.

D'où la fonction f admet une fonction réciproque g définie sur l'intervalle $I =]-\infty\,;+\infty[$

2) Construisons dans le même repère que (Cf) , la courbe (Cg) de la fonction g.



3) Montrons que pour tout $x \in$ I, on a : $g(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})$.

$f(x) = ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)$. Posons $f(x) = y \Leftrightarrow ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right) = y \Leftrightarrow$

$2x + \sqrt{4x^2+1} = e^y \Leftrightarrow \sqrt{4x^2+1} = e^y - 2x \Leftrightarrow \left(\sqrt{4x^2+1}\right)^2 = (e^y - 2x)^2 \Leftrightarrow$

$4x^2 + 1 = e^{2y} - 4xe^y + 4x^2 \Leftrightarrow e^{2y} - 4xe^y = 1 \Leftrightarrow 4xe^y = e^{2y} - 1 \Leftrightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{4e^y}$

$\Leftrightarrow x = \frac{(e^{2y}-1)e^{-y}}{4} = \frac{e^{2y}\times e^{-y}-e^{-y}}{4} = \frac{e^{y}-e^{-y}}{4} = \frac{1}{4}(e^{y} - e^{-y})$.

=> $f^{-1}(x) = g(x) = \frac{1}{4}(e^{x} - e^{-x})$. (Ce qu'il fallait Démontre)

4) Montrons que l'équation $g(x) = x$ admet dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$ une solution unique α et que $\alpha \in \left]\frac{-\sqrt{3}}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$.

- D'après le tableau de variation de g , $\forall x \in]0 ; +\infty[$; g est définie, continue et strictement croissante de l'intervalle $]-\infty ; +\infty[$ vers $]-\infty ; +\infty[$. Alors l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha) = \alpha$.

- De plus $\left[g\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \times \left[g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right] < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\alpha \in \left]\frac{-\sqrt{3}}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$.

5) Calculons en fonction de α l'aire du domaine limité par les deux courbes (Cf) et (Cg) et situées dans le demi-plan $x \geq 0$.

$B(\alpha) = \int_0^{\alpha}[f(x) - g(x)]dx = \int_0^{\alpha} f(x)dx - \int_0^{\alpha} g(x)dx$

$= \alpha ln\left(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2+1}\right) - 2\sqrt{4\alpha^2+1} + 2 + \frac{1}{4}\int_0^{\alpha}(e^{x} - e^{-x})dx$

$= \alpha ln\left(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2+1}\right) - 2\sqrt{4\alpha^2+1} + 2 + \left[\frac{1}{4}e^{x} + \frac{1}{4}e^{-x}\right]_0^{\alpha}$

$= \alpha ln\left(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2+1}\right) - 2\sqrt{4\alpha^2+1} + 2 + \frac{1}{4}e^{\alpha} + \frac{1}{4}e^{-\alpha} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$

PARTIE C :

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}$.

1) Montrons que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on Précisera.

$\varphi(x) = \frac{g(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{4}(e^{x} - e^{-x})}{\frac{1}{4}(e^{x} + e^{-x})} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{e^{x} - \frac{1}{e^{x}}}{e^{x} + \frac{1}{e^{x}}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

$lim\ \varphi(x) = lim\ \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = lim\ \frac{e^{2x}}{e^{2x}} = 1$

$x \to +\infty \quad x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

$lim\ \varphi(x) = lim\ \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{0-1}{0+1} = \frac{-1}{1} = -1$

$x \to -\infty \quad x \to -\infty$

$\varphi(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ => $\varphi'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ => $\forall\, x \in \mathbb{R}\,;\ \varphi'(x) > 0$

D'où le tableau de variation de φ est le suivant :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$\varphi'(x)$	$+$
$\varphi(x)$	-1 ⟶ 1

D'après le tableau de variation φ : φ est définie ; continue et strictement croissante de $]-\infty\ ;\ +\infty[$ vers $]-1\ ;\ 1[$.

D'où la fonction φ admet une fonction réciproque $\varphi^{-1}(x)$ définie sur l'intervalle

$J =]-1\ ;\ 1[$.

2) On pose $h(x) = \varphi^{-1}(x)$. Donnons les expressions de $h(x)$ et $h'(x)$.

$\varphi(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. Posons $\varphi(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = y \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = y(e^{2x}+1) \Leftrightarrow$

$e^{2x} - 1 = ye^{2x} + y \Leftrightarrow e^{2x} - ye^{2x} = 1 + y \Leftrightarrow e^{2x}(1-y) = 1 + y$ => $e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$ =>

$2x = ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$ => $x = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = ln\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$ => $\varphi^{-1}(x) = ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

D'où $h(x) = \varphi^{-1}(x) = ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

$h(x) = ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ => $h'(x) = \frac{\frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \frac{1}{1-x^2}$

D'où $h'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

3) Etudions puis représentons le fonction h sur $]-1\ ;\ 1[$.

$lim\ h(x) = lim\ ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = -\infty$

$x \to -1^+ \quad x \to -1^+$

$lim\ h(x) = lim\ ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = ln\sqrt{\frac{2}{0^+}} = +\infty$

$x \to 1^- \quad x \to 1^+$

$h(x) = ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ => $h'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

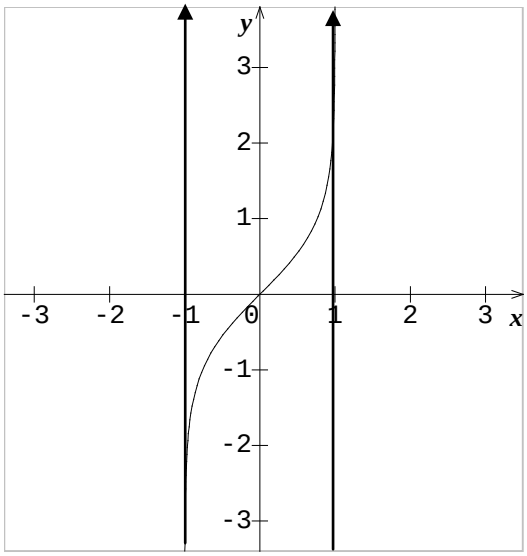
Alors le signe de $h'(x)$ dépend du signe de $1 - x^2$. Posons $1 - x^2 = 0$ => $x^2 = 1$

=> $x = -1$ ou $x = 1$

D'où le tableau de variation de h est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

La représentation de la courbe (Ch) sur $]-1\ ;\ 1[$ est le suivant :



Fonction Exponentielle -Fonction puissance

OBJECTIFS :

Ce terme vise à :

• Définir et étudier les fonctions exponentielles et puissances ;

• Mettre en place les primitives de fonctions de la forme u' e^u et u'u^α ($\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$).

Commentaires

Les fonctions exponentielles et les fonctions puissances complètent les fonctions étudiées en Terminale. Leurs champs d'application est vaste on les retrouve aussi bien en biologie qu'en science physique, notamment pour résous les équations différentielles.

Volume horaire : 10 heures

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
• Fonction exponentielle népérienne : - définitions, notation, propriétés, représentation graphique ; - limite de référence ; - primitive de u' x e^u. • Définition de la fonction exponentielle de base a ($a \in IR^{*+} - \{-1\}$). • Définition de la fonction puissance d'exposant réel non nul. • Primitive de u' xu^m ($m \in IR - \{-1\}$). • Croissance comparée des fonctions logarithme népérien, exponentielle et puissances. • Dérivées de fonctions du type expo, u^α ($\alpha \in IR^*$).	• Etant donnée une fonction faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne ou une fonction puissance, l'étudier et la Représente graphiquement. • Résous des équations ou inéquations faisant intervenir des fonctions exponentielles. • Détermine les primitives d'une fonction du type : - u'x u^m ($m \in IR - \{-1\}$) ; - u' x e^u. • Utilise les limites sur la croissance comparée pour Calcule d'autres limites.

Remarques et suggestions

La fonction exponentielle népérienne est définie comme la bijection réciproque de la fonction In. Ses propriétés se déduisent naturellement de celles de la fonction In.

La notation $\exp(x) = e^x$ et pour tout x appartenant à IR est à la généralisation de $\exp(r) = e^r$ pour tout r appartenant à Q, qu'on peut justifier.

L'étude des fonctions exponentielles de base a et des fonctions puissances découlent irectement de l'étude de la fonction exponentielle népérienne.

On habituera les élèves à retrouver les limites et les dérivées des fonctions exponentielles de base a et puissances à partir des définitions de ces fonctions.

L'étude générale des fonctions $\exp_a$ n'est pas à traiter de manière théorique mais pourra être abordé sur quelques exemples ($0< a < 1 \; et \; a > 1$).

Il en est de même pour les fonctions $x \mapsto x^\alpha$. Ce sera l'occasion d'étudier des cas correspondant à des valeurs variées de α et de faire le lien avec les notations $\sqrt[n]{x}$ et $x^{p/q}$.

Les fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ sont définies sur $]0 ; +\infty[$ mais, pour certaines valeurs de α ($\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, etc.), elles peuvent être définies sur un ensemble contenant $]0 ; +\infty[$ (par exemple IR, IR* ou $[0 ; +\infty[$).

1- Définition :

La fonction exponentielle noté « **expo$x$** » ou « e^x » est la fonction réciproque de la fonction lnx définie sur $\mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$

2- Ensemble de définition de la fonction exponentielle :

Si $f(x) = e^x$ alors $Df = \mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$

NB :

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ (Car la fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction logarithme Népérien. Elle prend ces valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$).

3- Propriétés remarquables :

P$_1$: $e^{a\times b} = (e^a)^b$ **P$_2$** : $e^{a+b} = e^a \times e^b$

P$_3$: $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ **P$_4$:** $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

P$_5$:$(e^a)^n = e^{na}$ **P$_6$**: $e^{lna} = lne^a = a$

P$_7$: $e^0 = 1$ et $e^1 =$ e **P$_8$** : $lne = e^{ln\,1} = 1$

P$_9$: $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ **P$_{10}$:** $e^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b$ et $e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$

P$_{11}$: $e^a = b \Leftrightarrow a = lnb$

4- Limites remarquables :

$lim\ e^x = 0$ et $x \to -\infty$ $lim\ e^x = +\infty$ $x \to +\infty$

$lim\ xe^x = 0$ et $x \to -\infty$ $lim\ x^n e^x = 0$ $x \to -\infty$

$lim\ xe^x = +\infty$ et $x \to +\infty$ $lim\ x^n e^x = +\infty$ $x \to +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^n} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ et pour $a > 0$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a^n}{\ln x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty$

5- <u>Dérivées remarquables</u> :

- $Si\ f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
- $Si\ f(x) = e^{(ax+b)} \Rightarrow f'(x) = ae^{(ax+b)}$
- $Si\ f(x) = e^{[u(x)]} \Rightarrow f'(x) = u'(x)e^{[u(x)]}$

6- <u>Primitives remarquables</u> :

- $Si\ f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x + K$
- $Si\ f(x) = e^{(ax+b)} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{a}e^{(ax+b)} + K$
- $Si\ f(x) = u'(x)\, e^{[u(x)]} \Rightarrow F(x) = e^{[u(x)]} + K$

7- <u>Fonctions puissances</u> :

a)<u>Définition</u> :

On appelle fonction puissance toute fonction f_a définie sur] 0 ; $+\infty$ [par :

$\boldsymbol{f_a(x) = a^x = e^{xlna}}$, où a est un nombre réel positif et différent de 1.

b) <u>Etude des fonctions puissances :</u>

- **Dérivée** : $f_a'(x) = (e^{xlna})' = lnae^{xlna}$, d'où : $\boldsymbol{f_a'(x) = a^x ln a}$
- **Tableaux de variation** :

Les tableaux de variations suivants résument l'étude de f_a suivant les valeurs de a.

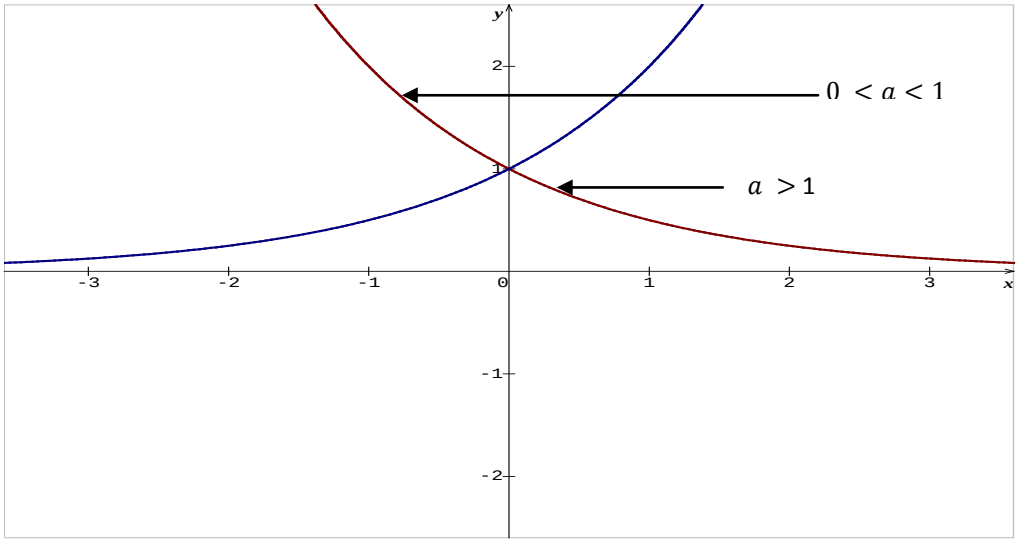
1er cas : Si $0 < a < 1$ alors on a : le tableau suivant

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f_a{}'(x)$	$-$
$f_a(x)$	$+\infty$ ↘ 0

2ème cas : Si $a > 1$ alors on a : le tableau suivant

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f_a{}'(x)$	$+$
$f_a(x)$	0 ↗ $+\infty$

- **Représentations graphiques**:



EXERCICES

Propriétés de la fonction exponentielle

1 1) En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, simplifie les expressions suivantes :

A = $e^{ln3} - e^{-ln3} + e^{\frac{1}{3}ln8} - e^{-ln\frac{1}{4}}$; B = $e^{2ln5} - e^{-ln3} + ln\left(e^{\sqrt{2}} \times e^{\sqrt{8}}\right)$

C = $-2lne^3 + ln\sqrt{e} - ln(lne) + 3e^{ln\left(-ln\frac{1}{e}\right)}$; D = $e^{ln\sqrt{e\sqrt{e}}}$

2) En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $e^x = 3$; **b)** $e^{-x} = 2$; **c)** $e^{2x} = \frac{1}{2}$; **d)** $e^{3x+1} = e^{-x+3}$; ***e)*** $e^{2-3x} = e^{-x^2}$

f) $3^x = 4$; ***g)*** $4^{-x} = 3$; ***h)*** $7^{5x} = -3$; ***i)*** $\frac{e^x+1}{e^x-4} = \frac{1}{2}$; ***j)*** $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = 1$; ***k)*** $\frac{e^{2x}}{e^x+1} = \frac{1}{e^{-x}}$

l) $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$

3) En utilisant les propriétés logarithmiques, résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $e^{-2x} \geq 4$; **b)** $e^{-x} \leq 6$; **c)** $e^{2x} > \frac{1}{2}$; **d)** $e^{3x+1} < e^{-x+3}$; ***e)*** $e^{2-3x} \geq e^{-x^2}$

f) $3^x < 4$; ***l)*** $e^{2x} + 5e^x + 4 < 0$

2 Soit la fonction polynôme définie par $f(x) = x^3 - 4x^2 - 29x - 24$

1) Calcule $f(-1)$ et $f(-3)$ puis en déduis une factorisation de f sous forme d'un produit de 3 facteurs du premier degré.

2) Résous l'équation $f(x) = 0$

3) En déduis la résolution de l'équation :$e^{2x} - 4e^x - 29 - 24e^{-x} = 0$ et de l'équation :

$2^{3x} - 4 \times 2^{2x} - 29 \times 2^x - 24 = 0$

3 En utilisant les propriétés logarithmiques, résous dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ les systèmes suivantes :

a- $\begin{cases} 2e^x - e^y = 15 \\ e^x + 2e^y = 40 \end{cases}$; **b-** $\begin{cases} e^x \times e^y = 8 \\ e^x + e^y = 6 \end{cases}$; **c-** $\begin{cases} 3e^x - 2lny = 13 \\ 5e^x + 3lny = 9 \end{cases}$

d- $\begin{cases} 2^x - 2^{2-y} = 0 \\ 2^x - 2^{2+y} = 0 \end{cases}$; **e-** $\begin{cases} 3^x \times 3^{2y-1} = 1 \\ 3^{x+2} \times 3^y = 3 \end{cases}$

Application des limites de la fonction exponentielle

4 Calcule la limite des fonctions suivantes aux bornes de leur ensemble de définitions :

1) $f(x) = e^{-x^2+2x-3}$; **2)** $f(x) = e^{\sqrt{x-3}}$; **3)** $f(x) = e^{\frac{3}{-x+2}}$

4) $f(x) = \frac{e^{x^2+2x}}{x+2}$; **5)** $f(x) = \frac{e^{x^2}}{-1+e^{2x-3}}$; **6)** $f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{2x}-5e^x+6}$

7) $f(x) = \frac{e^x}{(x-1)^2}$; **8)** $f(x) = ln(e^x - 1)$; **9)** $f(x) = (x+2)(e^x - 1)$

Dérivées et primitives de la fonction exponentielle

5 1) Calcule la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{-x^2-x-1}$; **b)** $f(x) = e^{\sqrt{x^2-3}}$; **c)** $f(x) = e^{\frac{3}{x-1}}$

d) $f(x) = \frac{-1}{e^{x^2+2x}}$; **e)** $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{e^{x-3}}$; **f)** $f(x) = \frac{-x^2}{e^{2x}-5e^x+6}$

g) $f(x) = ln[ln(e^x - 1)]$; ***h)*** $f(x) = (x+2)(e^x - 1)$

2) Calcule la primitive des fonctions suivantes :

a- $f(x) = e^{2x-3}$; **b-** $f(x) = \frac{3e^{2x-3}}{3-e^{2x-3}}$; **c-** $f(x) = (-x+1)\,e^{x^2-2x+5}$

d- $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$; **e-** $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x+3}}\,e^{\sqrt{2x+3}}$; ***f-*** $f(x) = \frac{5}{e^{2x-3}}$

g- $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$; *h-* $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$; ***i-*** $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$; **j)** $f(x) = 2^x$

6 1) Détermine les réels a et b pour que la fonction F soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

a) $f(x) = (2x+1)e^x$ et $F(x) = (ax+b)\,e^x$

b) $f(x) = (x+1)\,e^{\frac{-x}{2}}$ et $F(x) = (ax+b)\,e^{\frac{-x}{2}}$

2) Détermine les réels a ; b et c pour que la fonction F soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f

a) $f(x) = (x^2-1)\,e^{2x}$ et $F(x) = (ax^2+bx+c)\,e^{2x}$

b) $f(x) = (x^2-3x+1)\,e^{-3x}$ et $F(x) = (ax^2+bx+c)\,e^{-3x}$

Fonction exponentielle dans les cas pratiques

7 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 8(e^{-x} - e^{-2x})$

1) a- Démontre que pour tout réel x, on a : $f(x) = \frac{8(e^x - 1)}{e^{2x}}$.

b- Démontre que pour tout réel x, on a : $f'(x) = \frac{8(2 - e^x)}{e^{2x}}$. En déduis le signe de $f'(x)$.
c- Détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
d- Dresse le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.
e- Représente la fonction f dans un repère orthogonal.
$(Unités: 4\ cm\ sur\ ox\ \ et\ 2\ cm\ sur\ oy\ )$
2) On injecte à l'instant $t = 0$ une substance dans le sang d'un animal. A l'instant t où t est positif et exprimer en seconde, la concentration g de la substance injectée est :
$g(t) = 8(e^{-t} - e^{-2t})$. On rappelle que la « **Concentration** » est le rapport entre la quantité du liquide et la quantité du sang qui le contient.

a- En utilisant les résultats de la question 1), Donne le tableau de variation de la concentration du sang en fonction du temps t.

b- Au bout de combien de temps la concentration est elle maximale ? On Donnera une valeur approchée par défaut de ce résultat en centime de secondes.

c- Détermine les instants t_1 et t_2 pour les quels la concentration est égale au quart de sa valeur maximale.

8 On étudie l'évolution d'une colonie de bactéries placée dans une pétrie. Le nombre da bactéries en centaines est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{4e^t - 1}{e^t + 2}$ où t représente le temps en heures. On suppose que l'on peut compter le nombre de bactéries à l'unité près grâce à un compteur de radioactivité.

1) a) Calcule $f(0)$ et interpréter ce résultat.

b) Montre que $f(t) = 4 - \frac{9}{e^t + 2}$. En déduis la limite de f en $+\infty$

On appelle cette valeur, la saturation. Que peut-on en conclure pour la courbe (C) de f ?

c) L'équation $f(t) = 4$ admet-elle des solutions ? Justifier la réponse.

2) Montre que la dérivée f'de f vérifie $f'(t) = \frac{9e^t}{(e^t + 2)^2}$. En déduis le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$

3) Soit (T) la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe (C). Détermine une équation de (T).

4) Recopie et complète le tableau ci-dessous en arrondissant à10^{-2} près

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(t)$								

5) Trace (C), (T) ainsi que toutes les asymptotes éventuelles à (C).

6) Calcule à la minute près l'instant t_0 où le nombre de bactéries sera égal à 200

7) Détermine le temps au bout du quel la population de cette colonie serrait égale à 80% de sa saturation

9 **Partie A**

A l'instant $t = 0$ on injecte dans le sang d'un patient une dose de 3ml d'un médicament. On veut étudier le processus d'élimination du produit au cours des douze heures suivant l'injection. La quantité de médicament présente dans le sang en ml en fonction du temps t en heures est $f(t)$, où f est définie sur $[0\,;12]$par : $f(t) = 3e^{-0,1t}$.

1) Déterminez $f'(t)$ et justifier que pour tout $t \in [0\,;12]$, $f'(t) < 0$.

2) Dressez le tableau de variation de f sur [0 ; 12].

3) Calcule $f(2)$; $f(3)$; $f(4)$; $f(6)$ et $f(8)$. Que représente chacune de ces valeurs ?

4) Trace la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques (1cm sur (Ox) et 4 cm sur (Oy)).

Partie B

Le médicament est inefficace lorsque la quantité contenue dans le sang est inférieure à $\mathbf{1,25}\boldsymbol{ml}$, ainsi on procède à une seconde injection
1°/ Au bout de combien de temps on procèdera à la seconde injection ?
(On Déterminera ce temps graphiquement et par calcul).
2°/ On rappelle que le seuil de toxicité du médicament est de $\mathbf{4,5}\boldsymbol{ml}$.
Le patient court –il un risque d'intoxication par le médicament à la seconde injection ?

Problèmes

10 On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$

On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

<u>Partie A</u> : Etude de la fonction f et construction de la courbe (C).

1) Etudie la limite de la fonction f en $-\infty$ puis en $+\infty$
(on pourra écrire $xe^{x-1} = \frac{1}{e}xe^{x}$).

2) Démontre que la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe C en $-\infty$ et préciser la position de la courbe C par rapport à la droite Δ.

3) a) Calcule la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f.

b) Dresse le tableau de variation de la fonction f' en précisant la limite de la fonction f' en $-\infty$.

c) Calcule $f'(1)$ et en déduis le signe de $f'(x)$ pour tout réel x.

d) Dresse le tableau de variation de la fonction f.

4) Soit I l'intervalle$[1{,}9\ ;\ 2]$. Démontre que, sur I, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique, α.

5) Trace la droite Δ et la courbe C (unité graphique : 2 cm).

<u>Partie B</u> : Recherche d'une approximation de α :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par : $g(x) = 1 + ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$

1) Démontre, sur I, l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.
2) Etudie le sens de variation de la fonction g sur I et Démontre que, pour tout x appartenant à I, $g(x)$ appartient à I.
3) Démontre que, pour tout x de l'intervalle I, $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$
4) Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$

a) Démontre que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|u_n - \alpha|$

b) En déduis, en raisonnant par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\right)^n$ puis Donne la limite de la suite u_n en $+\infty$

<u>Partie C</u> : Calcul d'aire :

1) En intégrant par parties, Calcule l'intégrale J = $\int_1^{\alpha} xe^{x-1}dx$
2) a) Détermine, en unités d'aire, l'aire A de la portion de plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = \alpha$.
   b) Démontre qu'on peut écrire A = $(\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$.

11 **<u>Partie A</u>** : Résolution de l'équation différentielle $(\boldsymbol{E_1})$: $y' - 2y = xe^x$

1) Résous l'équation différentielle $(\boldsymbol{E_2})$: $y' - 2y = 0$ où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$.

a) Détermine a et b pour que u soit solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$.
b) Montre qu'une fonction v est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$si et seulement si $u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2})$.
c) En déduis l'ensemble des solutions de $(\boldsymbol{E_1})$.

3) Détermine la solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ qui s'annule en 0.

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1) Détermine la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.
2) Etudie le sens de variation de g, puis Dresse son tableau de variation.
3) On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.
a) Vérifie que 0 est l'une de ces solutions.
b) L'autre solution est appelée α. Montre que $-1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5$.
4) Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.

Partie C : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$

1) Détermine la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur).
2) Calcule $f'(x)$ et Montre que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Etudie le sens de variation de f.
3) Montre que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$, où α est défini dans la **partie B**. En déduis un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5$).
4) Etablie le tableau de variation de f.
5) Trace la courbe (C), représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (Unité graphique 2 cm).

Partie D : Calcul d'aire

1) Soit m un réel négatif, Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_m^0 f(x)dx$

2) a) Calcule $\int_m^0 xe^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.
b) En déduis $\int_m^0 f(x)dx$

3) Calcule la limite de $\int_m^0 f(x)dx$, lorsque m tend vers $-\infty$.

12 L'objet de ce problème est d'étudier, à l'aide d'une fonction auxiliaire, une fonction et de résous une équation différentielle dont elle est solution.

A) Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - ln(1 + 2e^x)$

1) Calcule $g'(x)$ et Montre que ce nombre est strictement négatif pour tout x de $\mathbb{R}$.
2) Détermine les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
3) Dresse le tableau de variation de g.
4) Donne le signe de $g(x)$.

B) Etude d'une fonction et calcul d'une aire.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x} ln(1 + 2e^x)$.

On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal

(unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1) Calcule $f'(x)$ et Montre que pour tout réel x, $f'(x) = 2e^{-2x} g(x)$.
2) a) Détermine la limite de f en $-\infty$.
   b) Détermine la limite de f en $+\infty$.

On pourra remarquer que : si on pose $X = 1 + 2e^x$, $f(x)$ s'écrit $4 \frac{X}{(X-1)^2} \times \frac{lnX}{X}$

Dresse le tableau de variation de f.

3) Trace C.
4) Soit α un réel strictement positif.

a) Calcule la valeur de l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^x}{1+2e^x} dx$

b) En déduis, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale : $J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)dx$ puis Donne une interprétation graphique de $J(\alpha)$.

C) Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^x}$

1) Vérifie que la fonction f étudiée dans la partie **B** est solution de (E).
2) Montre qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle (E ') : $y' + 2y = 0$.
3) Résous (E') et en déduis les solutions de (E).

13

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x + x - 5$

1) Etudie le sens de variation de g.
   (On ne demande pas de Détermine les limites de g, ni de construire sa courbe).
2) a) Calcule $g(0)$ et $g(2)$
c) Démonte que l'équation : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x + x - 5 = 0$ admet une solution unique α et que :
   $1{,}30 < \alpha < 1{,}31$

Partie B :

Soit la fonction numérique f définie sur $]-\infty\,;\,5[$ par : $f(x) = ln(5 - x)$.

1) Etudie le sens de variation de f. Préciser les limites de f en 5 et en $-\infty$.
2) Prouve que $f(\alpha) = \alpha$
3) a) Démontre que $\forall\, x \in [0\,;3]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

   b) En déduis que $\forall\, x \in [0\,;3]$, on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

   c) Démontre que si $0 \leq x \leq 3$, alors $0 \leq f(x) \leq 3$.

4) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (o, $\vec{i}, \vec{j}$) , d'unité graphique (3 cm), on désigne son (C) la représentation graphique de la fonction f.

a) Trace la courbe (C), puis hachurer la partie du plan formée des points de coordonnées (x, y) tel que : $\begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ on notera (S) cette partie.

b) En remarquant que, $\forall\, x \neq 5$, $\frac{x}{x-5} = 1 + \frac{5}{x-5}$; Montre que $\int_{\alpha}^{4} \frac{x}{x-5}dx = 4 - 6\alpha$

c) Prouve que l'aire A de la partie (S) en cm^2est donnée par A = $-\alpha^2 + 6\alpha - 4$.
(On Utilisea une intégration par partie).

14 On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$

A) Etude de la fonction f et tracé de (C)

1) a) Calcule la limite de cette fonction lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Calcule la limite de cette fonction lorsque x tend vers – 1. Que peut – on en déduis pour la courbe (C) ?

2) Calcule $f'(x)$ et Montre que son signe est celui de $\frac{x-1}{x+1}$

3) Dresse le tableau de variation de f.

4) Trace la courbe (C), les droites d'équations respectives $x = -1$ et $y = 1$, ainsi que la tangente à cette courbe en son point d'abscisse 0.

(Unité graphique : 4 cm)

5) Montre que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[1;\,10]$.

Utilise le graphique précédent pour Donne deux nombres entiers consécutifs a et b tels que α appartient à l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

B) Calcul d'une aire

1) Soit g la fonction définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x}{x+1}$

a) Etudie le sens de variation de g dans l'intervalle [1 ; 2].

b) Montre que, pour tout x appartenant à $[1\ ;\ 2]$. on a : $1 \leq g(x) \leq 2{,}5$.

c) En déduis un encadrement de $A_1 = \int_1^2 g(x)dx$

2) Soit A_2 l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$, la courbe (C) et l'axe des abscisses.

A l'aide d'une intégration par parties, exprimer A_2 en fonction de A_1 et en déduis un encadrement de A_2.

C) Approximation d'un nombre à l'aide d'une suite

Pour cette partie, on Utilisea sans justification le fait que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution β et que celle – ci est élément de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$

Soit h la fonction définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \frac{e^x}{(1+x)^3}$

1) a) Vérifie que, pour tout x appartenant à $]-1\ ;\ +\infty[$, on a : $f'(x) = f(x) - 2h(x)$.

a) Calcule $h'(x)$.

b) En utilisant la question **a),** Calcule $f''(x)$. En déduis le sens de variation de f' dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$

2) En déduis que, pour tout x appartenant $\left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$ à, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

3) On définit la suite (u_n), pour tout nombre entier naturel n, par :
$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour $n \geq 0$

On admet que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

a) Montre que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|$

b) Montre par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $|u_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

c) En déduis une valeur approchée numérique de β à 10^{-3} près.

15 Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal$(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ (unité 5 cm).

<u>Partie A</u> :

On considère la fonction f_1 définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f'_1(x) = xe^{-x^2}$ et on appelle C_1 sa courbe représentative.

1) Montre que pour tout réel positif x, $f_1(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$ .En déduis le sens de variation de f_1.
2) Calcule la limite de f_1 en $+\infty$ (on pourra poser $u = x^2$). Interpréter graphiquement ce résultat.
3) Dresse le tableau de variation de f_1.
4) On appelle Δ la droite d'équation $y = x$. Détermine la position de C_1 par rapport à Δ.
5) Trace C_1 et Δ.

Partie B :

On considère la fonction f_3 définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f_3(x) = x^3e^{-x^2}$ et on appelle C_3 sa courbe représentative.

1) Montre que pour tout réel x positif, $f'_3(x)$ a même signe que $3 - 2x^2$. En déduis le sens de variation de f_3.
2) Détermine les positions relatives de C_1 et C_3.
3) Trace C_3 dans le même repère que C_1 .
(on admettra que C_3 a la même asymptote que C_1 en $+\infty$).
4) On appelle D la droite d'équation $y = 1$. Soit A_1 l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe C_1, les deux axes de coordonnées et la droite D et soit A_3 l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe C_3, les deux axes de coordonnées et la droite D.

a) Calcule A_1.
b) A l'aide d'une intégration par parties, Montre que $A_3 = -\frac{1}{2e} + A_1$

Partie C :

On désigne par n un entier naturel non nul et on considère la fonction f_n définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$.

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$

1) Montre que pour tout entier $n \geq 1$, f_n admet un maximum pour $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$ On note α_n ce maximum.

2) On appelle S_n le point de (C_n) d'abscisse $\sqrt{\frac{n}{2}}$. Montre que, pour tout n, (C_n) passe par S_2. Placer S_1, S_2, S_3 sur la figure.

3) Soit la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = e^{\frac{x}{2}\left[-1+ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]}$

a) Etudie le sens de variation de g.
b) Montre que pour tout entier $n \geq 1$, $\alpha_n = g(n)$. En déduis que tout point S_n, on a une ordonnée supérieure à celle de S_2.

16 Le problème est composé de l'étude d'une suite de fonctions dépendant d'un paramètre, puis de la recherche d'une valeur approchée d'une solution d'une équation du type : $f(x) = x$.

Partie A :

Pour tout entier n strictement positif, on note f_n la fonction numérique de la variable réelle définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par : $f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).

1) Détermine la fonction dérivée f'_n de f_n et donné l'expression de f'_n en fonction de f_n et de f_{n+1}.

2) Etudie les variations de f_n et ses limites éventuelles en $-\infty$; -1 et $+\infty$. (On distinguera les cas où n est pair et n est impair.)

3) Démontre que toutes les courbes (C_n) passent par un même point.

4) Détermine la limite de $\frac{f_n(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Que peut – on en déduis pour les courbes (C_n) ? Trace sur deux figures distinctes les courbes (C_1) et (C_2).

Partie B :

Pour tout entier n strictement positif, on note : $I_n = \int_0^1 f_n dx$.

1) Démontre que la suite (I_n) est décroissante et qu'elle converge.

2) Détermine en utilisant la relation de la question **A).1**), une relation entre I_n et I_{n+1}.

Partie C :

Dans cette partie, $n = 2$.

1) Démontre que l'équation $f_2(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$

Le but de cette partie est de Détermine une valeur approchée de α.

2) Etudie les variations de f'_2 dans $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ et en déduis que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$; on a : $0 \leq |f'_2(x)| \leq 0{,}25$

3) Soit (u_n), $n \in \mathbb{N}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f_2(u_n) \end{cases}$

a- Démontre, en utilisant la question **C.2**., que pour tout entier naturel n :
$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$

b- En déduis que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ et que la suite (u_n), $n \in \mathbb{N}$ converge vers α.

17 On considère la fonction f définie sur $[0\,;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$

On note (C) sa courbe dans un repère orthonormé (o, $\vec{i}, \vec{j}$) d'unité graphique (4 cm).

Partie A : (Etude d'une fonction auxiliaire).

On définie la fonction g sur $[0\,;\ +\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$

1) Etudie les variations de g, Dresse son tableau de variation. Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et que $1{,}14 < \alpha < 1{,}15$.

2) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : (Etude et tracée de f).

1) Montre que $\forall\, x \in [0\,;\ +\infty[$, on a $f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x + 1)^2}$. En déduis le sens de variation de f.

2) a) Montre que $\forall\, x \in [0\,;\ +\infty[\,;\ f(x)\frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

b) En déduis $lim\ f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

$x \to +\infty$

3) Montre que $\forall\, x \in [0\,;\ +\infty[, f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$ puis Détermine l'équation de la tangente au point $x_0 = 0$

4) Montre que $f(x) - x = \frac{(x + 1)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1}$. Etudie les variations de la fonction

T$(x) = e^x - xe^x - 1$.

Puis en déduis la position de (C) par rapport à (T). Trace (C) et (T).

Partie C :

1) Détermine une primitive F de f en utilisant la question 2) a) de la partieB.

2) Calcule en cm^2 l'aire A du domaine plan limité par (C), la tangente (T) et droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$

18 **Partie A :**

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2 + cos\ x)e^{1-x}$. On note (C)la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) > 0$.

2) a- Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $\sqrt{2}cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = cosx + sinx$

b- En déduis que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $2 + \cos x + \sin x > 0$

c- Montre que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3) a- Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $e^{1-x}. \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$.

b- En déduis les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c- Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.

4) a- Montre que, sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α.

b- Donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

5) Représente la courbe (C) sur $[0\ ;\ 4]$

Partie B :

On veut Calcule l'aire, A, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

1) Montre que : $A = 2e - 2 + \int_0^1 e^{1-t}costdt$

2) On pose : $I = \int_0^1 e^{1-t}costdt$ et $J = \int_0^1 e^{1-t}sintdt$

a- A l'aide de deux intégrations par parties, Montre que :

$I = -cos1 + e - J$ et $J = -sin\,1 + I$.

b- En déduis la valeur de I.

3) Détermine la valeur exacte de A en unités d'aire, puis Donne une valeur approchée de A à 10^{-3} près par défaut.

Partie C :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -1 - \frac{sinx}{2 + cosx}$.

1) a) Montre que la fonction h admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
b) Calcule la primitive H de la fonction h, qui prend en 0 la valeur $(1 + ln3)$.

2) a) Détermine $ln(f(x))$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b) Etudie le sens de variation de la fonction H.

c) Détermine le tableau de variations de H.

3) On appelle Γ la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$x \to 1 - x + ln(2 + cos\,x)$. (On ne demande pas de Représente Γ). On appelle Δ la droite d'équation $y = -x + 1$.

a) Etudie la position relative de Γ et de Δ.
b) Détermine les abscisses des points communs à Γ et Δ.
1) a) Etablie une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0.
b) Etudie la position relative de Γ et T.

5) Montre que la courbe Γ est contenue dans une bande du plan limitée par deux droites parallèles dont on Donnera des équations.

19 **Partie A :**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{10e^x}{e^x + 4}$. On note (C)la courbe représentative de f dans le repère

$(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ ($Unité\ graphique\ 1\ cm$).

1) a- Détermine la limite de f en $-\infty$.

En écrivant $f(x) = 10 - \frac{40}{e^x + 4}$; Détermine la limite de f en $+\infty$. Puis en déduis l'équation des asymptotes à la courbe (C)

b- Calcule la dérivée f'de la fonction f puis Dresse le tableau de variation de f.

2) Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $ln4$.

3) Trace sur un même graphique la courbe (C) ; ces asymptotes et la tangente (T).

Partie B :

Une entreprise fabrique un certain produit P. On appelle x le nombre de tonnes de produit fabriquées.

On note $C(x)$ leur coût total de fabrication, exprimé en milliers d'euros.

La fonction coût marginal, C' est la dérivée de la fonction C.

Pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, on a $C'(x) = f(x)$; où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.

De plus , on suppose qu'il n'ya pas de charges fixes, donc que $C(0) = 0$.

1) a- Montre que le coût total est donnée par $C(x) = \int_0^x f(t)dt$.

b- Exprimer $C(x)$ en fonction de x.

c- Qu'elle est le coût total de 5 tonnes de ce produit P ? On Donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à la dizaine d'euros près.

2) On appelle $C_m(x)$, le coût moyen défini, pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$ par $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$

a- Exprimer $C_m(x)$, en fonction de x.

b- Vérifie que, pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[\ ;\ C_m(x) = 10 + \frac{10ln(1+4e^{-x})}{x} - \frac{10ln5}{x}$

c- En déduis la limite de $C_m(x)$ en $+\infty$.

20 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$, unité graphique : 2 cm.

Partie A :

Soit g la fonction numérique définie sur $]-\pi\ ;0[$ par $g(x) = cox^2x + cosx - 1$.

1) a) Montrer que g est dérivable sur $]-\pi\ ;0[$ et que $g'(x) = -(1+2cosx)sinx$.

b) En déduire que $g'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \left]-\pi\ ;-\frac{2\pi}{3}\right]$ et que $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}\ ;0\right[$.

c) Dresser le tableau de variation de g.

2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \; sur]-\pi\,;0[$ et que $\beta \in \left]-\frac{\pi}{3}\,;-\frac{\pi}{4}\right[$.

b) En déduire le signe de g sur $]-\pi\,;0[$

Partie B :

Soit f la fonction numérique définie sur $]-\pi\,;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2sin(2x)}{1+cosx} + \frac{1}{2} & si\ x \in]-\pi\,;0] \\ & et \\ f(x) = 2 - \frac{3}{e^{3x}+1} & si\ x \in]0\,;+\infty[\end{cases}$$

On note (Cf)la courbe représentative de f.

1) Etudier la continuité de f en 0.
2) Etudier la dérivabilité de f en 0 puis en déduire une interprétation géométrique des résultats obtenus.
3) a) Calculer $lim\ f(x)$
$x \to +\infty$

b) Montrer que pour tout $x \in]-\pi\,;0[$, on a : $f(x) = \frac{4(1-cosx)sinxcosx}{1-cos^2x} + \frac{1}{2}$ en déduire que $lim\ f(x) = +\infty$

$x \to -\pi$

c) En déduire les asymptotes de la courbe (Cf).

4) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ puis en déduire le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.

b) Montrer que pour tout $x \in]-\pi\,;0[$, on a : $f'(x) = \frac{4g(x)}{1+cosx}$ puis en déduire le sens de variation de f
sur $]-\pi\,;0[$.

c) Dresser le tableau de variation de f sur $]-\pi\,;+\infty[$.

5) Construire la courbe (Cf), ses asymptotes et ses demi-tangentes au point d'abscisse 0.

Partie C :

On admet que tout $x \in [1{,}5\,;2]$, on a : $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$ $(\boldsymbol{R})$.

1) Soit h la fonction numérique définie sur $[1{,}5\,;2]$ par : $h(x) = f(x) - x$.
Etudier les variations de h puis en déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [1{,}5\,;2]$.

2) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 1{,}5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1{,}5\,;2]$. (On pourra utiliser la relation $(\boldsymbol{R})$**)**

b) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; on a : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$ et que :

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

c) En déduire par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

e) Déterminer un entier p tel que pour $n \geq p$ on ait : $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ puis donné à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de u_p à 10^{-3}près.

Solutions

Propriétés de la fonction exponentielle

1 1) En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, simplifions les expressions suivantes :

$A = e^{ln3} - e^{-ln3} + e^{\frac{1}{3}ln8} - e^{-ln\frac{1}{4}}$ => $A = e^{ln3} - \frac{1}{e^{ln3}} + e^{\frac{1}{3}ln2^3} - e^{ln4}$

=> $A = e^{ln3} - \frac{1}{e^{ln3}} + e^{ln2} - e^{ln4} = 3 - \frac{1}{3} + 2 - 4 = \frac{2}{3}$ => $A = \frac{2}{3}$

$B = e^{2ln5} - e^{-ln3} + ln\left(e^{\sqrt{2}} \times e^{\sqrt{8}}\right)$ => $B = e^{ln5^2} - \frac{1}{e^{ln3}} + ln\left(e^{\sqrt{2}} \times e^{2\sqrt{2}}\right)$

$= e^{ln25} - \frac{1}{e^{ln3}} + lne^{3\sqrt{2}} = 25 - \frac{1}{3} + 3\sqrt{2} = \frac{74 + 9\sqrt{2}}{3}$ => $B = \frac{74 + 9\sqrt{2}}{3}$

$C = -2lne^3 + ln\sqrt{e} - ln(lne) + 3e^{ln\left(-ln\frac{1}{e}\right)}$ => $C = -2lne^3 + lne^{\frac{1}{2}} - ln(1) + 3e^{ln(lne)}$

$= -2lne^3 + lne^{\frac{1}{2}} - ln(1) + 3e^{ln(1)} = -6 + \frac{1}{2} + 3 = -\frac{5}{2}$ => $C = -\frac{5}{2}$

$D = e^{ln\sqrt{e\sqrt{e}}}$ => $D = e^{lne^{\frac{3}{4}}} = \frac{3}{4}$ => $D = \frac{3}{4}$

2) En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $e^x = 3 \Leftrightarrow lne^x = ln3$ => $x = ln3$. Alors $S = \{ln3\}$

b) $e^{-x} = 2 \Leftrightarrow lne^{-x} = ln2$ => $-x = ln2$ => $x = -ln2$. Alors $S = \{-ln2\}$

c) $e^{2x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow lne^{2x} = ln\frac{1}{2}$ => $2x = -ln2$ => $x = -\frac{ln2}{2}$. Alors $S = \left\{-\frac{ln2}{2}\right\}$

d) $e^{3x+1} = e^{-x+3} \Leftrightarrow 3x+1 = -x+3 \Leftrightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Alors $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

e) $e^{2-3x} = e^{-x^2} \Leftrightarrow 2-3x = -x^2 \Leftrightarrow x^2-3x+2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

Alors $S = \{1\,;2\}$

f) $3^x = 4 \Leftrightarrow e^{xln3} = 4 \Leftrightarrow xln3 = ln4 \Rightarrow x = \frac{ln4}{ln3}$. Alors $S = \left\{\frac{ln4}{ln3}\right\}$

g) $4^{-x} = 3 \Leftrightarrow e^{-xln4} = 3 \Leftrightarrow -xln4 = ln3 \Rightarrow x = -\frac{ln3}{ln4}$. Alors $S = \left\{-\frac{ln3}{ln4}\right\}$

h) $7^{5x} = -3 \Leftrightarrow e^{5xln7} = -3$ " Impossible". Alors $S = \{\emptyset\}$

i) $\frac{e^x+1}{e^x-4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2e^x+2 = e^x-4 \Leftrightarrow e^x = -6$ " Impossible". Alors $S = \{\emptyset\}$

j) $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = 1 \Leftrightarrow e^x-e^{-x} = e^x+e^{-x} \Leftrightarrow 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 0$ Impossible"$\Rightarrow S = \{\emptyset\}$

k) $\frac{e^{2x}}{e^x+1} = \frac{1}{e^{-x}} \Leftrightarrow e^{2x} \times e^{-x} = e^x+1 \Leftrightarrow e^x = e^x+1 \Rightarrow 0 = 1$. Absurde $\Rightarrow S = \{\emptyset\}$

l) $e^{2x}+3e^x-4 = 0$. *Effectuons un changement de variable en posant* $X = e^x$

Alors l'équation $e^{2x}+3e^x-4 = 0$ dévient : $X^2+3X-4 = 0 \Rightarrow X_1 = 1$ et $X_2 = -4$.

- Si $X_1 = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = ln1 = 0$.
- Si $X_2 = -4 \Leftrightarrow e^x = -4$ " Impossible".

$\Rightarrow S = \{0\}$

3) En utilisant les propriétés logarithmiques, résolvons dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $e^{-2x} \geq 4 \Leftrightarrow -2x \geq ln4 \Rightarrow x \leq \frac{-ln4}{2} \Rightarrow S = \left]-\infty\,;\frac{-ln4}{2}\right]$

b) $e^{-x} \leq 6 \Leftrightarrow -x \leq ln6 \Rightarrow x \geq -ln6 \Rightarrow S = [-ln6\,;+\infty[$

c) $e^{2x} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x > ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x > -ln2 \Rightarrow x > \frac{-ln2}{2} \Rightarrow S = \left]\frac{-ln2}{2};+\infty\right[$

d) $e^{3x+1} < e^{-x+3} \Leftrightarrow 3x+1 < -x+3 \Leftrightarrow 4x < 2 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \Rightarrow S = \left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$

e) $e^{2-3x} \geq e^{-x^2} \Leftrightarrow 2-3x \geq -x^2 \Leftrightarrow x^2-3x+2 \geq 0$. Posons $x^2-3x+2 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 1$ et $x_2 = 2$. Alors $S =]-\infty\,;1\,] \cup [2\,;+\infty[$

f) $3^x < 4 \Leftrightarrow e^{xln3} < 4 \Leftrightarrow xln3 < ln4 \Rightarrow x < \frac{ln4}{ln3} \Rightarrow S = \left]-\infty\,;\frac{ln4}{ln3}\right[$

g) $e^{2x} + 5e^x + 4 < 0$. *Effectuons un changement de variable en posant* $X = e^x$

Alors l'inéquation $e^{2x} + 5e^x + 4 < 0$ dévient : $X^2 + 5X + 4 < 0$. Posons $X^2 + 5X + 4 = 0$

=> $X_1 = -1$ et $X_2 = -4$.

- Si $X_1 = -1 \Leftrightarrow e^x = -1$ " Impossible".
- Si $X_2 = -4 \Leftrightarrow e^x = -4$ " Impossible".

Alors $S = \{ \emptyset \}$

2 Soit la fonction polynôme définie par $f(x) = x^3 - 4x^2 - 29x - 24$

1) Calculons $f(-1)$ et $f(-3)$

$f(-1) = 0$ et $f(-3) = 0$

En déduisons une factorisation de f sous forme d'un produit de 3 facteurs du premier degré.

Ainsi la forme factorisée de $f(x)$ est $f(x) = (x+1)(x+3)(x-8)$

2) Résolvons l'équation $f(x) = 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3)(x-8) = 0$ => $x = -1$; $x = -3$ ou $x = 8$

=> $S = \{-1 ; -3 ; 8\}$

3) En déduisons la résolution des équations :

$e^{2x} - 4e^x - 29 - 24e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x - 29 - \frac{24}{e^x} = 0 \Leftrightarrow e^{3x} - 4e^{2x} - 29e^x - 24 = 0$

Effectuons un changement de variable en posant $X = e^x$

Alors l'équation $e^{3x} - 4e^{2x} - 29e^x - 24 = 0$ dévient : $X^3 - 24X^2 - 29X - 24 = 0$

D'après 2), on a : $X = -1$; $X = -3$ ou $X = 8$

- Si $X = -1 \Leftrightarrow e^x = -1$ impossible
- Si $X = -3 \Leftrightarrow e^x = -3$ impossible
- Si $X = 8 \Leftrightarrow e^x = 8$ => $x = ln8$

$S = \{ ln8 \}$

$2^{3x} - 4 \times 2^{2x} - 29 \times 2^x - 24 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^3 - 4(2^x)^2 - 29 \times 2^x - 24 = 0$. Posons $X = 2^x$

=> $X^3 - 24X^2 - 29X - 24 = 0$

D'après 2), on a : $X = -1$; $X = -3$ ou $X = 8$

- Si $X = -1 \Leftrightarrow 2^x = -1 \Leftrightarrow e^{xln\,2} = -1$ impossible
- Si $X = -3 \Leftrightarrow 2^x = -3 \Leftrightarrow e^{xln\,2} = -3$ impossible
- Si $X = 8 \Leftrightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow e^{xln\,2} = 8$ => $xln2 = ln8 \Leftrightarrow xln2 = ln2^3 \Leftrightarrow xln2 = 3ln2$ => $x = 3$

Alors $S = \{3\}$

3 En utilisant les propriétés logarithmiques, résolvons dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ les systèmes suivantes :

a- $\begin{cases} 2e^x - e^y = 15 \\ e^x + 2e^y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4e^x - 2e^y = 30 \\ e^x + 2e^y = 40 \end{cases}$

=> $5e^x = 70$ => $e^x = 14$ et $x = ln14$

Remplaçons $x = ln14$ par sa valeur dans l'équation $e^x + 2e^y = 40$. Ainsi on a :

$14 + 2e^y = 40 \Leftrightarrow e^y = 13$ => $y = ln13$

D'où $S = \{(ln14\,;ln13)\ ;\ (ln13\,;ln14)\}$

b- $\begin{cases} e^x \times e^y = 8 \\ e^x + e^y = 6 \end{cases}$ Posons $e^x = X$ et $e^y = Y$. *Alors le système dévient* $\begin{cases} X \times Y = 8 \\ X + Y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} P = 8 \\ S = 6 \end{cases}$. Ainsi ce système est solution de l'équation $X^2 - SX + P = 0$

Où S et P désignent respectivement la somme et le produit.

$X^2 - SX + P = 0 \Leftrightarrow X^2 - 6X + 8 = 0$ => $\Delta = 4$ Alors $X = 2$ ou $X = 4$

- Si $X = 2 \Leftrightarrow e^x = 2$ => $x = ln2$

  => $S = \{(ln2\,;ln4)\ ;\ (ln14\,;ln2)\}$

- Si $X = 4 \Leftrightarrow e^x = 4$ => $x = ln4$

c- $\begin{cases} 3e^x - 2lny = 13 \\ 5e^x + 3lny = 9 \end{cases}$ Effectuons un changement de variable en posant $e^x = X$ et $lny = Y$

Alors le système dévient $\begin{cases} 3X - 2Y = 13 \\ 5X + 3Y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9X - 6Y = 39 \\ 10X + 6Y = 18 \end{cases}$

$\Rightarrow 19X = 57 \Rightarrow X = 3$

Remplaçons $X = 3$ par sa valeur dans l'équation $5X + 3Y = 9$. Ainsi on a :

$15 + 3Y = 9 \Leftrightarrow 3Y = -6 \Rightarrow Y = -2$

- Si $X = 3 \Leftrightarrow e^x = 3 \Rightarrow x = ln3$

$\Rightarrow S = \{(ln3\,;e^{-2})\ ;\ (e^{-2}\,;ln3)\}$

- Si $Y = -2 \Leftrightarrow lny = -2 \Rightarrow y = e^{-2}$

d- $\begin{cases} 2^x - 2^{2-y} = 0 \\ 2^x - 2^{2+y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{xln2} - e^{(2-y)ln2} = 0 \\ e^{xln2} - e^{(2+y)ln2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -e^{xln2} + e^{(2-y)ln2} = 0 \\ e^{xln2} - e^{(2+y)ln2} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow e^{(2-y)ln2} - e^{(2+y)ln2} = 0$

$e^{(2-y)ln2} = e^{(2+y)ln2} \Leftrightarrow (2-y)ln2 = (2+y)ln2 \Leftrightarrow 2 - y = 2 + y \Leftrightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0$

Remplaçons $y = 0$ par sa valeur dans l'équation $e^{xln2} - e^{(2-y)ln2} = 0$. Ainsi on a :

$e^{xln2} - e^{2ln2} = 0 \Leftrightarrow e^{xln2} = e^{2ln2} \Leftrightarrow xln2 = 2ln2 \Rightarrow x = 2$

$\Rightarrow S = \{(2\,;0)\ ;\ (0\,;2)\}$

e- $\begin{cases} 3^x \times 3^{2y-1} = 1 \\ 3^{x+2} \times 3^y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{xln3} \times e^{(2y-1)ln3} = 1 \\ e^{(x+2)ln3} \times e^{yln3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{(x+2y-1)ln3} = 1 \\ e^{(x+y+2)ln3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} (x + 2y - 1)ln3 = ln1 \\ (x + y + 2)ln3 = ln3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 2y - 1)ln3 = 0 \\ (x + y + 2)ln3 = ln3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ x + y + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ -x - y = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow y = 2$

Remplaçons $y = 2$ par sa valeur dans l'équation $x + 2y = 1$. Ainsi on a :

$x + 4 = 1 \Rightarrow x = -3$

$\Rightarrow S = \{(-3\,;2)\ ;\ (2\,;-3)\}$

Application des limites de la fonction exponentielle

4 Calculons la limite des fonctions suivantes aux bornes de leur ensemble de définitions :

1) $f(x) = e^{-x^2+2x-3}$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty\,;\,+\infty[$

$lim\ f(x) = lim\ e^{-x^2+2x-3} = lim\ e^{-x^2} = 0$

$x \to -\infty \qquad x \to -\infty \qquad x \to -\infty$

$lim\ f(x) = lim\ e^{-x^2+2x-3} = lim\ e^{-x^2} = 0$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

2) $f(x) = e^{\sqrt{x-3}}$

$D_f = \{x\ /\ x \in \mathbb{R}\,;\, x-3 \geq 0\}$

$x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow D_f = [3\,;\,+\infty[$

$f(3) = e^{\sqrt{3-3}} = e^0 = 1$

$lim\ f(x) = lim\ e^{\sqrt{x-3}} = lim\ e^{\sqrt{x}} = +\infty$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

3) $f(x) = e^{\frac{3}{-x+2}}$

$D_f = \{x\ /\ x \in \mathbb{R}\,;\, -x+2 \neq 0\}$

$-x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow D_f =]-\infty\,;2[\cup]2\,;\,+\infty[$

$lim\ f(x) = lim\ e^{\frac{3}{-x+2}} = lim\ e^{\frac{3}{-x}} = 1$

$x \to -\infty \qquad x \to -\infty \qquad x \to -\infty$

$lim\ f(x) = lime^{\frac{3}{-x+2}} = lim\ e^{\frac{3}{-x}} = 1$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

$lim\ f(x) = \ lim\ e^{\frac{3}{-x+2}} = e^{\frac{3}{0^+}} = +\infty$

$x \to 2^-$ $\quad x \to 2^-$

$lim\ f(x) = \ lim\ e^{\frac{3}{-x+2}} = e^{\frac{3}{0^-}} = 0$

$x \to 2^+$ $\quad x \to 2^+$

4) $f(x) = \frac{e^{x^2+2x}}{x+2}$

$D_f = \{x \ / \ x \in \mathbb{R}\ ; -x+2 \neq 0\}$

$x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2 \Rightarrow D_f =]-\infty\ ; -2[\cup]-2\ ;\ +\infty[$

$lim\ f(x) = \ lim\ \frac{e^{x^2+2x}}{x+2} = \ lim\ \frac{e^{x^2}}{x} = +\infty$

$x \to -\infty$ $\quad x \to -\infty$ $\quad x \to -\infty$

$lim\ f(x) = \ lim\ \frac{e^{x^2+2x}}{x+2} = \ lim\ \frac{e^{x^2}}{x} = +\infty$

$x \to +\infty$ $\quad x \to +\infty$ $\quad x \to +\infty$

$lim\ f(x) = \ lim\ \frac{e^{x^2+2x}}{x+2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$x \to -2^-$ $\quad x \to 2^-$

$lim\ f(x) = \ lim\ \frac{e^{x^2+2x}}{x+2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$x \to -2^+$ $\quad x \to 2^+$

5) $f(x) = \frac{e^{x^2}}{-1 + e^{2x-3}}$

$D_f = \{x \ / \ x \in \mathbb{R}\ ; -1 + \ e^{2x-3} \neq 0\}$

$-1 + \ e^{2x-3} \neq 0 \ \Rightarrow \ e^{2x-3} \neq 1 \Rightarrow 2x - 3 \neq ln1 \Leftrightarrow 2x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{3}{2}$

$\Rightarrow D_f = \left]-\infty\ ; \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}\ ;\ +\infty\right[$

$lim\ f(x) = lim \frac{e^{x^2}}{-1 + e^{2x-3}} = lim \frac{e^{x^2}}{e^{2x}} = lim \frac{e^x}{e^2} = 0$

$x \to -\infty \quad x \to -\infty \quad x \to -\infty \quad x \to -\infty$

$lim\ f(x) = lim \frac{e^{x^2}}{-1 + e^{2x-3}} = lim \frac{e^{x^2}}{e^{2x}} = lim \frac{e^x}{e^2} = +\infty$

$x \to +\infty \quad x \to +\infty \quad x \to +\infty \quad x \to +\infty$

$lim\ f(x) = lim \frac{e^{x^2}}{-1 + e^{2x-3}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$x \to \frac{3^-}{2} \quad x \to \frac{3^-}{2}$

$lim\ f(x) = lim \frac{e^{x^2}}{-1 + e^{2x-3}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$x \to \frac{3^+}{2} \quad x \to \frac{3^+}{2}$

6) $f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{2x} - 5e^x + 6}$

$D_f = \{x / x \in \mathbb{R}; e^{2x} - 5e^x + 6 \neq 0\}$

$e^{2x} - 5e^x + 6 \neq 0. Effectuons\ un\ changement\ de\ variable\ en\ posant\ X = e^x$

Alors l'équation $e^{2x} - 5e^x + 6 \neq 0$ dévient : $X^2 - 5X + 6 \neq 0$ => $X_1 \neq 2$ et $X_2 \neq 3$.

- Si $X_1 \neq 2 \Leftrightarrow e^x \neq 2 \Leftrightarrow x \neq ln2$.
- Si $X_2 \neq 3 \Leftrightarrow e^x \neq ln3$

=> $D_f =]-\infty; ln2[\cup]ln2; ln3[\cup]ln3; +\infty[$

$lim\ f(x) = lim \frac{e^{x^2}}{e^{2x} - 5e^x + 6} = lim \frac{e^{x^2}}{e^{2x}} = lim \frac{e^x}{e^2} = 0$

$x \to -\infty \quad x \to -\infty \quad x \to -\infty \quad x \to -\infty$

$lim\ f(x) = lim \frac{e^{x^2}}{e^{2x} - 5e^x + 6} = lim \frac{e^{x^2}}{e^{2x}} = lim \frac{e^x}{e^2} = +\infty$

$x \to +\infty \quad x \to +\infty \quad x \to +\infty \quad x \to +\infty$

$lim\ f(x) = lim\ \frac{e^{x^2}}{e^{2x} - 5e^x + 6} = \frac{e^{ln^2 2}}{0^+} = +\infty$

$x \to ln2^-$ $x \to ln2^-$

$lim\ f(x) = lim\ \frac{e^{x^2}}{e^{2x} - 5e^x + 6} = \frac{e^{ln^2 2}}{0^-} = -\infty$

$x \to ln2^+$ $x \to ln2^+$

$lim\ f(x) = lim\ \frac{e^{x^2}}{e^{2x} - 5e^x + 6} = \frac{e^{ln^2 3}}{0^-} = -\infty$

$x \to ln3^-$ $x \to ln3^-$

$lim\ f(x) = lim\ \frac{e^{x^2}}{e^{2x} - 5e^x + 6} = \frac{e^{ln^2 3}}{0^+} = +\infty$

$x \to ln3^+$ $x \to ln3^+$

7) $f(x) = \frac{e^x}{(x-1)^2}$

$D_f = \{x / x \in \mathbb{R}; (x-1)^2 \neq 0\}$

$(x-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

$lim\ f(x) = lim\ \frac{e^x}{(x-1)^2} = lim\ \frac{e^x}{x^2} = 0$

$x \to -\infty$ $x \to -\infty$ $x \to -\infty$

$lim\ f(x) = lim\ \frac{e^x}{(x-1)^2} = lim\ \frac{e^{x^2}}{x^2} = +\infty$

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$

$lim\ f(x) = lim\ \frac{e^x}{(x-1)^2} = \frac{e}{0^+} = +\infty$

$x \to 1^-$ $x \to 1^-$

$lim\ f(x) = lim\ \frac{e^x}{(x-1)^2} = \frac{e}{0^+} = +\infty$

$x \to 1^+$ $x \to 1^+$

8) $f(x) = ln(e^x - 1)$

$D_f = \{x / x \in \mathbb{R}; e^x - 1 > 0\}$

$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 <=> x > ln1 => x > 0$

$=> D_f =]0\ ;\ +\infty[$

$lim\ f(x) = lim\ ln(e^x - 1) = -\infty$

$x \to 0 \qquad x \to 0$

$lim\ f(x) = lim\ ln(e^x - 1) = +\infty$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

9) $f(x) = (x+2)(e^x - 1)$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$

$lim\ f(x) = lim\ (x+2)(e^x - 1) = lim\ xe^x = 0$

$x \to -\infty \qquad x \to -\infty \qquad x \to -\infty$

$lim\ f(x) = lim(x+2)(e^x - 1) = lim\ xe^x = +\infty$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

Dérivées et primitives de la fonction exponentielle

5 1) Calculons la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{-x^2-x-1}$ => $f'(x) = (-2x-1)e^{-x^2-x-1}$

b) $f(x) = e^{\sqrt{x^2-3}}$ => $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}} e^{\sqrt{x^2-3}}$

c) $f(x) = e^{\frac{3}{x-1}}$ => $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} e^{\sqrt{x^2-3}}$

d) $f(x) = \frac{-1}{e^{x^2+2x}}$ => $f'(x) = \frac{(2x+2)e^{x^2+2x}}{\left(e^{x^2+2x}\right)^2}$

e) $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{e^{x-3}}$ => $f'(x) = \frac{\left(-2xe^{-x^2}\right)(e^{x-3}) - (e^{x-3})\left(e^{-x^2}\right)}{(e^{x-3})^2} = \frac{-(2x+1)e^{-x^2+x-3}}{(e^{x-3})^2}$

f) $f(x) = \frac{-x^2}{e^{2x} - 5e^x + 6}$ => $f'(x) = \frac{(-2x)(e^{2x} - 5e^x + 6) - (2e^{2x} - 5e^x)(-x^2)}{(e^{2x} - 5e^x + 6)^2}$

$= \frac{-x[(2-2x)e^{2x} - 5(2+x)e^x + 12]}{(e^{2x} - 5e^x + 6)^2}$ => $f'(x) = \frac{-x[(2-2x)e^{2x} - 5(2+x)e^x + 12]}{(e^{2x} - 5e^x + 6)^2}$

g) $f(x) = ln[ln(e^x - 1)]$ => $f'(x) = \frac{\frac{1}{e^x - 1}}{ln(e^x - 1)} = \frac{1}{(e^x - 1)ln(e^x - 1)}$

h) $f(x) = (x + 2)(e^x - 1)$ => $f'(x) = e^x - 1 + e^x(x + 2) = e^x - 1 + xe^x + 2e^x$

=> $f'(x) = xe^x + 3e^x - 1$

2) Calculons la primitive des fonctions suivantes :

a- $f(x) = e^{2x-3}$ => $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x-3} + k$

b- $f(x) = \frac{3e^{2x-3}}{3 - e^{2x-3}} = \frac{-2}{-2} \times \frac{3e^{2x-3}}{3 - e^{2x-3}} = \frac{3}{-2} \times \frac{-2e^{2x-3}}{3 - e^{2x-3}}$

=> $F(x) = \frac{3}{-2} ln|3 - e^{2x-3}| + k$

c- $f(x) = (-x + 1)\, e^{x^2 - 2x+5} = \frac{-2}{-2} \times (-x + 1)\, e^{x^2 - 2x+5} = \frac{1}{-2} \times (2x - 2)\, e^{x^2 - 2x+5}$

=> $F(x) = \frac{1}{-2} \times e^{x^2 - 2x+5} + k$

d- $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = -\frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = -e^{\frac{1}{x}} + k$ => $F(x) = -e^{\frac{1}{x}} + k$

e- $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x + 3}}\, e^{\sqrt{2x + 3}} = 3 \times \frac{1}{\sqrt{2x + 3}}\, e^{\sqrt{2x + 3}}$ => $F(x) = e^{\sqrt{2x + 3}} + k$

f- $f(x) = \frac{5}{e^{2x - 3}} = 5e^{-2x+3}$ => $F(x) = -\frac{5}{2}e^{-2x+3} + k$

g- $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{2}{2} \times \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = 2\frac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}}$ => $F(x) = 2e^{\sqrt{x}} + k$

h- $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$ => $F(x) = ln|1 + e^x| + k$

i- $f(x) = 2^x = e^{xln2}$ => $F(x) = \frac{1}{ln2} \times e^{xln2} + k$

6 1) déterminons les réels a et b pour que la fonction F soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

a) $f(x) = (2x + 1)e^x$ et $F(x) = (ax + b)\, e^x$

F est une primitive de f si et seulement si $F'(x) = f(x)$. Avec $F'(x) = (ax + a + b)e^x$

$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow (ax + a + b)e^x = (2x + 1)e^x \Leftrightarrow ax + a + b = 2x + 1$ => $\begin{cases} a = 2 \\ a + b = 1 \end{cases}$

<=> $\begin{cases} a = 2 \\ 2 + b = 1 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$ => D'où $F(x) = (2x - 1)e^x + k$

b) $f(x) = (x + 1)\, e^{\frac{-x}{2}}$ et $F(x) = (ax + b)\, e^{\frac{-x}{2}}$

F est une primitive de f si et seulement si $F'(x) = f(x)$. Avec $F'(x) = \frac{1}{2}(-ax + 2a - b)e^{\frac{-x}{2}}$

$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(-ax + 2a - b)e^{\frac{-x}{2}} = (x + 1)e^{\frac{-x}{2}} \Leftrightarrow -ax + 2a - b = 2(x + 1)$

$\Leftrightarrow -ax + 2a - b = 2x + 2 <=> \begin{cases} -a = 2 \\ 2a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ -4 - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -6 \end{cases}$

=> D'où $F(x) = (-2x - 6)e^{\frac{-x}{2}} + k$

2) Déterminons les réels a ; b et c pour que la fonction F soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f

a) $f(x) = (x^2 - 1)\, e^{2x}$ et $F(x) = (ax^2 + bx + c)\, e^{2x}$

F est une primitive de f si et seulement si $F'(x) = f(x)$.

Avec $F'(x) = [2ax^2 + 2(a + b)x + b + 2c]e^{2x}$. $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow$

$[2ax^2 + 2(a + b)x + b + 2c]e^{2x} = (x^2 - 1)\, e^{2x} \Leftrightarrow 2ax^2 + 2(a + b)x + b + 2c = x^2 - 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 2(a + b) = 0 \\ b + 2c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ a + b = 0 \\ b + 2c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{4} \end{cases}$

D'où $F(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) e^{2x} + k$

b) $f(x) = (x^2 - 3x + 1)\, e^{-3x}$ et $F(x) = (ax^2 + bx + c)\, e^{-3x}$

F est une primitive de f si et seulement si $F'(x) = f(x)$.

Avec $F'(x) = [-3ax^2 + (2a - 3b)x + b - 3c]e^{-3x}$. $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow$

$[-3ax^2 + (2a - 3b)x + b - 3c]e^{-3x} = (x^2 - 3x + 1)e^{-3x} \Leftrightarrow$

$-3ax^2 + (2a - 3b)x + b - 3c = x^2 - 3x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -3a = 1 \\ 2a - 3b = -3 \\ b - 3c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{7}{9} \\ c = -\frac{8}{9} \end{cases}$

$F(x) = \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{9}x - \frac{8}{9}\right) e^{-3x} + k$

Fonction exponentielle utilisée dans les cas pratiques

7 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 8(e^{-x} - e^{-2x})$

1) a- Démontrons que pour tout réel x, on a : $f(x) = \frac{8(e^x - 1)}{e^{2x}}$.

$f(x) = 8(e^{-x} - e^{-2x})$

=> $f(x) = 8e^{-2x}(e^x - 1)$

=> $f(x) = 8\frac{1}{e^{2x}}(e^x - 1)$

=> $f(x) = \frac{8}{e^{2x}}(e^x - 1)$

=> $f(x) = \frac{8(e^x - 1)}{e^{2x}}$. D'où pour tout réel x, on a : $f(x) = \frac{8(e^x - 1)}{e^{2x}}$.

b- Démontrons que pour tout réel x, on a : $f'(x) = \frac{8(2 - e^x)}{e^{2x}}$. En déduis le signe de $f'(x)$.

$f(x) = \frac{8(e^x - 1)}{e^{2x}}$

Posons $u(x) = 8(e^x - 1)$ => $u'(x) = 8e^x$

$v(x) = e^{2x}$ => $v'(x) = 2e^{2x}$

=> $f'(x) = \frac{(8e^x)(e^{2x}) - 8(2e^{2x})(e^x - 1)}{(e^{2x})^2}$

=> $f'(x) = \frac{8e^{2x}(e^x - 2e^x + 2)}{e^{4x}} = \frac{8e^{2x}(-e^x + 2)}{e^{4x}} = \frac{8(2 - e^x)}{e^{2x}}$

D'où pour tout réel x, on a : $f'(x) = \frac{8(2 - e^x)}{e^{2x}}$

c- Déterminons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 8(e^{-x} - e^{-2x}) = \lim\limits_{x \to -\infty} 8e^{-x}(1 - e^{-x}) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{8(e^x - 1)}{e^{2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{8e^x}{e^{2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{8}{e^x} = 0$

d- Dressons le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.

$f'(x) = \frac{8(2 - e^x)}{e^{2x}}$

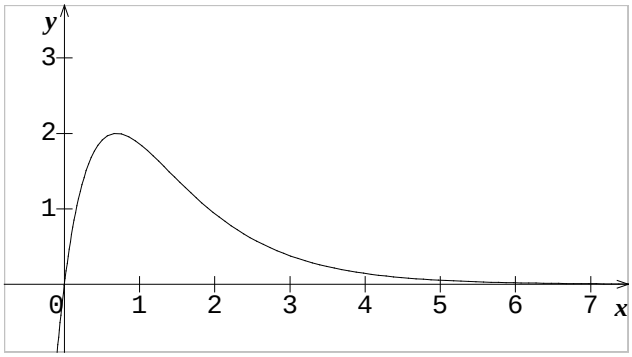
$\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} > 0$ Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $8(2 - e^x)$.

Posons $8(2 - e^x) > 0 \Leftrightarrow 2 - e^x > 0 \Leftrightarrow -e^x > -2 \Leftrightarrow e^x < 2$ => $x < ln2$

Alors $\forall x \in]-\infty ; ln2[; f'(x) > 0$ et $\forall x \in]ln2 ; +\infty[; f'(x) > 0$

x	$-\infty$		$ln2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0

e- Représentation de la fonction f dans un repère orthogonal.



2) On injecte à l'instant $t = 0$ une substance dans le sang d'un animal. A l'instant t où t est positif et exprimer en seconde, la concentration g de la substance injectée est :
$g(t) = 8(e^{-t} - e^{-2t})$. On rappelle que la ≪ **Concentration** ≫ est le rapport entre la quantité du liquide et la quantité du sang qui le contient.

a- En utilisant les résultats de la question 1), donnons le tableau de variation de la concentration du sang en fonction du temps t.

t	0		$ln2$		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	↗	2	↘	0

b- Déterminons le temps au bout du quel la concentration est elle maximale

D'après le tableau ci-dessus la concentration est elle maximale à l'instant $t = ln2 = 0{,}69\ s$

c- Détermine les instants t_1 et t_2 pour les quels la concentration est égale au quart de sa valeur maximale
La concentration est égale au quart de sa valeur maximale si et seulement si

$g(t) = \frac{1}{4} \times 2 \Leftrightarrow 8(e^{-t} - e^{-2t}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-t} - e^{-2t} = 0{,}06 \Leftrightarrow e^{-t} - e^{-2t} - 0{,}06 = 0 \Leftrightarrow$

$-e^{-2t} + e^{-t} - 0{,}06 = 0$. Ainsi effectuons un changement en posant $e^{-t} = X$

$\Rightarrow X^2 - X + 0{,}06 = 0$; $\Delta = 0{,}76$. Alors $X_1 = 0{,}06$ et $X_2 = 0{,}93$

- Si $X = 0{,}06 \Leftrightarrow e^{-t} = 0{,}06 \Leftrightarrow -t = ln0{,}06 \Leftrightarrow -t = -2{,}81$ => $t = 2{,}81\ s$
- Si $X = 0{,}93 \Leftrightarrow e^{-t} = 0{,}93 \Leftrightarrow -t = ln0{,}93 \Leftrightarrow -t = -0{,}07$ => $t = 0{,}07\ s$

D'où $t_1 = 0{,}07\ s$ ou $t_2 = 2{,}81\ s$

8 On étudie l'évolution d'une colonie de bactéries placée dans une pétrie. Le nombre de bactéries en centaines est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{4e^t - 1}{e^t + 2}$ où t représente le temps en heures. On suppose que l'on peut compter le nombre de bactéries à l'unité près grâce à un compteur de radioactivité.

1) a) Calculons $f(0)$

$f(0) = \frac{4e^0 - 1}{e^0 + 2} = \frac{4 - 1}{1 + 2} = \frac{3}{3} = 1$

Interprétation du résultat : A l' instant $t = 0$, on a une centaine de bactéries

b) Montrons que $f(t) = 4 - \frac{9}{e^t + 2}$.

$f(t) = \frac{4e^t - 1}{e^t + 2}$. En effectuant la division Euclidienne de $4e^t - 1$ par $e^t + 2$, on obtient bien :

$f(t) = 4 - \frac{9}{e^t + 2}$.

En déduisons la limite de f en $+\infty$

$lim\ f(t) = lim\ 4 - \frac{9}{e^t + 2} . = lim\ 4 - \frac{9}{e^t} = 4 - 0 = 4$
$t \to +\infty \qquad t \to +\infty \qquad t \to +\infty$

Si cette valeur est la saturation, alors on peut conclure que pour la courbe (C) admet 4 centaines de bactéries comme valeur seille.

c) Vérifions si l'équation $f(t) = 4$ admet-elle des solutions

$f(t) = 4 \Leftrightarrow 4 - \frac{9}{e^t + 2} = 4 \Leftrightarrow -\frac{9}{e^t + 2} = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{e^t + 2} = 0 \Leftrightarrow 9 = 0\ (absurde)$.

Alors l'équation $f(t) = 4$ n'admet pas de solution.

2) Montrons que la dérivée f'de f vérifie $f'(t) = \frac{9e^t}{(e^t + 2)^2}$.

$f(t) = \frac{4e^t - 1}{e^t + 2}$

Posons $u(t) = 4e^t - 1$ => $u'(t) = 4e^t$

$v(t) = e^t + 2$ => $v'(t) = e^t$

$=> f'(t) = \frac{(4e^t)(e^t+2) - (e^t)(4e^t-1)}{(e^t+2)^2} = \frac{e^t(4e^t+8-4e^t+1)}{(e^t+2)^2} = \frac{e^t \times 9}{(e^t+2)^2} = \frac{9e^t}{(e^t+2)^2}$

En déduisons le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$

$f'(t) = \frac{9e^t}{(e^t+2)^2} > 0$. Alors pour tout $t \in [0; +\infty[$, f est strictement croissante.

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

t	0		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	1	↗	4

3) Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0

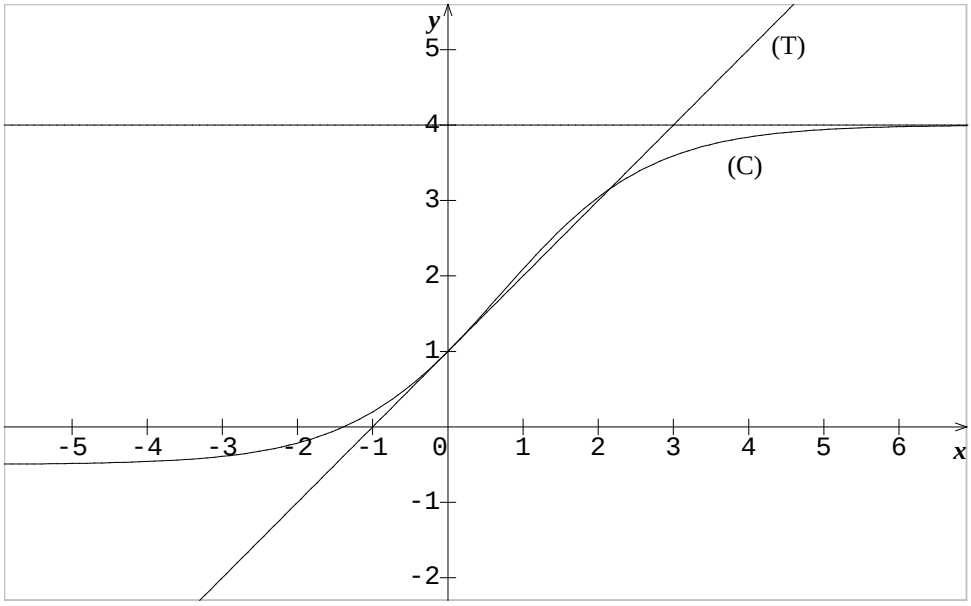
On a : (T) : $y = f'(0)(t-0) + f(0) = t \times f'(0) + f(0) = t \times 1 + 1 = t + 1$

D'où l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0 est $y = t + 1$

4) Complétons le tableau ci-dessous en arrondissant à10^{-2} près

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(t)$	1	2,09	3,04	3,59	3,84	3,94	3,97	3,99

5) Traçons (C), (T) ainsi que toutes les asymptotes éventuelles à (C).



6) Calculons à la minute près l'instant t_0 où le nombre de bactéries sera égal à 200

Le nombre de bactéries sera égal à 200 si et seulement si $f(t) = 2 \Leftrightarrow \frac{4e^t - 1}{e^t + 2} = 2$

$\Leftrightarrow 4e^t - 1 = 2(e^t + 2) \Leftrightarrow 4e^t - 1 = 2e^t + 4 \Leftrightarrow 2e^t = 5 \Leftrightarrow e^t = \frac{5}{2} \Leftrightarrow t = ln\left(\frac{5}{2}\right)$

$=> t = 0{,}91$ soit 91 $minutes\ près$

Alors la minute près où le nombre de bactéries sera égal à 200 est $t_0 = 60\ mn$

7) Déterminons le temps au bout du quel la population de cette colonie serrait égale à 80% de sa saturation.

La population de cette colonie serrait égale à 80% de sa saturation si et seulement si

$f(t) = 4 \times 80\% \Leftrightarrow f(t) = 4 \times \frac{80}{100} \Leftrightarrow f(t) = 3{,}2 \Leftrightarrow \frac{4e^t - 1}{e^t + 2} = 3{,}2 \Leftrightarrow$

$4e^t - 1 = 3{,}2(e^t + 2) \Leftrightarrow 4e^t - 1 = 3{,}2e^t + 6{,}4 \Leftrightarrow 0{,}8e^t = 7{,}4 \Leftrightarrow e^t = \frac{7{,}4}{0{,}8}$

$\Leftrightarrow e^t = 9{,}25 \Leftrightarrow t = ln(9{,}25) \Leftrightarrow t = 2{,}22$ Soit 2 h 22 min

9 Partie A

A l'instant $t = 0$ on injecte dans le sang d'un patient une dose de $3ml$ d'un médicament. On veut étudier le processus d'élimination du produit au cours des douze heures suivant l'injection. La quantité de médicament présente dans le sang en ml en fonction du temps t en heures est $f(t)$, où f est définie sur $[0\,;12]$ par : $f(t) = 3e^{-0{,}1t}$.

1) Déterminons $f'(t)$ puis justifions que pour tout $t \in [0\,;12]$, $f'(t) < 0$.

$f(t) = 3e^{-0{,}1t}$ $=> f'(t) = -0{,}1 \times 3e^{-0{,}1t} = -0{,}3e^{-0{,}1t}$

Pour tout $t \in [0\,;12]$, $e^{-0{,}1t}) > 0$ alors $f'(t) = -0{,}3e^{-0{,}1t} < 0$.

2) Dressons le tableau de variation de f sur [0 ; 12].

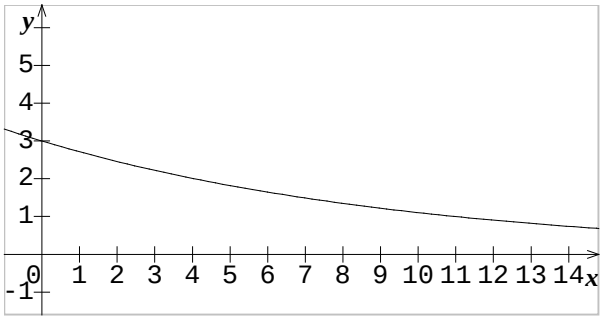
t	0		12
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	3	↘	$3e^{-1.2}$

3) Calcule $f(2)$; $f(3)$; $f(4)$; $f(6)$ et $f(8)$.

t	2	3	4	6	8
$f(t)$	2,45	2,22	2,01	1,64	1,34

Ainsi chacune de ces valeurs obtenues représente la quantité de médicament présente dans le sang en ml en fonction du temps t

4) Traçons la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques (1cm sur (Ox) et 4 cm sur (Oy)).



Partie B

Le médicament est inefficace lorsque la quantité contenue dans le sang est inférieure à $\mathbf{0,25}\boldsymbol{ml}$, ainsi on procède à une seconde injection

1°/ Déterminons le temps au bout du quel on procèdera à la seconde injection

On procèdera à la seconde injection si et seulement si $\boldsymbol{f(t) < 1,253} \Leftrightarrow \mathbf{e^{-0,1t} < 0,253}$

$\Leftrightarrow \mathbf{-0,1t < ln(0,253)} \Leftrightarrow \mathbf{-0,1t < -1,37} \Leftrightarrow \mathbf{0,1t > 1,37} \Leftrightarrow \mathbf{t > 13,7}$

D'où on peut procéder à la seconde injection à partir de $\mathbf{13}\boldsymbol{h}\ \mathbf{7}\boldsymbol{min}$

2°/ On rappelle que le seuil de toxicité du médicament est de $\mathbf{4,5}\boldsymbol{ml}$.

Vérifions si le patient court un risque d'intoxication par le médicament à la seconde injection
Pour cela calculons $\boldsymbol{f(13,7)}$
$\boldsymbol{f(13,7)} = 0{,}76\ ml$

Or $\mathbf{0,76}\ \boldsymbol{ml} < \mathbf{4,5}\boldsymbol{ml}$. alors il n'y a aucun risque d'intoxication par le médicament à la seconde injection.

Problèmes

10 On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$

On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(0 ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$

<u>Partie A :</u> Etude de la fonction f et construction de la courbe (C).

1) Etudie la limite de la fonction f en $-\infty$ puis en $+\infty$
(on pourra écrire $xe^{x-1} = \frac{1}{e}xe^{x}$).

$lim\ f(x) = lim\ 2x + 1 - xe^{x-1} = lim\ 2x + 1 - \frac{1}{e}xe^{x} = 2(-\infty) + 1 - \frac{1}{e}(0) = -\infty$

$x \to -\infty$ $x \to -\infty$ $x \to -\infty$

$lim\ f(x) = lim\ 2x + 1 - xe^{x-1} = lim\ 2x + 1 - \frac{1}{e}xe^{x} = lim\ x\left(2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{e}e^{x}\right)$

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$

$= (+\infty)(2 - \infty) = -\infty$

2) Démontre que la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe C en $-\infty$

La droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe C en $-\infty$ si et seulement si :

$lim\ f(x) - y = lim(2x + 1 - xe^{x-1}) - (2x + 1) = lim\ 2x + 1 - \frac{1}{e}xe^{x} - 2x - 1$

$x \to -\infty$ $x \to -\infty$ $x \to -\infty$

$lim\ -\frac{1}{e}xe^{x} = 0$.

$x \to -\infty$

D'où la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe C en $-\infty$

Précisons la position de la courbe C par rapport à la droite Δ.

Pour cela, étudions le signe de $f(x) - y$. Posons $f(x) - y = -\frac{1}{e}xe^{x}$.

$\forall\ x \in D_f$, $e^{x} > 0$ Alors le signe de $f(x) - y$ dépend du signe de $-\frac{1}{e}x$. Posons $-\frac{1}{e}x = 0$

=> $x = 0$. D'où le tableau de signe de $f(x) - y$ est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	

D'après le tableau de signe :

$\forall\, x \in D_f\ ]-\infty\,;O[\,;\ f(x)-y>0$. Alors $\forall\, x \in D_f\ ]-\infty\,;O[\,;$ C est au dessus de Δ

$\forall\, x \in D_f\ ]0\,;+\infty[\,;\ f(x)-y<0$. Alors $\forall\, x \in D_f\ ]0\,;+\infty[\,;$ C est en dessous de Δ

3) a) Calcule la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f.

$f(x)=2x+1-xe^{x-1}$ => $f'(x)=2-(x+1)e^{x-1}$ et $f''(x)=-(x+2)e^{x-1}$

b) Dresse le tableau de variation de la fonction f' en précisant la limite de la fonction f' en $-\infty$.

$lim\ f'(x)=\ lim\ 2-(x+1)e^{x-1}=\ lim\ 2-xe^{x-1}-e^{x-1}=2-0-0=2$

$x\to-\infty$ $\quad x\to-\infty$ $\quad x\to-\infty$

$lim\ f'(x)=\ lim\ 2-(x+1)e^{x-1}=\ lim\ 2-(xe^{x-1}+e^{x-1})=2-(+\infty+\infty)=-\infty$

$x\to+\infty$ $\quad x\to+\infty$ $\quad x\to+\infty$

$f''(x)=-(x+2)e^{x-1}$

$\forall\, x \in D_f$, $e^{x-1}>0$ Alors le signe de$f''(x)$ dépend du signe de $-(x+2)$.

Posons $-(x+2)=0 \Leftrightarrow x=-2$

D'où le tableau de variation de$f'(x)$ est le suivant :

x	$-\infty$		-2		1	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$		
$f'(x)$	2	↗	$2+e^{-3}$	↘	0 ↘	$+\infty$

c) Calcule $f'(1)$

$f'(1)=2-2=0$

En déduisons le signe de $f'(x)$ pour tout réel x.

D'après de variation de$f'(x)$:

$\forall\, x \in\ D_f\ \ ]-\infty\,;1[\,;\ f'(x) > 0.$

$\forall\, x \in\ D_f\ \ ]1\,;+\infty[\,;\ f'(x) < 0.$

d) Dressons le tableau de variation de la fonction f.

En utilisant la question précédente, on a le tableau de variation de la fonction f suivante :

x	$-\infty$		1		α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0	↘ $-\infty$

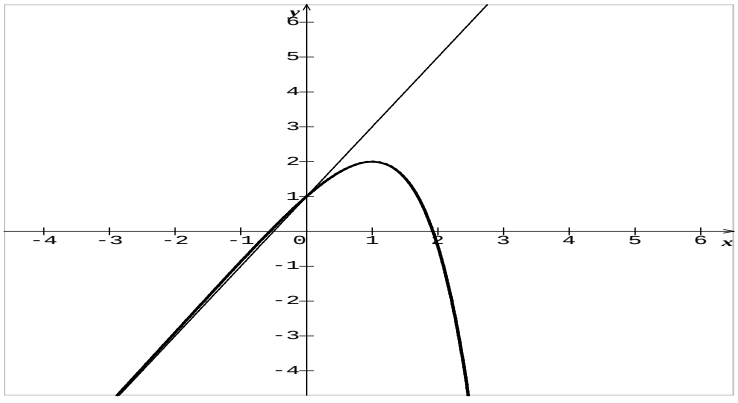
4) Soit I l'intervalle$[1{,}9\ ;\ 2]$. Démontre que, sur I, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique, α.

- D'après le tableau de variation de f , $\forall x \in\ ]\,1\,;+\infty[;\ f$ est définie, continue et strictement décroissante de l'intervalle $\ ]1\,;+\infty[$vers$]-\infty\,;2\,[$. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $f(\alpha) = 0$.

- De plus $\begin{cases} f(1{,}9) = 0{,}12 \\ f(2) = -0{,}43 \end{cases}$ => $f(1{,}9) \times f(2) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α tel que : $\alpha \in [1{,}9\ ;\ 2]$.

5) Traçons la droite Δ et la courbe C (unité graphique : 2 cm).



<u>Partie B</u> : Recherche d'une approximation de α :

Soit la fonction g définie sur I par $g(x) = 1 + ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par : $g(x) = 1 + ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$

1) Démontre, sur I, l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.

$f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$. Alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 - xe^{x-1} = 0 \Leftrightarrow xe^{x-1} = 2x + 1$

$\Leftrightarrow e^{x-1} = \frac{2x+1}{x} \Leftrightarrow e^{x-1} = 2 + \frac{1}{x}$ => $x - 1 = ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 1 + ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) = x \Leftrightarrow$

$g(x) = x$ (Ce qu'il fallait Démontre)

2) Etudions le sens de variation de la fonction g sur I.

$g(x) = 1 + ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$ => $g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{2x+1}{x}} = -\frac{1}{x^2} \times \frac{x}{2x+1} = -\frac{1}{x(2x+1)} < 0$

D'où pour tout x appartenant à l'intervalle $I = [1{,}9\ ;\ 2]$; g est strictement décroissante.

Démontre que, pour tout x appartenant à I, $g(x)$ appartient à I.

$x \in [1{,}9\ ;\ 2] \Leftrightarrow 1{,}9 \leq x \leq 2$. g étant décroissante sur I ; on a :

$g(2) \leq g(x) \leq g(1{,}9)$

$\Leftrightarrow 1{,}91 \leq g(x) \leq 1{,}96$

$\Leftrightarrow 1{,}9 \leq g(x) \leq 2$

$\Leftrightarrow 1{,}9 \leq g(x) \leq 2$ => $g(x) \in [1{,}9\ ;\ 2] \Leftrightarrow g(x) \in I$(Ce qu'il fallait Démontre)

3) Démontre que, pour tout x de l'intervalle I, $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$

On sait que : $g'(x) = -\frac{1}{x(2x+1)}$ et $1{,}9 \leq x \leq 2$ **(1)**

D'autre part si : $1{,}9 \leq x \leq 2$; Alors on a :

$$g'(1{,}9) \leq g'(x) \leq g'(2)$$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{1{,}9(2\times1{,}9+1)} \leq g'(x) \leq -\frac{1}{2(2\times2+1)}$

$\Leftrightarrow \ -\frac{1}{9{,}12} \leq g'(x) \leq -\frac{1}{10}$. En appliquant la valeur absolue à l'inégalité on a :

$\Leftrightarrow \ \left|-\frac{1}{10}\right| \leq |g'(x)| \leq \left|-\frac{1}{9{,}12}\right|$

$\Leftrightarrow \ \frac{1}{10} \leq |g'(x)| \leq \frac{1}{9{,}12}$. Or $\frac{1}{9{,}12} \approx \frac{1}{9}$. Donc l'inégalité devient : $\frac{1}{10} \leq |g'(x)| \leq \frac{1}{9}$.

=> $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$.

D'où pour tout x de l'intervalle *I* ; on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$ (Ce qu'il fallait Démontre)

4) Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$

a-Démontrons que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|u_n - \alpha|$

- D'après **<u>Partie A -4)</u>** , on a : $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + 1 - \alpha e^{\alpha - 1} = 0 \Leftrightarrow \alpha e^{\alpha - 1} = 2\alpha + 1$

$\Leftrightarrow e^{\alpha - 1} = \frac{2\alpha + 1}{\alpha} \Leftrightarrow e^{\alpha - 1} = 2 + \frac{1}{\alpha}$ => $\alpha - 1 = ln\left(2 + \frac{1}{\alpha}\right) \Leftrightarrow 1 + ln\left(2 + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha \Leftrightarrow$

$g(\alpha) = \alpha$

- D'autre part on a démontré que $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$

Ainsi d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{9}|x - \alpha|$. Or $g(\alpha) = \alpha$

=> $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{9}|x - \alpha|$. En posant $x = u_n$; on a : $|g(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{9}|u_n - \alpha|$.

Or $g(u_n) = u_{n+1}$ => $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|u_n - \alpha|$. (Ce qu'il fallait Démontre)

b-En déduisons, en raisonnant par récurrence que Pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\right)^n$

On sait que $\alpha \in [1{,}9\ ;\ 2] \Leftrightarrow 1{,}9 \leq \alpha \leq 2$ et $u_0 = 2$

Il vient que $1{,}9 - 2 \leq \alpha - u_0 \leq 2 - 2$

$\Leftrightarrow -0{,}1 \leq u_0 - \alpha \leq 0$

$\Leftrightarrow 0 \leq |u_0 - \alpha| \leq 0{,}1$

$\Leftrightarrow 0 \leq |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{10}$

$\Leftrightarrow 0 \leq |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\right)^0$

Alors la relation est vraie à l'ordre $n = 0$

Supposons la relation est vraie à l'ordre n c'est-à-dire $\forall\, n \in \mathbb{N}$; on a :

$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\right)^n$ Puis montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$ c'est-à-dire $\forall\, n \in \mathbb{N}$;

on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}$

D'après **Partie B 4) a),** on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|u_n - \alpha|$.

Par suite $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{9}\left[\frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\right)^n\right]$

D'où $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}$

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\right)^n$ (Ce qu'il fallait Démontre).

b) Etudions la convergence de la suite u puis donnons sa limite en $+\infty$.

La suite de terme général $\frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\right)^n$ est convergente $\forall\, n \in \mathbb{N}$ et converge donc vers 0.

Alors $lim\ |u_n - \alpha| = 0 \Leftrightarrow\ lim\ u_n - \alpha = 0\ \Leftrightarrow lim\ u_n = \alpha$

$n \to +\infty$ $n \to +\infty$ $n \to +\infty$

D'où la suite u_n est convergente et converge vers α

Partie C : Calcul d'aire

1) En intégrant par parties, calculons l'intégrale $J = \int_1^\alpha xe^{x-1}dx$

$J = \int_1^\alpha xe^{x-1}dx$

Posons $u(x) = x$ => $u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{x-1}$ => $v(x) = e^{x-1}$

=> $J = [xe^{x-1}]_1^\alpha - \int_1^\alpha e^{x-1}dx = [xe^{x-1}]_1^\alpha - [e^{x-1}]_1^\alpha = [xe^{x-1} - e^{x-1}]_1^\alpha$

=> $J = (\alpha - 1)e^{\alpha-1}$

2)a) Déterminons, en unités d'aire, l'aire A de la portion de plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = \alpha$.

A= $\int_1^\alpha f(x)dx = \int_1^\alpha (2x + 1 - xe^{x-1})dx = \int_1^\alpha (2x + 1)dx - \int_1^\alpha xe^{x-1}dx$

=> A = $\int_1^\alpha (2x + 1)dx - J = [x^2 + x]_1^\alpha - J = \alpha^2 - \alpha - J$. Or $J = (\alpha - 1)e^{\alpha-1}$

=> A = $\alpha^2 + \alpha - 2 - (\alpha - 1)e^{\alpha-1}$

b) Démontrons qu'on peut écrire A = $(\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$.

On sait que A = $\alpha^2 + \alpha - 2 - (\alpha - 1)e^{\alpha-1}$

D'autre part d'après **Partie B 1),** on a : $e^{x-1} = \frac{2x+1}{x} \Leftrightarrow e^{\alpha-1} = \frac{2\alpha+1}{\alpha}$

Donc A = $\alpha^2 + \alpha - 2 - (\alpha - 1)\left(\frac{2\alpha+1}{\alpha}\right) = \alpha^2 + \alpha - 2 - \frac{2\alpha^2 - \alpha - 1}{\alpha}$

$= \frac{\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha - 2\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha} = \frac{\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1}{\alpha} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha^2 - 1)}{\alpha}$

=> A = $(\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$.

D'où l'aire A de la portion de plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = \alpha$ est donné par :

A = $(\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$. (Ce qu'il fallait Démontre).

11 **<u>Partie A</u>** : Résolution de l'équation différentielle $(\boldsymbol{E_1})$: $y' - 2y = xe^x$

1) Résolvons l'équation différentielle $(\boldsymbol{E_2})$: $y' - 2y = 0$

On a $(\boldsymbol{E_2})$: $y' - 2y = 0$ => S = ke^{2x}

2) Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$.

a- Déterminons a et b pour que u soit solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$.

u est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ si et seulement si $u'(x) - 2u(x) = xe^x$ avec

$u(x) = (ax + b)e^x$ et $u'(x) = (ax + a + b)e^x$.

$u'(x) - 2u(x) = xe^x \Leftrightarrow (ax + a + b)e^x - 2(ax + b)e^x = xe^x \Leftrightarrow$

$[(ax + a + b) - 2(ax + b)]e^x = xe^x \Leftrightarrow (ax + a + b) - 2(ax + b) = x \Leftrightarrow$

$-ax + a - b = x \Rightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ -1 - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$

D'où $u(x) = -(x + 1)e^x$

b- Montrons qu'une fonction v est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ si et seulement si $u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2})$**.**

NB :

Montre que $\Leftrightarrow B$, revient à montré que $\begin{cases} A \Rightarrow B \\ et \\ B \Rightarrow A \end{cases}$

Ainsi pour Montre qu'une fonction v est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ si et seulement si $u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2})$, on montre que

$$\begin{cases} v \text{ est solution de l}'\text{équation } (\boldsymbol{E_1}) \Rightarrow u - v \text{ est solution de } (\boldsymbol{E_2}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad et \\ u - v \text{ est solution de } (\boldsymbol{E_2}) \Rightarrow v \text{ est solution de l}'\text{équation } (\boldsymbol{E_1}) \end{cases}$$

- Montrons que v est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1}) \Rightarrow u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2})$
  - u est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ si et seulement si $u'(x) - 2u(x) = xe^x$ **(1)**
  - v est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ si et seulement si $v'(x) - 2v(x) = xe^x$ **(2)**

Effectuons ainsi la différence des relations **(1)** et **(2)** :

(1) − (2) : $[u'(x) - v'(x)] - 2[u(x) - v(x)] = xe^x - xe^x$

$\Leftrightarrow (u - v)'(x) - 2(u - v)(x) = 0 \Rightarrow u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2})$

D'où v est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1}) \Rightarrow u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2})$

- Montrons que $u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2}) \Rightarrow v$ est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$

Si $u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2})$ alors on a : $(u - v)'(x) - 2(u - v)(x) = 0 \Leftrightarrow$

$[u'(x) - v'(x)] - 2[u(x) - v(x)] = 0 \Leftrightarrow u'(x) - v'(x) - 2u(x) + 2v(x) = 0 \Leftrightarrow$

$v'(x) - 2v(x) = u'(x) - 2u(x)$. Avec $u(x) = -(x + 1)e^x$ et $u'(x) = -(x + 2)e^x$.

Alors $v'(x) - 2v(x) = u'(x) - 2u(x) \Leftrightarrow$

$v'(x) - 2v(x) = [-(x + 2)e^x] - 2[-(x + 2)e^x] \Leftrightarrow v'(x) - 2v(x) = xe^x$

D'où $u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2})$ => v est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$

Conclusion : puisque $\begin{cases} v \text{ est solution de l'équation } (\boldsymbol{E_1}) \Rightarrow u - v \text{ est solution de } (\boldsymbol{E_2}) \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad et \\ u - v \text{ est solution de } (\boldsymbol{E_2}) \Rightarrow v \text{ est solution de l'équation } (\boldsymbol{E_1}) \end{cases}$

Alors une fonction v est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ si et seulement si $u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2})$. (Ce qu'il fallait Démontre).

c- En déduisons l'ensemble des solutions de $(\boldsymbol{E_1})$.

- On sait que $u(x) - v(x)$ est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_2})$
- D'autre part ke^{2x} est aussi solution de l'équation $(\boldsymbol{E_2})$

Par identification, on a : $u(x) - v(x) = ke^{2x}$ => $v(x) = u(x) - ke^{2x}$.

Or $u(x) = -(x+1)e^x$

=> $v(x) = -(x+1)e^x - ke^{2x}$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ est $v(x) = -(x+1)e^x - ke^{2x}$

3) Déterminons la solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ qui s'annule en 0.

La solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ qui s'annule en 0 est définie par $v(0) = 0 \Leftrightarrow k = -1$

D'où la solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ qui s'annule en 0 est $v(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1) Déterminons la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.

$lim\ g(x) = lim\ 2e^x - x - 2 = 2(0) - (-\infty) - 2 = +\infty$.

$x \to -\infty \qquad x \to -\infty$

$lim\ g(x) = lim\ 2e^x - x - 2 = lim\ x\left(2\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{2}{x}\right) = (+\infty)[2(+\infty) - 1 - 0]$

$x \to +\infty \quad x \to +\infty \qquad\qquad x \to +\infty$

$= (+\infty)(+\infty) = +\infty$

2) Etudions le sens de variation de g

$g(x) = 2e^x - x - 2$ => $g'(x) = 2e^x - 1$. Posons $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 > 0$ =>

$e^x > \frac{1}{2}$ => $x > ln\frac{1}{2}$ => $x > -ln2$.

Ainsi : pour les $x > -ln2$, on a : $g'(x) > 0$ et pour les $x < -ln2$, on a : $g'(x) < 0$

D'où $\forall\, x \in]-\infty\,;\, -ln2[\,;\ g$ est strictement décroissante et

$\forall\, x \in]-ln2\,;\, +\infty[\,;\ g$ est strictement croissante

Dressons le tableau de variation de g.

x	$-\infty$		α		$-ln2$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$\|$	0	$\|$		$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\|$	$-1 + ln2$	$\|$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.

a-Vérifions que 0 est l'une de ces solutions.

$g(x) = 2e^x - x - 2$ => $g(0) = 2e^0 - 0 - 2 = 2 - 2 = 0$

D'où 0 est l'une de ces solutions de l'équation $g(x) = 0$.

b-L'autre solution est appeléeα. Montrons que $-\ 1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5$.

- D'après le tableau de variation de g , $\forall x \in]-\infty\,;-ln2[;\ g$ est définie, continue et strictement décroissante de l'intervalle $]-\infty\,;-ln2[$; vers$]-1 + ln2\,;+\infty\,[$. Alors l'équation $g(x) = 0$ admet une deuxième solution α telle que $g(\alpha) = 0$.

- De plus $\begin{cases} g(-\ 1{,}6) = 0{,}003 \\ g(-\ 1{,}5) = -0{,}05 \end{cases}$ => $g(-1{,}6) \times g(-1{,}5) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ a une deuxième solution α tel que $-\ 1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5$.

4) Déterminons le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.

D'après le tableau de variation :

- $\forall x \in]-\infty\,;\alpha[\,\cup\,]0\,;+\infty[\,;g(x) > 0$.

- $\forall x \in]\alpha\ ;\ 0\ [\ ;\ g(x) < 0.$

Partie C : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)\, e^{x}$

1) Déterminons la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur).

$lim\ f(x) = lim\ e^{2x} - (x + 1)e^{x} = lim\ e^{2x} - xe^{x} - e^{x} = 0 - 0 - 0 = 0$

$x \to -\infty \qquad x \to -\infty \qquad\qquad x \to -\infty$

$lim\ f(x) = lim\ e^{2x} - (x + 1)\, e^{x} = lim\ e^{2x}\left[1 - \frac{(x-1)}{e^{x}}\right] = lim\ e^{2x}(1 - 0) = +\infty$

$x \to +\infty \quad x \to +\infty \qquad\qquad x \to +\infty \qquad\qquad x \to +\infty$

2) Calculons $f'(x)$ et Montre que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

$f(x) = e^{2x} - (x + 1)\, e^{x}$ => $f'(x) = 2e^{2x} - [e^{x} + (x + 1)\, e^{x}\ ] = 2e^{2x} - e^{x} - (x + 1)\, e^{x}$

=> $f'(x) = 2e^{2x} - e^{x} - (x + 1)\, e^{x} = e^{x}\left(2e^{x} - 1 - x - 1\right) = e^{x} \times g(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ e^{x} > 0$. Alors $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Or d'après **Partie B** 4), on a :

- $\forall x \in]-\infty\ ;\alpha[\ \cup\ ]0\ ;+\infty[\ ;g(x) > 0$ => $\forall x \in]-\infty\ ;\alpha[\ \cup\ ]0\ ;+\infty[\ ;f'(x) > 0$

- $\forall x \in]\alpha\ ;\ 0\ [\ ;\ g(x) < 0$ => $\forall x \in]\alpha\ ;\ 0\ [\ ;\ f'(x) < 0$

Etudions le sens de variation de f.

- $\forall x \in]-\infty\ ;\alpha[\ \cup\ ]0\ ;+\infty[\ ;f$ est strictement croissante.

- $\forall x \in]\alpha\ ;\ 0\ [\ ;\ f$ est strictement décroissante.

3) Montrons que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$, où α est défini dans la **partie B**.

D'après **Partie B** 3) b), on a : $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2e^{\alpha} - \alpha - 2 = 0$ => $e^{\alpha} = \frac{\alpha + 2}{2}$

D'autre part $f(x) = e^{2x} - (x + 1)\, e^{x} \Leftrightarrow f(\alpha) = (e^{x})^2 - (\alpha + 1)\, e^{\alpha}$.

Or $e^{\alpha} = \frac{\alpha + 2}{2}$ => $f(\alpha) = \left(\frac{\alpha + 2}{2}\right)^2 - (\alpha + 1) \times \frac{\alpha + 2}{2} = \left(\frac{\alpha + 2}{2}\right)^2 - \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2}$

$= \frac{\alpha^2+4\alpha+4}{4} - \frac{\alpha^2+3\alpha+2}{2} = \frac{\alpha^2+4\alpha+4-2\alpha^2-6\alpha-4}{4}$

$= \frac{-\alpha^2-2\alpha}{4} = -\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$. => $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$. (Ce qu'il fallait Démontre)

En déduisons un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5$).

$-1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5$

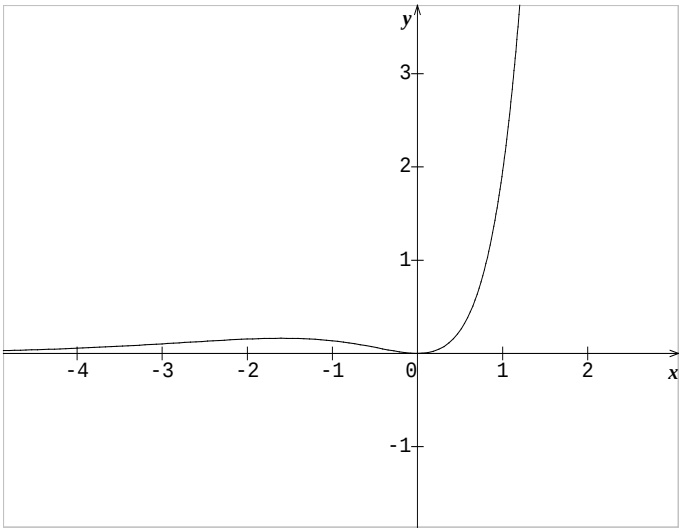
$\Leftrightarrow f(-1{,}6) \leq f(\alpha) \leq f(-1{,}5)$

$\Leftrightarrow 0{,}32 \leq f(\alpha) \leq 0{,}37$

5) Etablissons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0	↗	$+\infty$

5) Traçons la courbe (C), représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal



Partie D : Calcul d'aire

1) Soit m un réel négatif, Interprétons graphiquement l'intégrale $\int_m^0 f(x)dx$

La fonction f est positive sur $[m\,;0]$donc l'intégrale$\int_m^0 f(x)dx$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations $x = m$ et $x = 0$.

2) a-Calculons $\int_m^0 xe^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

$\int_m^0 xe^x dx$

Posons $u(x) = x$ => $u'(x) = 1$

$v'(x) = e^x$ => $v(x) = e^x$

=> $\int_m^0 xe^x dx = [xe^x]_m^0 - \int_m^0 e^x dx = [xe^x - e^x]_m^0 = (1-m)e^m - 1$

b-En déduisons $\int_m^0 f(x)dx$

$\int_m^0 f(x)dx = \int_m^0 [e^{2x} - (x+1)e^x]dx = \int_m^0 e^{2x}dx - \int_m^0 xe^x dx - \int_m^0 e^x dx$

=> $\int_m^0 f(x)dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_m^0 - [xe^x - e^x]_m^0 - [e^x]_m^0 = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_m^0 - [xe^x - e^x]_m^0 - [e^x]_m^0$

=> $\int_m^0 f(x)dx = \frac{-e^{2m} + 2me^m + 1}{2}$

3) Calculons la limite de$\int_m^0 f(x)dx$, lorsque m tend vers $-\infty$.

$lim \int_m^0 f(x)dx = lim \frac{-e^{2m} + 2me^m + 1}{2} = \frac{-(0) + 2(0) + 1}{2} = \frac{1}{2}$.

$m \to -\infty$ $m \to -\infty$

D'où $lim \int_m^0 f(x)dx = \frac{1}{2}$

$m \to -\infty$

12 L'objet de ce problème est d'étudier, à l'aide d'une fonction auxiliaire, une fonction et de résous une équation différentielle dont elle est solution.

A) Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - ln(1+2e^x)$

1) Calculons $g'(x)$ et Montre que ce nombre est strictement négatif pour tout x de $\mathbb{R}$.

$g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - ln(1+2e^x)$ => $g'(x) = \frac{e^x}{(1+2e^x)^2} - \frac{2e^x}{1+2e^x} = \frac{e^x - 2e^x(1+2e^x)}{(1+2e^x)^2}$

=> $g'(x) = -\frac{e^x(1+4e^x)}{(1+2e^x)^2}$. Puis que $\forall x \in \mathbb{R}\ \frac{e^x(1+4e^x)}{(1+2e^x)^2} > 0$ alors $-\frac{e^x(1+4e^x)}{(1+2e^x)^2} < 0$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}; g'(x) < 0$

2) Déterminons les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

$lim\ g(x) = lim\ \frac{e^x}{1+2e^x} - ln(1+2e^x) = 0 - 0 = 0$

$x \to -\infty \quad x \to -\infty$

$lim\ g(x) = lim\ \frac{e^x}{1+2e^x} - ln(1+2e^x) = \frac{1}{2} - (+\infty) = -\infty$

$x \to +\infty \quad x \to +\infty$

3) Dressons le tableau de variation de g.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	↘	$-\infty$

4) Donnons le signe de $g(x)$.

D'après le tableau de variation, $\forall x \in \mathbb{R}; g(x)$ est strictement négative .

B) Etude d'une fonction et calcul d'une aire.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x} ln(1 + 2e^x)$.

On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1) Calculons $f'(x)$ et montrons que pour tout réel x, $f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$.

$f(x) = e^{-2x}ln(1 + 2e^x)$ => $f'(x) = -2e^{-2x} \times ln(1 + 2e^x) + \frac{2e^x}{1+2e^x} \times e^{-2x}$

=> $f'(x) = 2e^{-2x}\left[\frac{e^x}{1+2e^x} - ln(1 + 2e^x)\right] = 2e^{-2x}g(x)$.

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$.

2) a) Déterminons la limite de f en $-\infty$.

$lim\ f(x) = lim\ e^{-2x}ln(1 + 2e^x) = lim\ \frac{ln(1+2e^x)}{e^{2x}} = lim\ \frac{2}{e^x} \times \frac{ln(1+2e^x)}{2e^x}$

$x \to -\infty$ $x \to -\infty$ $x \to -\infty$ $x \to -\infty$

Effectuons un changement en posant $X = 2e^x$. Si $x \to -\infty$ alors $X \to 0$

$lim\ f(x) \Leftrightarrow lim\ \frac{4}{X} \times \frac{ln(1+X)}{X}$. Or $lim\ \frac{ln(1+h)}{h} = 1$ est une limite remarquable

$x \to -\infty$ $X \to 0$ $X \to 0$ $h \to 0$

Et d'autre part $lim\ \frac{4}{X} = +\infty$

$X \to 0$

Alors $lim\ \frac{4}{X} \times \frac{ln(1+X)}{X} = (+\infty)(1) = +\infty$

$X \to 0$

=> $lim\ f(x) = +\infty$

$x \to -\infty$

b) Déterminons la limite de f en $+\infty$.

On pourra remarquer que : si on pose $X = 1 + 2e^x$, $f(x)$ s'écrit $4\ \frac{X}{(X-1)^2} \times \frac{lnX}{X}$

Si $x \to +\infty$ alors $X \to +\infty$

Alors $lim\ f(x) \Leftrightarrow\ lim\ 4\frac{X}{(X-1)^2} \times \frac{lnX}{X} =\ lim\ \frac{4X}{X^2} \times \frac{lnX}{X} = lim\ \frac{4}{X} \times \frac{lnX}{X} = 0 \times 0 = 0$

$x \to +\infty \quad X \to +\infty \qquad\qquad X \to +\infty \qquad X \to +\infty$

Dressons le tableau de variation de f.

$f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$.

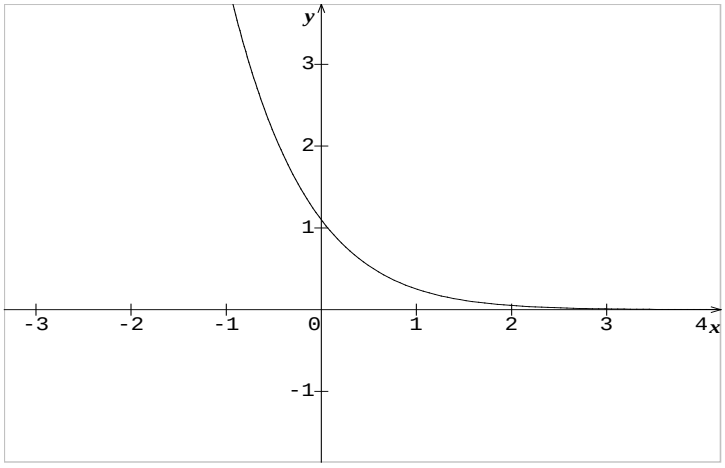
$\forall x \in \mathbb{R}\,;\, 2e^{-2x} > 0$ et d'après **Partie A)3),** $g(x) < 0$.

D'où $\forall x \in \mathbb{R}\,;\ f'(x) < 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 0

3) Traçons la courbe C.



4) a- Montrons que $\frac{e^{-x}}{1+2e^{x}} = e^{-x} - 2 \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$

$e^{-x} - 2 \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2} = \frac{e^{-2x}+2e^{-x}-2e^{-x}}{e^{-x}+2} = \frac{e^{-2x}}{e^{-x}+2} = \frac{e^{-2x}}{\frac{1}{e^{x}}+2} = \frac{e^{-2x}}{\frac{1+2e^{x}}{e^{x}}} = \frac{e^{-2x}\times e^{x}}{1+2e^{x}} = \frac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$

D'où $\frac{e^{-x}}{1+2e^{x}} = e^{-x} - 2 \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$

b- Soit α un réel strictement positif. Calcule l'intégrale I(α) $= \int_0^{\alpha} \frac{e^{-x}}{1+2e^{x}} dx$

I(α) $= \int_0^{\alpha} \frac{e^{-x}}{1+2e^{x}} dx$ = I(α) $= \int_0^{\alpha} \left(e^{-x} - 2 \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}\right) dx = [-e^{-x} - 2ln(\, e^{-x} + 2)]_0^{\alpha}$

=> I(α) $= 1 - e^{-\alpha} - 2ln\left(\frac{e^{-\alpha}+2}{3}\right)$

c-En déduisons, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale : J(α) $= \int_0^{\alpha} f(x)dx$

J(α) $= \int_0^{\alpha} f(x)dx = \int_0^{\alpha} e^{-2x} ln(1+2e^{x})dx$

Posons $u(x) = ln(1+2e^{x})$ => $u'(x) = \frac{2e^{x}}{1+2e^{x}}$

$v'(x) = e^{-2x}$ => $v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

=> J(α) $= \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \times ln(1+2\,e^{x})\right]_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} \frac{e^{-x}}{1+2e^{x}} dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \times ln(1+2\,e^{x})\right]_0^{\alpha}$ + I(α)

$= \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \times ln(1+2\,e^{x})\right]_0^{\alpha}$ + I(α) . Or I(α) $= 1 - e^{-\alpha} - 2ln\left(\frac{e^{-\alpha}+2}{3}\right)$

=> $J(\alpha) = 1 + \frac{5}{2}ln3 - \frac{1}{2}e^{-2\alpha} \times ln(1+2\,e^{\alpha}) - 2ln(e^{-\alpha}+2) - e^{-\alpha}$

Donne une interprétation graphique de J(α).

La fonction f est positive sur $[0\,;\,\alpha]$ avec $\alpha > 0$. Donc $J(\alpha)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie de plan comprise entre la courbe (C), les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.

C) Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 2\frac{e^{x}}{1+2e^{x}}$

1) Vérifions que la fonction f étudiée dans la partie **B** est solution de (E).

f est solution de (E) si et seulement si $f'(x) + 2f(x) = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$

Avec $f(x) = e^{-2x} ln(1 + 2e^{x})$ et $f'(x) = 2e^{-2x}\left[\frac{e^{x}}{1+2e^{x}} - ln(1+2e^{x})\right]$

Alors $f'(x) + 2f(x) = 2e^{-2x}\left[\frac{e^{x}}{1+2e^{x}} - ln(1+2e^{x})\right] + 2e^{-2x} ln(1 + 2e^{x})$

$$= \frac{2e^{-x}}{1+2e^{x}} - 2e^{-2x}ln(1+2e^{x}) + 2e^{-2x}ln(1+2e^{x}) = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$$

D'où f est solution de (E) : $y' + 2y = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$

2) Montrons qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.

NB :

Pour Montre que $A \Leftrightarrow B$,on montre que $\begin{cases} A => B \\ et \\ B => A \end{cases}$

Ainsi pour Montre qu'une fonction φ est solution de l'équation (E) si et seulement si $\varphi - f$ est solution de (E') : $y' + 2y = 0$, on montre que :

$$\begin{cases} \varphi \text{ est solution de l}'\text{équation (E)} => \varphi - f \text{est solution de } (E') \\ et \\ \varphi - f \text{ est solution de } (E') => \varphi \text{ est solution de l}'\text{équation } (E) \end{cases}$$

- Montrons que φ est solution de l'équation (E) $=>$ $\varphi - f$est solution de (E')
  - φ est solution de l'équation (E) si et seulement si $\varphi'(x) + 2\varphi(x) = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$ **(1)**
  - f est solution de l'équation (E) si et seulement si $f'(x) + 2f(x) = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$ **(2)**

Effectuons ainsi la différence des relations **(1)** et **(2)** :

(1) − (2) : $[\varphi'(x) - f'(x)] + 2[\varphi(x) - f(x)\,] = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^{x}} - 2\frac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$

$\Leftrightarrow (\varphi - f)'(x) + 2(\varphi - f)(x) = 0$ => $\varphi - f$ est solution de(E')

D'où φ est solution de l'équation (E) => $\varphi - f$ est solution de (E')

- Montrons que $\varphi - f$ est solution de (E') => φ est solution de l'équation (E)

Si $\varphi - f$ est solution de (E') alors on a : $(\varphi - f)'(x) + 2(\varphi - f)(x) = 0 \Leftrightarrow$

$[\varphi'(x) - f'(x)] + 2[\varphi(x) - f(x)\,] = 0 \Leftrightarrow \varphi'(x) - f'(x) + 2\,\varphi(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\varphi'(x) + 2\varphi(x) = f'(x) + 2\,f(x)$.

Avec $f(x) = e^{-2x}ln(1+2e^{x})$ et $f'(x) = 2e^{-2x}\left[\frac{e^{x}}{1+2e^{x}} - ln(1+2e^{x})\right]$

Alors $\varphi'(x) + 2\varphi(x) = f'(x) + 2f(x) \Leftrightarrow$

$\varphi'(x) + 2\varphi(x) = 2e^{-2x}\left[\frac{e^x}{1+2e^x} - ln(1+2e^x)\right] + 2e^{-2x}ln(1+2e^x) \Leftrightarrow$

$\varphi'(x) + 2\varphi(x) = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^x}$

D'où $\varphi - f$ est solution de (E') => φ est solution de l'équation (E)

Conclusion : puisque $\begin{cases} \varphi \text{ est solution de l'équation } (E) \Rightarrow \varphi - f \text{ est solution de } (E') \\ \text{et} \\ \varphi - f \text{ est solution de } (E') \Rightarrow \varphi \text{ est solution de l'équation } (E) \end{cases}$

Alors une fonction φ est solution de l'équation (E) si et seulement si $\varphi - f$ est solution de (E'). (Ce qu'il fallait Démontre).

3) Résolvons (E')

$(E'): y' + 2y = 0$ => $S = ke^{-2x}$

En déduisons les solutions de (E).

- On sait que $\varphi(x) - f(x)$ est solution de l'équation (E')
- D'autre part ke^{-2x} est aussi solution de l'équation (E')

Par identification, on a : $\varphi(x) - f(x) = ke^{-2x}$ => $\varphi(x) = f(x) + ke^{-2x}$.

Or $f(x) = e^{-2x}ln(1+2e^x)$

=> $\varphi(x) = e^{-2x}ln(1+2e^x) + ke^{-2x}$.

D'où l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\varphi(x) = e^{-2x}ln(1+2e^x) + ke^{-2x}$ avec $(k \in \mathbb{R})$

13 **Partie A** :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x + x - 5$

1) Etudions le sens de variation de g.
(On ne demande pas de Détermine les limites de g, ni de construire sa courbe).

$g(x) = e^x + x - 5$ => $g'(x) = e^x + 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $g'(x) > 0$

D'où tout $x \in \mathbb{R}$; g est strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

2) a) Calculons $g(0)$ et $g(2)$

$g(0) = -4$ et $g(2) = e^2 - 3$

b) Démontrons que l'équation : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $e^x + x - 5 = 0$ admet une solution unique α et que $1{,}30 < \alpha < 1{,}31$

- D'après le tableau de variation de g , $\forall x \in]-\infty ; +\infty[$; g est définie, continue et strictement croissante de l'intervalle $]-\infty ; +\infty[$; vers$]-\infty ; +\infty[$. Alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha) = 0$.

- De plus $\begin{cases} g(1{,}30) = -0{,}03 \\ g(1{,}31) = 0{,}01 \end{cases}$ => $g(1{,}30) \times g(1{,}31) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α tel que $1{,}30 < \alpha < 1{,}31$.

Partie B :

Soit la fonction numérique f définie sur $]-\infty ; 5[$ par : $f(x) = ln(5 - x)$.

1) Etudions le sens de variation de f. Précisons les limites de f en 5 et en $-\infty$.

$lim\ f(x) = lim\ ln(5 - x) = +\infty$

$x \to -\infty \qquad x \to -\infty$

$lim\ f(x) = lim\ ln(5 - x) = -\infty$

$x \to 5 \qquad x \to 5$

$f(x) = ln(5 - x)$ => $f'(x) = \frac{-1}{5 - x} = \frac{1}{x - 5}$ => $\forall\, x \in]-\infty ; 5[$; $f'(x) < 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		5
$f'(x)$		$-$	‖
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖

2) Prouvons que $f(\alpha) = \alpha$

D'après **Partie A 2) b)**, l'équation l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha) = 0$. Alors $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^{\alpha} + \alpha - 5 = 0 \Rightarrow e^{\alpha} = 5 - \alpha \Rightarrow \alpha = ln(5 - \alpha)$

D'autre part $f(x) = ln(5 - x) \Leftrightarrow f(\alpha) = ln(5 - \alpha)$. Or $\alpha = ln(5 - \alpha) \Rightarrow f(\alpha) = \alpha$.

3) a) Démontrons que$\forall\, x \in [0\,;3]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

$f'(x) = \frac{1}{x-5}$

$x \in [0\,;3] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3$

$\Leftrightarrow -5 \leq x - 5 \leq -2$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x-5} \leq -\frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow \left|-\frac{1}{5}\right| \leq |f'(x)| \leq \left|-\frac{1}{2}\right|$

$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ (Ce qu'il fallait Démontre)

b) En déduisons que $\forall\, x \in [0\,;3]$, on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

Puis que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$, alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$. Or $f(\alpha) = \alpha$. $\Rightarrow |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

D'où $\forall\, x \in [0\,;3]$, on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$ (Ce qu'il fallait Démontre) .

c) Démontrons que si $0 \leq x \leq 3$, alors $0 \leq f(x) \leq 3$.

$0 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow f(3) \leq f(x) \leq f(0)$ (Car f est décroissante)

$\Rightarrow ln2 \leq f(x) \leq ln5 \Leftrightarrow 0{,}69 \leq f(x) \leq 1{,}6O \Rightarrow f(x) \in [0{,}69\,;1{,}6O]$.

Or $[0{,}69\,;1{,}6O] \subset [0\,;3]$. Si $0 \leq x \leq 3$, alors $0 \leq f(x) \leq 3$. (Ce qu'il fallait démontre)

4) Dans le plan muni d'un repère orthonormé$(o\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, d'unité graphique (3 cm), on désigne son (C) la représentation graphique de la fonction f.

a-Traçons la courbe (C). Calcule puis hachurer la partie du plan formée des points de coordonnées

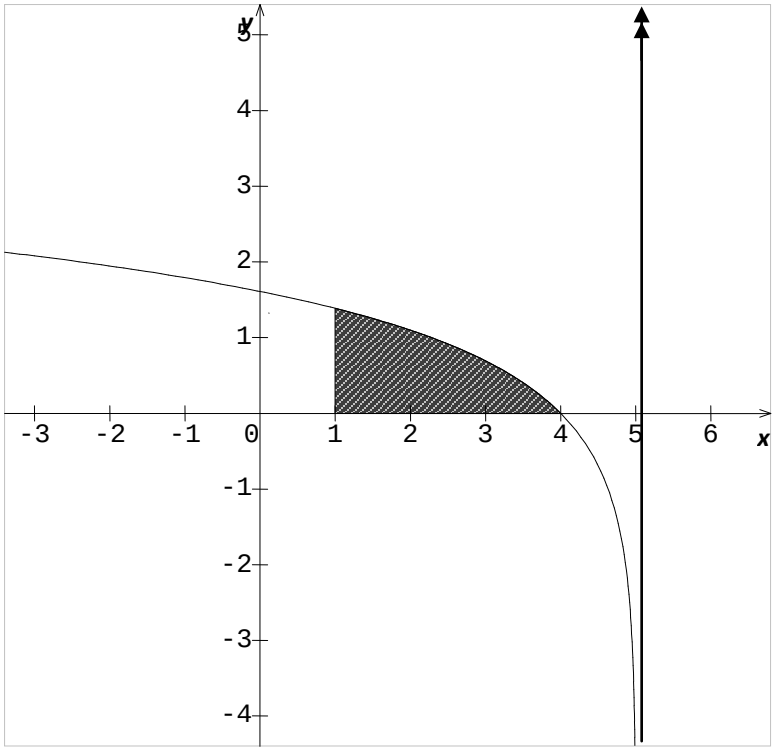
(x, y) tel que : $\begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ on notera (S) cette partie.

S= $(3cm)^2 \int_1^4 f(x)\,dx = (3cm)^2 \int_1^4 ln(5-x)\,dx$.

Or si $f(x) = ln(ax+b)$ => $F(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right) ln(ax+b) - x + k$

=> S= $(3cm)^2 \int_1^4 f(x)\,dx = (3cm)^2 \int_1^4 ln(5-x)dx = \left[\left(x + \frac{5}{-1}\right) ln(5-x) - x \right]_1^4 (3cm)^2$

$= \left[(x-5)ln(5-x) - x \right]_1^4 (3cm)^2 = (-3 + 4ln4) \times 9\ cm^2 = 22{,}90\ cm^2$



b-En remarquant que, $\forall\ x \neq 5$, $\frac{x}{x-5} = 1 + \frac{5}{x-5}$; montrons que $\int_\alpha^4 \frac{x}{x-5} dx = 4 - 6\alpha$

$\int_\alpha^4 \frac{x}{x-5} dx = \int_\alpha^4 \left(1 + \frac{5}{x-5}\right) dx = \int_\alpha^4 \left(1 + 5\frac{1}{x-5}\right) dx = [x + 5ln|x-5|]_\alpha^4$

$= [x + 5ln|5-\alpha|]_\alpha^4 = (4 + 5ln1) - \left(\alpha + 5ln(5-\alpha)\right)$.

$\int_\alpha^4 \frac{x}{x-5} dx = 4 - \alpha - 5ln(5-\alpha)$. Or $\alpha = ln(5-\alpha)$

=>$\int_\alpha^4 \frac{x}{x-5} dx = 4 - \alpha - 5\alpha = 4 - 6\alpha$. (Ce qu'il fallait démontre)

c-Prouvons que l'aire A de la partie (S) en cm^2 est donnée par A = $-\alpha^2 + 6\alpha - 4$.
(On Utilisea une intégration par partie).

=> A= $\int_\alpha^4 f(x)\,dx = \int_\alpha^4 ln(5-x)dx = \left[\left(x + \frac{5}{-1}\right)ln(5-x) - x\right]_\alpha^4$

$= \left[(x-5)ln(5-x) - x\right]_\alpha^4 = (-ln1 - 4) - \left((\alpha-5)ln(5-\alpha) - \alpha\right)$

$= -4 - (\alpha-5)ln(5-\alpha) + \alpha$. Or $\alpha = ln(5-\alpha)$

=> A= $-4 - (\alpha-5)\alpha + \alpha = -4 - \alpha^2 + 5\alpha + \alpha = -\alpha^2 + 6\alpha - 4$.

D'où A = $-\alpha^2 + 6\alpha - 4$. (Ce qu'il fallait démontre)

14 On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$

A) Etude de la fonction f et tracé de (C)

1) a) Calculons la limite de cette fonction lorsque x tend vers $+\infty$.

$lim\ f(x) = lim\ \frac{e^x}{(1+x)^2} = lim\ \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$

b) Calculons la limite de cette fonction lorsque x tend vers – 1.

$lim\ f(x) = lim\ \frac{e^x}{(1+x)^2} = \frac{e^{-1}}{0^+} = +\infty$

$x \to -1$ $x \to -1$

On peut en déduis que la courbe (C) admet une possibilité d'asymptote oblique et admet la droite d'équation $x = -1$ comme asymptote verticale.

2) Calculons $f'(x)$ et Montre que son signe est celui de $\frac{x-1}{x+1}$

$f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2}$ => $f'(x) = \frac{e^x(1+x)^2 - 2(1+x)e^x}{(1+x)^4} = \frac{e^x(1+x)[(1+x)-2]}{(1+x)^4} = \frac{e^x(1+x-2)}{(1+x)^3}$

$= \frac{e^x(x-1)}{(1+x)^3} = \frac{e^x}{(1+x)^2} \times \frac{x-1}{x+1}$

Or $\forall\, x \in D_f$; $\frac{e^x}{(1+x)^2} > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $\frac{x-1}{x+1}$.

Etudions le signe de $\frac{x-1}{x+1}$. Posons $x-1=0$ et $x+1=0$

=> $x=1$ et $x=-1$

D'où le tableau de signe de $\frac{x-1}{x+1}$ est le suivant :

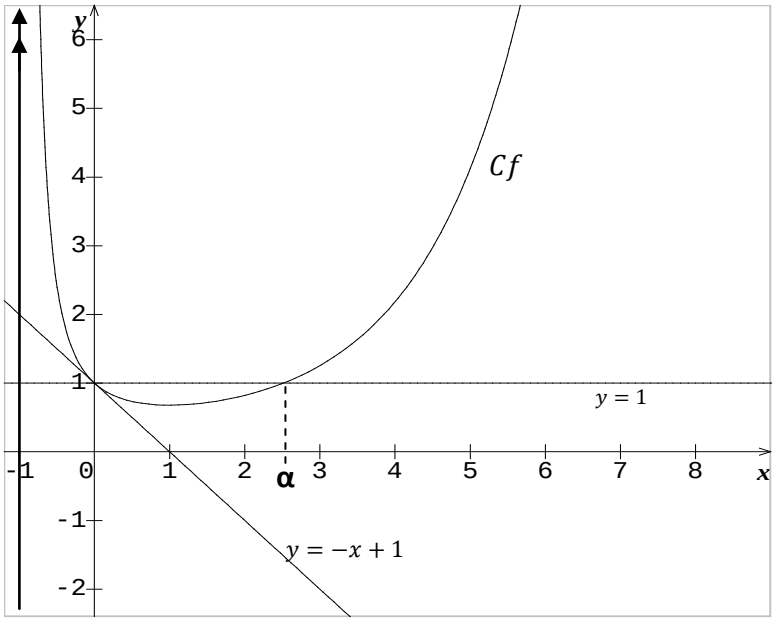
x	-1		1		$+\infty$
$\frac{x-1}{x+1}$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

3) Dressons le tableau de variation de f.

x	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{e}{4}$	↗	$+\infty$

4) Traçons la courbe (C), les droites d'équations respectives $x = -1$ et $y = 1$, ainsi que la tangente à cette courbe en son point d'abscisse 0. (Unité graphique : 4 cm)

La tangente a pour équation $y = -x + 1$.



5) Montrons que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[1\,;10]$.

Sur l'intervalle $[1\,;10]$; f est dérivable et strictement croissante, donc f réalise une bijection de $[1\,;10]$ vers l'intervalle $[\,f(1); f(10)] = \left[\frac{e}{4}\;;\frac{e^{10}}{121}\right] = [0{,}67\,;182{,}03]$.

Nous en déduisons 1 appartient à l'intervalle $\left[\frac{e}{4}\;;\frac{e^{10}}{121}\right]$. Donc l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution notée α, dans l'intervalle $[1\,;10]$ telque $f(\alpha) = 1$

Utilisons le graphique précédent pour Donne deux nombres entiers consécutifs a et b tels que α appartient à l'intervalle $[a\,;\,b]$.

Ainsi à l'aide du graphique, nous remarquons α appartient à l'intervalle $[a\,;\,b] = [2\,;3]$.

B) Calcul d'une aire

1) Soit g la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x}{x+1}$

a-Etudions le sens de variation de g dans l'intervalle $[1\,;2]$.

g est dérivable sur $[1\,;2]$ comme quotient des deux fonctions dérivables non nulles :

$x \to e^x$ et $x \to 1 + x$; et nous avons $g'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$.

De plus $g'(x)$ est strictement positif sur $[1\ ;\ 2]$, alors g est strictement croissante.

b-Montrons que, pour tout x appartenant à $[1\ ;\ 2]$. on a : $1 \leq g(x) \leq 2{,}5$.

g étant croissante sur $[1\ ;\ 2]$ alors on a l'encadrement suivant : $g(1) \leq g(x) \leq g(2)$.

Or $g(1) = \frac{e}{4} \approx 1{,}35$ et $g(2) = \frac{e^2}{3} \approx 2{,}46$. Nous avons : $g(1) > 1$ et $g(2) < 2{,}5$.

Alors pour tout $x \in [1\ ;\ 2]$: $1 \leq g(x) \leq 2{,}5$

c-En déduisons un encadrement de $A_1 = \int_1^2 g(x)dx = \int_1^2 \frac{e^x}{x+1}dx$

Nous avons : $1 < 2$ et $1 \leq g(x) \leq 2{,}5$; d'après les théorèmes d'encadrement d'nue intégrale nous déduisons que : $\int_1^2 1dx \leq \int_1^2 g(x)dx \leq \int_1^2 2{,}5dx \Leftrightarrow$

$[x]_1^2 \leq \int_1^2 g(x)dx \leq [2{,}5x]_1^2 \Leftrightarrow 2 - 1 \leq \int_1^2 g(x)dx \leq (2-1) \times 2{,}5$

$\Leftrightarrow 1 \leq \int_1^2 g(x)dx \leq 2{,}5 \Leftrightarrow 1 \leq A_1 \leq 2{,}5$

2) Soit A_2 l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$, la courbe (C) et l'axe des abscisses.

A l'aide d'une intégration par parties, exprimons A_2 en fonction de A_1

La fonction f est positive sur $[1\ ;\ 2]$, donc l'aire A_2 cherchée est donnée par :

$A_2 = \int_1^2 \frac{e^x}{(1+x)^2}dx$

Posons : $u(x) = e^x$ => $u'(x) = e^x$

$$v'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \text{ => } v(x) = -\frac{1}{1+x}$$

=>$A_2 = \left[-\frac{e^x}{1+x}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{e^x}{1+x}dx = -\frac{e^2}{3} + \frac{e}{2} + A_1$

=>$A_2 = A_1 - \frac{e^2}{3} + \frac{e}{2}$

En déduisons un encadrement de A_2.

On sait que l'encadrement de A_1 est : $1 \leq A_1 \leq 2{,}5$.

Or $A_2 = A_1 - \frac{e^2}{3} + \frac{e}{2}$ => $A_1 = A_2 + \frac{e^2}{3} - \frac{e}{2}$

Alors $1 \leq A_1 \leq 2{,}5 \Leftrightarrow 1 \leq A_2 + \frac{e^2}{3} - \frac{e}{2} \leq 2{,}5 \Leftrightarrow 1 - \frac{e^2}{3} + \frac{e}{2} \leq A_2 \leq 2{,}5 - \frac{e^2}{3} + \frac{e}{2}$

C) Approximation d'un nombre à l'aide d'une suite

Pour cette partie, on Utilisea sans justification le fait que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution β et que celle – ci est élément de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$

Soit h la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $h(x) = \frac{e^x}{(1+x)^3}$

1) a- Vérifions que, pour tout x appartenant à $]-1\,;+\infty[$, on a : $f'(x) = f(x) - 2h(x)$.

On sait que $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{(1+x)^3} = \frac{e^x(x+1-2)}{(1+x)^3} = \frac{(x+1)e^x - 2e^x}{(1+x)^3} = \frac{(x+1)e^x}{(1+x)^3} - 2\frac{e^x}{(1+x)^3}$

$= \frac{e^x}{(1+x)^2} - 2\frac{e^x}{(1+x)^3} = f(x) - 2h(x).$

b-Calculons $h'(x)$.

$h(x) = \frac{e^x}{(1+x)^3}$ =>$h'(x) = \frac{(1+x)^3e^x - 3(1+x)^2e^x}{(1+x)^6} = \frac{(x-2)e^x}{(1+x)^4}$

c-En utilisant la question **a),** calculé $f''(x)$.

$f'(x) = f(x) - 2h(x)$ => $f''(x) = f'(x) - 2h'(x) = \frac{(x-1)e^x}{(1+x)^3} - 2\frac{(x-2)e^x}{(1+x)^4}$

=> $f''(x) = \frac{(x^2-2x+3)e^x}{(1+x)^4}$

En déduisons le sens de variation de f' dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$

Pour tout x de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$; $x^2 - 2x + 3$ est positif, donc $f''(x)$ est strictement positif sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$, nous en déduisons que f' est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$

2) En déduisons que, pour tout x appartenant à $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

$x \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right] \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1.$

D'autre part f' est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$, donc pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$; on a :

$f'\left(\frac{1}{2}\right) \leq f'(x) \leq f'(1) \Leftrightarrow -\frac{4e^{\frac{1}{2}}}{27} \leq f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow -0{,}24 \leq f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq 0$

$\Leftrightarrow 0 \leq |f'(x)| \leq \left|-\frac{1}{4}\right| \Leftrightarrow 0 \leq |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

Alors pour tout x appartenant à $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ (Ce qu'il fallait Démontre)

3) On définit la suite(u_n), pour tout nombre entier naturel n, par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour $n \geq 0$

On admet que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

a-Montrons que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|$

Puis que $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$, alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$|f(x) - f(\beta)| \leq \frac{1}{4}|x - \beta|$. Or $f(\beta) = \beta$. => $|f(x) - \beta| \leq \frac{1}{4}|x - \beta|$

D'où $\forall\, x \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$; on a : $|f(x) - \beta| \leq \frac{1}{4}|x - \beta|$

Posons $u_n = x$. Alors on a : $|f(u_n) - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|$. Or $f(u_n) = u_{n+1}$

D'où pour tout nombre entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|$

b-Montre par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $|u_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

- si $n = 0$; $u_0 = 1$ et $\beta \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$. Alors $|1 - \beta| \leq 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^0$ vraie $\forall\, x \in \mathbb{N}$.
- Supposons que la propriété est vraie au rang n, c'est-à-dire $|u_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire $|u_{n+1} - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

En utilisant le résultat de la question précédente, nous pouvons écrire :

$|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta| \Leftrightarrow |u_{n+1} - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

D'où la relation est vraie à l'ordre $n+1$.

Conclusion : pour tout nombre entier naturel n, on a : $|u_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ (Ce qu'i fallait Démontre)

c-En déduisons une valeur approchée numérique de β à 10^{-3} près.

Cherchons n tel que $|u_n - \beta| < 10^{-3}$. D'après ce qui précède, il suffit que $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ soit inférieur à 10^{-3} si $nln\left(\frac{1}{4}\right) < ln10^{-3} \Leftrightarrow -nln4 < ln10^{-3} \Leftrightarrow nln4 > -ln10^{-3}$ => $n > -\frac{ln\,10^{-3}}{ln\,4}$

=> $n > 4{,}98$. Puisque n est un entier alors il suffit de prendre $n = 5$.

D'où u_5 est donc une valeur approchée de β à 10^{-3} près.

Ainsi $u_5 \approx 0{,}697$ est une valeur approchée numérique de β à 10^{-3} près.

15 Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal$(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ (unité 5 cm).

Partie A :

On considère la fonction f_1 définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f_1(x) = xe^{-x^2}$et on appelle C_1 sa courbe représentative.

1) Montrons que pour tout réel positif x, $f'_1(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$

$f_1(x) = xe^{-x^2}$=> $f'_1(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$

En déduis le sens de variation de f_1.

$f'_1(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$ => $f'_1(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $e^{-x^2} > 0$ alors le signe de $f'_1(x)$ dépend du signe de $1 - 2x^2$.

Posons $1 - 2x^2 = 0$ => $x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'_1(x)$		$+$	0	$-$	

D'après le tableau ci-dessus :

$\forall\, x \in \left[0\,;\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$; $f'_1(x) > 0$.Par conséquent $\forall\, x \in \left[0\,;\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$; f_1 est strictement croissante.

$\forall\, x \in \left]\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\,+\infty\right[$; $f_1(x) < 0$. Par conséquent $\forall\, x \in \left]\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\,+\infty\right[$; f_1 est strictement décroissante.

2) Calculons la limite de f_1 en $+\infty$ (on pourra poser $u = x^2$).

$lim\ f_1(x) = lim\ xe^{-x^2}$. Posons $u = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{u} \Leftrightarrow x = u^{\frac{1}{2}}$.

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$

Si $x \to +\infty$ alors $u \to +\infty$

Alors : $lim\ f_1(x) \Leftrightarrow lim\ f_1(u) = lim\ u^{\frac{1}{2}}e^{-u}$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$; $lim\ u^n e^{-u} = 0$

$x \to +\infty$ $u \to +\infty$ $u \to +\infty$ $u \to +\infty$

D'où $lim\ f_1(x) = 0$

$x \to +\infty$

Interprétons graphiquement ce résultat.

Puisque $lim\ f_1(x) = 0$. Alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la

$x \to +\infty$ Courbe C_1 de f_1

3) Dressons le tableau de variation de f_1. D'où le tableau de signe de $f'_1(x)$ est le suivant :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f'_1(x)$	$+$	0	$-$
$f_1(x)$	0 ↗	$\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$	↘ 0

4) On appelle Δ la droite d'équation $y = x$. Déterminons la position de C_1 par rapport à Δ.

Pour Détermine la position de C_1 par rapport à Δ, nous étudions le signe de $h(x)$ avec :

$h(x) = x - f_1(x)$.

$h(x) = x - f_1(x) = x - xe^{-x^2} = x\left(1 - e^{-x^2}\right)$.

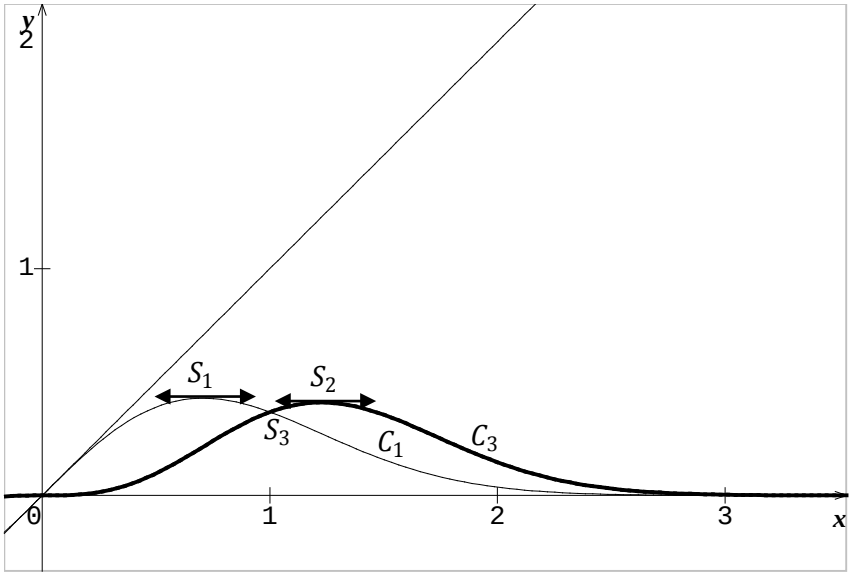
x est positif ou nul sur $[0\ ;\ +\infty[$; $h(x)$ a donc le signe de $1 - e^{-x^2}$.

Posons $1 - e^{-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x^2} \leq 1 \Leftrightarrow -x^2 \leq ln1 \Leftrightarrow -x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$. En posant $x^2 = 0$; on a : $x = 0$

Alors nous en déduisons que $h(x)$ est positif ou nul sur $[0\ ;\ +\infty[$.

D'où $\forall\, x \in [0\,;\, +\infty[$; la courbe C_1 est au dessus de la droite Δ.

5) Traçons C_1 et Δ.



Partie B :

On considère la fonction f_3 définie sur $[0\,;\, +\infty[$ par $f_3(x) = x^3 e^{-x^2}$ et on appelle C_3 sa courbe représentative.

1) Montrons que pour tout réel x positif, $f'_3(x)$ a même signe que $3 - 2x^2$.

$f_3(x) = x^3 e^{-x^2}$ => $f'_3(x) = 3x^2 e^{-x^2} - 2x e^{-x^2} \times x^3 = 3x^2 e^{-x^2} - 2x^4 e^{-x^2}$

$= (3 - 2x^2) x^2 e^{-x^2}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x^2 e^{-x^2} > 0$; Alors le signe de $f'_3(x)$ dépend du signe de $3 - 2x^2$.

En déduisons le sens de variation de f_3.

Posons $3 - 2x^2 = 0$ => $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$. D'où le tableau de signe de $f'_3(x)$ est le suivant :

x	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f'_3(x)$	$+$	0	$-$

D'après le tableau ci-dessus :

$\forall\, x \in \left[0\,;\, \sqrt{\frac{3}{2}}\right[\,;\, f'_3(x) > 0$.Par conséquent $\forall\, x \in \left[0\,;\, \sqrt{\frac{3}{2}}\right[\,;\, f_3$ est strictement croissante.

$\forall\, x \in \left]\sqrt{\frac{3}{2}}\,;\, +\infty\right[\,;\, f_3(x) < 0$. Par conséquent $\forall\, x \in \left]\sqrt{\frac{3}{2}}\,;\, +\infty\right[\,;\, f_3$ est strictement décroissante.

2) Déterminons les positions relatives de C_1 et C_3.

Pour Détermine la position de C_1 et C_3 par rapport à Δ, nous étudions le signe de $h(x)$ avec :

$k(x) = f_1(x) - f_3(x) = xe^{-x^2} - x^3e^{-x^2} = (1-x^2)xe^{-x^2}$.

xe^{-x^2}est positif ou nul sur $[0\,;\, +\infty[$. Donc le signe de $k(x)$dépend du signe de $1 - x^2$.

Posons $1 - x^2 = 0$ => $x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$k(x)$		$+$	0	$-$	

D'après le tableau ci-dessus :

$\forall\, x \in [0\,;\, 1\,[\,;\, k(x) > 0$.Par conséquent $\forall\, x \in [0\,;\, 1\,[\,;$ la courbe C_1 est au dessus de la courbe C_3

$\forall\, x \in]1\,;\, +\infty[;\, k(x) < 0$.Par conséquent $\forall\, x \in]1\,;\, +\infty[\,;$ la courbe C_1 est en dessous de la courbe C_3

3) Traçons C_3 dans le même repère que C_1 **(Voir figure dans la partie A)**

4) On appelle D la droite d'équation $x = 1$. Soit A_1 l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe C_1, les deux axes de coordonnées et la droite D et soit A_3 l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe C_3, les deux axes de coordonnées et la droite D.

a-Calculons A_1.

Sur $[0\,;1\,]\,;\, f_1(x) \geq 0$. Donc $A_1 = \int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 xe^{-x^2}dx = \int_0^1 \frac{-2}{-2} \times xe^{-x^2}dx$

$= -\frac{1}{2}\int_0^1 -2xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^1 = \left[-\frac{e^{-x^2}}{2}\right]_0^1 = \left(-\frac{e^{-1}}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{e^{-1}}{2} + \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right) u.a$ => $A_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right) u.a$

b-A l'aide d'une intégration par parties, montrons que $A_3 = -\frac{1}{2e} + A_1$

$A_3 = \int_0^1 f_3(x)dx = \int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx = \int_0^1 x^2 \times xe^{-x^2} dx$

Posons : $u(x) = x^2$ => $u'(x) = 2x$

$$v'(x) = xe^{-x^2} \text{ => } v(x) = -\frac{e^{-x^2}}{2}$$

=> $A_3 = \left[-\frac{x^2 e^{-x^2}}{2}\right]_0^1 + \int_0^1 xe^{-x^2} dx$ $A_3 = -\frac{e^{-1}}{2} + A_1$. Or $e^{-1} = \frac{1}{e}$

=> $A_3 = -\frac{1}{2e} + A_1$

<u>Partie C</u> :

On désigne par n un entier naturel non nul et on considère la fonction f_n définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$. On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$

1) Montrons que pour tout entier $n \geq 1$, f_n admet un maximum pour $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$ On note α_n ce maximum.

Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$; f_n est dérivable et sa dérivée est telle que :

Si $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$ => $f'_n(x) = nx^{n-1} \times e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \times x^n = x^{n-1}(n-2x^2)e^{-x^2}$

=> $f'_n(x) = x^{n-1}(n-2x^2)e^{-x^2}$.

Pour tout $\in [0\,;+\infty[$; $x^{n-1}e^{-x^2} > 0$. Alors le signe de $f'_n(x)$ dépend du signe de

$n - 2x^2$. Posons $n - 2x^2 = 0$ => $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$

x	0	$\sqrt{\frac{n}{2}}$	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	−

D'après le tableau ci-dessus :

$\forall\, x \in \left]0\,;\sqrt{\frac{n}{2}}\right[$; $f'_n(x) > 0$ et $\forall\, x \in \left]\sqrt{\frac{n}{2}}\,;+\infty\right[$; $k(x) < 0$.

D'où f_n admet un maximum pour $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$ et ce maximum est noté α_n

2) On appelle S_n le point de (C_n) d'abscisse $\sqrt{\frac{n}{2}}$.

Montrons que, pour tout n, (C_n) passe par S_2.

S_2 est le point d'abscisse $\sqrt{\frac{2}{2}} = 1$. Son ordonnée est $f_2(1) = \frac{1}{e}$.

Calculons $f_n(1)$

$f_n(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$. Donc S_2 appartient à toutes les courbes (C_n)

Plaçons S_1 , S_2 , S_3 (Voir la figure).

3) Soit la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = e^{\frac{x}{2}\left[-1+ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]}$

a-Etudions le sens de variation de g.

La fonction g est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables et sa dérivée est $g'(x) = \left[\frac{x}{2} \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\left(-1 + ln\frac{x}{2}\right)\right] \times g(x)$ => $g'(x) = \frac{1}{2} ln\frac{x}{2} \times g(x)$

$g(x) = e^{\frac{x}{2}\left(-1+ln\frac{x}{2}\right)}$ est positif pour tout $x \in]0\ ;+\infty[$; donc $g'(x)$ a le signe de $ln\frac{x}{2}$.

Posons $ln\frac{x}{2} > 0$ => $\frac{x}{2} > e^0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} > 1$ => $x > 2$.

Ainsi pour les $x > 2$; on a $g'(x) > 0$ et les $x < 2$; on a $g'(x) < 0$.

D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	↘	e^{-1}	↗	$+\infty$

- $\forall\, x \in\ ]0\,;2[$; g est strictement décroissante.

- $\forall x \in]2 ; +\infty[$; g est strictement croissante.

b-Montrons que pour tout entier $n \geq 1$, $\alpha_n = g(n)$.

$$\alpha_n = \left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)^n \times e^{-\frac{n}{2}} = e^{n\ln\sqrt{\frac{n}{2}}} \times e^{-\frac{n}{2}} = e^{\frac{n}{2}\left(\ln\frac{n}{2}-1\right)} = g(n) \Rightarrow \alpha_n = g(n)$$

En déduisons que tout point S_n , on a une ordonnée supérieure à celle de S_2.

S_n est le point de coordonnées $\left(\sqrt{\frac{n}{2}} \ ; \ g(n)\right)$; S_2 est le point de coordonnées $(1 ; g(2))$.

Puisque g est croissante sur $]2 ; +\infty[$ et décroissante sur $]0 ; 2[$; alors admet un minimum pour la valeur 2.

Pour tout x de $]0 ; +\infty[$; $g(x) \geq g(2)$. Alors on en déduit que, pour tout $n \geq 1$; on a :

$g(n) \geq g(2)$.

D'où le point S_n a une ordonnée supérieure à celle de S_2.

16 Le problème est composé de l'étude d'une suite de fonctions dépendant d'un paramètre, puis de la recherche d'une valeur approchée d'une solution d'une équation du type : $f(x) = x$.

<u>Partie A</u> :

Pour tout entier n strictement positif, on note f_n la fonction numérique de la variable réelle définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par : $f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).

1) Déterminons la fonction dérivée f'_n de f_n et donnons l'expression de f'_n en fonction de f_n et de f_{n+1}.

$$f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n} \Rightarrow f'_n(x) = \frac{e^x(x+1)^n - n(x+1)^{n-1}e^x}{(x+1)^{2n}} = \frac{e^x(x+1)^n}{(x+1)^{2n}} - n\frac{(x+1)^{n-1}e^x}{(x+1)^{2n}}$$

$$= \frac{e^x}{(x+1)^{-n}\times(x+1)^{2n}} - n\frac{e^x}{(x+1)^{-n+1}\times(x+1)^{2n}} = \frac{e^x}{(x+1)^n} - n\frac{e^x}{(x+1)^{n+1}}$$

$\Rightarrow f'_n(x) = f_n(x) - nf_{n+1}(x)$

2) Etudions les variations de f_n et ses limites éventuelles en $-\infty$; -1 et $+\infty$. (On distinguera les cas où n est pair et n est impair.)

$lim\ f_n(x) = lim\ \frac{e^x}{(x+1)^n} = lim\ \frac{e^x}{x^n} = 0$

$x \to -\infty \qquad x \to -\infty \qquad x \to -\infty$

$lim\ f_n(x) = lim\ \frac{e^x}{(x+1)^n} = lim\ \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

$lim\ f_n(x) = lim\ \frac{e^x}{(x+1)^n} = \frac{e^{-1}}{(0^-)^n} = \begin{cases} +\infty\ si\ n\ est\ paire \\ et \\ -\infty\ si\ n\ est\ impaire \end{cases}$

$x \to -1^- \qquad x \to -1^-$

$lim\ f_n(x) = lim\ \frac{e^x}{(x+1)^n} = \frac{e^{-1}}{(0^+)^n} = \begin{cases} +\infty\ si\ n\ est\ paire \\ et \\ +\infty\ si\ n\ est\ impaire \end{cases}$

$x \to -1^+ \qquad x \to -1^+$

3) Démontrons que toutes les courbes (C_n) passent par un même point.

Soit $A\binom{x_0}{y_0}$ ce point tel que si toutes les courbes (C_n) passent par un même point , alors on a :

$f_0(x_0) = f_1(x_0)$.

$f_0(x_0) = f_1(x_0) \Leftrightarrow \frac{e^{x_0}}{(x_0+1)^0} = \frac{e^{x_0}}{(x_0+1)^1} \Leftrightarrow e^{x_0} = \frac{e^{x_0}}{x_0+1} \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{x_0+1} \Leftrightarrow$

$x_0 + 1 = 1$ => $x_0 = 0$.

En remplaçant $x = 0$ par sa valeur dans $y_0 = f_1(x_0)$ ou dans $y_0 = f_0(x_0)$; on a :

$y_0 = f_1(0) = \frac{e^0}{(0+1)^1} = \frac{1}{1} = 1$. D'où toutes les courbes (C_n) passent par un même point $A\binom{0}{1}$.

4) Déterminons la limite de $\frac{f_n(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

$lim\ \frac{f_n(x)}{x} = lim\ \frac{\frac{e^x}{(x+1)^n}}{x} = lim\ \frac{e^x}{x(x+1)^n} = lim\ \frac{e^x}{x(x+1)^n} = lim\ \frac{e^x}{x \times x^n} = lim\ \frac{e^x}{x^{n+1}} = +\infty$

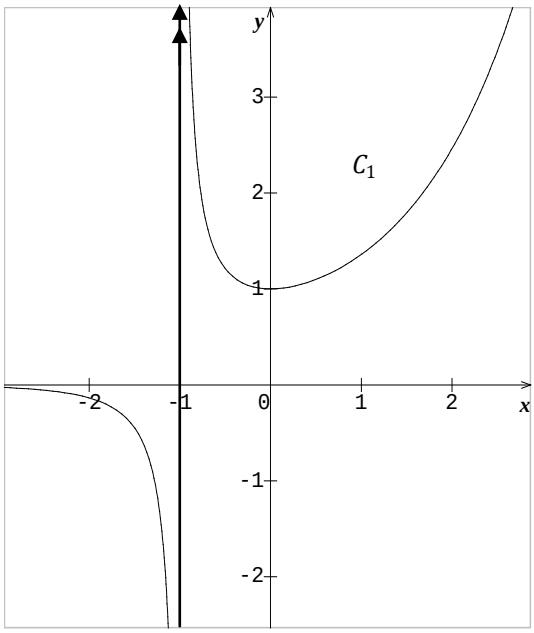
$x \to +\infty \qquad x \to +\infty \qquad x \to +\infty \qquad x \to +\infty \qquad x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

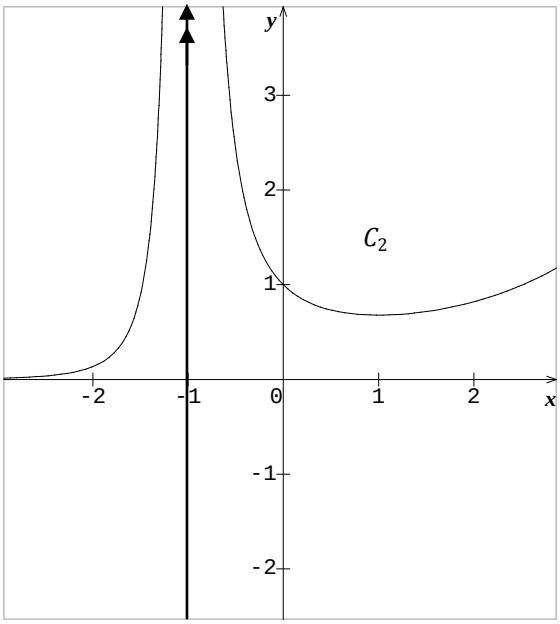
=> $lim\ \frac{f_n(x)}{x} = +\infty$

$x \to +\infty$

On peut en déduis que toutes les courbes (C_n) admettent l'axe $(y'0y)$ comme direction parabolique.

Traçons sur deux figures distinctes les courbes (C_1) et (C_2).





Partie B

Pour tout entier n strictement positif, on note : $I_n = \int_0^1 f_n dx$.

1) Démontrons que la suite (I_n) est décroissante et qu'elle converge.

La suite (I_n) est décroissante si et seulement si $I_{n+1} - I_n < 0$

Pour tout x appartenant à $[0\ ;1]$; $(x+1)^{n+1} > (x+1)^n \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)^{n+1}} < \frac{1}{(x+1)^n}$

Or $e^x > 0$. Alors on a : $\frac{e^x}{(x+1)^{n+1}} < \frac{e^x}{(x+1)^n}$. En intégrant sur $[0\ ;1]$, on a :

$\int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^{n+1}} dx < \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^n} dx \Leftrightarrow I_{n+1} < I_n \Leftrightarrow I_{n+1} - I_n < 0.$

D'où la suite (I_n) est décroissante.

D'autre part si x appartient à $[0\,;1]$; alors on a :

$0 \leq x \leq 1$

$\Leftrightarrow\ 1 \leq x+1 \leq 2$

$\Leftrightarrow\ 1 \leq (x+1)^n \leq 2^n$

$\Leftrightarrow\ \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{(x+1)^n} \leq 1$

$\Leftrightarrow\ \frac{e^x}{2^n} \leq \frac{e^x}{(x+1)^n} \leq e^x$. En intégrant sur $[0\,;1]$; on a :

$\int_0^1 \frac{e^x}{2^n}dx \leq \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^n}dx \leq \int_0^1 e^x dx \Leftrightarrow \frac{1}{2^n}\int_0^1 e^x dx \leq I_n \leq \int_0^1 e^x dx \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2^n}[e^x]_0^1 \leq I_n \leq [e^x]_0^1 \Leftrightarrow \frac{e-1}{2^n} \leq I_n \leq e-1$. Alors La suite (I_n) est majorée.

Conclusion : La suite (I_n) étant décroissante et majorée, alors elle converge.

2) Déterminons en utilisant la relation de la question **A).1**), une relation entre I_n et I_{n+1}.

D'après la relation de la question **A).1**), on a : $f'_n(x) = f_n(x) - nf_{n+1}(x)$.

$f'_n(x) = f_n(x) - nf_{n+1}(x)$. En intégrant sur $[0\,;1]$; on a :

$\int_0^1 f'_n(x)dx = \int_0^1 f_n(x)dx - n\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx \Leftrightarrow [f_n(x)]_0^1 = I_n - nI_{n+1}$

$\Leftrightarrow [f_n(1) - f_n(0)]_0^1 = I_n - nI_{n+1} \Leftrightarrow [f_n(1) - f_n(0)]_0^1 = I_n - nI_{n+1}$

$\Leftrightarrow \frac{e}{2^n} - 1 = I_n - nI_{n+1}$.

D'où la relation entre I_n et I_{n+1} est : $I_n - nI_{n+1} = \frac{e}{2^n} - 1$

<u>Partie C</u> :

Le but de cette partie est de Détermine une valeur approchée de α.

On pose : $n = 2$.

1) Démontrons que l'équation $f_2(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$

$f_2(x) = x \Leftrightarrow f_2(x) - x = 0$. Posons $h(x) = f_2(x) - x$

Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$; h est dérivable et strictement décroissante, donc h réalise une bijection de $\left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$ vers l'intervalle $\left[\ h(1)\ ;h\left(\frac{1}{2}\right)\right] = [-0{,}32\ ;0{,}22]$.

Donc l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution notée α, dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$ telque $h(\alpha) = 0$. Or $h(x) = f_2(x) - x$. Par conséquent l'équation $f_2(x) - x = 0 \Leftrightarrow f_2(x) = x$ admet une solution unique α telle que $f_2(\alpha) = \alpha$

De plus $h\left(\frac{1}{2}\right) \times h(1) < 0$. Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\alpha \in \left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$

2) Etudions les variations de f'_2 dans $\left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$ et en déduisons que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$; on a : $0 \leq |f'_2(x)| \leq 0{,}25$

$f_2(x) = \frac{e^x}{(x+1)^2}$ => $f'_2(x) = \frac{(x^2-1)e^x}{(x+1)^4}$ et $f''_2(x) = \frac{(x^2-2x+3)e^x}{(x+1)^4} > 0$.

D'où $\forall\ x \in Df'_2;\ f''_2(x) > 0$. Par conséquent f'_2 est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$.

D'où si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$; on a : $f'_2\left(\frac{1}{2}\right) \leq f'_2(x) \leq f'_2(1) \Leftrightarrow -0{,}25 \leq f'_2(x) \leq 0$

En appliquant la valeur absolue, on a : $0 \leq |f'_2(x)| \leq 0{,}25 \Leftrightarrow 0 \leq |f'_2(x)| \leq \frac{1}{4}$

D'où $\forall x \in \left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$; on a : $0 \leq |f'_2(x)| \leq \frac{1}{4}$ (Ce qu'il fallait Démontre).

3) Soit (u_n), $n \in \mathbb{N}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f_2(u_n) \end{cases}$

a-Montrons que pout tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $u_n \in \left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$

On sait que : $u_{n+1} = f_2(u_n)$

Pour $n = 0$; on a : $u_1 = f_2(u_0) = f_2(0) = 1 \in \left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$. Vraie

Supposons la relation $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$ est vraie et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$ c'est-à-dire $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$

On sait que $x \in \left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$, $f_2(x) \in \left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$ et $u_n \in \left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$. En posant $x = u_n$, on a :

$f_2(u_n) \in \left[\frac{1}{2}\ ;1\right] \Leftrightarrow u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$ car $f_2(u_n) = u_{n+1}$.

D'où la relation est vraie à l'ordre $n+1$.

Conclusion : pout tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $u_n \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ (Ce qu'il fallait Démontre).

b- Démontrons, en utilisant la question **C.2**, que pour tout entier naturel n :

$|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$

On sait que d'après la question **C.2**, on a : $|f'_2(x)| \leq \frac{1}{4}$.

Alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$|f_2(x)-f_2(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|x-\alpha|$. Or d'après la question **C.1**,on a : $f_2(\alpha)=\alpha$. D'où

$|f_2(x)-\alpha| \leq \frac{1}{4}|x-\alpha|$. En posant$x=u_n$, on a : $|f_2(u_n)-\alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n-\alpha|$

Or $f_2(u_n)=u_{n+1}$. D'où $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n-\alpha|$ (Ce qu'il fallait Démontre).

c- En déduisons que pour tout entier naturel n, $|u_n-\alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

On sait que $\alpha \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right] \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ et $u_0 = 0$

Il vient que : $u_0 - \frac{1}{2} \leq u_0 - \alpha \leq u_0 - 1$

$\Leftrightarrow |u_0-1| \leq |u_0-\alpha| \leq \left|u_0-\frac{1}{2}\right|$

$\Leftrightarrow |u_0-1| \leq |u_0-\alpha| \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow |u_0-\alpha| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |u_0-\alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^0$. D'où la relation est vraie à l'ordre $n=0$

Supposons la relation est vraie à l'ordre n c'est-à-dire $\forall\, n \in \mathbb{N}$; on a :

$|u_n-\alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ Puis montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$ c'est-à-dire $\forall\, n \in \mathbb{N}$;

on a : $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

D'après **Partie C 3) b),** on a : $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n-\alpha|$.

Par suite $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n-\alpha| \leq \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$

D'où $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

Conclusion : tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$.(Ce qu'il fallait Démontre).

Montrons que la suite (u_n), $n \in \mathbb{N}$ converge vers α.

La suite de terme général $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$ est convergente $\forall\, n \in \mathbb{N}$ et converge donc vers 0.

Alors $lim\ |u_n - \alpha| = 0 \Leftrightarrow\ lim\ u_n - \alpha = 0\ \Leftrightarrow lim\ u_n = \alpha$

$n \to +\infty$ $n \to +\infty$ $n \to +\infty$

D'où la suite u_n est convergente et converge vers α

17 On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$

On note (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$d'unité graphique (4 cm).

Partie A : (Etude d'une fonction auxiliaire).

On définie la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$

1) Etudions les variations de g, puis dressons son tableau de variation.

$Dg = [0\ ;\ +\infty[$

$g(0) = 1$ et $lim\ g(x) = lim\ x\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x}\right) = (+\infty)(1 + 0 - \infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$

$g(x) = x + 2 - e^x$ => $g'(x) = 1 - e^x$.

Posons $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1$ => $x < ln1$ => $x < 0$.

Ainsi pour les $x < 0$, on a : $g'(x) > 0$ et pour les $x > 0$, on a : $g'(x) < 0$

Nous en déduisons que $\forall\, x \in [0\ ;\ +\infty[$; g est strictement décroissante.

D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	1	0	$-\infty$

Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et que $1{,}14 < \alpha < 1{,}15$.

D'après le tableau de variation g est définie, continue et strictement décroissante de $[0\,;\ +\infty[$ vers $]-\infty\,;1]$et par conséquent l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α telle que $g(\alpha) = 0$

De plus : $\begin{cases} g(1{,}14) = 0{,}01 \\ g(1{,}15) = -0{,}008 \end{cases}$ => $g(1{,}14) \times g(1{,}15)0 < 0$. Alors d'après le théorème des

valeurs intermédiaires il existe un unique α tel que $1{,}14 < \alpha < 1{,}15$.

2) En déduisons le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

D'après le tableau ci-dessus, $\forall\, x\ ]0\,;\ \alpha[\,;\ g(x) > 0$ et $\forall\, x\ ]\alpha\,;+\infty\,[\,;\ g(x) < 0$

Partie B : (Etude et tracée de f).

1) Montrons que $\forall\, x \in [0\,;\ +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x + 1)^2}$.

$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ => $f'(x) = \frac{e^x(xe^x + 1) - (x+1)e^x \times (e^x - 1)}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x(x + 2 - e^x)}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x + 1)^2}$.

D'où $f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x + 1)^2}$ (Ce qu'il fallait Démontre).

En déduisons le sens de variation de f.

Pour tout x appartenant à $[0\,;\ +\infty[$, $\frac{e^x}{(xe^x + 1)^2} > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend donc du

signe de $g(x)$. Or d'après **partie A) 2)** , on a :

$\forall\, x\ ]0\,;\ \alpha[\,;\ g(x) > 0$. Alors $\forall\, x\ ]0\,;\ \alpha[\,;\ f'(x) > 0$

Et $\forall\, x\ ]\alpha\,;+\infty\,[\,;\ g(x) < 0$. Alors $\forall\, x\ \ ]\alpha\,;+\infty\,[\,;\ f'(x) < 0$

Nous en déduisons ainsi que :

$\forall\, x\ ]0\,;\ \alpha[\,;\ f$ est strictement croissante.

Et

$\forall\, x\ ]\alpha\ ; +\infty\ [\ ;\ f$ est strictement décroissante.

2) a) Montrons que $\forall\, x\ \in\ [0\ ;\ +\infty[\ ;\ f(x) = \frac{1\ -\ e^{-x}}{x\ +\ e^{-x}}$

$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ => $f(x) = \frac{e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(x - \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{x - \frac{1}{e^x}} = \frac{1\ -\ e^{-x}}{x\ +\ e^{-x}}$

b) En déduisons $lim\ f(x)$.

$x\ \rightarrow\ +\infty$

$lim\ f(x) = lim\ \frac{1\ -\ e^{-x}}{x\ +\ e^{-x}} = \frac{1\ -\ 0}{+\infty\ +0} = \frac{1}{+\infty} = 0$

$x\ \rightarrow\ +\infty \quad x\ \rightarrow\ +\infty$

Interprétons graphiquement ce résultat.

Puis que $lim\ f(x) = 0$. Alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la

$x\ \rightarrow\ +\infty$ courbe (C).

3) Montrons que $\forall\, x\ \in\ [0\ ;\ +\infty[, f(\alpha) = \frac{1}{\alpha\ +1}$

D'après **partie A) 1),** on a : $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha\ +\ 2 - e^{\alpha} = 0$ => $e^{\alpha} = \alpha\ +\ 2$

D'autre part, $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ => $f(\alpha\ ) = \frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha\ e^{\alpha} + 1}$

En remplaçant $e^{\alpha} = \alpha\ +\ 2$ par sa valeur dans $f(\alpha\ )$; on a :

$f(\alpha\ ) = \frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha\ e^{\alpha} + 1} = \frac{(\alpha + 2) - 1}{\alpha\ (\alpha + 2) + 1} = \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2} = \frac{1}{\alpha\ +1}$

D'où $\forall\, x\ \in\ [0\ ;\ +\infty[, f(\alpha) = \frac{1}{\alpha\ +1}$ (Ce qu'il fallait Démontre)

Puis déterminons l'équation de la tangente au point $x_0 = 0$

L'équation de la tangente au point $x_0 = 0$ est $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 1(x) + 0 = x$

D'où $y = x$ est l'équation de la tangente au point $x_0 = 0$.

4) Montrons que $f(x) - x = \frac{(x\ +\ 1)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1}$.

$f(x) - x = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} - x = \frac{e^x - 1 - x^2e^x - x}{xe^x + 1} = \frac{e^x(1 - x^2) - (1 + x)}{xe^x + 1}$

$$= \frac{e^x(1-x)(1+x)-(1+x)}{xe^x+1} = \frac{(1+x)[e^x(1-x)-1]}{xe^x+1} = \frac{(x+1)(e^x-xe^x-1)}{xe^x+1}$$

D'où $f(x) - x = \frac{(x+1)(e^x-xe^x-1)}{xe^x+1}$ (Ce qu'il fallait Démontre)

Etudions les variations de la fonction $T(x) = e^x - xe^x - 1$.

$T(x) = e^x - xe^x - 1$

$DT = [0\,;+\infty[$,

$T(0) = 0$

$lim\ T(x) = lim\ e^x - xe^x - 1 = -\infty$

$x \to +\infty \quad x \to +\infty$

$T(x) = e^x - xe^x - 1 \Rightarrow T'(x) = -xe^x$

Pour tout x appartenant à $[0\,;+\infty[$, $e^x > 0$. Alors le signe de $T'(x)$ dépend donc du

Signe de $-x$. Posons $-x = 0 \Rightarrow x = 0$

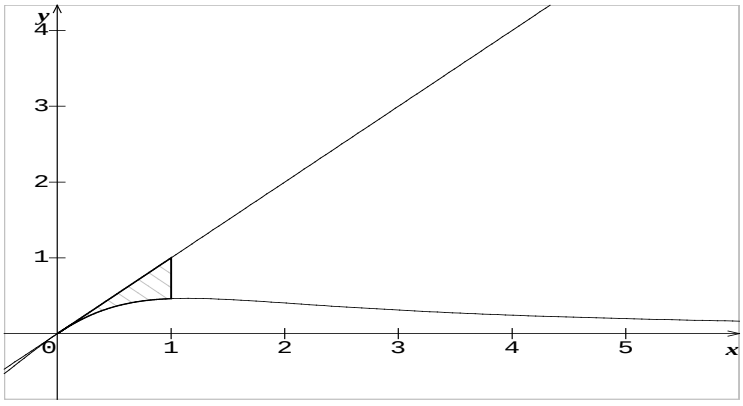
D'où le tableau de signe de $T(x)$ est le suivant :

x	0	$+\infty$
$T(x)$	$-$	

En déduisons la position de (C) par rapport à (T). Trace (C) et (T).

D'après le tableau de signe de T, $\forall x \in [0\,;+\infty[\,;\ T(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) - x \geq 0$

D'où $\forall x \in [0\,;+\infty[$; la courbe (C) est en dessous de la tangente (T).



Partie C :

1) Déterminons une primitive F de f en utilisant la question 2) a) de la **partieB.**

D'après **partie B 2) a)** on a : $\forall\, x \in [0\,;\, +\infty[\,;\, f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$.

Alors si $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$ => $F(x) = ln|x + e^{-x}| + k$

2) Calculons en cm^2 l'aire A du domaine plan limité par (C), la tangente (T) et droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$

A= $(4cm)^2 \int_0^1 f(x)dx = 16cm^2 \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}\, dx = 16cm^2[ln|x + e^{-x}|]_0^1$

$= ln\left(\frac{1+e}{e}\right) \times 16cm^2 = 5,01cm^2$

18 **Partie A :**

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{\imath}\,;\, \vec{\jmath})$ L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = (2 + cosx)e^{1-x}$. On note (C)la courbe représentative de f dans le repère (O,$\vec{i}$, $\vec{j}$) .

1) Montrons que, pour tout x de ℝ : $f(x) > 0$.

La fonction f est définie sur ℝ par : $f(x) = (2 + cosx)e^{1-x}$.

D'autre part $-1 \leq cosx \leq 1$. Donc $2 + cosx > 0$ et $e^{1-x} > 0$

Donc pour tout x de ℝ : $f(x) > 0$. (Ce qu'il fallait Démontre)

2) a- Montrons que, pour tout x de ℝ : $\sqrt{2}cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = cosx + sinx$

$\sqrt{2}cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(cosx \times cos\frac{\pi}{4} + sinx \times sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(cosx \times \frac{\sqrt{2}}{2} + sinx \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2}cosx + \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2}sinx = \frac{2}{2}cosx + \frac{2}{2}sinx = cosx + sinx$

D'où pour tout x de ℝ , $\sqrt{2}cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = cosx + sinx$. (Ce qu'il fallait Démontre)

b) En déduisons que, pour tout x de ℝ : 2 + cos$x$ + sin$x$ > 0

$$2 + \cos x + \sin x = 2 + \sqrt{2}cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left[\frac{2}{\sqrt{2}} + cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left[\sqrt{2} + cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Alors $2 + \cos x + \sin x \geq \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) > 0$

D'où pour tout x de $\mathbb{R}$, $2 + \cos x + \sin x > 0$ (Ce qu'il fallait Démontre)

c- Montrons que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x) = -(2 + \cos x + \sin x)e^{1-x} < 0$.

D'où la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3) a- Montrons que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a : $-1 \leq cosx \leq 1$

$$\Leftrightarrow 2 - 1 \leq 2 + cosx \leq 2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 2 + cosx \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 1 \times e^{1-x} \leq (2 + cosx)e^{1-x} \leq 3e^{1-x}$$

$$\Leftrightarrow e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$$

D'où pour tout x de $\mathbb{R}$: $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$. (Ce qu'il fallait Démontre)

b- En déduisons les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

D'après a), on a : $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$.

$lim\ e^{1-x} = 0$ et $lim\ 3e^{1-x} = 0$

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$

Alors d'après le théorème des gendarmes, on a : $lim\ f(x) = 0$

$x \to +\infty$

De même : $lim\ e^{1-x} = +\infty$ et $lim\ 3e^{1-x} = +\infty$

$x \to -\infty$ $x \to -\infty$

Alors d'après le théorème des gendarmes, on a : $lim\ f(x) = +\infty$

$x \to -\infty$

c- Interprétons géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.

Puis que : $lim\ f(x) = 0$. Alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la

$x \to +\infty$ Courbe (C) de f.

4) a- Montrons que, sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α.

Puis que f est dérivable et strictement décroissante sur $[0\ ;\ \pi]$, alors elle réalise une bijection de $[0\ ;\pi\ ]$ vers $[\ f(\pi);\ f(0)] = [\ e^{1-\pi};\ 3e\ ]$. Or $e^{1-\pi} < 3 < 3e$

Donc l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$

b- Donnons un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

Puisque : $\begin{cases} f(0{,}87) = 3{,}012 > 5 \\ f(0{,}88) = 2{,}973 < 3 \end{cases}$ alors un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} est donnée par

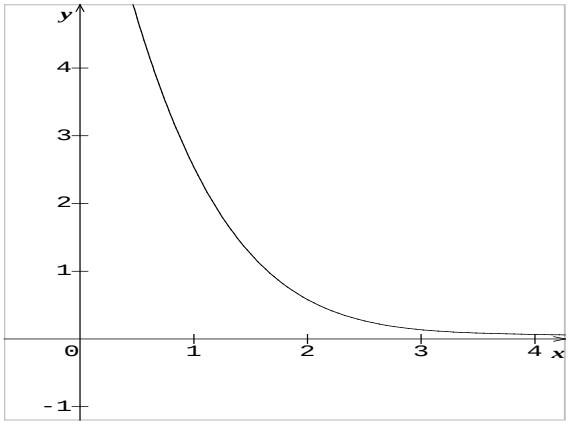
$0{,}87 < \alpha < 0{,}88$

5) Représentons la courbe (C) sur $[0\ ;\ 4]$

Le tableau de variation de f sur $[0\ ;\ 4]$ est donnée par :

x	0		4
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$3e$	↘	0,07

Ainsi la représentation graphique de la courbe (C) sur $[0\ ;\ 4]$ est la suivante :



Partie B :

On veut Calcule l'aire, A, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

1) Montrons que : A $= 2e - 2 + \int_0^1 e^{1-t} costdt$

La fonction f est positive sur $[0 ; 1]$ donc l'aire A est donnée par :

A $= \int_0^1 2e^{1-x}dx = \int_0^1 (2 + cosx)e^{1-x}dx = \int_0^1 2e^{1-x}dx + \int_0^1 cosx \times e^{1-x}dx$

$= [-2e^{1-x}]_0^1 + \int_0^1 cosx \times e^{1-x}dx = -2 + 2e + \int_0^1 cosx \times e^{1-x}dx$. En posant $x = t$, on a :

A $= 2e - 2 + \int_0^1 e^{1-t} costdt$

2) On pose I = $\int_0^1 e^{1-t} Cost\ dt\ et\ J = \int e^{1-t} S\text{int}\ dt$

a- A l'aide de deux intégrations par parties, montrons que :
$I = -cos1 + e - J$ et $J = -sin\ 1 + I$

On a : $I = \int_0^1 Cost\ e^{1-t}dt$, faisons une intégration par parties :

$u(t)$ = Cost => $u'(t) = -sint$

$v'(t) = e^{1-t}$ => $v(t) = -e^{1-t}$

=> $I = [-Coste^{1-t}]_0^1 - \int_0^1 S\text{int}\ e^{1-t}dt$

$= -Cos1 + Cose^1 - J = -Cos\ 1 + e - J$ => I = $-Cos\ 1 + e - J$

De même, on intègre par parties J en posant :

$w(t) = Sint$ => $w'(t) = cost$

$v'(t) = e^{1-t}$ => $v(t) = -e^{1-t}$

=> J = $\left[-S\text{int}\ e^{1-t}\right]_0^1 + \int_0^1 Cost\ e^{1-t}dt = -Sin\ 1.e^{\circ} + I = -sin\ 1 + I$

D'où $J = -Sin\ 1 + I$

b) En déduisons la valeur de I

Des relations précédentes obtenues, on en déduit :

$I = -cos\,1 + e - J = -Cos\,1 + e + sin\,1 - I \Rightarrow$

$2I = sin\,1 - Cos\,1 + e \Rightarrow I = \frac{1}{2}(sin\,1 - Cos\,1 + e)$

3) Déterminons la valeur exacte de A en unité d'aire puis donnons une valeur approchée de A à 10^{-2} près.

On obtient finalement $A = -2 + 2e + I = -2 + \frac{5}{2}e + \frac{1}{2}(sin\,1 - Cos\,1)$ et une valeur approchée de A par défaut est A = 4,94 $(u.a)$.

Partie C :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -1 - \frac{sinx}{2 + cosx}$.

1) a- Montrons que h admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -1 - \frac{sinx}{2 + cosx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminons la primitive de H de h qui prend la valeur $1 + ln3$ en 0.

On sait que $\forall x \in \mathbb{R};\ 2 + cosx > 0$ et $h(x) = -1 - \frac{sinx}{2 + cosx}$.

$\Rightarrow H(x) = ln\,(2 + cosx) - x + k$

Si cette fonction prend la valeur $1 + ln\,3$ en 0 alors $H(x) = 1 - x + ln\,(2 + cosx)$

1) a- Déterminons $ln\,(f(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) > 0$ et l'on obtient :

$ln\,(f(x)) = ln[(2 + cosx)e^{1-x}] = ln\,(2 + cosx) + lne^{1-x} = 1 - x + ln\,(2 + cosx)$

$= H(x)$

b) Etudions le sens de variation de la fonction H

On a peut résumer les variations de H dans le tableau suivant :

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 0
$H(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$

Alors $\forall x \in \mathbb{R};\ H$ est strictement décroissante.

3) a-Soit (Γ) la courbe de la fonction $x \to 1 - x + ln\,(2 + cosx)$ et soit (Δ) la droite d'équation $y = -x + 1$. Etudions la position relative du (Γ) et de (Δ)

Pour étudier la position relative de (Γ) et (Δ), on étudie le signe de $H(x) - y$.

Posons $H(x) - (-x + 1) > 0 \Leftrightarrow 2 + cosx \geq 2 - 1 = 1$

Alors on obtient : $H(x) - (-x + 1) \geq 0$ et par conséquent (Γ) est au dessus de (Δ).

b) Déterminons les abscisses des points communs à Γ et Δ

Posons $H(x) - y = 0 \Leftrightarrow H(x) - (-x + 1) = 0 \Leftrightarrow ln(2 + cosx) = 0$

$\Leftrightarrow cosx = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

4) a- Equation de la tangente à (Γ) en 0

$y = H'(0)(x - 0) + H(0) \Rightarrow y = -x + 1 + ln3$.

b) Etude de la position de (Γ) et la tangente (T)

Etudions le signe de $H(x) - (-x + 1 + ln3)$

$H(x) - (-x + 1 + ln3) = ln\,(2 + cosx) - ln3$

Soit puisque $2 + cosx \leq 2 + 1 = 3 \Leftrightarrow ln\,(2 + cosx) \leq ln3$. Alors on a :
$H(x) - (-x + 1 + ln3) \leq 0$. Et par suite, la courbe (Γ) est au dessus de (T)

5) Montrons que la courbe (Γ) est contenue dans une bande du plan limitée par deux droites parallèles dont on Donnera des équations :

On sait que $\forall x \in \mathbb{R};\ 1 \leq 2 + cox \leq 3$. Alors en appliquant la fonction ln sur l'inégalité, on obtient :

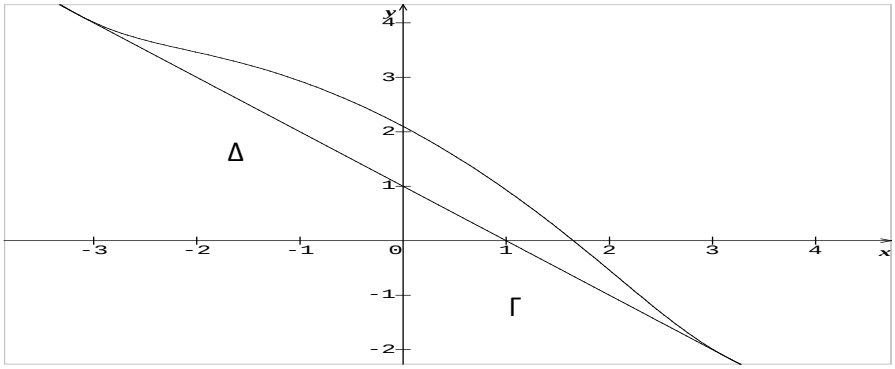
$ln1 \leq ln(2 + cox) \leq ln3$

$\Leftrightarrow \quad 0 \leq ln(2 + cox) \leq ln3$

$\Leftrightarrow \quad 1 - x \leq 1 - x + ln(2 + cox) \leq 1 - x + ln3$

$\Leftrightarrow \quad 1 - x \leq H(x) \leq 1 - x + ln3$

Donc la courbe (Γ) est contenue dans la bande limité sur les deux droites parallèles (Δ) et (Γ)



19 **Partie A :**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{10e^x}{e^x + 4}$. On note (C)la courbe représentative de f dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ ($Unité\ graphique\ 1\ cm$).

1) a- Déterminons la limite de f en $-\infty$.

$$lim\ f(x) = lim\ \frac{10e^x}{e^x + 4} = lim\ \frac{10(0)}{0 + 4} = \frac{0}{4} = 0$$

$x \to -\infty \qquad x \to -\infty \qquad x \to -\infty$

En écrivant $f(x) = 10 - \frac{40}{e^x + 4}$; déterminons la limite de f en $+\infty$.

$$lim\ f(x) = lim\ 10 - \frac{40}{e^x + 4} = lim\ \ 10 - \frac{40}{e^x} = 10 - 0 = 10$$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

En déduisons l'équation des asymptotes à la courbe (C)

$lim\ f(x) = 0$

$x \to -\infty$

Alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe (C) en $-\infty$

$lim\ f(x) = 10$. Alors la droite d'équation $y = 10$ est asymptote horizontale à la courbe (C)

$x \to +\infty$ en $+\infty$

b- Calculons la dérivée f'de la fonction f puis dressons le tableau de variation de f.

$f(x) = \frac{10e^x}{e^x + 4}$ => $f'(x) = \frac{10e^x(e^x + 4) - e^x \times 10e^x}{(e^x + 4)^2} = \frac{10e^x(e^x + 4 - e^x)}{(e^x + 4)^2} = \frac{40e^x}{(e^x + 4)^2} > 0$

D'où $\forall\ x \in\ D_f$; f est strictement croissante et le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 ⟶ 10

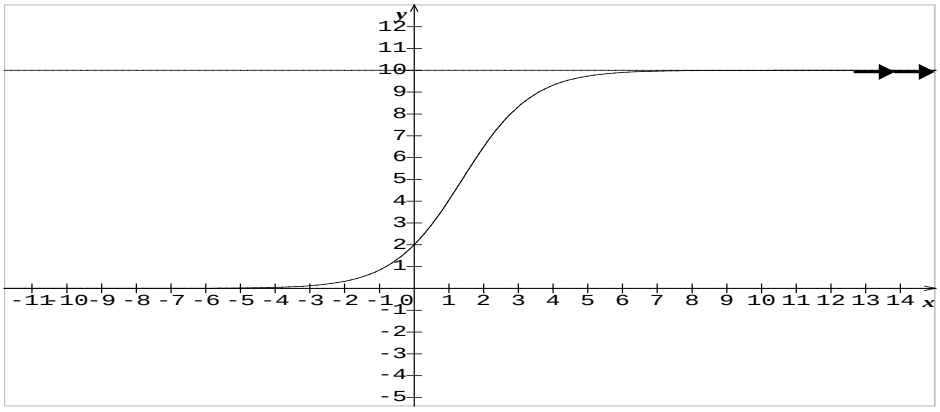
2) Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $ln4$.

L'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $ln4$ est donnée par :

$y = f'(ln4)(x - ln4) + f(ln4)$ => $y = \frac{5}{2}(x - ln4) + 5 = \frac{5}{2}x - 5ln2 + 5$

D'où la tangente (T) a pour équation : $y = \frac{5}{2}x - 5ln2 + 5$

3) Traçons sur un même graphique la courbe (C) ; ces asymptotes et la tangente (T).



Partie B :

Une entreprise fabrique un certain produit P. On appelle x le nombre de tonnes de produit fabriquées.

On note $C(x)$ leur coût total de fabrication, exprimé en milliers d'euros.

La fonction coût marginal, C' est la dérivée de la fonction C.

Pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, on a $C'(x) = f(x)$; où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.

De plus , on suppose qu'il n'ya pas de charges fixes, donc que $C(0) = 0$.

1) a- Montrons que le coût total est donnée par $C(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, on a : $C'(x) = f(x)$. Intégrons cette égalité sur $[0\ ; x]$; alors on a :

$\int_0^x C'(x)dt = \int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow [C(t)]_0^x = \int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow C(x) - C(0) = \int_0^x f(t)dt.$

Or $C(0) = 0$. D'où $C(x) = \int_0^x f(t)dt$. (Ce qu'il fallait Démontre).

b- Exprimons $C(x)$ en fonction de x.

$C(x) = \int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow C(x) = \int_0^x \frac{10e^t}{e^t + 4}dt = 10\int_0^x \frac{e^t}{e^t + 4}dt = 10[ln(e^t + 4)]_0^x$

$= 10ln(e^x + 4) - 10ln5 = 10[ln(e^x + 4) - ln5] = 10ln\left(\frac{e^x + 4}{5}\right)$

c- Déterminons le coût total de 5 tonnes de ce produit P

(On Donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à la dizaine d'euros près).

Le coût total de 5 tonnes du produit P est donnée par $C(5) = 10ln\left(\frac{e^5 + 4}{5}\right) = 34{,}17$euros.

2) On appelle $C_m(x)$, le coût moyen défini, pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$ par $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$

a- Exprimons $C_m(x)$, en fonction de x.

$C_m(x) = \frac{C(x)}{x} \Rightarrow C_m(x) = \frac{10ln\left(\frac{e^x + 4}{5}\right)}{x} = \frac{10}{x}ln\left(\frac{e^x + 4}{5}\right)$

b- Vérifions que, pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[\ ;\ C_m(x) = 10 + \frac{10ln(1 + 4e^{-x})}{x} - \frac{10ln5}{x}$

$C_m(x) = \frac{10ln\left(\frac{e^x + 4}{5}\right)}{x} = \frac{10ln(e^x + 4) - 10ln5}{x} = \frac{10ln\left[e^x\left(1 + \frac{4}{e^x}\right)\right] - 10ln5}{x}$

$= \frac{10lne^x + ln(1+4e^{-x}) - 10ln5}{x} = \frac{10x + ln(1+4e^{-x}) - 10ln5}{x} = 10 + \frac{10ln(1+4e^{-x})}{x} - \frac{10ln5}{x}$

D'où pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$; $on\ a:\ C_m(x) = 10 + \frac{10ln(1+4e^{-x})}{x} - \frac{10ln5}{x}$

c- En déduisons la limite de $C_m(x)$ en $+\infty$.

$lim\ C_m(x) = lim\ 10 + \frac{10ln(1+4e^{-x})}{x} - \frac{10ln5}{x} = 10 + 0 - 0 = 10$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

20 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$, unité graphique : 2 cm.

Partie A :

1) Soit g la fonction numérique définie sur $]-\pi\ ;0[$ par $g(x) = cox^2x + cosx - 1$.

a) Montrons que g est dérivable sur $]-\pi\ ;0[$ et que $g'(x) = -(1+2cosx)sinx$.

g est la somme de deux fonctions dérivables sur $]-\pi\ ;0[$, alors g est donc dérivable sur $]-\pi\ ;0[$.

$g(x) = cox^2x + cosx - 1 \Rightarrow g^{'(x)} = 2(-sinx)cosx - sinx = -2sinxcosx - sinx = -(1+2cosx)sinx$.

D'où $g'(x) = -(1+2cosx)sinx$.

b) En déduisons que $g'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \left]-\pi\ ;-\frac{2\pi}{3}\right]$ et que $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}\ ;0\right[$.

$\forall x \in]-\pi\ ;0[\ , -sinx > 0$ alors le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $1+2cosx$. Posons $1+2cosx = 0 \Leftrightarrow cosx = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow cosx = -cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow cosx = cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$.

Or $cos\alpha = cos\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \quad ou \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc $cosx = cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi \\ \quad ou \\ x = -\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \quad ou \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

Puisque $x \in]-\pi\ ;0[$, alors la seule valeur à retenir est $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

Etudions ainsi le signe de $1+2cosx$ sur $\left]-\pi\ ;-\frac{2\pi}{3}\right]$ et sur $\left[-\frac{2\pi}{3}\ ;0\right[$.

Sur $\left]-\pi\,;-\frac{2\pi}{3}\right]$, on a : $-\pi < x \leq -\frac{2\pi}{3}$ $\Leftrightarrow$ $cos(\pi) < cosx \leq -cos\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow$ $cos(-\pi) < cosx \leq cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ $\Leftrightarrow$ $-1 < cosx \leq -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ $cos(\pi) < cosx \leq cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ $\Leftrightarrow$ $-2 < 2cosx \leq -1$

$\Leftrightarrow$ $cos(\pi) < cosx \leq cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ $\Leftrightarrow$ $-1 < 1 + 2cosx \leq 0$

Donc $\forall x \in \left]-\pi\,;-\frac{2\pi}{3}\right], 1 + 2cosx \leq 0$

Etudions ainsi le signe de $1 + 2cosx$ sur $\left[-\frac{2\pi}{3}\,;0\right[$

Sur $\left[-\frac{2\pi}{3}\,;0\right[$, on a : $-\frac{2\pi}{3} \leq x < 0$ $\Leftrightarrow$ $-cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq cosx < cos(0)$

$\Leftrightarrow$ $cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \leq cosx < cos(0)$ $\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{2} \leq cosx < 1$

$\Leftrightarrow$ $cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \leq cosx < cos(0)$ $\Leftrightarrow$ $-1 \leq 2cosx < 2$

$\Leftrightarrow$ $cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \leq cosx < cos(0)$ $\Leftrightarrow$ $0 \leq 1 + 2cosx < 3$

Donc $\forall x \in \left[-\frac{2\pi}{3}\,;0\right[, 1 + 2cosx \geq 0$

Par conséquent $g'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \left]-\pi\,;-\frac{2\pi}{3}\right]$ et $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}\,;0\right[$.

c) Dressons le tableau de variation de g.

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		β		0
$-sinx$		$+$		$+$		$+$	
$1 + 2cosx$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$	-1	↘	$-\frac{5}{4}$	↗	0	↗	1

2) a) Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β sur $\left]-\pi\,;0\right[$ et

que $\in \left]-\frac{\pi}{3}\,;-\frac{\pi}{4}\right[$.
D'après le tableau de variation de g, on a :

- Pour tout $x \in \left]-\pi\,;-\frac{2\pi}{3}\right]$, g est définie continue et strictement décroissante sur $\left]-\pi\,;-\frac{2\pi}{3}\right]$. Donc g réalise une bijection de $\left]-\pi\,;-\frac{2\pi}{3}\right]$ vers $g\left(\left]-\pi\,;-\frac{2\pi}{3}\right]\right) = \left[-\frac{5}{4}\,;\,-1\right[$. Comme $0 \notin \left[-\frac{5}{4}\,;\,-1\right[$, alors l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $\left]-\pi\,;-\frac{2\pi}{3}\right]$.

- Pour tout $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}\,;0\right[$, g est définie continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{2\pi}{3}\,;0\right[$. Donc g réalise une bijection de $\left[-\frac{2\pi}{3}\,;0\right[$ vers $g\left(\left[-\frac{2\pi}{3}\,;0\right[.\right) = \left[-\frac{5}{4}\,;\,1\right[$. Comme $0 \in \left[-\frac{5}{4}\,;\,-1\right[$, alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β dans $\left[-\frac{2\pi}{3}\,;0\right[$

Montrons que $\beta \in \left]-\frac{\pi}{3}\,;-\frac{\pi}{4}\right[$

$$\begin{cases} g\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4} \\ \quad et \\ g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \end{cases} \Rightarrow g\left(-\frac{\pi}{3}\right) \times g\left(-\frac{\pi}{4}\right) < 0.$$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\beta \in \left]-\frac{\pi}{3}\,;-\frac{\pi}{4}\right[$

Conclusion :
L'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β sur $\left]-\pi\,;0\right[$ avec $\beta \in \left]-\frac{\pi}{3}\,;-\frac{\pi}{4}\right[$.

b) En déduisons le signe de g sur $\left]-\pi\,;0\right[$

De ce qui précède et d'après le tableau de variation de g, on a :
- Pour tout $x \in \left]-\pi\,;\beta\right[$, $g(x) < 0$.
- Pour tout $x \in \left]\beta\,;0\right[$, $g(x) > 0$.
- Pour $x = \beta$, $g(x) = 0 \Leftrightarrow g(\beta) = 0$

Partie B :
Soit f la fonction numérique définie sur $\left]-\pi\,;+\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2sin(2x)}{1+cosx} + \frac{1}{2} \quad si\ x \in \left]-\pi\,;0\right] \\ \quad et \\ f(x) = 2 - \frac{3}{e^{3x}+1} \quad si\ x \in \left]0\,;+\infty\right[\end{cases}$$

On note (Cf)la courbe représentative de f.

1) Etudions la continuité de f en 0.

f est continue en 0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

Continuité à gauche :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{2sin(2x)}{1+cosx} + \frac{1}{2}\right) = \frac{2(0)}{1+0} + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Continuité à droite :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(2 - \frac{3}{e^{3x}+1}\right) = 2 - \frac{3}{1+1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Puis que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = \frac{1}{2}$. Alors f est continue en 0.

2) Etudions la dérivabilité de f en 0.

f est continue en 0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

Dérivabilité à gauche :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{2sin(2x)}{1+cosx} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2sin(2x)}{x(1+cosx)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{4sinxcosx}{x(1+cosx)}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} 4\frac{sinx}{x} \times \frac{cosx}{1+cosx} = 4 \times 1 \times \frac{1}{2} = 2$$

Donc $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2$

Dérivabilité à droite:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2 - \frac{3}{e^{3x}+1} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{3}{2} - \frac{3}{e^{3x}+1}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{3}{2}\left(1 - \frac{2}{e^{3x}+1}\right)}{x}$$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{3}{2} \times \frac{e^{3x}-1}{x(e^{3x}+1)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{9}{2} \times \frac{e^{3x}-1}{3x} \times \frac{1}{e^{3x}-1} = \frac{9}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$

Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{9}{4}$

Puis que $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Alors f n'est pas dérivable en 0.

En déduisons une interprétation géométrique des résultats obtenus.

La courbe (Cf) admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes (T_1) et (T_2) de coefficients directeurs respectifs 2 à gauche de 0 et $\frac{9}{4}$ à droite de 0.

3) a) Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{3}{e^{3x}+1}\right) = 2 - 0 = 2$

b) Montrons que pour tout $x \in]-\pi\,;0[$, on a : $f(x) = \frac{4(1-cosx)sinxcosx}{1-cos^2x} + \frac{1}{2}$

$f(x) = \frac{2sin(2x)}{1+cosx} + \frac{1}{2} = \frac{1-cosx}{1-cosx} \times \left(\frac{2sin(2x)}{1+cosx}\right) + \frac{1}{2} = \frac{(1-cosx)(2sin2x)}{(1-cosx)(1+cosx)} + \frac{1}{2}$
$= \frac{(1-cosx)(4sinxcosx)}{1-cos^2} + \frac{1}{2}$

En déduisons $\lim\limits_{x \to -\pi} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\pi} \left(\frac{4(1-cosx)sinxcosx}{1-cos^2x} + \frac{1}{2}\right) = \lim\limits_{x \to -\pi} \left(\frac{4(1-cosx)sinxcosx}{sin^2x} + \frac{1}{2}\right)$

$= \lim\limits_{x \to -\pi} \left(\frac{4(1-cosx)cosx}{sinx} + \frac{1}{2}\right) = \frac{-8}{0} + \frac{1}{2} = +\infty$

c) En déduisons les asymptotes de la courbe (Cf).

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$. Alors la droite **d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale**

$lim\ f(x) = +\infty$. Alors la droite **d'équation $x = -\pi$ est asymptote verticale**
$x \to -\pi$

4) a) Calculons $f'(x)$ pour tout $x \in]0\ ;+\infty[$

Pour tout $x \in]0\ ;+\infty[$, on a : $f(x) = 2 - \frac{3}{e^{3x}+1}$ => $'(x) = \frac{3e^{3x}}{\left(e^{3x}+1\right)^2} > 0$.

En déduisons le sens de variation de f sur $]0\ ;+\infty[$.

De ce qui précède, on en déduit que $\forall x \in]0\ ;+\infty[$, f est strictement croissante.

b) Montrons que pour tout $x \in \left]-\pi\ ;0\right[$, on a : $f'(x) = \frac{4g(x)}{1+cosx}$

Pour tout $x \in \left]-\pi\ ;0\right[$, on a : $f(x) = \frac{2sin(2x)}{1+cosx} + \frac{1}{2}$

$=> f'(x) = 2 \times \frac{2cos2x(1+cosx)+sinx(sin2x)}{(1+cosx)^2} = 2 \times \frac{2cos^3x+4cos^2x-2}{(1+cosx)^2} = 4 \times \frac{cos^3x+2cos^2x-1}{(1+cosx)^2}$
La forme factorisée de $cos^3x + 2cos^2x - 1$ en posant $cosx = X$, on a :
$X^3 + 2X^2 - 1 = (X+1)(X^2+X-1)$

Donc pour tout $x \in \left]-\pi\ ;0\right[$, $f'(x) = 4 \times \frac{(cosx+1)\left(cos^2x+cosx-1\right)}{(1+cosx)^2}$
$= 4 \times \frac{g(x)}{(1+cosx)^2} = \frac{4g(x)}{(1+cosx)^2}$

En déduisons le sens de variation de f sur $\left]-\pi\ ;0\right[$.

Pour tout $x \in \left]-\pi\ ;0\right[$, $\frac{4}{(1+cosx)^2} > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe $g(x)$.

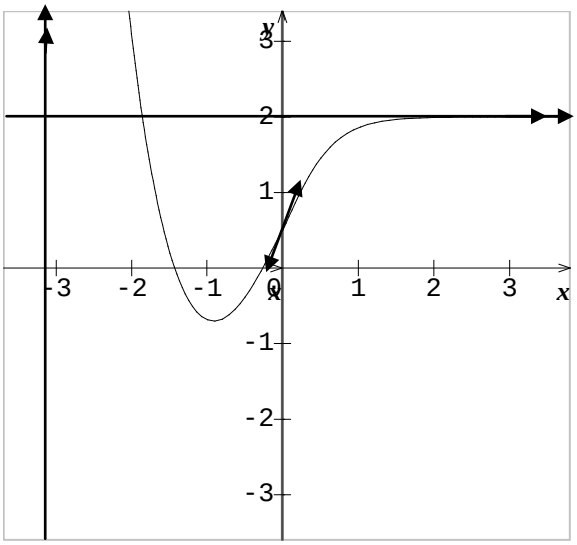
Or d'après **Partie A 2) b)** , on a :

- Pour tout $x \in \left]-\pi\ ;\beta\right[$, $g(x) < 0$ => $\forall x \in \left]-\pi\ ;\beta\right[$, $f'(x) < 0$
- Pour tout $x \in]\beta\ ;0[$, $g(x) > 0$ => $\forall x \in]\beta\ ;0[$, $f'(x) > 0$

c) Dressons le tableau de variation de f sur $]-\pi\ ;+\infty[$.

x	$-\pi$		β		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$			
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\beta)$	↗	$\frac{1}{2}$	↗	2

5) Construisons la courbe (Cf), ses asymptotes et ses demi-tangentes au point d'abscisse 0.



Partie C :

On admet que tout $x \in [1{,}5\ ;\ 2]$, on a : $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$ $(\boldsymbol{R})$.

1) Soit h la fonction numérique définie sur $[1{,}5\ ;\ 2]$ par : $h(x) = f(x) - x$.

Etudions les variations de h

$\forall\, x \in [1{,}5\ ;\ 2]$, $h(x) = f(x) - x$. h est dérivable sur $[1{,}5\ ;\ 2]$ comme somme de deux fonctions dérivables sur .

$h(x) = f(x) - x$ => $h'(x) = f'(x) - 1$. Or $'(x) \leq \frac{1}{2} < 1$. D'où $h'(x) < 0$ et par conséquent h est strictement décroissante sur $[1{,}5\ ;\ 2]$.

En déduisons que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [1{,}5\ ;\ 2]$.

$$\begin{cases} h(1{,}5) = f(1{,}5) - 1{,}5 = 0{,}5 - \frac{3}{e^{4{,}5}+1} \approx 0{,}45 \\ \qquad\qquad et \qquad\qquad\qquad \Rightarrow \quad h(1{,}5) \times h(2) < 0. \\ h(2) = f(2) - 2 = -0{,}007 = -7.10^{-3} \end{cases}$$

h est continue et strictement décroissante sur $[1{,}5\ ;\ 2]$. Alors h réalise une bijection de $[1{,}5\ ;\ 2]$ sur $h([1{,}5\ ;\ 2]) = [-7 \bullet 10^{-3}\ ;\ 0{,}45]$. $0 \in [-7 \bullet 10^{-3}\ ;\ 0{,}45]$, donc 0 admet un antécédent unique $\alpha \in [1{,}5\ ;\ 2]$ telque $h(\alpha) = 0$ et par conséquent l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α. Or $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$.

D'où pour tout $x \in [1{,}5\ ;\ 2]$, $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [1{,}5\ ;\ 2]$

2) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 1{,}5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1{,}5\ ;\ 2]$. (On pourra utiliser la relation $(\boldsymbol{R})$**)**

Soit P_n la propriété : $\forall\ n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n \in [1{,}5\ ;\ 2]$.

- Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 1{,}5 \in [1{,}5\ ;\ 2]$. D'où P_0 vraie.
- Supposons P_n vraie et montrons P_{n+1} vraie : Puisque $u_n \in [1{,}5\ ;\ 2]\ ;\ \alpha \in [1{,}5\ ;\ 2]$ et pour tout $x \in [1{,}5\ ;\ 2]$; on a : $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

Supposons $\boldsymbol{u_n \leq\ \alpha}$, alors on a : $\int_{u_n}^{\alpha} 0\ dx \leq \int_{u_n}^{\alpha} f'(x)\ dx \leq \int_{u_n}^{\alpha} \frac{1}{2} dx \Leftrightarrow$

$$0 \leq [f(x)]_{u_n}^{\alpha} \leq \left[\frac{1}{2}x\right]_{u_n}^{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$0 \leq f(\alpha) - f(u_n) \leq \frac{1}{2}(\alpha - u_n) \Leftrightarrow$$

$0 \leq \alpha - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(\alpha - u_n) \Leftrightarrow$

$\alpha \leq \alpha - u_{n+1} + \alpha \leq \frac{1}{2}(u_n - \alpha) + \alpha \Leftrightarrow$

$\alpha \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n + \alpha)$. Or $u_n \leq 2$ et $\alpha \leq 2$ => $u_n + \alpha \leq 4$. Donc :

$1{,}5 \leq \alpha \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n + \alpha) \leq 2$ => $1{,}5 \leq u_{n+1} \leq 2$

Ainsi $u_{n+1} \in [1{,}5\ ;\ 2]$ et par conséquent P_{n+1} vraie.

Supposons maintenant $\boldsymbol{u_n \geq\ \alpha}$, alors on a :

$\int_{\alpha}^{u_n} 0\ dx \leq \int_{\alpha}^{u_n} f'(x)\ dx \leq \int_{\alpha}^{u_n} \frac{1}{2} dx \Leftrightarrow$

$0 \leq [f(x)]_{\alpha}^{u_n} \leq \left[\frac{1}{2}x\right]_{\alpha}^{u_n} \Leftrightarrow$

$0 \leq f(u_n) - f(\alpha) \leq \frac{1}{2}(u_n - \alpha) \Leftrightarrow$

$0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{1}{2}(u_n - \alpha) \Leftrightarrow$

$\alpha \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n + \alpha)$. Or $u_n \leq 2$ et $\alpha \leq 2$ => $u_n + \alpha \leq 4$. Par suite :

$1{,}5 \leq \alpha \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n + \alpha) \leq 2$ => $1{,}5 \leq u_{n+1} \leq 2$

De même $u_{n+1} \in [1{,}5\ ;\ 2]$ et par conséquent P_{n+1} vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1{,}5\ ;\ 2]$.

b) Montrons que $\forall\ n\ \in\ \mathbb{N}^*$; on a : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$ et que :

$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Pour tout $x \in [1{,}5\ ;\ 2]$; on a : $f'(x) \leq \frac{1}{2}$ et f' est continue sur $[1{,}5\ ;\ 2]$; de même :

$u_n \in [1{,}5\ ;\ 2]$; $\alpha \in [1{,}5\ ;\ 2]$. D'après l'inégalité de la moyenne on a :

$\left|\int_{\alpha}^{u_{n-1}} f'(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$. Soit $|f(u_{n-1}) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha| \Leftrightarrow$

$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$

Considérons la propriété P_n la propriété : $\forall\ n \in \mathbb{N}$; $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$.

- Pour $n = 0$, on a : $|u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^0}|u_0 - \alpha|$. D'où P_0 vraie.

- Supposons P_n vraie et montrons P_{n+1} vraie :

On a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$. Or $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$

=> $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|\right)$

=> $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|u_0 - \alpha|$ et par conséquent P_{n+1} vraie.

Par suite $\forall\ n \in \mathbb{N}$; $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$.

c) En déduisons par récurrence que $\forall\ n\ \in \mathbb{N}^*$, on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

De ce qui précède on a : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$.

D'autre part on a : $1{,}5 \leq \alpha \leq 2 \Leftrightarrow$

$-2 \leq -\alpha \leq -1{,}5 \Leftrightarrow$

$u_0 - 2 \leq u_0 - \alpha \leq u_0 - 1{,}5$. Or $u_0 = 1{,}5$

$-0{,}5 \leq u_0 - \alpha \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq u_0 - \alpha \leq 0$

⇨ $|u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$.

Ce qui donne alors $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} \bullet \frac{1}{2} \Leftrightarrow |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

d) En déduisons que la suite (u_n) est convergente.

On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$: $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

⇨ $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

D'où (u_n) est convergente et converge vers α.

e) Déterminons un entier p tel que pour $n \geq p$ on ait : $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$

On sait que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Pour avoir $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$; il suffit d'avoir $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 10^{-3}$. Or $a^p = e^{plna}$

=> $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow e^{(n+1)ln\frac{1}{2}} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow ln\left[e^{(n+1)ln\frac{1}{2}}\right] \leq ln10^{-3}$

$\Leftrightarrow (n+1)ln\frac{1}{2} \leq -3ln10 \Leftrightarrow -(n+1)ln2 \leq -3ln10 \Leftrightarrow (n+1)ln2 \geq 3ln10$

=> $n + 1 \geq \frac{3ln10}{ln2} \Leftrightarrow n \geq \frac{3ln10}{ln2} - 1 \Leftrightarrow n \geq \frac{3\times 2{,}30}{0{,}69} - 1$

=> $n \geq 9$

D'où $p = 9$ => $|u_9 - \alpha| \leq 10^{-3}$

Remarque : u_9 est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Suites numériques

OBJECTIFS :
Ce thème vise à :
• étudier le comportement global d'une suite numérique (majoration, minoration, convergence, variations) ;
• mettre en œuvre le raisonnement par récurrence ;
• Donne des outils pour traiter des problèmes d'approximation.

Commentaires

Les suites bornées et suites monotones sont nouvelles en Terminale.
En Première, la notion de limite de fonction a été introduite de façon intuitive. De même, ici on pourra s'appuyer sur l'utilisation de la calculatrice et des graphiques pour introduire la notion de convergence d'une suite. On peut faire comprendre à l'élève :
• que pour certaines suites, tous les termes à partir d'un certain rang, sont aussi proches que l'on veut d'un nombre réel a ;
• que pour d'autres suites, les termes à partir d'un certain rang, prennent des valeurs aussi grandes que l'on veut ;
• qu'il existe des suites qui ont des comportements irréguliers.
On apprendra à l'élève à mettre en œuvre un raisonnement par récurrence. Ce type de raisonnement sera suggéré dans l'énoncé des exercices et des évaluations, lorsque son utilisation est indispensable.
Les suites géométriques permettront d'établir la convergence de certaines suites en utilisant des majorations. Dans le cas notamment des suites définies par récurrence, on pourra majorer $|u_n - a|$, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis ; toute étude de ce type de suites devra comporter des indications sur la méthode à suivre.
L'étude des suites sera étroitement liée à celle des fonctions. Ainsi, pour Donne des approximations des valeurs attachées à des fonctions, on utilisera des suites (méthode du point fixe). Le calcul différentiel ou les propriétés asymptotiques de certaines fonctions permettront de conclure sur le comportement des suites.
Le calcul d'une valeur approchée d'une intégrale sera aussi un moyen de mettre eu œuvre des suites.

Volume horaire : 16 heures

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Suites monotones • Suites majorées, minorées, bornées • Suites convergentes : - Notion de convergence. - Unicité de la limite (admise) - Toute suite croissante et majorée converge - Toute suite décroissante et minorée converge.	• Démontre qu'une suite est monotone : - Par comparaison de deux termes généraux consécutifs ; - Par l'étude des variations d'une fonction ; - Par un raisonnement par récurrence. • Démontre qu'une suite est majorée et/ou minorée : - Par un calcul direct ;

- Si f est une fonction numérique telle que $\lim_{n\to+\infty} f(x) = l$ alors la suite définie par $u_n = f(n)$ converge vers l. • si (u_n) est une suite convergeant vers a et f une fonction continue en a alors la suite $v_{n=f(u_n)}$converge vers f(a). • Convergence des suites géométriques (suites du type (a^n)). • Suites divergentes • Convergence des suites géométriques et des suites du type n^α • Suites divergentes • Théorèmes de comparaison : Soient les suites (v_n) et (u_n) 1) Si à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n$ et si (v_n) tend vers $+\infty$, alors (u_n) tend vers $+\infty$. 2) Si à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n$ et si (u_n) tend vers $-\infty$, alors (v_n) tend vers $-\infty$. 3) Si à partir d'un certain rang, $\lvert v_n - l\rvert \leq u_n$ et si (u_n)tend vers 0, alors (v_n) tend vers l. 4) Si a partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si (v_n) et (w_n) tend vers l, alors (u_n) tend vers l. 5) Si à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n$ et (u_n) tend vers l et (v_n) tend vers l'alors $l' \leq l$. •suites (a^n) et (n^α). Croissance comparée Limites et comportements asymptotiques comparés des suites (In n) ; (a^n), $a > 0$ et (n^α), $\alpha > 0$. Suites récurrentes définies par une relation du type : $u_{n+1} = f(u_n)$. Soit (u_n) une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers l et si f est continue en l alors $f(l) = l$.	- Par l'étude des variations d'une fonction ; - Par un raisonnement par récurrence. • Démontre qu'une suite est convergente ou divergente par : - L'étude du comportement d'une fonction ; - L'utilisation des opérations sur les limites ; - L'utilisation des théorèmes de comparaison. •conjecturer à partir d'une représentation graphique et comportement d'une suite récurrente.

Remarques et suggestions

Le programme de Première a pour objectif de permettre aux élèves de se familiariser avec le concept de suite numérique. Il n'en reste pas moins vrai que l'acquisition de ces notions reste à consolider en terminale, en particulier, les notions de suites arithmétiques et géométriques.
On doit d'abord considérer qu'en classe de terminale, il est utile, voir indispensable, de retravailler les notions de base.
On traitera sur des exemples guidés quelques méthodes de recherches de solution approchées d'une équation numérique (dichotomie, tangente, interpolation linéaire…) et de calcul approché d'une intégrale.
Dans le cas de l'approximation d'un point fixe a de f, on soulignera l'intérêt (théorique et numérique) d'une inégalité de type $|f(x) - a| \leq k|x - a|$, où $0 < k < 1$.
Pour la recherche de la convergence d'une suite numérique, on veillera à choisir des exemples ne posant pas de difficultés majeures et a apporter dans les énoncés toutes les indications utiles à cette étude. On insistera également sur les méthodes d'étude de convergence (étude du comportement d'une fonction, opérations sur les limites, théorèmes de comparaison).

I- Généralité :

1) Définition :

On appelle suite numérique toute fonction définie de $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On note

U : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \to u(n) = u_n$

2) Mode de définition d'une suite :

-Une suite peut être définie par une formule explicite c'est-à-dire u_n en fonction de n :

$u_n = f(n)$.

Exemple : $u_n = n + 3$; $v_n = \frac{2n-4}{n+1}$; $w_n = 4n^2 - 3n + 1$

-Une suite peut être définie par son 1er terme et une formule de récurrence, c'est-à-dire u_{n+1} s'exprime en fonction de u_n.

Exemple : Soit la suite : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + 4 \end{cases}$

3) Sens de variation d'une suite

- Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ alors u_n est croissante
- Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ alors u_n est décroissante
- Si $u_{n+1} - u_n = 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ alors u_n est constante

4) Représentation des termes d'une suite :

Pour représenter les termes d'une suite u_n sur l'axe des abscisses, on trace la 1ère bissectrice (D) d'équation $y = x$. Ainsi on trace la fonction associée à la suite u_n en posant $u_n = x$ et $u_{n+1} = f(x)$. On détermine les termes de la suite sur l'axe des abscisses par projection.

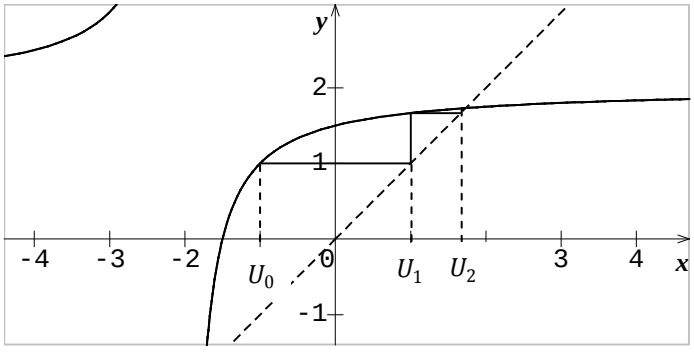
Exemple : Soit (u_n) définie Par : $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{3+2U_n}{2+U_n} \end{cases}$

Représenter sur l'axe (ox) les 3 premiers termes de la suite u_n.

Solution

Désignons par f la fonction définie sur $]-2 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3+2x}{2+x}$

En suivant les règles de construction ci-dessus, on a la représentation suivante :



II- Convergence d'une suite

Définitions :

- Une suite u_n est dite **convergente** si et seulement si son terme général u_n admet une limite finie.

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ avec $l \in \mathbb{R}$. **Alors u_n est dite convergente.**

- Une suite u_n est dite **divergente** si et seulement si son terme général u_n admet une limite infinie.

On note : $\lim\limits_{n \to -\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. **Alors u_n est dite divergente.**

III- Suite majorée – minorée –bornée :

1) Définitions :

- Une suite u_n est majorée si et seulement $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq a$.
- Une suite u_n est minorée si et seulement $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq b$.
- Une suite u_n est bornée si et seulement $\forall a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $b \leq u_n \leq a$

2) Théorèmes :

a) Théorème 1 :

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

b) Théorème 2 :

Tout sous-ensemble non vide E de nombres réels a une borne supérieure A, c'est-à-dire :
$\forall x \in E$; $x \leq$ A

3) Propriétés :

Soient u_n et v_n deux suites telles que :

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l'$

On a les propriétés suivantes :

P_1 : Si $u_n \leq v_n$: alors $l \leq l'$

P_2 : $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = l + l'$

P_3: Si (u_n) est bornée et si (v_n) est divergente, alors :

a) $\lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = \infty$ b) $\lim_{n + \infty} (u_n \times v_n) = \infty$

IV- Relations entre les limites :

Théorème : (**Théorème des gendarmes).**

Considérons les trois suites u_n ; v_n et w_n $(n > n_o)$
Tel que : $u_n \leq v_n \leq w_n$
u_n et w_n Si converge vers la même limite l ; alors v_n converge vers l.

Preuve :

A partir de la relation donnée entre les suites on a :

$$\lim_{n \to \infty} u_n \leq \lim_{n \to \infty} v_n \leq \lim_{n \to \infty} w_n$$

Alors $\lim_{n \to \infty} v_n = l$

V- Suites Adjacentes :

Définition :

Une suite (u_n) est adjacente à une autre suite (v_n) si l'une des deux suites est décroissante tandis que l'autre est croissante et si : $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Théorème 1 :

Si les suites u_n et v_n sont adjacentes (u_n croissante et v_n décroissante) alors :
$\forall\ n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \leq v_n$.

Preuve :

Supposons que le contraire de la conclusion du théorème soit vrai pour $n = k$, c'est-à-dire : $u_k \geq v_k$.
Pour $n > k$, puisque u_n est décroissante et que v_n est décroissante, on a :
$u_n \geq u_k \geq v_k \geq v_n$

$(u_n - v_n) \geq (u_k - v_k)$

$\lim_{x \to +\infty} (u_n - v_n) \neq 0$

Théorème 2 : si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent toutes deux vers une même limite.

Preuve :
Puis que les suites sont adjacentes et que u_n est croissante et v_n décroissante, le **théorème 1** implique : $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$
On note alors que :

a) u_n est croissante et elle est majorée par v_0 , donc elle converge vers l.
b) v_n est décroissante et elle est minorée par u_0 donc elle converge vers l'.

Ainsi
$lim\ (u_n - v_n) = l - l' \quad => 0 = l - l' \quad \Leftrightarrow l = l'$
$x \to +\infty$

Ce qu'il fallait Prouve.

VI- Suite Arithmétique

1) Définition :

Une suite u_n est dite arithmétique si et seulement si :$\forall\ n \in \mathbb{N};\ u_{n+1} - u_n = \boldsymbol{r}$.
Où $\boldsymbol{r}$ est appelée la raison de la suite u_n.

2) Expression du terme général :

D'une façon générale si u_p est le premier terme, l'expression du terme générale d'une suite arithmétique est : $u_n = u_p + (n-p)r$

3) Termes équidistants d'une suite :

Soit $(u_n)\ n \in \mathbb{N}$, une suite arithmétique p un entier naturel tel que $p \leq n$ les termes u_p et u_{n-p} sont des termes équidistants des termes extrêmes u_0 et u_n car il ya p termes avant le terme u_p et p termes après le terme u_{n-p}

4) Somme des termes équidistants d'une suite arithmétique

Soit p un entier naturel tel que $p \leq n$
Les termes u_p et u_{n-p} sont des termes équidistants des termes extrêmes

$u_p + u_{n-p} = (u_0 + pr) + (u_0 + (n-p)\,r) = u_0 + (u_0 + n\,r)$ d'où $u_p + u_{n-p} = u_0 + u_n$

Théorème :
La somme de deux termes équidistants d'une suite arithmétique est égale à la somme des termes extrêmes.

5) Propriétés :

En application du théorème on a :
P$_1$: Trois nombres $\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{c}$ forment une progression arithmétique si : $\boldsymbol{2b = a + c}$.

Preuve : Soit a ; b et c trois réels
$b = a + r$
$c = b + r$
$a + c = a + b + r = 2a + 2r = 2\,(a + r).\ Alors\ :\ \boldsymbol{a + c = 2b}$

P_2 : Trois nombres $\boldsymbol{a, b, c}$ forment une progression arithmétique de raison r si :
$\boldsymbol{b = a + r \quad et \quad c = a + 2r}$.

P_3 : Quatre nombres $\boldsymbol{a, b, c, d}$ forment une progression arithmétique de raison r si :
$\boldsymbol{3b - d = 2d}$

P_4 : Soit u_n une suite arithmétique de 1er terme u_0. La somme de deux termes équidistants est toujours à la somme des extrêmes
u_0 , u_1 , u_2 … u_{n-2} ; u_{n-1} ; u_n ; u_1; u_{n-1} sont équidistants.

D'une manière générale, on a : $u_0 + u_n = u_p + u_{n-p}$

6) Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit u_n une suite arithmétique de raison r. On a : $u_{n+1} - u_n = r$ d'où :
- Si $r > 0$ alors u_n est croissante
- Si $r < 0$ alors u_n est décroissante
- Si $r = 0$ alors u_n est constante

7) Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique :

Soit u_n une suite arithmétique de 1er terme u_p et de raison r.
La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique est :

$S_n = \frac{(n-p+1)(U_p+U_n)}{2}$ ou $S_n = \frac{(n-p+1)[2U_p+(n-p)r]}{2}$

VII- Suites géométriques

1) Définition :
U_n est une suite géométrique si et seulement si : $\forall\, n \in \mathbb{N}$; on a : $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$ ou $U_{n+1} = qU_n$. Où q est un réel fixé appelé la raison de la suite géométrique.

2) Expression du terme générale

D'une façon générale si u_p est le 1er terme et r sa raison, alors l'expression du terme générale d'une suite géométrique est : $u_n = u_p(q)^{n-p}$

3) Produit des termes équidistants des termes extrêmes d'une suite géométrique :

Théorème :
Le produit de deux termes équidistants des termes extrêmes est égal au produit des termes extrêmes c'est-à-dire : $u_0 \times u_{n-p} = u_0 \times u_n$.

4) Propriétés :

P_1 : Trois nombres $\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{c}$ forment une progression géométrique si : $\boldsymbol{b^2 = ac}$.

P_2 : Trois nombres $\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{c}$ forment une progression géométrique de raison q si : $\boldsymbol{b = qa}$ **et** $\boldsymbol{c = q^2a}$.

P_3 : Quatre nombres $\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{c}$ **et** $\boldsymbol{d}$ forment une progression géométrique de raison q si : $\boldsymbol{b = qa}$; $\boldsymbol{c = q^2a}$ **et** $\boldsymbol{d = q^3a}$

5) Sens de variation d'une suite géométrique :

Soit u_n suite géométrique de raison et de 1er terme u_0 :

- **1er cas $u_0 > 0$** : si

- $q > 1$ alors la suite u_n est croissante
- $0 < q < 1$ alors la suite u_n est décroissante
- $q = 1$ alors la suite u_n constante ou stationnaire

- **2è Cas $u_0 < 0$** : si

- $q > 1$ alors la suite u_n est décroissante
- $0 < q < 1$ alors la suite u_n est croissante
- $q = 1$ alors la suite u_n est constante

6) Convergence d'une suite géométrique :

La limite d'une suite étant la limite de son terme général, une suite géométrique est convergente si $-1 < q \leq 1$ et est divergente si $q \in]-\infty; -1] \cup]1; +\infty[$

7) Somme des termes d'une suite géométrique :

D'une manière générale si u_p est le 1er terme alors l'expression de la somme est :

$$S_n = \frac{U_p(1 - q^{n-p+1})}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

8) Cas d'une suite géométrique :

Soit u_n une suite géométrique de raison q

- Si $|q| < 1$ alors la suite u_n converge vers 0
- Si $|q| > 1$ alors la suite u_n est divergente
- Si $|q| = 1$ alors la suite u_n converge vers u_0

VIII- Notion sur les intérêts simples et intérêts composés :

Les intérêts :

L'intérêt est la rémunération d'un placement pendant une période donnée,
(c'est-à-dire entre un temps $\mathbf{T_1}$ et un temps $\mathbf{T_2}$).
Ainsi les intérêts sont classés en deux catégories: (**intérêts simples et intérêts composés).**

NB :

- L'intérêt simple est utilisé pour des placements à court et moyen terme.
- L'intérêt composé est utilisé pour des placements à long terme.

a- Intérêts simples :

Un placement est fait à intérêt simple, lorsque, à des époques fixées d'avance celui qui prête ou place son argent en touche les intérêts de façon que le capital placé reste le même jusqu'à l'époque du remboursement.

Sa formule est : $I = \frac{C \cdot t \cdot n}{P} = \frac{(\textbf{Capital placé}) \cdot (\textbf{Taux d'intérêt}) \cdot (\textbf{Durée du placement})}{\textbf{Période}}$

NB :

- **Si :** n est en **jours**, alors la **période** $P = 36.000$.
- **Si :** n est en **mois**, alors la **période** $P = 1.200$.
- **Si :** n est en **année**, alors la **période** $P = 100$.

b- Intérêts composés :

Un placement est fait à intérêt composé, lorsque, à la fin de chaque unité de temps, l'intérêt est ajouté au capital pour produire un intérêt à son tour, pendant l'unité de temps suivante.

Sa formule est :

$$I_n = C_0\left[(1 + i)^n - 1\right] = (\textbf{Capital initial})\left[(1 + \textbf{taux d'intérêt})^{\textbf{Durée}} - 1\right]$$

NB :

- **1 an = 2 semestres = 4 trimestres = 12 mois.**
- **1 semestre = 2 trimestres = 6 mois = $\frac{1}{2}$an.**
- **1 trimestre = $\frac{1}{2}$semestre = 3 mois = $\frac{1}{4}$an.**
- **1 bi - an = 4 semestres = 8 trimestres = 24 mois = 2 ans.**

c- Valeurs acquises :

$$C_n = C_0(1 + i)^n = (\textbf{Capital initial})(1 + \textbf{Taux d'intérêt})^{\textbf{Durée}}$$

NB : Le taux d'intérêt s'exprime toujours en pourcentage (%)

Exercices

Généralité sur les suites.

1 Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses:
1) Toute suite bornée est convergente.
2) Toute suite décroissante à termes positifs converge vers 0.
3) La somme de deux suites divergentes est toujours une suite divergente.
4) Toute suite à termes positifs, convergente vers 0 est décroissante.
5) Si une suite à termes positifs diverge, alors sa limite est $+\infty$.

2 Etudie la convergence des suites suivantes :

a) $U_{n+1} = n - U_n$ et $U_0 = -5$; **b)** $U_n = \sqrt{n^2+n} - n$; **c)** $U_n = sin\left(n\pi - \frac{1}{n}\right)$

3 On considère les suites U_n et v_n définies par : $U_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 - \frac{1}{n^2}$
Montre que les suites U_n et v_n sont adjacentes

4 Soit u_n la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = ln(1 + u_n) \end{cases}$

Trace la courbe représentation de la fonction $x \mapsto ln\,(1+x)$ puis en déduire une représentation graphique des 4 premiers termes de la suite u_n

Suites arithmétiques – Suites géométriques.

5 **1)** Calcule dans chacun des cas suivants d'une suite arithmétique.
a- La raison r et la somme S_n si : $U_1 = 397$; $U_n = 64$ et $n = 1000$
b- L'entier n et la raison r si : $U_1 = -4$; $U_n = 6$ et $S_n = 28$
c- Le premier terme U_1 et la somme S_n si : $U_n = 105$; $n = 17$ et $r = -2$

2) Calcule dans chacun des cas suivants d'une suite géométrique.
a- L'expression U_n et la somme S_n si : $U_1 = 2$; $q = 3$ et $n = 5$
b- La raison q et la somme S_n si : $U_1 = 162$; $U_n = 32$ et $n = 5$

6 Soit u_n une suite géométrique décroissante tel que : $\begin{cases} u_0 \times u_3 = 32 \\ u_0 + u_3 = 18 \end{cases}$

1) Calcule u_0 et u_3
2) Détermine la raison de la suite u_n .
3) Donne l'expression de la suite u_n en fonction de n.
4) On pose $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. Calcule S_n en fonction de n puis en déduire la somme des 20 premiers termes de la suite u_n

7 Détermine une suite arithmétique u_n sachant que la somme de ces n premiers termes est égale à $3n^2 + 4n$ où $n \in \mathbb{N}$

8 Soit les suites u_n et v_n définie par : $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1-u_n} \end{cases}$ et $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n}$

1) Calcule v_{n+1} en fonction de u_n puis en fonction de v_n.
2) En déduire que v_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme v_1
3) Exprime v_n puis u_n en fonction de n.
4) On pose $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$
   a) Exprime S_n en fonction de n
   b) Calcule la somme de 30 premiers termes de la suite v_n

9 On donne deux suites (u_n) et (v_n) telles que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 3v_n \end{cases}$ et $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \end{cases}$

1) Calcule : u_n et v_n pour $n \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$.
2) On définit deux suites (X_n) et (Y_n) par : $X_n = u_n + v_n$ et $Y_n = u_n - v_n$

a) Montre que (X_n) est une suite géométrique et (Y_n) une suite constante.
b) Exprime u_n puis v_n en fonction de n.

10 On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par $u_0 = 1$; $u_{n+1} = 2u_n + 1$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$

a) Montre que v_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprime, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

c) Soit la somme $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$

Montre que pour tout entier naturel n, $S_n = u_n - u_0$
Calcule S_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

11 Soit la suite $S_n = 0{,}\underbrace{555\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5}_{n \text{ Chiffres } 5}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Prouve que S_n est la somme des n termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 0,5.
2) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $S_n = \frac{5}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$

12 1) Soit (u_n), $n \in \mathbb{N}$, une suite arithmétique de raison r ($r \neq 0$).
On définit la suite (v_n), $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_n}$.
a- Montre que (v_n), est une suite géométrique dont on Détermineras la raison et le premier terme v_0(on Exprimera v_0 en fonction de u_0).
b- Etudie suivant les valeurs de r la convergence de la suite v_n

2) Soit $w_n n \in \mathbb{N}$, la suite définie par $w_n = \int_0^n \frac{1}{4}e^{-2x}dx$.
a- Calcule w_n en fonction de n.

b- Montre que w_n converge vers un nombre réel l que l'on précisera.
c- On pose $S_n = w_1 + w_2 + \ldots\ldots + w_n - \frac{n}{8}$. Calcule S_n en fonction de n puis en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

13 On considère les suites u_n et v_n définies pour tout entier naturel n par définies par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}(U_n)^2 \end{cases} \text{ et } \quad v_n = ln\left(\frac{3}{2}U_n\right)$$

1) Calcule v_0.
2) Démontre que v_n est une suite géométrique de raison 2.
3) Exprime v_n en fonction de n.
4) Calcule la limite de v_n .
5) Exprime u_n en fonction de v_n puis en déduire la limite de u_n
6) Pour tout entier naturel n, on pose :
$S_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_{n-1}$ et $T_n = u_0 \times u_1 \times \ldots\ldots \times u_{n-1}$
a- Démontre que : $S_n = (1 - 2^{n+1})ln2$
b- Justifie que $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$ puis en déduire T_n en fonction de n.

14 On considère la suite numérique u_n définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{2n-1}$
1) a) Calcule $u_0, u_1 ; u_2 ; u_3$ et u_{n+1}
b) Démontre que la suite u_n est une suite géométrique dont on précisera la raison.
c) Exprime en fonction de n la somme $S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$
En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$
d) Trouve la valeur minimum de n telle que $S_n \geq 10$

2) Soit la suite v_n définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = ln(u_n)$
a) Exprime la somme $S'_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_n$ en fonction de n
b) Exprime le produit $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots\ldots \times u_n$ en fonction de n

15 Soit la suite u_n ; $n \in \mathbb{N}^*$ à termes positifs tel que : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (u_{n+1})^2 = u_n \times e \end{cases}$

1) Calcule puis Exprime u_1; u_2 ; u_3 en fonction de e^k où $k \in \mathbb{R}$.
2) On pose $v_n = ln(u_n) - a$ (où $a \in \mathbb{R}^*$ et $\mathbb{N}^*$).
a) Détermine le réel a pour que v_n soit une suite géométrique dont on Déterminera la raison et le premier terme v_1.
b) Calcule la limite de v_n puis celle de u_n en $+\infty$

16 Après les élections présidentielles 2013 au Mali, l'analyse des résultats a montré que le candidat élu avait obtenu v_1 voies, le 2e avait obtenu v_2 voies, ainsi de suite jusqu'au dernier des n candidats qui avait obtenu v_n voies. De plus on a constaté que le $k^{ième}$ candidat avec ($k \geq 1$) avait obtenu le double de voies de son successeur immédiat ($k+1$)^{ième} du classement ; définissant ainsi une suite numérique $(v_n)_{n \geq 1}$

1) Prouve que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q.
2) Le nombre total de votants appelé suffrage exprimé est $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$.

Un candidat est élu président dès le 1er tour, lorsque son nombre de voies v_1 dépasse la moitié de S_n.

a) Détermine en fonction de n et v_1 le suffrage exprimé S_n.
b) Examine si un deuxième tour à cette élection eut été nécessaire.

3) En effet le nombre total des votants fut 945 et le candidat fut élu par ses 480 voies. Détermine alors le nombre n de candidats qui avaient postulés.

17 Soit la suite u_n définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{4}{4-u_n}$ ($n \in \mathbb{N}$)

1) a) Détermine u_0 pour que u_n soit constante.
b) Démontre que si $u_n < 2$ alors $u_n < u_{n+1} < 2$ ($n \in \mathbb{N}$) En déduire que si $u_0 < 2$ alors pour tout entier naturel on a : $u_n < 2$ et que la suite est monotone.

2) On suppose maintenant que $u_0 = -1$
a) Calcule u_1 ; u_2; u_3.
b) Soit la suite v_n définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$. Démontre que v_n est une suite arithmétique dont on Déterminera le premier terme et la raison.
c) Calcule u_n en fonction de n puis étudier sa limite en $+\infty$.

18 On ajoute une certaine dose d'un antibiotique à un bouillon de culture contenant des microbes sensibles à cet antibiotique. Un ordinateur compte et indique à chaque heure le nombre de microbes vivants dans le bouillon ; on s'aperçoit qu'à chaque heure, le nombre de microbes vivants est la moitié du nombre de microbes à l'heure précédente.

1°/a) Sachant qu'à 6heures le bouillon contenait N microbes, Calcule le nombre de microbes vivants aux heures suivantes : 7h ; 8h ; 9h ; 10h.

b) Montre que ces nombres sont en progression géométrique ; Calcule pour un entier positif n la somme S_n des n premiers termes de cette progression.

2°/ A 12heures, on ajoute au bouillon un produit qui annule l'effet de l'antibiotique. On constate alors que le nombre de microbes vivants dans le bouillon augmente de 25% par heure. Calcule le nombre de microbes vivants dans le bouillon à 14h si $N = 10^{10}$.

Progression arithmétiques – Progression géométriques.

19 Trouve 3 nombres consécutifs a ; b et c d'une suite en progression arithmétique sachant que : $\begin{cases} a+b+c=3 \\ 3a-6b+c=6 \end{cases}$

Trouve 3 nombres consécutifs a ; b et c d'une suite en progression géométrique sachant que : $\begin{cases} a\times b\times c=8 \\ a+b=-1 \\ c-a=1 \end{cases}$

20 Soient a et b deux réels tel que : (a ; $a+4b$; $5a+2b$) et ($b+3$; $3a+1$; $6a+b$) soient des termes consécutifs de suite respectivement arithmétique et géométrique.
Trouve a et b.

21 Quatre (4) entiers strictement positifs a, b, c, et d forment dans cet ordre une suite géométrique dont la raison est un entier premier avec a.
Trouve ces nombres sachant qu'ils vérifient en outre la relation $10a^2 = d - b$.

22 Soit u_n une suite dans laquelle les dix premiers termes de la suite sont en progression arithmétique de raison r et à partir de u_{10} les termes sont en progression géométrique de raison q.
On donne : $u_1 = 0$; $u_{16} = \frac{-1}{27}$ et $qr = 1$

1) Calcule q ; r ; u_{10} et u_{11}
2) Calcule la somme S_n des n premiers termes de la suite u_n dans les deux cas suivants:
a) $n \leq 10$ b) $n > 10$

23 1) Quatre entiers strictement positifs a ; b ; c et , forment dans cet ordre une suite géométrique dont la raison q est un entier premier avec a. Trouve ces nombres sachant qu'is vérifient en outre la relation $10a^2 = d - b$.
2) soient Z_1 ; Z_2 et Z_3 trois nombres complexes dont le produit est $3i\sqrt{3}$, les arguments respectifs a_1 ; a_2 et a_3 forment une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$ et les modules r_1 ; r_2 et r_3 une suite géométrique de raison 2. Sachant que $0 < a_1 < \frac{2\pi}{3}$.
Détermine : Z_1 ; Z_2 et Z_3.

Suites économiques.

24 Au 1er Janvier 2012, le prix d'un kilo de sucre est de 550 f CFA.
Le prix du kilo subit une augmentation de 50 f CFA au 1er Janvier de chaque année.
1) Quel serait le prix du kilo de sucre au 1er Janvier 2013 ? Au 1er Janvier 2014 ?
2) On désigne par P_n le prix du kilo du sucre au 1er Janvier $+ n$. Calcule P_n en fonction de n
3) Calcule $P_{n+1} - P_n$ puis en déduire la nature de la suite P_n.

25 Le premier Janvier 1999, la population d'une commune rurale était de 3000 habitants.
On admet que cette population diminue de 4 % chaque année.
Calcule la population de cette commune :

1) Au 1er Janvier 2005
2) Au 1er Janvier 2006
3) Au 1er Janvier 2012

26 La population d'un pays augmente régulièrement de 3% par an.
Reproduire et compléter le tableau démographique ci-dessous :

Années	2012	2013	2014	2015	2016
Populations			6415000		

27 Un capital A est placé à intérêts composés aux taux de 3% l'an. On appelle C_0 le capital initial et C_n le capital après n années.
1) Expliquer la relation $C_1 = 1{,}03C_0$ puis écrire le capital C_n en fonction de C_0 et $1{,}03$.
2) Au bout de combien d'années le capital est –il doublé ?
3) Au bout de combien d'années le capital est –il triplé ?

28 Ali a reçu de son père une somme de 100.000 FCFA.
Après réception, il dépose cette somme dans une caisse d'épargne le 1er Janvier 2009 à intérêt composé au taux annuel de 5 % en vue d'acheter une moto à 300000 FCFA.

1) A partir de quelle année pourra-t-il acheter sa moto sachant qu'il ne dispose que de cette somme ?
2) Quelle serait la nouvelle valeur acquise par Ali s'il place un capital de 100.000 FCFA au bout de 30 semestres au taux de 2 % par semestre ?

29 1) Chaque année la grand-mère de Salif dépose de l'argent dans une banque afin de constituer une cagnotte pour son petit-fils.
Elle a commencé le 1er janvier 1982 par un dépôt de 500 F. Depuis lors, elle a effectué un dépôt chaque 1er janvier, en augmentant chaque année le montant de ce dépôt de 50 F.
On note :

- u_n le montant exprimé en francs, de la somme déposée dans la caisse d'épargne le 1er janvier 1982+ n. (Ainsi $u_0 = 500$; $u_1 = 550$; …)
- S_n le montant, en francs, de la somme contenue dans la caisse d'épargne après le dépôt de l'année 1982+ n. (Ainsi $S_0 = 500$; $u_1 = 1050$; …)

a- Calcule u_2, puis Exprime u_n en fonction de n.
b- CalculeS_2, puis Exprime S_n en fonction de n.
c- Le 1er janvier 2002, la grand-mère de Salif effectue son dépôt habituel (en franc), puis offre l'argent de la caisse à Salif. Quel est le montant de la somme reçue par Salif ? Exprime cette somme en franc puis en euros.(Rappel :1€ = 6,55957 franc).

2) Avec le cadeau de sa grand-mère, Salif décide d'ouvrir un compte bancaire et d'y placer la plus grande partie de la somme qu'il a reçue.

Le 1er janvier 2002,il effectue un placement de 3000 €, à intérêts composés, aux taux annuel de 4%.(A la fin de chaque année, les intérêts seront incorporés au capital). De plus, chaque 1er janvier des années suivantes, il décide d'ajouter sur son compte la somme de 200€.
On note :

- C_n le montant exprimé en euros, du capital disponible sur le compte bancaire de Salif après n années de placement. (Ainsi C_0 = 3000)
- (u_n) la suite définie par $u_n = C_n + 5000$. (Ainsi u_0 = 8000)

a- Justifie que pour tout entier naturel n, on a : $C_{n+1} = 1{,}04C_n + 200$
b- Démontre que(u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
c- Exprime u_n en fonction de n, puis C_n en fonction de n.
d- Combien d'années, au minimum, Salif devra-t-il attendre pour disposer d'une somme de 6000 euros sur son compte bancaire ?

Solutions

Généralité sur les suites.

1 Vérifions si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses:

1) Toute suite bornée est convergente. $(\boldsymbol{Faux})$
Exemple : la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est bornée mais n'est pas convergente.

2) Toute suite décroissante à termes positifs converge vers 0.$(\boldsymbol{Faux})$

Puisque cette suite est à termes positifs, elle est minorée par 0. Cette suite étant décroissante et minorée, elle est convergente. Mais elle ne converge pas nécessairement vers 0.
Exemple : la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ est décroissante, à termes positifs. Elle est bien convergente et sa limite est 1.

3) La somme de deux suites divergentes est toujours une suite divergente.$(\boldsymbol{Faux})$
Exemple : les suites de termes généraux $u_n = (-1)^n$ et $u_n = 1 - (-1)^n$ sont divergentes, mais leur somme est une suite constante, donc convergente.

4) Toute suite à termes positifs, convergente vers 0 est décroissante.$(\boldsymbol{Faux})$

Exemple : la suite de terme général $\begin{cases} u_n = e^{-n} & si\ n\ est\ pair \\ u_n = \frac{10}{n} & si\ n\ est\ pair \end{cases}$ est à termes positifs et converge vers 0 car la limite en $+\infty$ de e^{-n} et $\frac{10}{n}$ est 0 mais n'est pas décroissante. En effet, on a par exemple : $u_1 < u_2$

5) Si une suite à termes positifs diverge, alors sa limite est $+\infty$.$(\boldsymbol{Faux})$
Exemple : les suites de terme général $u_n = 3 + cos(n)$ est divergente mais sa limite n'est pas $+\infty$

2 Etudions la convergence des suites suivantes :

a) $U_{n+1} = n - U_n$ et $U_0 = -5$

Le calcul des premiers termes montre qu'il semble y avoir un écart de 1 entre deux termes de rangs pairs (ou impairs) consécutifs. Montrons- le.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a $U_{n+1} = n - U_n$ alors : $U_{n+2} = (n+1) - U_{n+1} = (n+1) - (n - U_n)$

$= n + 1 - n + U_n = 1 + U_n \Rightarrow U_{n+2} = 1 + U_n \Leftrightarrow U_{n+2} - U_n = 1$

Ainsi, la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = u_{2n}$ (les termes de rang pairs), est une suite arithmétique de raison 1.

Par conséquent, elle est divergente et sa limite est $+\infty$.

Il en est de même pour la suite(w_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $w_n = u_{2n+1}$ (les termes de rang impairs).

On conclut que la suite est (u_n) est divergente et sa limite est $+\infty$.

b) $U_n = \sqrt{n^2+n} - n$

$$U_n = \sqrt{n^2+n} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)} = \frac{\left(\sqrt{n^2+n}\right)^2 - n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}+n} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n} = \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$.

D'où la suite U_n est convergente et sa limite est $\frac{1}{2}$

c) $U_n = sin\left(n\pi - \frac{1}{n}\right)$

Si n est pair, $U_n = -sin\left(\frac{1}{n}\right)$ et si n est impair, $U_n = sin\left(\frac{1}{n}\right)$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} -sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

D'où la suite U_n est convergente et sa limite est 0

3 On considère les suites u_n et v_n définies par : $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 - \frac{1}{n^2}$

Montrons que les suites u_n et v_n sont adjacentes

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n - u_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n^2} - 1 + \frac{1}{n} = -\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$

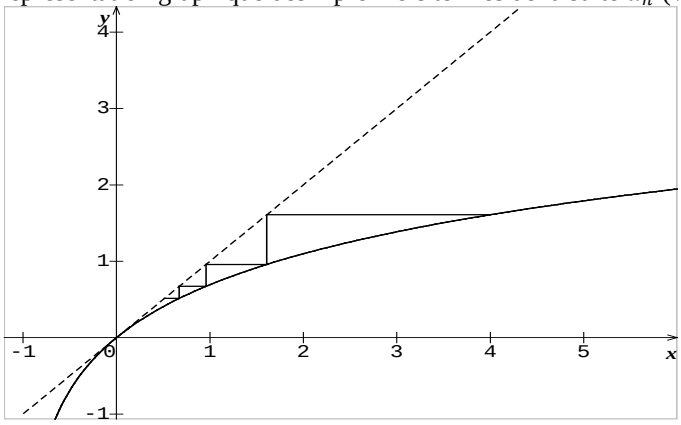
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty}(v_n - U_n) = 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} - 1 + \frac{1}{n} = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$
=> $u_{n+1} - u_n > 0$.

On en déduit que la suite (u_n) est croissante.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_{n+1} - v_n = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} < 0$
=> $v_{n+1} - v_n < 0$.
On en déduit que la suite (v_n) est décroissante.
Comme la suite (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $(v_n - U_n)$ tend vers 0, on conclut que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4 Soit u_n la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = ln(1 + u_n) \end{cases}$

Traçons la courbe représentation de la fonction $x \mapsto ln(1 + x)$ puis en déduisons une représentation graphique des 4 premiers termes de la suite u_n (voir figure ci-dessous).



Suites arithmétiques – Suites géométriques.

5 **1)** Calcule dans chacun des cas suivants d'une suite arithmétique.

a- La raison r et la somme S_n si : $U_1 = 397$; $U_n = 64$ et $n = 1000$

L'expression des n premiers d'une suite arithmétique de 1er terme U_1 et de raison r est:
$U_n = U_1 + r(n-1)$.

$U_n = U_1 + r(n-1) \Leftrightarrow 64 = 397 + r(1000-1) \Leftrightarrow 999r = -333$ => $r = -\frac{1}{3}$

La somme des n premiers d'une suite arithmétique de 1er terme U_1 est $S_n = \frac{n(U_1 + U_n)}{2}$

=>$S_n = \frac{1000(397+64)}{2} = 230500$

b- L'entier n et la raison r si : $U_1 = -4$; $U_n = 6$ et $S_n = 28$

La somme des n premiers d'une suite arithmétique de 1er terme U_1 est $S_n = \frac{n(U_1+U_n)}{2}$

$S_n = \frac{n(U_1+U_n)}{2} \Leftrightarrow 28 = \frac{n(-4+6)}{2} \Leftrightarrow 2n = 56 \Rightarrow n = 28$

L'expression des n premiers d'une suite arithmétique de 1er terme U_1 et de raison r est: $U_n = U_1 + r(n-1)$.

$U_n = U_1 + r(n-1) \Leftrightarrow 6 = -4 + r(28-1) \Rightarrow r = \frac{10}{27}$

c- Le premier terme U_1 et la somme S_n si : $U_n = 105$; $n = 17$ et $r = -2$
L'expression des n premiers d'une suite arithmétique de 1er terme U_1 et de raison r est: $U_n = U_1 + r(n-1)$.

$U_n = U_1 + r(n-1) \Leftrightarrow 105 = U_1 + 17(-2-1) \Rightarrow U_1 = 156$

2) Calcule dans chacun des cas suivants d'une suite géométrique.

a- L'expression de U_n et la somme S_n si : $U_1 = 2$; $q = 3$

L'expression des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme U_1 et de raison q est: $U_n = U_1(q)^{n-1}$

$U_n = U_1(q)^{n-1} \Leftrightarrow U_n = 2(3)^{n-1}$
La somme des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme U_1 est $S_n = \frac{U_1(1-q^n)}{1-q}$

$S_n = \frac{U_1(1-q^n)}{1-q} \Leftrightarrow S_n = \frac{2(1-3^n)}{1-3} \Rightarrow S_n = 3^n - 1$

b- La raison q et la somme S_n si : $U_1 = 162$; $U_n = 32$ et $n = 5$

L'expression des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme U_1 et de raison q est:

$U_n = U_1(q)^{n-1} \Leftrightarrow 32 = 162(q)^{5-1} \Leftrightarrow 32 = 162q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{32}{162} = \frac{16}{81} \Rightarrow q = \sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$

La somme des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme U_1 est $S_n = \frac{U_1(1-q^n)}{1-q}$

$S_n = \frac{U_1(1-q^n)}{1-q} \Leftrightarrow S_n = \frac{162\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^5\right)}{1-\frac{2}{3}} \Rightarrow S_n = 422$

6 Soit u_n une suite géométrique décroissante tel que : $\begin{cases} u_0 \times u_3 = 32 \\ u_0 + u_3 = 18 \end{cases}$

1) Calculons u_0 *et* u_3

$\begin{cases} u_0 \times u_3 = 32 \\ u_0 + u_3 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 32 \\ S = 18 \end{cases}$.

Alors ce système est solution de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ où S et P désignent respectivement la somme et le produit.

Résolvons ainsi l'équation $X^2 - SX + P = 0 \Leftrightarrow X^2 - 18X + 32 = 0$. $\Delta = 196$ => $X_1 = 2$ et $X_2 = 16$
La suite (u_n) étant décroissante, alors $u_0 = 16$ et $u_3 = 2$

2) Déterminons la raison de la suite u_n .
L'expression des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme U_0 et de raison q est:
$U_n = U_0(q)^n$

Ainsi pour $n = 3$, on a : $U_3 = U_0 q^3$ $=> q^3 = \frac{U_3}{U_0} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$. Alors $q^3 = \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ $=> q = \frac{1}{2}$

3) Donnons l'expression de la suite u_n en fonction de n.

$U_n = U_0(q)^n => U_n = 16\left(\frac{1}{2}\right)^n = 16 \times \frac{1}{2^n} = 2^4 \times 2^{-n} = 2^{4-n}$
4) On pose $S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$.

Calculons S_n en fonction de n puis en déduisons la somme des 20 premiers termes de la suite u_n
La somme des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme u_0 est $S_n = \frac{U_0(1-q^{n+1})}{1-q}$

$S_n = \frac{U_0(1-q^{n+1})}{1-q}$ $=> S_n = \frac{16\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{16\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\frac{1}{2}} = 32\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

$=> S_n = 32(1 - 2^{-n-1}) = 32 - 32 \times 2^{-n-1} = 32 - 2^5 \times 2^{-n-1} = 32 - 2^{5-n-1}$

$= 32 - 2^{4-n}$ $=> S_n = 32 - 2^{4-n}$

7 Déterminons une suite arithmétique u_n sachant que la somme de ces n premiers termes est égale à $3n^2 + 4n$ ($avec\ n \in \mathbb{N}$)
La somme des n premiers d'une suite arithmétique de 1er terme U_1 est $S_n = \frac{n(U_1+U_n)}{2}$

$S_n = \frac{n(U_1+U_n)}{2}$. Or $U_n = U_1 + r(n-1)$

$=> S_n = \frac{n[U_1+U_1+r(n-1)]}{2} \Leftrightarrow S_n = \frac{n[2U_1+r(n-1)]}{2} \Leftrightarrow S_n = \frac{n(2U_1+nr-r)}{2}$

$\Leftrightarrow S_n = \frac{2nU_1+n^2r-nr}{2} \Leftrightarrow S_n = \frac{n^2r+n(2U_1-r)}{2}$.
Or $S_n = 3n^2 + 4n$. Alors par identification on a : $\frac{n^2r+n(2U_1-r)}{2} = 3n^2 + 4n \Leftrightarrow$

$n^2r + n(2U_1 - r) = 6n^2 + 8n \Leftrightarrow \begin{cases} r = 6 \\ 2U_1 - r = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 6 \\ U_1 = 7 \end{cases}$. D'où $U_n = U_1 + r(n-1)$

$=> U_n = 7 + 6(n-1) = 6n + 1$

8 Soit les suites u_n et v_n définie par : $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1-u_n} \end{cases}$ et $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n}$

1) Calculons v_{n+1} en fonction de u_n puis en fonction de v_n.

- Expression de v_{n+1} en fonction de u_n

$v_n = \frac{u_n + 1}{u_n} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1}}$. Or $u_{n+1} = \frac{u_n}{1-u_n}$

$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{\left(\frac{u_n}{1-u_n}\right) + 1}{\left(\frac{u_n}{1-u_n}\right)} = \frac{\frac{u_n + 1 - u_n}{1-u_n}}{\frac{u_n}{1-u_n}} = \frac{\frac{1}{1-u_n}}{\frac{u_n}{1-u_n}} = \frac{1}{1-u_n} \times \frac{1-u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n}$

- Expression de v_{n+1} en fonction de v_n

On sait que $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n} \Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n - 1}$. En remplaçant $u_n = \frac{1}{v_n - 1}$ par sa valeur dans la relation $v_{n+1} = \frac{1}{u_n}$, on a : $v_{n+1} = \frac{1}{u_n} \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{v_n - 1}} = v_n - 1 \Rightarrow v_{n+1} = v_n - 1$.

2) En déduisons que v_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme v_1

$v_{n+1} = v_n - 1 \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = -1$

D'où v_n est une suite arithmétique de raison -1 et de premier terme $v_1 = \frac{u_1 + 1}{u_1} = \frac{1}{2}$.

3) Exprimons v_n puis u_n en fonction de n.

- Expression de v_n en fonction de n

v_n est une suite arithmétique de raison -1 et de premier terme $v_1 = \frac{1}{2}$, alors son expression en fonction de n est : $v_n = v_1 + r(n-1)$.

$v_n = v_1 + r(n-1) \Leftrightarrow v_n = \frac{1}{2} - 1(n-1) = \frac{1}{2} - n + 1 = -n + \frac{3}{2} \Rightarrow v_n = -n + \frac{3}{2}$

- Expression de u_n en fonction de n

On sait que $u_n = \frac{1}{v_n - 1}$. Or $v_n = -n + \frac{3}{2}$

En remplaçant $v_n = -n + \frac{3}{2}$ par sa valeur dans $u_n = \frac{1}{v_n - 1}$. Alors on a :

$u_n = \frac{1}{v_n - 1} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{\left(-n + \frac{3}{2}\right) - 1} = \frac{1}{\left(-n + \frac{3}{2}\right) - 1} = \frac{2}{-2n+1} \Rightarrow u_n = \frac{2}{-2n+1}$

4) On pose $S_n = v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n$

a-Exprimons S_n en fonction de n

La somme des n premiers d'une suite arithmétique de 1er terme v_1 est $S_n = \frac{n(v_1+v_n)}{2}$

$S_n = \frac{n(v_1+v_n)}{2}$. Or $v_1 = \frac{1}{2}$ et $v_n = -n + \frac{3}{2}$ Alors $S_n = \frac{n\left(\frac{1}{2}-n+\frac{3}{2}\right)}{2} = \frac{n\left(\frac{1}{2}-n+\frac{3}{2}\right)}{2} = \frac{2n-n^2}{2}$

b-Calculons la somme de 30 premiers termes de la suite v_n

$S_n = \frac{2n-n^2}{2}$ $=> S_{30} = \frac{2(30)-(30)^2}{2} = -420$

9 On donne deux suites (u_n) et (v_n) telles que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 3v_n \end{cases}$ et $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \end{cases}$

1) Calculons : u_n et v_n pour $n \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$.

Pour $n = 0$; on a : $\begin{cases} u_1 = 3u_0 + 2v_0 \\ v_1 = 2u_0 + 3v_0 \end{cases} => \begin{cases} u_1 = 3+4 \\ v_1 = 2+6 \end{cases} => \begin{cases} u_1 = 7 \\ v_1 = 8 \end{cases}$

Pour $n = 1$; on a : $\begin{cases} u_2 = 3u_1 + 2v_1 \\ v_2 = 2u_1 + 3v_1 \end{cases} => \begin{cases} u_2 = 21+16 \\ v_2 = 14+24 \end{cases} => \begin{cases} u_2 = 37 \\ v_2 = 38 \end{cases}$

Pour $n = 2$; on a : $\begin{cases} u_3 = 3u_2 + 2v_2 \\ v_3 = 2u_2 + 3v_2 \end{cases} => \begin{cases} u_3 = 111+76 \\ v_3 = 74+114 \end{cases} => \begin{cases} u_2 = 187 \\ v_2 = 188 \end{cases}$

2) On définit deux suites (X_n) et (Y_n) par : $X_n = u_n + v_n$ et $Y_n = u_n - v_n$

a-Montrons que (X_n) est une suite géométrique et (Y_n) une suite constante.

$X_n = u_n + v_n => X_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = (3u_n + 2v_n) + (2u_n + 3v_n) = 5(u_n + v_n)$

$=> X_{n+1} = 5(u_n + v_n) \Leftrightarrow X_{n+1} = 5X_n$.

D'où X_n est une suite géométrique de raisons $q = 5$ et de premier terme $X_0 = u_0 + v_0 = 3$

Donc l'expression de X_n est $X_n = X_0(q)^n = 3(5)^n = 3 \times 5^n = 3 \times 5^n$

$Y_n = u_n - v_n => Y_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = (3u_n + 2v_n) - (2u_n + 3v_n) = u_n - v_n$

Alors $Y_{n+1} - Y_n = 0$

D'où Y_n une suite constante de valeur $Y_n = Y_0 = 1 - 2 = -1$

b-Exprimons u_n puis v_n en fonction de n.

On sait que $X_n = u_n + v_n$ et $Y_n = u_n - v_n$

$\Rightarrow \begin{cases} X_n = u_n + v_n \\ Y_n = u_n - v_n \end{cases}$

$\Rightarrow X_n + Y_n = 2u_n \Rightarrow u_n = \frac{X_n + Y_n}{2}$. Or $X_n = 3 \times 5^n$ et $Y_n = u_n - v_n \Rightarrow u_n = \frac{3\times 5^n - 1}{2}$

De même $v_n = \frac{X_n - Y_n}{2} \Rightarrow v_n = \frac{3\times 5^n + 1}{2}$

10

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par $u_0 = 1$;

$u_{n+1} = 2u_n + 1$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$

1) Montrons que v_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

v_n est une suite géométrique si et seulement si : $v_{n+1} = qv_n$ ou $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$

$v_n = u_{n+1} - u_n = (2u_n + 1) - u_n = 2u_n + 1 - u_n = u_n + 1$

$\Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = (2u_n + 1) + 1 = 2u_n + 1 + 1 = 2u_n + 2 = 2(u_n + 1) \Rightarrow v_{n+1} = 2v_n$

D'où v_n est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 1 = 2$

2) Exprimons, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

L'expression des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme v_0 et de raison q est :

$v_n = v_0(q)^n$

$v_n = v_0(q)^n \Leftrightarrow v_n = 2(2)^n = 2^{n+1}$

3) Soit la somme $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$

a-Montrons que pour tout entier naturel n, $S_n = u_n - u_0$

On sait que : $v_n = u_{n+1} - u_n$

$\Rightarrow$

$v_0 = \cancel{u_1} - u_0$

$v_1 = \cancel{u_1} - \cancel{u_1}$

$v_2 = \cancel{u_2} - \cancel{u_1}$

. . .

. $\cancel{u_{n-1}}$.

. . .

$v_{n-1} = u_n - \cancel{u_{n-1}}$

En ajoutant membre à membre les termes de l'égalité ci-dessus, on a :

$v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} = u_n - u_0 \Leftrightarrow S_n = u_n - u_0$

D'où pour tout entier naturel n, $S_n = u_n - u_0$ (Ce qu'il fallait Démontre).

b-Calculons S_n en fonction de n

La somme des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme v_0 et de raison q est :

$S_n = \frac{v_0(1-q^{n+1})}{1-q}$

$S_n = \frac{v_0(1-q^{n+1})}{1-q} \Leftrightarrow S_n = \frac{2(1-2^{n+1})}{1-2} \Rightarrow S_n = -2(1-2^{n+1})$

En déduisons u_n en fonction de n.

D'après la question a), $S_n = u_n - u_0$ et D'après la question b), $S_n = -2(1-2^{n+1})$
Par identification, $u_n - u_0 = -2(1-2^{n+1}) \Rightarrow u_n = -2(1-2^{n+1}) + u_0$. Or $u_0 = 1$

$\Rightarrow u_n = -2(1-2^{n+1}) + 1 = -2 + 2 \times 2^{n+1} + 1 = -1 + 2^{n+2}$.

D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = -1 + 2^{n+2}$.

11 Soit la suite S_n = 0,$\underbrace{555\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{n \text{ Chiffres } 5}5$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Prouvons que est la somme des n termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 0,5.
Soit la suite S_n = 0,$\underbrace{555\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{n \text{ Chiffres } 5}5$ où $n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow S_n$ = 0,5 + 0,05 + 0,005 + ……+0,00000……5

Donc $u_1 = 0{,}5$; $u_2 = 0{,}05$; $u_3 = 0{,}005$; …… ; $u_n = 0{,}00000\ldots\ldots5$

En effectuant les opérations $\frac{u_2}{u_1}$; $\frac{u_3}{u_2}$; $\frac{u_4}{u_3}$, on obtient :

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{0{,}05}{0{,}5} = 0{,}1$; $\frac{u_3}{u_2} = \frac{0{,}005}{0{,}05} = 0{,}1$; $\frac{u_4}{u_3} = \frac{0{,}0005}{0{,}005} = 0{,}1$ et d'une manière générale, on a :

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \ldots\ldots\ldots \frac{u_n}{u_{n-1}} \ldots\ldots \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0{,}1 = q$

D'où S_n est la somme des n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = 0{,}1$ et de premier terme

$u_1 = 0{,}5$ et ce ci peut être traduit par : S_n = $0{,}5[(0{,}1)^0 + (0{,}1)^1 + (0{,}1)^2 + \cdots + (0{,}1)^{n+1}]$

2) En déduisons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $S_n = \frac{5}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$

La somme des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme u_1 et de raison q est :
$S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}$

$S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{0{,}5(1-0{,}1^n)}{1-0{,}1} = \frac{0{,}5(1-0{,}1^n)}{0{,}9} = \frac{\frac{5}{10}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]}{\frac{9}{10}} = \frac{5\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]}{9}$

$\Rightarrow S_n = \frac{5}{9}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right] = \frac{5}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$; on a : $S_n = \frac{5}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$

12 1) Soit (u_n), $n \in \mathbb{N}$, une suite de raison r ($r \neq 0$).

On définit la suite (v_n), $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_n}$.

a- Montrons que (v_n), est une suite géométrique dont on Déterminera la raison et le premier terme v_0(on Exprimera v_0 en fonction de u_0).

On a : $v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_n}$.

Alors (v_n), est une suite géométrique si et seulement si : $v_{n+1} = qv_n$ ou $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$

$v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_n} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{4}e^{-2U_{n+1}}$.

Alors on a : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{4}e^{-2U_{n+1}}}{\frac{1}{4}e^{-2U_n}} = \frac{e^{-2U_{n+1}}}{e^{-2U_n}} = e^{-2U_{n+1}} \times e^{2U_n} = e^{-2U_{n+1}+2U_n}$

$\Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = e^{-2(U_{n+1}-U_n)}$

Or d'après l'hypothèse, u_n est une suite arithmétique de raison r, par conséquent on a : $U_{n+1} - U_n = r$. D'où $\frac{v_{n+1}}{v_n} = e^{-2(U_{n+1}-U_n)} = e^{-2r}$

Alors (v_n), est une suite géométrique de raison $q = e^{-2r}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{4}e^{-2U_0}$.

b- Etudions suivant les valeurs de r la convergence de la suite v_n

Pour cela, exprimons v_n en fonction de n.

L'expression des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme v_0 et de raison q est:

$v_n = v_0(q)^n \Leftrightarrow v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_0}(e^{-2r})^n = \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times e^{-2nr} \Rightarrow v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times e^{-2nr}$

Ainsi pour étudier la convergence suivant les valeurs de r , on cacule la limite de v_n en $+\infty$.

- Pour $r > 0$; on a :

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times e^{-2nr} = \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times (0) = 0$

- Pour $r < 0$; on a :

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times e^{-2nr} = \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times (+\infty) = 0$

$n \to +\infty \quad n \to +\infty$

- Pour $r = 0$; on a :

$lim\ v_n = \quad lim\ \frac{1}{4} e^{-2U_0} \times e^{-2nr} = \frac{1}{4} e^{-2U_0}$
$n \to +\infty \quad n \to +\infty$

2) Soit $w_n \ \ n \in \mathbb{N}$, la suite définie par $w_n = \int_0^n \frac{1}{4} e^{-2x} dx$.
a- Calculons w_n en fonction de n.

$w_n = \int_0^n \frac{1}{4} e^{-2x} dx = \frac{1}{4} \int_0^n e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{8} \int_0^n -2e^{-2x}\, dx$

$=> w_n = \left[-\frac{1}{8} e^{-2x}\right]_0^n = -\frac{1}{8} e^{-2n} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-2n} = \frac{1}{8}(1 - e^{-2n})$

D'où $w_n = \frac{1}{8}(1 - e^{-2n})$
b- Montrons que w_n converge vers un nombre réel l que l'on précisera.

Pour cela, on calcule la limite de w_n en $+\infty$.
$lim\ w_n = \quad lim\ \frac{1}{8}(1 - e^{-2n}) = \frac{1}{8}(1 - 0) = \frac{1}{8}$
$n \to +\infty \quad n \to +\infty$
D'où w_n converge vers le réel $= \frac{1}{8}$.
c- On pose $S_n = w_1 + w_2 + \ldots\ldots\ldots + w_n - \frac{n}{8}$.
Calculons S_n en fonction de n puis en déduire $lim\ S_n$
$n \to +\infty$

Posons $S'_n = w_1 + w_2 + \ldots\ldots\ldots + w_n$

$=> lim\ S_n = \quad lim\ S'_n - \frac{n}{8}$.
$n \to +\infty \quad n \to +\infty$

Ainsi exprimons S'_n en fonction de n.
On sait que : $w_n = \frac{1}{8}(1 - e^{-2n}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-2n}$
$=> w_1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-2}$

$w_2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-4}$

$w_3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-6}$
. .
. .
. .
$w_n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-2n}$

En effectuant membre à membre la somme des termes de l'égalité ci-dessus, on a :

$w_1 + w_2 + \ldots\ldots\ldots + w_n = n \times \frac{1}{8} - n\frac{1}{8}e^{-2n} \Leftrightarrow S'_n = \frac{n}{8} - \frac{n}{8}e^{-2n}$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} S'_n - \frac{n}{8} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{8} - \frac{n}{8}e^{-2n}\right) - \frac{n}{8} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{8} - \frac{n}{8}e^{-2n} - \frac{n}{8}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} -\frac{n}{8}e^{-2n} = \lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{8} \times \frac{n}{e^{2n}} = -\frac{1}{8} \times (0) = 0$$

13 On considère les suites u_n et v_n définies pour tout entier naturel n par définies par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}(u_n)^2 \end{cases} \text{ et } \quad v_n = ln\left(\frac{3}{2}u_n\right)$$

1) Calculons v_0.

$v_n = ln\left(\frac{3}{2}U_n\right) \Rightarrow v_0 = ln\left(\frac{3}{2}U_0\right) = ln\left(\frac{3}{2} \times \frac{1}{3}\right) = ln\left(\frac{1}{2}\right) = -ln2 \quad \Rightarrow v_0 = -ln2$

2) Démontrons que v_n est une suite géométrique de raison 2.

(v_n), est une suite géométrique si et seulement si : $v_{n+1} = qv_n$ ou $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$

$$v_n = ln\left(\frac{3}{2}U_n\right) \Rightarrow v_{n+1} = ln\left(\frac{3}{2}U_{n+1}\right) = ln\left(\frac{3}{2} \times \frac{3}{2}(U_n)^2\right) = ln\left(\frac{9}{4}(U_n)^2\right) = ln\left(\frac{3}{2}U_n\right)^2$$

$$= 2ln\left(\frac{3}{2}U_n\right) = 2v_n$$

Alors v_n est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = -ln2$.

3) Exprimons v_n en fonction de n.

L'expression des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme v_0 et de raison q est:

$v_n = v_0(q)^n \Leftrightarrow v_n = -ln2(2)^n = -2^n ln2$.

4) Calculons la limite de v_n .

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} -2^n ln2 = -(+\infty)ln2 = -\infty \times ln2 = -\infty$$

5) Exprimons u_n en fonction de v_n puis en déduisons la limite de u_n

$v_n = ln\left(\frac{3}{2}U_n\right) \Leftrightarrow \frac{3}{2}u_n = e^{v_n} \Rightarrow u_n = \frac{2}{3}e^{v_n}$. Ainsi calculons la limite de u_n en $+\infty$.

$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{3}e^{v_n}$. Or $\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} e^{v_n} = 0$

D'où $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{3}e^{v_n} = \frac{2}{3}(0) = 0$

6) Pour tout entier naturel n, on pose :

$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$ et $T_n = u_0 \times u_1 \times ..... \times u_{n-1}$

a- Démontrons que : $S_n = (1 - 2^{n+1})ln2$

La somme des $n$premiers d'une suite géométrique de 1er terme v_0 et de raison q est :

$$S_n = \frac{v_0(1-q^{n+1})}{1-q} \Leftrightarrow S_n = \frac{-ln2(1-2^{n+1})}{1-2} = \frac{-(1-2^{n+1})ln2}{-1} = (1 - 2^{n+1})ln2$$

b- Justifions que $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$ puis en déduisons T_n en fonction de n

On sait que : $u_n = \frac{2}{3}e^{v_n}$

=> $u_0 = \frac{2}{3}e^{v_0}$

$u_1 = \frac{2}{3}e^{v_1}$

. .

. .

. .

$u_n = \frac{2}{3}e^{v_n}$

En effectuant membre à membre le produit des termes de l'égalité ci-dessus, on a :

$$u_0 \times u_1 \times ..... \times u_{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times e^{(v_0+v_1+\cdots..+v_{n-1})}.$$

Or par hypothèse $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$ et $T_n = u_0 \times u_1 \times ..... \times u_{n-1}$

Alors on a : $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$ (Ce qu'il fallait Démontre).

Déduisons T_n en fonction de n avec

On sait que : $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$ et d'après la question : 6)-a, on a : $S_n = (1 - 2^{n+1})ln2$.

Alors $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{(1-2^{n+1})ln2}$

14 On considère la suite numérique $u_n$définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{2n-1}$

1) a- Calculons u_0 ; u_1 ; u_2 ;u_3 et u_{n+1}

$u_0 = e^{-1}$; $u_1 = e$; $u_2 = e^3$; $u_3 = e^5$; $u_{n+1} = e^{2n+1}$

b- Démontrons que la suite u_n est une suite géométrique dont on précisera la raison.

u_n est une suite géométrique si et seulement si : $u_{n+1} = qu_n$ ou $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$

$u_n = e^{2n-1}$ => $u_{n+1} = e^{2n+1}$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{2n+1}}{e^{2n-1}} = e^{2n+1} \times e^{-2n+1} = e^{2n+1-2n+1}$

$= e^{1+1} = e^2$

D'où u_n est une suite géométrique de raison $q = e^2$ et de premier terme $u_0 = e^{-1}$

c- Exprimons en fonction de n la somme $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

La somme des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme u_0 et de raison q est :

$S_n = \frac{u_0(1-q^{n+1})}{1-q} \Leftrightarrow S_n = \frac{\left(1-(e^2)^{n+1}\right)e^{-1}}{1-e^2} = \frac{(1-e^{2n+2})e^{-1}}{1-e^2} = \frac{e^{-1}-e^{2n+1}}{1-e^2}$

En déduisons $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^{-1}-e^{2n+1}}{1-e^2} = -\infty$

d- Trouvons la valeur minimum de n telle que $S_n \geq 10$

$S_n \geq 10 \Leftrightarrow \frac{e^{-1}-e^{2n+1}}{1-e^2} \geq 10 \Leftrightarrow e^{-1} - e^{2n+1} \geq 10(1-e^2) \Leftrightarrow e^{2n+1} \leq 63{,}5$

=> $2n+1 \leq ln(63{,}5)$ => $n \leq 1{,}57$

2) Soit la suite v_n définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = ln(u_n) = ln(e^{2n-1}) = 2n - 1$

a-Exprimons la somme $S'_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ en fonction de n

Pour cela cherchons la nature de la suite v_n.

$v_n = ln(u_n) = ln(e^{2n-1}) = 2n - 1$ => $v_n = 2n - 1$ et $v_{n+1} = 2n + 1$

$v_{n+1} - v_n = (2n+1) - (2n-1) = 2n + 1 - 2n + 1 = 2$

Alors v_n est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $v_0 = ln(u_0) = -1$.

Par conséquent l'expression de v_n est : $v_n = 2n - 1$ et la somme des n premiers termes de la suite v_n est donnée par : $S'_n = \frac{(n+1)(v_0+v_n)}{2} = \frac{(n+1)(-1+2n-1)}{2} = \frac{(n+1)(2n-2)}{2}$

$= \frac{2(n+1)(n-1)}{2} = (n+1)(n-1) = n^2 - 1$

D'où $S'_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = n^2 - 1$

b-Exprimons le produit $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$ en fonction de n

On sait que : $v_n = ln(u_n)$

=> $v_0 = ln(u_0)$

$v_1 = ln(u_1)$

. .
. .
. .
$v_n = ln(u_n)$

En effectuant membre à membre la somme des termes de l'égalité ci-dessus, on a :

$v_0 + v_1 + \ldots\ldots\ldots + v_n = ln(u_0) + ln(u_1) + \ldots.. ln(u_n) \Leftrightarrow S'_n = ln(u_0 \times u_1 \times \ldots..\times u_n)$
$\Rightarrow u_0 \times u_1 \times \ldots..\times u_n = e^{S'_n} \Leftrightarrow P_n = e^{S'_n}$. Or $S'_n = n^2 - 1 \Rightarrow P_n = e^{n^2-1}$
D'où le produit $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots.. \times u_n$ en fonction de n est $P_n = e^{n^2-1}$

15 Soit la suite u_n; $n \in \mathbb{N}^*$ à termes positifs tel que : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (u_{n+1})^2 = u_n \times e \end{cases}$

1) Calculons puis Exprime u_1; u_2 ; u_3 en fonction de e^k où $k \in \mathbb{R}$.

On sait que $(u_{n+1})^2 = u_n \times e \Rightarrow u_{n+1} = \sqrt{u_n \times e} = \sqrt{u_n} \times \sqrt{e} = (u_n)^{\frac{1}{2}} \times e^{\frac{1}{2}}$

$u_1 = 1 = e^0$

$u_2 = (u_1)^{\frac{1}{2}} \times e^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}} \times e^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$

$u_3 = (u_2)^{\frac{1}{2}} \times e^{\frac{1}{2}} = \left(e^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \times e^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{4}} \times e^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{3}{4}}$

2) On pose $v_n = ln(u_n) - a$ (où $a \in \mathbb{R}^*$ n et $\mathbb{N}^*$).

a-Déterminons le réel a pour que v_n soit une suite géométrique dont on Déterminera la raison et le premier terme v_1.

$v_n = ln(u_n) - a$

$v_1 = ln(u_1) - a = ln(1) - a = -a$

$v_2 = ln(u_2) - a = ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) - a = \frac{1}{2} - a = \frac{1-2a}{2}$

$v_3 = ln(u_3) - a = ln\left(e^{\frac{3}{4}}\right) - a = \frac{3}{4} - a = \frac{3-4a}{4}$

Alors les 3 termes v_1 ; v_2 et v_3 sont en progression géométrique si te seulement si :

$v_1 \times v_3 = (v_2)^2 \Leftrightarrow (-a) \times \left(\frac{3-4a}{4}\right) = \left(\frac{1-2a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{-3a+4a^2}{4} = \frac{1-4a+4a^2}{4} \Leftrightarrow$

$-3a + 4a^2 = 1 - 4a + 4a^2 \Leftrightarrow 4a - 3a = 1 \Rightarrow a = 1.$

D'où $v_1 = -1$; $v_2 = -\frac{1}{2}$ et $v_2 = -\frac{1}{4}$ et $v_n = ln(u_n) - 1$

b-Calculons la limite de v_n puis celle de u_n en $+\infty$

v_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{v_2}{v_1} = \frac{-\frac{1}{2}}{-1} = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = -1$.

Alors son expression est $v_n = v_1(q)^{n-1} \Leftrightarrow v_n = -1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -1\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) = -\frac{1}{2^{n-1}}$

=> $v_n = -\frac{1}{2^{n-1}}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{2^{n-1}} = 0$

D'autre part $v_n = ln(u_n) - 1 \Leftrightarrow ln(u_n) = v_n + 1 = -\frac{1}{2^{n-1}} + 1$ => $u_n = e^{\left(-\frac{1}{2^{n-1}} + 1\right)}$

=> $u_n = e^{\left(-\frac{1}{2^{n-1}} + 1\right)}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e^{(0)} = 1$

16 Après les élections présidentielles 2013 au Mali, l'analyse des résultats a montré que le candidat élu avait obtenu v_1 voies, le 2e avait obtenu v_2 voies, ainsi de suite jusqu'au dernier des n candidats qui avait obtenu v_n voies. De plus on a constaté que le $k^{ième}$ candidat avec ($k \geq 1$) avait obtenu le double de voies de son successeur immédiat ($k+1)^{ième}$ du classement ; définissant ainsi une suite numérique $(v_n)_{n \geq 1}$

1) Prouvons que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q.

D'après les renseignements ci-dessus, on a : $v_1 = 2v_2$; $v_2 = 2v_3$; $v_3 = 2v_4$ et de manière générale,on a : $v_n = 2v_{n+1} \Leftrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2}$

D'où v_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme v_1.

2) Le nombre total de votants appelé suffrage exprimé est : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_{n-1}$.

Un candidat est élu président dès le 1er tour, lorsque son nombre de voies v_1 dépasse la moitié de S_n.

a-Déterminons en fonction de n et v_1 le suffrage exprimé S_n.

Ici, le suffrage exprimé S_n désigne la somme des n premiers termes de la suite géométrique de 1er terme v_1 et de raison $q = \frac{1}{2}$

$S_n = \frac{v_1(1-q^n)}{1-q}$

Alors $S_n = \frac{v_1(1-q^n)}{1-q} \Leftrightarrow S_n = \frac{v_1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{v_1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\frac{1}{2}} = 2v_1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2v_1\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

D'où le suffrage exprimé S_n en fonction de n est : $S_n = 2v_1\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

b-Examinons si un deuxième tour à cette élection eut été nécessaire.

Par hypothèse, candidat est élu président dès le 1er tour, lorsque son nombre de voies v_1 dépasse la moitié de S_n où S_n désigne le suffrage exprimé c'est-à-dire : $v_1 > \frac{1}{2}S_n \Leftrightarrow$

$v_1 - \frac{1}{2}S_n > 0$

Ainsi étudions le signe de $v_1 - \frac{1}{2}S_n$.

$$v_1 - \frac{1}{2}S_n = v_1 - \frac{1}{2}\left(2v_1\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right) = v_1 - v_1\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = v_1 - v_1 + \frac{1}{2^n}v_1 = \frac{1}{2^n}v_1$$

Or $\forall\, n \in \mathbb{N};\ \frac{1}{2^n} > 0$ et $v_1 > 0$. Alors $\forall\, n \in \mathbb{N};\ v_1 - \frac{1}{2}S_n > 0 \Rightarrow v_1 > \frac{1}{2}S_n$.

Puisque $v_1 > \frac{1}{2}S_n$, alors le candidat est élu président dès le 1er tour.

3) En effet le nombre total des votants fut 945 et le candidat fut élu par ses 480 voies.

Déterminons alors le nombre n de candidats qui avaient postulés.

Par hypothèse : $S_n = 945$ et $v_1 = 480$.

En remplaçant $S_n = 945$ et $v_1 = 480$ par leur valeur dans $S_n = 2v_1\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$, on a :

$$945 = 2\times 480\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \Leftrightarrow 945 = 960\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2^n} = \frac{945}{960} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = 1-\frac{945}{960}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = \frac{15}{960} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = \frac{1}{64} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^6} \Rightarrow n = 6$$

Alors on en déduit qu'il y-avait $n = 6$ candidats comme postulant.

17 Soit la suite u_n définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{4}{4-u_n}$ ($n \in \mathbb{N}$)

1) a- Déterminons u_0 pour que u_n soit constante.

La suite est constante ou stationnaire si et seulement $u_n = u_0$ c'est-à-dire $u_0 = \frac{4}{4-u_0} \Leftrightarrow$ $u_0(4-u_0) = 4 \Leftrightarrow {u_0}^2 + 4u_0 - 4 = 0 \Rightarrow u_0 = 2$

b-Démontrons que si $u_n < 2$ alors ($n \in \mathbb{N}$); $u_n < u_{n+1} < 2$

En déduisons que si $u_0 < 2$ alors pour tout entier naturel on a : $u_n < 2$ et que u_n est monotone.

Supposons que $u_n < 2$ alors : $4 - u_n > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{4-u_n}$.

Alors $\forall\, n \in \mathbb{N};\ u_n < 2$ et la suite est croissante (donc monotone).

2) On suppose maintenant que $u_0 = -1$

a) Calculons u_1 ; u_2; u_3.

$u_{n+1} = \frac{4}{4-u_n}$ et $u_0 = -1$

Alors : $u_1 = \frac{4}{5}$; $u_2 = \frac{5}{4}$; $u_3 = \frac{16}{11}$.

b) Soit la suite v_n définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$.

Démontrons que v_n est une suite arithmétique dont on Déterminera le premier terme et la raison.

v_n est une suite arithmétique si et seulement si : $v_{n+1} - v_n = r$ où $r = cste =$ la raison.

$v_n = \frac{1}{u_n - 2}$ => $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 2} = \frac{1}{\frac{4}{4 - u_n} - 2} = \frac{1}{\frac{4 - 8 + 2u_n}{4 - u_n}} = \frac{1}{\frac{-4 + 2u_n}{4 - u_n}}$

=> $v_{n+1} = \frac{4 - u_n}{-4 + 2u_n}$

Alors $v_{n+1} - v_n = \frac{4 - u_n}{-4 + 2u_n} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{4 - u_n}{2(u_n - 2)} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{4 - u_n - 2}{2(u_n - 2)}$

$= \frac{2 - u_n}{2(u_n - 2)} = \frac{-(u_n - 2)}{2(u_n - 2)} = \frac{-1}{2}$

D'où v_n est une suite arithmétique de raison $r = \frac{-1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0 - 2} = \frac{-1}{3}$

c) Calculons u_n en fonction de n puis étudier sa limite en $+\infty$.

v_n étant une suite arithmétique de raison $r = \frac{-1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{-1}{3}$, alors son expression est $v_n = v_0 + nr = \frac{-1}{3} + \frac{-1}{2}n = -\frac{2 + 3n}{6}$.

Puisque $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$ alors $u_n = 2 + \frac{1}{v_n}$. Or $v_n = -\frac{2 + 3n}{6}$.

=> $u_n = 2 + \frac{1}{-\frac{2 + 3n}{6}} = 2 - \frac{6}{2 + 3n} = \frac{4 + 6n - 6}{2 + 3n} = \frac{6n - 2}{2 + 3n}$

D'où $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{6n - 2}{2 + 3n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{6n}{3n} = \frac{6}{3} = 2$

18

1°/a) Sachant qu'à 6 heures le bouillon contenait N microbes, calculons le nombre de microbes vivants aux heures suivantes : 7h ; 8h ; 9h ; 10h.

A 6 heures le bouillon contenait $u_1 =$ N microbes

A 7 heures le bouillon contenait $u_2 = \frac{N}{2}$ microbes

A 8 heures le bouillon contenait $u_3 = \frac{N}{4}$ microbes

A 9 heures le bouillon contenait $u_4 = \frac{N}{8}$ microbes

A 10 heures le bouillon contenait $u_5 = \frac{N}{16}$ microbes

b) Montrons que ces nombres sont en progression géométriques

D'après la question a), on a : $u_2 = \frac{1}{2}u_1$; $u_3 = \frac{1}{2}u_2$; $u_4 = \frac{1}{2}u_3$ et $u_5 = \frac{1}{2}u_4$

Donc ces nombres sont en progression géométriques de raison $q = \frac{1}{2}$

Calculons pour tout entier positif n la somme S_n des n premiers termes de cette progression.

Pour une suite géométrique, on a la somme $S_n = \frac{u_1[1 - (q)^n]}{1 - q}$ or $u_1 =$ N et $q = \frac{1}{2}$

=> $S_n = \frac{N\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{N\left[1 - \frac{1}{2^n}\right]}{\frac{1}{2}} = 2N\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

2°/ A 12heures, on ajoute au bouillon un produit qui annule l'effet de l'antibiotique. On constate alors que le nombre de microbes vivants dans le bouillon augmente de 25% par heure. Calculons le nombre de microbes vivants dans le bouillon à 14h si $N = 10^{10}$.

A 12 heures le bouillon contient $v_1 = \frac{N}{64}$ microbes $= \frac{10^{10}}{64}$ microbes

A 13 heures le bouillon contient $v_2 = v_1 + 0{,}25v_1 = 1{,}25v_1 = 1{,}25\frac{10^{10}}{64}$ microbes

A 14 heures le bouillon contient $v_3 = (1{,}25)^2 \times \frac{10^{10}}{64} = 244140625$ microbes

Progression arithmétiques – Progression géométriques.

19 1) Trouve 3 nombres consécutifs a ; b et c d'une suite en progression arithmétique sachant

Que : $\begin{cases} a+b+c=3 \\ 3a-6b+c=6 \end{cases}$

On sait que pour une progression arithmétique de 3 termes a ; b ; c , on a : $a+c=2b$
Ainsi l'équation devient :

$\begin{cases} 2b+b=3 \\ 3a-6b+c=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b=3 \\ 3a-6b+c=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ 3a-6b+c=6 \end{cases}$

D'autre part $a+b+c=3 \Rightarrow a+1+c=3 \Rightarrow a+c=2$

$\begin{cases} a+c=2 \\ 3a-6+c=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c=2 \\ 3a+c=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a-c=-2 \\ 3a+c=12 \end{cases} \Rightarrow 2a=10 \Rightarrow a=5$ et

$c=-3$
D'où les nombres a ; b et c sont tels que $a = 5$; $b=1$ et $c=-3$

2) Trouve 3 nombres consécutifs a ; b et c d'une suite en progression géométrique sachant

Que : $\begin{cases} a \times b \times c = 8 \\ a+b=-1 \\ c-a=1 \end{cases}$

On sait que pour une progression géométrique de 3 termes ; b ; c , on a : $a \times c = b^2$
Ainsi l'équation devient :

$\begin{cases} (a \bullet c) \bullet b = 8 \\ a+b=-1 \\ c-a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (b^2) \bullet b = 8 \\ a+b=-1 \\ c-a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^3=8 \\ a+b=-1 \\ c-a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=3 \\ a+b=-1 \\ c-a=1 \end{cases}$

$$=>\begin{cases} b=3 \\ a=-4 \\ c-a=1 \end{cases} => \begin{cases} b=3 \\ a=-4 \\ c=-3 \end{cases}$$

D'où les nombres a ; b et c sont tels que $a = -4$; $b = 3$ et $c = -3$

20 Soient a et b deux réels tel que : (a ; $a + 4b$; $5a + 2b$) et ($b + 3$; $3a + 1$; $6a + b$) soient des termes
consécutifs de suite respectivement arithmétique et géométrique. Trouvons a et b.

a ; $a + 4b$ et $5a + 2b$ étant dans cet ordre 3 termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors on a : $(a) + (5a + 2b) = 2(a + 4b) \Leftrightarrow 6a + 2b = 2a + 8b \Leftrightarrow 2a - 3b = 0$ **(1)**
De même $b + 3$; $3a + 1$ et $6a + b$ étant dans cet ordre 3 termes consécutifs d'une suite géométrique, alors on a : $(b + 3)(6a + b) = (3a + 1)^2 \Leftrightarrow$
$b^2 + 18a + 3b + 6ab = 9a^2 + 6a + 1 \Leftrightarrow 9a^2 - b^2 - 12a - 3b - 6ab + 1 = 0$ **(2)**
Ainsi formons le système avec les équations **(1)** et **(2)**

$$\begin{cases} 2a - 3b = 0 & \textbf{(1)} \\ 9a^2 - b^2 - 12a - 3b - 6ab + 1 = 0 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

(1) : $2a - 3b = 0$ $=> b = \frac{2}{3}a$
En remplaçant ainsi $b = \frac{2}{3}a$ par sa valeur dans l'équation **(2),** on a : $41a^2 - 126a + 9 = 0$
et $\Delta = 14400$.Alors $a_1 = \frac{3}{41}$ et $a_2 = 3$ puis $b_1 = \frac{2}{41}$ et $b_2 = 2$
D'où les réels a et b sont tels que : S = $\left\{(3\,;2)\ ;\ \left(\frac{3}{41}\ ;\ \frac{2}{41}\right)\right\}$

21 Quatre (4) entiers strictement positifs $a, b, c,$ et d forment dans cet ordre une suite géométrique dont la raison est un entier premier avec a.

Trouvons ces nombres sachant qu'ils vérifient en outre la relation $10a^2 = d - b$.

Les 4 entiers $a, b, c,$ et d forment dans cet ordre une suite géométrique si et seulement si :

$b = qa$; $c = q^2a$; $d = q^3a$.

Alors $10a^2 = d - b \Leftrightarrow 10a^2 = q^3a - qa \Leftrightarrow 10a^2 = qa(q^2 - 1) \Leftrightarrow 10a = q(q^2 - 1)$

Nous en déduisons que q divise 10 car PGCD$(q\,;a) = 1$. Donc $q \in \{1\,;2\,;5\,;10\}$

- Si $q = 1$, on a une absurdité car pour $q = 1$, $a = 0$ (qui contredit l'hypothèse).
- Si $q = 2$, on obtient $5a = 3$ $=> a = \frac{3}{5} \notin \mathbb{N}$
- Si $q = 5$, on obtient $a = 12$; $b = 60$; $c = 300$ et $d = 1500$
- Si $q = 10$, on obtient $a = 99$; $b = 990$; $c = 9900$ et $d = 99000$

22 Soit u_n une suite dans laquelle les dix premiers termes de la suite sont en progression arithmétique de raison r et à partir de u_{10} les termes sont en progression géométrique de raison q.

On donne : $u_1 = 0$; $u_{16} = \frac{-1}{27}$ et $qr = 1$

1) Calcule q ; r ; u_{10} et u_{11}

D'après les hypothèses, nous avons :

$u_{10} = u_1 + 9r = 9r$; $u_{11} = q \times u_{10} = q(9r) = 9qr = 9 \times 1 = 9$

D'autre part $u_{16} = q^5 \times u_{11} \Leftrightarrow \frac{-1}{27} = q^5 \times u_{11}$. Or $u_{11} = 9$. Alors on a : $\frac{-1}{27} = 9q^5 \Leftrightarrow$

$q^5 = \frac{-1}{243}$ => $q = \sqrt[5]{\frac{-1}{243}} = \frac{-1}{3}$

Cherchons maintenant la valeur de r.

D'après les hypothèses, nous avons : $qr = 1$ => $r = \frac{1}{q}$. Or $q = \frac{-1}{3}$.

Alors $r = -3$ et $u_{10} = -9 \times 3 = -27$

2) Calcule la somme S_n des n premiers termes de la suite u_n dans les deux cas suivants :

a) $n \leq 10$

Lors que $n \leq 10$, on a une suite arithmétique u_n et :

$S_n = \frac{n}{2}(u_1 - u_n) = \frac{n}{2}(2u_1 - (n-1)r) = -\frac{3n(n-1)}{2}$

b) Lors que $n > 10$

Lors que $n > 10$, on a une suite géométrique u_n et :

$S_n = \frac{u_{11}(1-q^{n-10})}{2} = \frac{9\left(1-\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-10}\right)}{2} = -135 + \frac{27}{4}\left(1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^{n-10}\right)$

23 Soient Z_1 ; Z_2 et Z_3 trois nombres complexes.

Déterminons : Z_1 ; Z_2 et Z_3 sachant que :

- Le produit des trois complexes Z_1 ; Z_2 et Z_3 est $3i\sqrt{3}$. Alors on a :

$Z_1 \times Z_2 \times Z_3 = 3i\sqrt{3} \Leftrightarrow [r_1 \times r_2 \times r_3 \,;\, a_1 + a_2 + a_3\,] = \left[3\sqrt{3}\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 \times r_2 \times r_3 = 3\sqrt{3} \\ a_1 + a_2 + a_3 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

- Les arguments a_1 ; a_2 et a_3 forment une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$. Alors on a :

$a_2 = a_1 + \frac{\pi}{3}$ et $a_3 = a_1 + 2\frac{\pi}{3}$

- Les modules r_1 ; r_2 et r_3 une suite géométrique de raison 2. Alors on a :

$r_2 = 2r_1$ et $r_3 = 4r_1$

Ainsi formons le système avec ces trois conditions énumérées ci-dessus :

$$\begin{cases} 8r_1^3 = 3\sqrt{3} \\ 3a_1 + \pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}}}{2} \\ a_1 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

D'autre part, $0 < a_1 < \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 0 < -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} < \frac{2\pi}{3}$

En simplifiant par π et en multipliant par 6, on obtient :

$0 < -1 + 4k < 4 \Leftrightarrow 1 < 4k < 5 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < k < \frac{5}{4} \Rightarrow k = 1$

Donc : $\begin{cases} a_1 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \\ a_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \\ a_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$ et $\begin{cases} r_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ r_2 = \sqrt{3} \\ r_3 = 2\sqrt{3} \end{cases}$

Ainsi connaissant le module et l'argument de Z_1 ; Z_2 et Z_3; on a :

$$\begin{cases} Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right) \\ Z_2 = \sqrt{3}\left(cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}\right) \\ Z_3 = 2\sqrt{3}\left(cos\frac{7\pi}{6} + isin\frac{7\pi}{6}\right) \end{cases}$$

Suites économiques.

24 Au 1er Janvier 2012, le prix d'un kilo de sucre est de 550 f CFA.
Le prix du kilo subit une augmentation de 50 f CFA au 1er Janvier de chaque année.

1) Déterminons le prix du kilo de sucre au 1er Janvier 2013 et au 1er Janvier 2014

Soit P_0 le prix d'un kilo de sucre au 1er Janvier 2012 tel que $P_0 = 550$.

- Au 1er Janvier 2013 : le prix d'un kilo de sucre serait $P_1 = P_0 + 50 = 550 + 50 = 600$.
- Au 1er Janvier 2014 : le prix d'un kilo de sucre serait $P_2 = P_1 + 50 = 600 + 50 = 650$.

2) On désigne par P_n le prix du kilo du sucre au 1er Janvier $+ n$.

Calculons P_n en fonction de n

Soit P_n le prix d'un kilo de sucre au 1er Janvier $+ n$.

Calculons : P_1 ; P_2 ; P_3 et p_n.

- $P_0 = 550$.
- $P_1 = P_0 + 50 = 550 + 50 = 600$.
- $P_2 = P_1 + 50 = 660 + 50 = 650$.
- $P_3 = P_2 + 50 = 650 + 50 = 700$.

.

.

- $p_n = P_0 + 50n = 550 + 50n$.

D'où l'expression de P_n en fonction de n est $p_n = 550 + 50n$

3) Calcule $P_{n+1} - P_n$ puis en déduire la nature de la suite P_n.

Calculons $p_{n+1} - p_n$.

$p_n = 550 + 50n \Rightarrow p_{n+1} = 550 + 50(n + 1) = 550 + 50 + 50n = 600 + 50n$

$\Rightarrow p_{n+1} - p_n = (600 + 50n) - (550 + 50n) = 600 + 50n - 550 - 50n = 50$

Alors p_n est une suite arithmétique de raison $r = 50$.

25 Le premier Janvier 1999, la population d'une commune rurale était de 3000 habitants. On admet que cette population diminue de 4 % chaque année.

Calculons la population de cette commune :

Soit u_n la population de cette commune au 1er Janvier de l'année n.

Soit $u_1 = 3000$ la population initiale de cette commune.On a :

$u_1 = 3000$.

$u_2 = u_1 - 4\%u_1 \Rightarrow u_2 = u_1 (1 - 4\%) = u_1 (1 - \frac{4}{100}) = u_1 (0{,}96)$

$u_3 = u_2 (0{,}96)$

. .

. .

. .

$u_{n+1} = u_n (0{,}96)$

$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0{,}96.$

Alors on a : une suite géométrique de raison q = 0,96.

D'où son expression est : $u_n = u_1(q)^{n-1} = 3000(\ 0{,}96\ )^{n-1}$

Déterminons ainsi la population :
1) Au 1er Janvier 2005

On sait que : $u_n = 3000(\ 0{,}96\ )^{n-1}$ et $n = 2005 - 1999 = 6$
D'où la population au 1er Janvier 2005 est : $u_6 = 3000(\ 0{,}96\ )^{6-1} = 3000(\ 0{,}96\ )^5$

$=> u_6 = 2446{,}11 \approx 2446$
Ainsi la population au 1er Janvier 2005 est : 2244 habitants.

2) Au 1er Janvier 2006
On sait que : $u_n = 3000(\ 0{,}96\ )^{n-1}$ et $n = 2006 - 1999 = 7$

D'où la population au 1er Janvier 2006 est : $u_7 = 3000(\ 0{,}96\ )^{7-1} = 3000(\ 0{,}96\ )^6$
$=> u_7 = 2348{,}27 \approx 2348$

Ainsi la population au 1er Janvier 2006 est : 2348 habitants.

3) Au 1er Janvier 2012

On sait que : $u_n = 3000(\ 0{,}96\ )^{n-1}$ et $n = 2012 - 1999 = 13$

D'où la population au 1er Janvier 2005 est : $u_{13} = 3000(\ 0{,}96\ )^{13-1} = 3000(\ 0{,}96\ )^{12}$

$=> u_{13} = 1838{,}12 \approx 1838$

Ainsi la population au 1er Janvier 20012 est : 1838 habitants.

26 La population d'un pays augmente régulièrement de 3% par an.
Reproduisons et complétons le tableau démographique ci-dessous :

Années	2012	2013	2014	2015	2016
Populations			6415000		

Désignons par :
p_0 La population initiale de ce pays, c'est-à-dire la population en 2012.
p_1 La population de ce pays en 2013.
$p_2 = 6415000$, la population de ce pays en 2014.
p_3 La population de ce pays en 2015.
p_4 La population de ce pays en 2016.

Puisque cette population augmente régulièrement de 3% par an, on a :

- En 2013, $p_1 = p_0 + 3\%p_0 = (1 + 3\%)p_0 = (1 + 0{,}03)p_0 = 1{,}03p_0$.
- En 2014, $p_2 = p_1 + 3\%p_1 = (1 + 3\%)p_1 = (1 + 0{,}03)p_1 = 1{,}03p_1$.

. .
. .

- .En $2012+n, p_{n+1} = p_n + 3\%p_n = (1+3\%)p_n = (1+0{,}03)p_n = 1{,}03p_n$.
  => $p_{n+1} = 1{,}03p_n \Leftrightarrow \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1{,}03$

Alors p_n est une suite géométrique de raison $q = 1{,}03$ et de premier terme p_0

Ainsi l'expression de cette suite est $p_n = p_0(q)^n \Leftrightarrow p_n = p_0(1{,}03)^n$

Puisque $p_2 = 6415000$ est la population de ce pays en 2014, alors on a :
$p_2 = p_0(1{,}03)^2$ => $p_0 = \frac{p_2}{(1{,}03)^2} = \frac{6415000}{1{,}0609} = 6046752{,}757 \approx 6046753$.

D'où la population initiale est $p_0 = 6046753$.

Ainsi :
La population en 2013 est : $p_1 = p_0(1{,}03)^1 = 6046753 \times 1{,}03 = 6228156$
La population en 2014 est : $p_2 = 6415000$

La population en 2015 est : $p_3 = p_0(1{,}03)^3 = 6046753 \times 1{,}092727 = 6607450$
La population en 2016 est : $p_4 = p_0(1{,}03)^4 = 6046753 \times 1{,}12550881 = 6805674$
D'où le tableau est le suivant :

Années	2012	2013	2014	2015	2016
Populations	6046753	6228156	6415000	6607450	6805674

27 Un capital A est placé à intérêts composés aux taux de 3% l'an. On appelle C_0 le capital initial et C_n le capital après n années.

1) Expliquons la relation $C_1 = 1{,}03C_0$ puis écrire le capital C_n en fonction de C_0 et 1,03 .
Le capital A est placé à intérêts composés au taux de 3% l'an.
Le capital obtenu au bout d'un an, C_1, est égal à la somme du capital initial C_0 et des intérêts soit $0{,}03C_0$.
D'où $C_1 = C_0 + 0{,}03C_0 = 1{,}03C_0$.
Plus généralement, le capital obtenu au bout de $n+1$ années, C_{n+1}, est égal à la somme du capital obtenu au bout de n années C_n et des intérêts soit $0{,}03C_n$.
D'où $C_{n+1} = C_n + 0{,}03C_n = 1{,}03C_n$
Où on en déduit que la suite (C_n) est géométrique de raison 1,03 et de premier terme C_0.
Ainsi l'expression de C_n en fonction de n est le suivant : $C_n = (1{,}03)^n C_0$

2) Déterminons le nombre d'années au bout du quelle le capital est doublé

Le capital est doublé au bout de n années si et seulement si $C_n \geq 2C_0$ soit $(1{,}03)^n C_0 \geq 2C_0$.

On cherche donc le plus petit entier n tel que $(1{,}03)^n \geq 2$.

A l'aide de la calculatrice, on trouve : $(1{,}03)^{23} < 2 < (1{,}03)^{24}$

Alors le capital est doublé au bout de 24 ans

3) Déterminons le nombre d'années au bout du quelle le capital est triplé

De même en raisonnant de manière analogue que précédemment, on obtient :

$(1{,}03)^n \geq 3$ Puis à l'aide de la calculatrice, on trouve : $(1{,}03)^{37} < 3 < (1{,}03)^{38}$

Alors le capital est doublé au bout de 38 ans

28 Ali a reçu de son père une somme de 100.000 FCFA.
Après réception, il dépose cette somme dans une caisse d'épargne le 1er Janvier 2009 à intérêt composé au taux annuel de 5 % en vue d'acheter une moto à 300000 FCFA.

1) Déterminons le temps au bout du quel Ali pourra acheter sa moto.
Soient :

- C_0 = 100.000 FCFA : le capital initial.
- C_n = 300.000 FCFA : la valeur acquise.
- i = 5 % = $\frac{5}{100}$ = 0,05 : le taux d'intérêt.

Calculons ainsi la durée n pour que Ali puisse acheter sa moto.

On a : $C_n = C_0(1+i)^n \Leftrightarrow (1+i)^n = \frac{C_n}{C_0} \Leftrightarrow (1+0{,}05)^n = \frac{300000}{100000} \Leftrightarrow (1{,}05)^n$
$= 3$ (or $a^n = e^{nlna}$) $\Leftrightarrow (1{,}05)^n = 3 \Leftrightarrow e^{nln(1{,}05)} = 3$ (or $e^a = b \Leftrightarrow a = lnb$)

$e^{nln(1{,}05)} = 3 \Leftrightarrow nln(1{,}05) = ln3 \Rightarrow n = \frac{ln3}{ln(1{,}05)} \Rightarrow n = \frac{1{,}09}{0{,}04} \Rightarrow n = 27{,}25 \approx 27.$

Donc Ali pourra acheter sa moto au bout de 27 ans.

2) Déterminons la nouvelle valeur acquise par Ali au bout de 30 semestres au taux de 2 %.

$C_n = C_0(1+i)^n \Rightarrow C_{30} = 100.000(1+2\,\%)^{30} \Leftrightarrow C_{30} = 100.000(1+0{,}02)^{30}$

$\Rightarrow C_{30} = 100.000(1{,}02)^{30} = 181.136$ FCFA.

Donc Ali aura une valeur acquise de 181.136 FCFA au bout de 30 semestres.

29 1) Chaque année la grand-mère de Salif dépose de l'argent dans une banque afin de constituer une cagnotte pour son petit-fils.
Elle a commencé le 1er janvier 1982 par un dépôt de 500 F. Depuis lors, elle a effectué un dépôt chaque 1er janvier, en augmentant chaque année le montant de ce dépôt de 50 F.
On note :

- u_n le montant exprimé en francs, de la somme déposée dans la caisse d'épargne le 1er janvier 1982+ n. (Ainsi u_0 = 500 ; u_1 = 550 ; …)
- S_n le montant, en francs, de la somme contenue dans la caisse d'épargne après le dépôt de l'année 1982+ n. (Ainsi S_0 = 500 ; u_1 = 1050 ; …)

a- Calculons u_2, puis Exprime u_n en fonction de n.
Par hypothèse, on a :

$u_0 = 500$

$u_1 = u_0 + 50 = 550$

$u_2 = u_1 + 50 = 600$
. . .
. . .
. . .
$u_{n+1} = u_n + 50$

Alors la suite u_n est donc arithmétique de raison $r = 50$ et de premier terme u_0 = 500.

Ainsi son expression en fonction de n est $u_n = u_0 + nr$ =>$u_n = 500 + 50n$.

b- CalculonsS_2, puis exprimons S_n en fonction de n.

$S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = 500 + 550 + 600 = 1650$
Le montant, en francs, de la somme stocké à la banque le 1er janvier $1982 + n$ est la somme de tous les dépôts effectués entre 1982 et $1982 + n$, c'est-à-dire : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots . + u_n$, qui est donc la somme des $n + 1$ premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Ainsi on a : $S_n = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2} = \frac{(n+1)(500+500+50n)}{2} = (n+1)(25n+500)$

c- Le 1er janvier 2002, la grand-mère de Salif effectue son dépôt habituel (en franc), puis offre l'argent de la caisse à Salif.

Déterminons le montant de la somme reçue par Salif

On a : $2002 = 1982 + 20$. Donc $n = 20$. Il s'agit de Calcule S_{20}.

$S_n = (n+1)(25n+500)$ =>$S_{20} = (20+1)(25 \times 20 + 500) = 21000$ Franc ou

$S_{20} = \frac{21000}{6{,}55957} = 3201{,}43€$

2) Avec le cadeau de sa grand-mère, Salif décide d'ouvrir un compte bancaire et d'y placer la plus grande partie de la somme qu'il a reçue.
Le 1er janvier 2002, il effectue un placement de 3000 €, à intérêts composés, aux taux annuel de 4%.(A la fin de chaque année, les intérêts seront incorporés au capital). De plus, chaque 1er janvier des années suivantes, il décide d'ajouter sur son compte la somme de 200€.

On note :

- C_n le montant exprimé en euros, du capital disponible sur le compte bancaire de Salif après n années de placement. (Ainsi C_0 = 3000)
- (u_n) la suite définie par $u_n = C_n + 5000$. (Ainsi u_0 = 8000)

a- Justifions que pour tout entier naturel n, on a : $C_{n+1} = 1{,}04C_n + 200$

Le 31 décembre de chaque année, le capital C_n augmente de 4%. Il vient donc :
$(1 + i)C_n$. Où C_n est le montant exprimé après n années de placement et $i = 4\% = \frac{4}{100}$ le taux d'intérêt annuel.

Alors on a : $(1 + i)C_n = \left(1 + \frac{4}{100}\right) C_n = 1{,}04C_n$

De plus, le jour suivant (1er janvier), Salif ajoute 200 € sur son compte.

Le nouveau capital C_{n+1} est donc : $C_{n+1} = 1{,}04C_n + 200$.

b- Démontrons que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

u_n est une suite géométrique si et seulement si : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ où $q\ est\ la$ raison.

Par hypothèse on a : $u_n = C_n + 500$ => $u_{n+1} = C_{n+1} + 5000$. Or $C_{n+1} = 1{,}04C_n + 200$.

Alors $u_{n+1} = 1{,}04C_n + 200 + 5000 = 1{,}04C_n + 5200$ => $u_{n+1} = 1{,}04C_n + 5200$

D'autre part $u_n = C_n + 500 \Leftrightarrow C_n = u_n - 500$

En remplaçant $C_n = u_n - 500$ par sa valeur dans $u_{n+1} = 1{,}04C_n + 5200$, on a :

$u_{n+1} = 1{,}04(u_n - 500) + 5200 = 1{,}04u_n - 500 \times 1{,}04 + 5200$

=> $u_{n+1} = 1{,}04u_n - 5200 + 5200 \Leftrightarrow u_{n+1} = 1{,}04u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1{,}04$

D'où u_n est une suite géométrique de raison $q = 1{,}04$ et de premier terme $u_0 = C_0 + 5000$

=> $u_0 = 3000 + 5000 = 8000$

c- Exprimons u_n en fonction de n, puis C_n en fonction de n.
u_n étant une suite géométrique de raison $q = 1{,}04$ et de premier terme $u_0 = 8000$, alors son

expression en fonction de n est $u_n = u_0(q)^n = 8000(1{,}04)^n$.

D'autre part $C_n = u_n - 500$ => $C_n = 8000(1{,}04)^n - 500$

d- Déterminons le nombre minimum d'années à partir de laquelle Salif devra attendre pour disposer d'une somme de 6000 euros sur son compte bancaire

Il s'agit de Détermine le plus petit entier n tel que : $C_n \geq 600$.

$C_n \geq 600 \Leftrightarrow 8000(1{,}04)^n - 500 \geq 600 \Leftrightarrow 8000(1{,}04)^n \geq 11000 \Leftrightarrow 8(1{,}04)^n \geq 11$
$\Leftrightarrow (1{,}04)^n \geq \frac{11}{8}$
(En appliquant la formule $a^n = e^{nlna}$), on a : $(1{,}04)^n \geq \frac{11}{8} \Leftrightarrow e^{nln\,1{,}04} \geq \frac{11}{8} \Leftrightarrow$
$nln1{,}04 \geq ln\left(\frac{11}{8}\right) \Leftrightarrow n \geq \frac{ln\left(\frac{11}{8}\right)}{ln\,1{,}04} \Leftrightarrow n \geq 8{,}12$ à 10^{-2} près soit $n \geq 9$ car n est un entier.

D'où Salif devra attendre au moins 9 ans avant de disposer de 6000 € sur son compte.

Equations différentielles

OBJECTIFS :

Ce thème vise à :

• étudier la forme des solutions de certaines équations différentielles ;

• modéliser quelques problèmes à l'aide d'une équation différentielle et en déduis une solution.

Commentaires

La notion d'équation différentielle est nouvelle pour les élèves en mathématiques. Cette théorie ne sera donc appréhendée que sur quelques exemples parmi les plus simples.

Les élèves de terminale rencontrent en sciences physiques ces équations à travers l'étude de systèmes physiques ou chimiques. Des exemples importants sont :

Les oscillateurs libres (en particulier harmoniques) en mécanique ou en électricité (oscillateurs mécaniques, système LC ou LRC) ; la loi de la croissance radioactive.

Ce thème correspond donc à une initiation à une théorie extrêmement importante en analyse et en géométrie. Il n'ya donc pas lieu de développer exagérément cette initiation, mais plutôt de Montre l'importance de ces équations à l'aide de quelques problèmes qui se modélisent sous cette forme. Un des intérêts immédiats du cours de mathématiques sera donc la justification de la nature des solutions de ces équations différentielles.

La résolution des équations différentielles du type $af'' + bf' + cf = g$ où a, b et c sont des nombres réel non nuls et la théorie qui l'accompagne sont hors programme.

Volume horaire : 6 heures

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Equation différentielle du type $f' = kf$. • Equation différentielle du type $f'' = 0$. • Equation différentielle du type $f'' = kf$.	• Résous une équation différentielle du type $f' = kf$. • Equation différentielle du type $f'' = 0$. • Equation différentielle du type $f'' = kf$.

Remarques et suggestions

Ce thème comprend deux parties :

1) L'établissement des solutions des équations différentielles
   Les trois types d'équations peuvent faire l'objet d'une étude assez poussée en classe. Ces démonstrations présentent un intérêt incontestable pour les élèves : recherches de solutions, preuve de l'exhaustivité de cette recherche.
   A l'issue de cette mise en place, la forme des solutions doit être utilisée comme un résultat que les n'auront plus alors à justifier. Ces résultats doivent donc être connus des élèves.
2) La résolution de problèmes
   Les élèves devront être confrontés à 3 types de problèmes :
   • des applications immédiates du cours ;
   • des équations différentielles qui dépassent leur compétence immédiate, et qu'ils sauront Résous grâce à un guidage important de l'énoncé (exemple : équations linéaires avec second membre ; recherche d'une solution particulière) ;
   • des problèmes géométriques, ou tirés de sciences expérimentales qui se modélisent à l'aide d'équations différentielles au programme. Les exemples choisis devront rester particulièrement simples, n'entraînant pas en particulier de recherche de validité de solutions.

I- Définition :

On appelle équations différentielles, toutes équations faisant intervenir une fonction (l'inconnue), ses dérivées et sa variable x . Leur résolution consiste à Détermine toutes les fonctions solutions.

II- Différents types d'équations différentielles

1) Equations différentielles du 1er ordre ($y' - ay = 0$)

a) Définition :

f étant une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, la relation $\boldsymbol{f'(x) - a\,f(x) = 0}$; où f est une fonction inconnue, est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, sans second membre. Cette équation est souvent notée $y' - ay = 0$.

b) Résolution :

Les solutions, définies sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ sont les solutions f_k qui à tout nombre réel x, associent $f_k(x) = ke^{ax}$, où k est un nombre réel quelconque.

Ainsi l'ensemble solution est : **S = { $\boldsymbol{ke^{ax}}$ }**

2) Equations différentielles du 2ème ordre :

a) Cas particulier : (Equation du 2ème ordre de la forme $\boldsymbol{y'' + A(x) = 0}$)
Avec $A(x)$ est une fonction quelconque.

Ce type d'équation différentielle contient uniquement la variable x et la dérivée seconde de la fonction à cherchée. Résous ce type d'équation différentielle revient donc, dans un premier temps, à chercher y' puis chercher y en intégration successive de $\boldsymbol{y''}$.

b) Equation différentielle de la forme: ($\boldsymbol{ay'' + by' + cy = 0}$)
Pour Résous de telles équations différentielles, on recherche d'abord une équation caractéristique de la forme $ar^2 + br + c = 0$. Ainsi on calcule le discriminant associe Δ tel que $\Delta = b^2 - 4ac$.

* Si $\Delta > 0$ on a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 tel que :

$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $S = f(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}$ Avec $k_1\ et\ k_2 \in \mathbb{R}$

* Si $\Delta = 0$, on a une solution doubles r_0 tel que : $r_0 = \frac{-b}{2a}$ et

S = $f(x) = (k_1 x + k_2)e^{r_0 x}$ Avec $k_1\ et\ k_2 \in \mathbb{R}$

* Si $\Delta < 0$, on a deux solutions complexes r_1 et r_2 tel que :

$$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-b}{2a} - i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \alpha - i\beta \quad \text{et} \quad r_1 = \frac{-b}{2a} + i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \alpha + i\beta$$

Où $\alpha \ et \ \beta$ désignent respectivement les parties réelles et imaginaires des solutions r_1 et r_2

et S = $f(x) = (k_1 cos\beta x + k_2 sin\beta x)e^{\alpha x}$ Avec $k_1 \ et \ k_2 \in \mathbb{R}$

c) <u>Equations différentielles de la forme</u> $(y'' + w^2 y = 0)$

Ce type d'équation différentielle est très fréquent en sciences physiques. Sa résolution est suivit d'une application.

<u>Résolution</u> :

La solution de telles équations est de la forme : S = $f(x) = k_1 coswx + k_2 sinwx$

Avec $k_1 \ et \ k_2 \in \mathbb{R}$

d) <u>Equations différentielles de la forme</u> $(y'' - w^2 y = 0)$

Ce type d'équation différentielle est utilisé ici pour Résous une application concrète.

<u>Résolution</u> :

La solution de telles équation est de la forme : S = $f(x) = k_1 e^{wx} + k_1 e^{-wx}$

Avec $k_1 \ et \ k_2 \in \mathbb{R}$

Exercices

Equations différentielles sans second membre.

1 Résous les équations différentielles suivantes :

1) $y'' - 4y' + 3y = 0$; **2)** $y'' - 9y = 0$; **3)** $y' - 2y = 0$

4) $y'' + 2y' + 2y = 0$; **5)** $4y'' + 5y = 0$; **6)** $7y' + 4y = 0$

7) $9y'' - 24y' + 16y = 0$; **8)** $4y'' - sinx + e^{-2x} = 0$; **9)** $2xy + y'x^2 - e^x = 0$

2 Vérifie que les fonctions f données sont solutions des équations différentielles (E) correspondantes :

1) $f(x) = 2e^{-2x} + 3e^{2x}$ et (E) : $y'' - 4y = 0$

2) $f(x) = (2x+1)e^{-x}$ et (E) : $y'' + 2y' + y = 0$

3) $f(x) = e^{-x}sinx$ et (E) : $y'' + 2y' + 2y = 0$

3 Détermine la solution f des équations différentielles données, vérifiant les conditions données suivantes :

1) $y'' - 2y' + y = 0$; conditions : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$

2) $y'' + 4y = 0$; conditions : $f(0) = 6$ et $f'(0) = 10$

3) $y'' + y = 0$; conditions : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

4) $y'' - 3y' + 2y = 0$; conditions : $f(1) = 1$ et $f'(1) = 3$

4 On considère le système suivant, d'équations différentielles du 1er ordre tel que :

$\begin{cases} y' + 4Z = 2e^{2x} \\ Z' - y = e^{2x} \end{cases}$ où y et Z désignent deux fonctions inconnues de variable réel x.

1) Forme l'équation différentielle du second ordre (E) à la quelle satisfait $y(x)$

2) Résous l'équation (E) et en déduis la solution générale du système.

3) Précise la solution particulière pour laquelle on a : $y = 1$ et $Z = -1$ pour $x = 0$.

5 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \times 5^{3x}$

1) Détermine les réels a et b tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$
2) En déduis une primitive de f sur $\mathbb{R}$

6 Détermine la solution f des équations différentielles données, dont la courbe (C) vérifie les conditions données suivantes :

1) $y' - 3y = 0$; (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$.

2) $2y' - y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées $(2 ; e)$.

3) $y'' + 2y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées $(0 ; 0)$ et admet la droite d'équation $y = x$ comme tangente en ce point.

4) $y'' - 4y' + 4y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées $(0 ; 1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

5) $y'' - 3y' + 2y = 0$; (C) passe par le point coordonnées ($ln2$; 0)et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -4

6) $y'' - 2y + 2y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{4} ; 0\right)$ et sa tangente au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.

Equations différentielles avec second membre.

7 Soient les équations différentielles (E) : $y' + 2y = x^2$ et (E′) : $y' + 2y = 0$

1) Détermine une fonction polynôme g, de degré deux, solution de (E).
2) Démontre qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est solution de l'équation (E′)
3) Résous l'équation (E′).
4) En déduis l'ensemble solution de l'équation (E).

8 Soient les équations différentielles (E) et (E′) telles que :

(E) : $y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$ et (E′) : $y'' + 2y' + y = 0$

1) Détermine une fonction polynôme g, de degré deux, solution de (E).
2) Démontre qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est solution de l'équation (E′)
3) a) Résous l'équation (E′).
   b) En déduis l'ensemble solution de l'équation (E).

9
1) Résous l'équation différentielle d'inconnue f tel que : $x^2 f'(x) + 2xf(x) - 1 = 0$.
2) Soit l'équation (E): $x^2 f'(x) - 2xf(x) + f^2(x) = 0$.

3) On pose $g(x) = \frac{1}{f(x)}$
   a- Montre que l'équation (E) est équivalent à $x^2 g'(x) + 2xg(x) = 1$.
   b- Déduis-en la résolution de l'équation (E).

10 On se propose de Résoudre le problème suivant : Trouvez une fonction f définie et dérivable sur$]0 ; +\infty[$, s'annulant pour $x = 1$ et vérifiant la propriété : pou tout $x > 0$, on a :

(E) : $x \times f'(x) - 3 \times f(x) = 3lnx$.

1) Trouve tous les polynômes P du 3ème degré telles que$\forall\, x > 0; x \times P'(x) - 3 \times P(x) = 0$

2) Soit une fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ telle que $f(1) = 0$ et soit h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par la relation $f(x) = x^3 \times h(x)$

   a) Calcule $h(1)$ et Calcule $f'(x)$ en fonction de $h'(x)$ et $h(x)$.

b) Démontre que f vérifie (E) si et seulement si$\forall\ x \in\ ]\ 0\ ;\ +\infty[\ ;\ h'(x) = \frac{3}{x^4}\ lnx$

c) On suppose que f vérifie (E). Démontre que h est définie sur $]\ 0\ ;\ +\infty[$, par $h(x) = \int_1^x \frac{3}{t^4}\ lnt\ dt$

d) Détermine $h(x)$ en fonction de x par une intégration par partie

e) Démontre qu'il existe une unique fonction f solution du problème posé et Donne l'expression de $f(x)$.

11 On se propose de Résoudre l'équation différentielle : $(E_1) : y' - 2y = \frac{-2}{1 + e^{-2x}}$

1) Détermine la solution de l'équation différentielle $(E_2) : y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.

2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = ln2$ et soit g la fonction définie par la relation : $f(x) = e^{2x} \times g(x)$.

a- Calcule $g(0)$

b- Calcule $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et de $f(x)$.

c- Démontre que f est solution de (E_1) si et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

d- En déduis l'expression de $g(x)$, puis celle de $f(x)$ de telle sorte que f soit solution de (E).

12 Soit a et b deux nombres réels et n un entier naturel différent de 1.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = ay + by^n$

1) On pose sur $\mathbb{R}$: $Z = y^{1-n}$ (avec $y > 0$).

Détermine une équation différentielle satisfaite par Z et la Résous.

2) En déduis les solutions, strictement positives, de (E) sur $\mathbb{R}$.

Que donne le cas $n = 0$?

Equations différentielles dans les cas pratiques.

13 Un tronc de baobab $\boldsymbol{y}$ grossi avec une vitesse proportionnelle à lui-même.

On sait de plus que ce tronc double de volume tous les 10 ans.

Combien de temps luis faut-il pour tripler de volume ?

14 Lors du tremblement de terre qui a secoué la centrale nucléaire de FUKUSHIMA au Japon, la teneur du nombre d'atome de radium $N(t)$ échappé à l'instant t est donné par la relation : $N'(t) = aN(t)$ et $N(0) = N_0$ où (t est exprimé en années).

De plus sa teneur en toxine triple chaque deux ans.

1) Détermine l'expression de $N(t)$ en fonction de N_0 et t.
2) Au bout de combien d'années la teneur du nombre d'atome de radium aura –t-il quadruplé ?

15 Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à l'instant t, exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction numérique N à variable réelle t. La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre de microbes est la dérivée N' de cette fonction. On a constaté que : $N'(t) = -kN(t)$ où k est un coefficient réel strictement positif. On désigne par N_0 le nombre de microbes à l'instant $t = 0$

1°/ Détermine $N(t)$ en fonction de N_0 , k et t.

2°/ Détermine le nombre de microbes au bout de 1 heures si $N_0 = 1000$ et $k = 1$.

3°/ Soit T la période de reproduction du nombre de microbes, c'est-à-dire le temps au bout duquel le nombre de microbes a été divisé par 2. Montre que $e^{kT} = 2$.

4°/ Détermine la période de reproduction T sachant que $k = 6{,}66 \bullet 10^{-5}$.

16 Une substance se dissout dans l'eau avec une vitesse de dissolution proportionnelle à la quantité non dissoute.

A l'instant $t = 0$ (en minutes), on place 20 grammes de cette substance dans une grande quantité d'eau. Sachant que les 10 premiers grammes se dissolvent en 5 minutes.

1) Forme l'équation différentielle expliquant cette situation en fonction de $f'(t)$ et de $f(t)$.

2) En déduis une expression de la quantité dissoute $f(t)$, en grammes, en fonction de t.

17 Le taux d'alcoolisme $f(t)$ (en gL^{-1}) d'une personne ayant absorbé, en jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie, sur $\mathbb{R}_+$, l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = ae^{-t}$.

Où t est le temps écoulé après l'ingestion (exprime en heures), et a une constante qui dépend des conditions expérimentales.

1) On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+ : g(t) = f(t)e^t$.
   Démontre que g est une fonction affine.
2) Exprime $f(t)$ en fonction de t et de a.
3) Dans cette question, on pose que $a = 5$.
   a- Etudie les variations de f et tracer sa courbe.
   b- Détermine graphiquement le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout du quel il est atteint.
   c- Donne une valeur du délai T (à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à 0,5 en gL^{-1} .

18 Un bloc de métallique est déposé dans un four dont la température constante est de 1000°C.

La température θ est une fonction du temps t $(en\ heures)$ qui vérifie l'équation différentielle

(E): $\theta'(t) = k[1000 - \theta(t)]$; $k \in \mathbb{R}_+^*$.

1) On pose $y(t) = \theta(t) - 1000$.
   Ecris une équation différentielle (F) satisfaite par y.
2) Résous (F) puis (E).
3) Le bloc, initialement à 40°C est déposé dans le four au temps $t_0 = 0$. Sa température est de 160°C au bout d'une heure. En déduis l'expression de $\theta(t)$ en fonction de t uniquement.
4) a- Calcule la température du bloc au temps $t = 3$ heures.
   b- Détermine le temps T à partir duquel la température du bloc dépassera 500°C.
   On donne $\left(\frac{7}{8}\right)^3 = 0{,}7$; $ln\left(\frac{7}{8}\right) = -0{,}13$; $ln\left(\frac{25}{48}\right) = -0{,}65$

19 A l'instant $t = 0$, un corps à la température $\theta_0 = 60°C$ est placé dans l'air ambiant à la température $\theta_1 = 20°C$. Au bout de 10 $minutes$, la température du corps est 50°C.

Sa température à la date t exprimée en minutes est solution de l'équation différentielle :

$\frac{d\theta(t)}{dt} = -k[\theta(t) - \theta_1]$ où k est une constante réelle. On pose $y(t) = \theta(t) - \theta_1$.

1) a- Quelle est l'équation différentielle vérifiée par y ?
   b- Détermine y.
   c- En déduis $\theta(t)$ en fonction de k.

   d- Détermine la constante k puis en déduis l'expression définitive de $\theta(t)$.

2) a- Au bout de combien de minutes la température du corps diminuera-t-elle de moitié ?
   b- Quelle sera la température du corps au bout d'une heure ?
   On donne $ln2 = 0{,}70$; $ln\left(\frac{3}{4}\right) = -0{,}29$.

Solutions

Equations différentielles sans second membre.

1

Résolvons les équations différentielles suivantes :

NB : Dans tout l'exercice, on désignera par **(E.C)** comme : **E**quation **C**aractéristique.

1) $y'' - 4y' + 3y = 0$

(E.C) : $r^2 - 4r + 3 = 0$ => $\Delta = 4$. $(\Delta > 0)$. Alors $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$

=> $S = f(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ => $S = f(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$. Avec $(C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

2) $y'' - 9y = 0$. Ici $w^2 = 9$ => $w = 3$

=> $S = f(x) = C_1 e^{3x} + C_1 e^{-3x}$

3) $y' - 2y = 0$. Ici $a = 2$ => $S = f(x) = ke^{2x}$. Avec $(k \in \mathbb{R})$

4) $y'' + 2y' + 2y = 0$

(E.C) : $r^2 + 2r + 2 = 0$ => $\Delta = -4 = 4i^2$. $(\Delta < 0)$.

$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i$

=> $\alpha = -1$ et $\beta = 1$

$r_2 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$

Où α et β désignent respectivement les parties réelles et imaginaires des solutions r_1 et r_2

Et S $= f(x) = (C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x)e^{\alpha x} = (C_1 cosx + C_2 sinx)e^{-x}$. Avec $(C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

5) $4y'' + 5y = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{5}{4}y = 0$. Ici $w^2 = \frac{5}{4}$ => $w = \frac{\sqrt{5}}{2}$

S $= f(x) = C_1 coswx + C_2 sinwx$ => S $= f(x) = C_1 cos\frac{\sqrt{5}}{2}x + C_2 sin\frac{\sqrt{5}}{2}x$.
Avec $(C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

6) $7y' + 4y = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{4}{7}y = 0$. Ici $a = -\frac{4}{7}$ => $S = f(x) = ke^{-\frac{4}{7}x}$. Avec $(k \in \mathbb{R})$

7) $9y'' - 24y' + 16y = 0$

(E.C) : $9r^2 - 24r + 16 = 0$ => $\Delta = 0$. $(\Delta = 0)$. Alors $r_1 = r_2 = r_0 = \frac{4}{3}$

=> S = $f(x) = (C_1x + C_2)e^{r_0x} = (C_1x + C_2)e^{\frac{4}{3}x}$. Avec $(C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

8) $4y'' - sinx + e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow 4y'' = sinx - e^{-2x}$ => $y'' = \frac{1}{4}sinx - \frac{1}{4}e^{-2x}$

=> $y' = -\frac{1}{4}cosx + \frac{1}{8}e^{-2x} + k$ et $y = -\frac{1}{4}sinx - \frac{1}{16}e^{-2x} + kx + k'$

=> S = $f(x) = -\frac{1}{4}sinx - \frac{1}{16}e^{-2x} + kx + k'$

9) $2xy + y'x^2 = e^x \Leftrightarrow (x^2 \times y)' = e^x \Leftrightarrow x^2 \times y = e^x$ => $y = \frac{e^x}{x^2} + k$

2 Vérifions que les fonctions f données sont solutions des équations différentielles (E) correspondantes :

1) $f(x) = 2e^{-2x} + 3e^{2x}$ et (E) : $y'' - 4y = 0$

La fonction $f(x) = 2e^{-2x} + 3e^{2x}$ est solution de (E) : $y'' - 4y = 0$ si et seulement si

$f''(x) - 4f(x) = 0$ Avec : $f(x) = 2e^{-2x} + 3e^{2x}$; $f'(x) = -4e^{-2x} + 6e^{2x}$ et

$f''(x) = 8e^{-2x} + 12e^{2x}$

Alors $f''(x) - 4f(x) = (8e^{-2x} + 12e^{2x}) - 4(2e^{-2x} + 3e^{2x})$

$= 8e^{-2x} + 12e^{2x} - 8e^{-2x} - 12e^{2x} = 0$

Puisque $f''(x) - 4f(x) = 0$.

Alors $f(x) = 2e^{-2x} + 3e^{2x}$ est solution de (E) : $y'' - 4y = 0$

2) $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ et (E) : $y'' + 2y' + y = 0$

La fonction $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ est solution de (E) : $y'' + 2y' + y = 0$ si et seulement si

$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$. Avec $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$; $f'(x) = (-2x + 1)e^{-x}$ et

$f''(x) = (2x - 3)e^{-x}$

Alors $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = (2x - 3)e^{-x} + 2(-2x + 1)e^{-x} + (2x + 1)e^{-x}$

$= (2x - 3 - 4x + 2 + 2x + 1)e^{-x} = (0)e^{-x} = 0$

Puisque $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$. Alors $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ est solution de (E)

3) $f(x) = e^{-x}sinx$ et (E) : $y'' + 2y' + 2y = 0$

La fonction $f(x) = e^{-x}sinx$ est solution de (E) : $y'' + 2y' + 2y = 0$ si et seulement si

$f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$. Avec $f(x) = e^{-x}sinx$; $f'(x) = (cosx - sinx)e^{-x}$ et

$f''(x) = (-2cosx)e^{-x}$

Alors $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = (-2cosx)e^{-x} + 2(cosx - sinx)e^{-x} + 2e^{-x}sinx$

$= -2e^{-x}cosx + 2e^{-x}cosx - 2e^{-x}sinx + 2e^{-x}sinx = 0$

Puisque $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$. Alors $f(x) = e^{-x}sinx$ est solution de (E)

3 Déterminons la solution f des équations différentielles données, vérifiant les conditions données suivantes :

1) $y'' - 2y' + y = 0$

$y'' - 2y' + y = 0$

(E.C) : $r^2 - 2r + 1 = 0$ => $\Delta = 0$. $(\Delta = 0)$. Alors $r_1 = r_2 = r_0 = 1$

=> S = $f(x) = (C_1x + C_2)e^{r_0x} = (C_1x + C_2)e^x$. Avec $(C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

Conditions : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$

$f(x) = (C_1x + C_2)e^x$ Alors $f(0) = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1$

$f'(x) = (C_1x + C_1 + C_2)e^x$ Alors $f'(0) = 1 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 1$. Or $C_2 = 1$ => $C_2 = 0$

D'où $f(x) = xe^x$

2) $y'' + 4y = 0$

$y'' + 4y = 0$. Ici $w^2 = 4$ => $w = 2$

S = $f(x) = C_1coswx + C_2sinwx$ => S = $f(x) = C_1cos2x + C_2sin2x$. Avec $(C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

Conditions : $f(0) = 6$ et $f'(0) = 10$

$f(x) = C_1cos2x + C_2sin2x$ Alors $f(0) = 6 \Leftrightarrow C_1 = 6$

$f'(x) = -2C_1 sin2x + 2C_2 cos2x$ Alors $f'(0) = 10 \Leftrightarrow 2C_2 = 10 \Rightarrow C_2 = 5$

D'où $f(x) = 6cos2x + 5sin2x$

3) $y'' + y = 0$. Ici $w^2 = 1 \Rightarrow w = 1$

S $= f(x) = C_1 coswx + C_2 sinwx \Rightarrow$ S $= f(x) = C_1 cosx + C_2 sinx$. Avec $(C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

Conditions : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

$f(x) = C_1 cosx + C_2 sinx$ Alors $f(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$

$f'(x) = -C_1 sinx + C_2 cosx$ Alors $f'(0) = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1$

D'où $f(x) = sinx$

4) $y'' - 3y' + 2y = 0$

(E.C) : $r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1$. $(\Delta > 0)$. Alors $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$

$\Rightarrow S = f(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \Rightarrow S = f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ Avec $(C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

Conditions : $f(1) = 1$ et $f'(1) = 3$

$f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Alors $f(1) = 1 \Leftrightarrow C_1 e + C_2 e^2 = 1$

$f'(x) = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}$. Alors $f'(1) = 3 \Leftrightarrow C_1 e + 2C_2 e^2 = 3$

Formons ainsi le système avec ces deux conditions :

$$\begin{cases} C_1 e + C_2 e^2 = 1 \\ C_1 e + 2C_2 e^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -C_1 e - C_2 e^2 = -1 \\ C_1 e + 2C_2 e^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_2 e^2 = 2 \Rightarrow C_2 = \frac{2}{e^2} \Rightarrow C_2 = 2e^{-2}$$

En remplaçant $C_2 = 2e^{-2}$ par sa valeur dans l'équation 2, on a : $C_1 = -e^{-1}$

D'où $f(x) = -e^{-1} \times e^x + 2e^{-2} \times e^{2x} = -e^{x-1} + 2e^{2x-2} = 2e^{2x-2} - e^{x-1}$

4 On considère le système suivant, d'équations différentielles du 1er ordre tel que :

$\begin{cases} y' + 4Z = 2e^{2x} \\ Z' - y = e^{2x} \end{cases}$ où y et Z désignent deux fonctions inconnues de variable réel x.

1) Formons l'équation différentielle du second ordre (E) à la quelle satisfait $y(x)$

(1) $y' + 4Z = 2e^{2x} \Rightarrow y'' + 4Z' = 4e^{2x}$

(2) $Z' - y = e^{2x} \Rightarrow Z' = y + e^{2x}$

En remplaçant $Z' = y + e^{2x}$ par sa valeur dans (1). Alors on a :

$y'' + 4(y + e^{2x}) = 4e^{2x} \Leftrightarrow y'' + 4y + 4e^{2x} = 4e^{2x} \Leftrightarrow y'' + 4y = 0$

D'où l'équation différentielle du second ordre (E) à la quelle satisfait $y(x)$ est

(E) : $y'' + 4y = 0$.

2) Résolvons l'équation (E)

$y'' + 4y = 0$. Ici $w^2 = 4 \Rightarrow w = 2$

Alors $y(x) = C_1 cos wx + C_2 sin wx = C_1 cos2x + C_2 sin2x$ avec $(C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

En déduisons la solution générale du système, c'est-à-dire la fonction inconnue Z.

D'après l'équation (2), on a : $Z' = y + e^{2x} \Leftrightarrow$

Donc $Z' = y + e^{2x} \Leftrightarrow \int Z'(x)dx = \int y(x)dx + \int e^{2x}dx$

$$\Leftrightarrow Z(x) = \int (C_1 cos2x + C_2 sin2x)dx + \int e^{2x}dx$$

$$\Leftrightarrow Z(x) = \int C_1 cos2xdx + \int C_2 sin2xdx + \int e^{2x}dx$$

$$\Leftrightarrow Z(x) = C_1 \int cos2xdx + C_2 \int sin2xdx + \int e^{2x}dx$$

$\Rightarrow Z(x) = C_1 \left[\frac{1}{2} sin2x\right] + C_2 \left[-\frac{1}{2} cos2x\right] + \left[\frac{1}{2} e^{2x}\right]$

$\Rightarrow Z(x) = \frac{C_1}{2} sin2x + -\frac{C_2}{2} cos2x + \frac{1}{2} e^{2x} = \frac{1}{2}(C_1 sin2x - C_2 cos2x + e^{2x})$

3) Précisons la solution particulière pour laquelle on a : $y = 1$ et $Z = -1$ pour $x = 0$.

$\boldsymbol{y(x) = C_1 cos2x + C_2 sin2x}$

Si $y = 1$ Pour $x = 0$ alors on a : $1 = C_1 cos0 + C_2 sin0 \Leftrightarrow C_1 = 1$

$\boldsymbol{Z(x) = \frac{1}{2}(C_1 sin2x - C_2 cos2x + e^{2x})}$

Si $Z = -1$ Pour $x = 0$ alors on a : $-1 = \frac{1}{2}(C_1 sin0 - C_2 cos0 + e^0) \Leftrightarrow$

$C_1 sin0 - C_2 cos0 + e^0 = -2 \Leftrightarrow -C_2 + 1 = -2 \Leftrightarrow C_2 = 3$

Alors $y(x) = cos2x + 3sin2x$ et $Z(x) = \frac{1}{2}(sin2x - 3cos2x + e^{2x})$

D'où la solution particulière du système est :

$$\begin{cases} y(x) = cos2x + 3sin2x \\ \text{et} \\ Z(x) = \frac{1}{2}(sin2x - 3cos2x + e^{2x}) \end{cases}$$

5 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \times 5^{3x}$

1) Déterminons les réels a et b tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$

$f(x) = x \times 5^{3x}$ => $f(x) = x \times e^{3xln5}$. Ainsi :

$f'(x) = (1 + 3xln5)e^{3xln5}$ et $f''(x) = (2 + 3xln5)3ln5e^{3xln5}$

$f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$

$\Leftrightarrow (2 + 3xln5)3ln5e^{3xln5} + a(1 + 3xln5)e^{3xln5} + bx \times e^{3xln5} = 0$

$\Leftrightarrow (2 + 3xln5)3ln5 + a(1 + 3xln5) + bx = 0$

$\Leftrightarrow 6ln5 + x(3ln5)^2 + a + 3axln5 + bx = 0$

$\Leftrightarrow x[(3ln5)^2 + 3aln5 + b] + a + 6ln5 = 0$

$=> \begin{cases} (3ln5)^2 + 3aln5 + b = 0 \\ a + 6ln5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (3ln5)^2 \\ a = -6ln5 \end{cases} \Leftrightarrow$

D'où les réels a et b sont tels que : $a = -6ln5$ et $b = (3ln5)^2$

2) En déduisons une primitive de f sur $\mathbb{R}$

Pour cela, déterminons la fonction f en résolvant l'équation différentielle :

$f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) - 6ln5f'(x) + (3ln5)^2 f(x) = 0$

$f''(x) - 6ln5f'(x) + (3ln5)^2 f(x) = 0$

(E.C) : $r^2 - 6ln5r + (3ln5)^2 = 0$ => $\Delta = 0$. $(\Delta = 0)$. Alors $r_1 = r_2 = r_0 = 3ln5$

=> $f(x) = (C_1x + C_2)e^{r_0x} = (C_1x + C_2)e^{3xln5}$. Avec $(C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

Alors si $f(x) = (C_1x + C_2)e^{3xln5} = C_1xe^{3xln5} + C_2e^{3xln5}$

Posons $A(x) = C_1xe^{3xln5}$ et $B(x) = C_2e^{3xln5}$ puis cherchons une primitive de A et B.

Pour : $A(x) = C_1xe^{3xln5}$

Posons : $u(x) = C_1 x$ => $u'(x) = C_1$

$$v'(x) = e^{3xln5} \Rightarrow v(x) = \frac{1}{3ln5} e^{3xln5}$$

$$\Rightarrow A(x) = \left[\frac{C_1 x}{3ln5} e^{3xln5}\right] - \int \frac{C_1}{3ln5} e^{3xln5} dx = \left[\frac{C_1 x}{3ln5} e^{3xln5}\right] - \frac{C_1}{3ln5} \int e^{3xln5} dx$$

$$= \left[\frac{C_1 x}{3ln5} e^{3xln5}\right] - \frac{C_1}{3ln5}\left[\frac{1}{3ln5} e^{3xln5}\right] = \left[\frac{C_1 x}{3ln5} e^{3xln5}\right] - \left[\frac{C_1}{(3ln5)^2} e^{3xln5}\right]$$

$$= \left[\frac{C_1 x}{3ln5} e^{3xln5} - \frac{C_1}{(3ln5)^2} e^{3xln5}\right] = \frac{C_1 x}{3ln5} e^{3xln5} - \frac{C_1}{(3ln5)^2} e^{3xln5}$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{C_1 x}{3ln5} e^{3xln5} - \frac{C_1}{(3ln5)^2} e^{3xln5}$$

Pour : $\boldsymbol{B(x) = C_2 e^{3xln5}}$

Si $B(x) = C_2 e^{3xln5}$ alors la primitive de B est : $\frac{C_2}{3ln5} e^{3xln5}$

D'où $F(x) = \frac{C_1 x}{3ln5} e^{3xln5} - \frac{C_1}{(3ln5)^2} e^{3xln5} + \frac{C_2}{3ln5} e^{3xln5} = \frac{e^{3xln5}}{3ln5}\left(C_1 x - \frac{C_1}{3ln5} + C_2\right) + k$

6 Déterminons la solution f des équations différentielles données, dont la courbe (C) vérifie les conditions données suivantes :

NB : Il est important et nécessaire de connaître que :

- La courbe **(Cf)** passe par le point $\boldsymbol{A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}$ si et seulement $\boldsymbol{f(x_0) = y_0}$.
- La courbe **(Cf)** admet au point $\boldsymbol{A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses c'est-à-dire l'axe ox si et seulement si $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$.
- La courbe **(Cf)** admet au point $\boldsymbol{A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}$ une tangente parallèle à la droite **(D)** d'équation : $\boldsymbol{y = ax + b}$ si et seulement si $\boldsymbol{f'(x_0) = a}$.
- La courbe (Cf) admet au point $\boldsymbol{A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}$ une tangente de coefficient directeur $\boldsymbol{k}$ si et seulement si $\boldsymbol{f'(x_0) = k}$.

1) $y' - 3y = 0$; (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$.

$y' - 3y = 0 \Rightarrow S = f(x) = ke^{3x}$

(C) admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$ si et seulement si $f'(0) = 1$ avec $f'(x) = 3ke^{3x}$

Alors $f'(0) = 1 \Leftrightarrow 3ke^0 = 1 \Leftrightarrow 3k = 1$ => $k = \frac{1}{3}$. D'où $f(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$

2) $2y' - y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées$(2 ; e)$.

$2y' - y = 0 \Leftrightarrow y' - \frac{1}{2}y = 0$ => $S = f(x) = ke^{\frac{1}{2}x}$

(C) passe par le point de coordonnées$(2 ; e)$ si et seulement si $f(2) = e$

$f(2) = e \Leftrightarrow ke^{\frac{1}{2}\times 2} = e \Leftrightarrow ke = e$ => $k = 1$. D'où $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$

3) $y'' + 2y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées $(0 ; 0)$ et admet la droite d'équation $y = x$ comme tangente en ce point.

$y'' + 2y = 0$. Ici $w^2 = 2$ => $w = \sqrt{2}$

Alors $S = f(x) = C_1 cos wx + C_2 sin wx = C_1 cos\sqrt{2}x + C_2 sin\sqrt{2}x$ avec $(C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

(C) passe par le point de coordonnées $(0 ; 0) \Leftrightarrow f(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$

(C) admet la droite d'équation $y = x$ comme tangente au point$(0 ; 0)$ => $f'(0) = 1$.
Avec $f'(x) = -C_1\sqrt{2}sin\sqrt{2}x + C_2\sqrt{2}cos\sqrt{2}x$

$f'(0) = 1 \Leftrightarrow C_2\sqrt{2} = 1$ => $C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D'où $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}sin\sqrt{2}x$

4) $y'' - 4y' + 4y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées $(0 ; 1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

$y'' - 4y' + 4y = 0$

(E.C) : $r^2 - 4r + 4 = 0$ => $\Delta = 0$. ($\Delta = 0$). Alors $r_1 = r_2 = r_0 = \frac{4}{2} = 2$

=> S = $f(x) = (C_1 x + C_2)e^{r_0 x} = (C_1 x + C_2)e^{2x}$. Avec $(C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

(C) passe par le point de coordonnées $(0 ; 1)$ => $f(0) = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1$

(C) admet au point$(0 ; 1)$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si :

$f'(0) = 0$. Car l'axe des abscisses a pour équation $y = 0$ et $f'(x) = (2C_1 x + C_1 + 2C_2)e^{2x}$

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 + 2C_2 = 0$. Or $C_2 = 1$ alors $C_1 + 2 = 0$ => $C_1 = -2$

D'où $f(x) = (-2x + 1)e^{2x}$

5) $y'' - 3y' + 2y = 0$; (C) passe par le point coordonnées ($ln2$; 0)et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -4

(E.C) : $r^2 - 3r + 2 = 0$ => $\Delta = 1$. $(\Delta > 0)$. Alors $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$

=> $S = f(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ => $S = f(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$ Avec $(C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

(C) passe par le point coordonnées ($ln2$; 0) => $f(ln2) = 0 \Leftrightarrow C_1 e^{ln2} + C_2 e^{2ln2} = 0 \Leftrightarrow$

$C_1 e^{ln2} + C_2 e^{ln4} = 1 \Leftrightarrow 2C_1 + 4C_2 = 0 \Leftrightarrow C_1 + 2C_2 = 0$ **(1)**

(C) admet au point ($ln2$; 0) une tangente de coefficient directeur -4 => $f'(ln2) = -4$

Avec $f'(x) = C_1 e^{x} + 2\, C_2 e^{2x}$

$f'(ln2) = -4 \Leftrightarrow C_1 e^{ln2} + 2\, C_2 e^{2ln2} = -4 \Leftrightarrow C_1 e^{ln2} + 2\, C_2 e^{ln4} = -4 \Leftrightarrow 2C_1 + 8\, C_2 = -4$

$\Leftrightarrow C_1 + 4\, C_2 = -2$ **(2)**

Formons ainsi le système avec les équations **(1)** et **(2) :**

$$\begin{cases} C_1 + 2C_2 = 0 \\ C_1 + 4\, C_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + 2C_2 = 0 \\ -C_1 - 4\, C_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad -2C_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -1$$

En remplaçant $C_2 = -1$ par sa valeur dans l'équation **(1),** on a : $C_1 = 2$

D'où $f(x) = 2e^{x} - e^{2x}$

6) $y'' - 2y + 2y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{4} ; 0\right)$ et sa tangente au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.

(E.C) : $r^2 - 2r + 2 = 0$ => $\Delta = -4 = 4i^2$. $(\Delta < 0)$.

$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$

=> $\alpha = 1$ et $\beta = -1$

$r_2 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$

Où α *et* β désignent respectivement les parties réelles et imaginaires des solutions r_1 et r_2

Et S $= f(x) = (C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x)e^{\alpha x} = (C_1 cosx - C_2 sinx)e^{x}$. Avec $(C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

(C) passe par le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{4}\ ;0\right)$ => $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}C_1-\frac{\sqrt{2}}{2}C_2\right)e^{\frac{\pi}{4}}=0 \Leftrightarrow$

$\frac{\sqrt{2}}{2}C_1-\frac{\sqrt{2}}{2}C_2=0 \Leftrightarrow C_1-C_2=0$ **(1)**

(C) admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à l'axe des abscisses => $'(0)=0$.

Avec $f'(x)=(C_1cosx+\ C_2cosx+\ C_2sinx-C_1sinx)e^x$.

$f'(0)=0 \Leftrightarrow C_1+C_2=0$ **(2)**

Formons ainsi le système avec les équations **(1)** et **(2) :**

$$\begin{cases} C_1-\ C_2\ =0 \\ C_1+\ C_2=0 \end{cases}$$

=> $2C_1=0$ => $C_1=0$ et $C_2=0$

D'où $f(x)=0$

Equations différentielles avec second membre.

7 Soient les équations différentielles (E) : $y'+2y=x^2$ et (E′) : $y'+2y=0$

1) Déterminons une fonction polynôme g, de degré deux, solution de (E).

Soit $g(x)=ax^2+bx+c$ ce polynôme de degré deux solution de (E) telque :

$g'(x)+2g(x)=x^2 \Leftrightarrow (2ax+b)+2(ax^2+bx+c\ )=x^2 \Leftrightarrow$

$2ax+b+2ax^2+2bx+2c\ =x^2 \Leftrightarrow 2ax^2+x(2a+2b)+b+2c=x^2$

Par identification on a :

$$\begin{cases} 2a=1 \\ 2a+2b=0 \\ b+2c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \\ c=\frac{1}{4} \end{cases} .$$ D'où $g(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$

2) Démontrons qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, $f-g$ est solution de l'équation (E′)

NB :

Montre que $\Leftrightarrow B$, revient à montré que $\begin{cases} A => B \\ et \\ B => A \end{cases}$

Ainsi pour Montre qu'une fonction f est solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$ si et seulement si $f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'})$, on montre que :

$$\begin{cases} f \text{ est solution de l}'\text{équation } (\boldsymbol{E}) => f-g \text{ est solution de } (\boldsymbol{E'}) \\ et \\ f-g \text{ est solution de } (\boldsymbol{E'}) => f \text{ est solution de l}'\text{équation } (\boldsymbol{E}) \end{cases}$$

- Montrons que f est solution de l'équation $(\boldsymbol{E}) => f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'})$
  - f est solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$ si et seulement si $f'(x)+2f(x)=x^2$ **(1)**
  - g est solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$ si et seulement si $g'(x)+2g(x)=x^2$ **(2)**

Effectuons ainsi la différence des relations **(1)** et **(2)** :

(1) − (2) : $[f'(x)-g'(x)]+2[f(x)-g(x)]=x^2-x^2$

$\Leftrightarrow (f-g)'(x)+2(f-g)(x)=0$ => $f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'})$

D'où f est solution de l'équation $(\boldsymbol{E}) => f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'})$

- Montrons que $f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'}) => f$ est solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$

Si $f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'})$ alors on a : $(f-g)'(x)+2(f-g)(x)=0 \Leftrightarrow$

$[f'(x)-g'(x)]+2[f(x)-g(x)]=0 \Leftrightarrow f'(x)-g'(x)+2f(x)-2g(x)=0 \Leftrightarrow$

$f'(x)+2f(x)=g'(x)+2g(x)$. Avec $g(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ et $g'(x)=x-\frac{1}{2}$.

Alors $f'(x)+2f(x)=g'(x)+2g(x) \Leftrightarrow f'(x)+2f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)$

$\Leftrightarrow f'(x)+2f(x)=x^2$

D'où $f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'}) => f$ est solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$

<u>Conclusion :</u> puisque $\begin{cases} f \text{ est solution de l}'\text{équation } (\boldsymbol{E}) => f-g \text{ est solution de } (\boldsymbol{E'}) \\ et \\ f-g \text{ est solution de } (\boldsymbol{E'}) => f \text{ est solution de l}'\text{équation } (\boldsymbol{E}) \end{cases}$

Alors une fonction f est solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$ si et seulement si $f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'})$**.** (Ce qu'il fallait Démontre).

3) Résolvons l'équation (E′).

(E′) : $y' + 2y = 0$ => $S = ke^{-2x}$

4) En déduisons l'ensemble solution de l'équation (E).

On sait que $f(x) - g(x)$ est solution de (E′).

- De même ke^{-2x} est solution de (E′).

Par identification des deux solutions, on a : $f(x) - g(x) = ke^{-2x}$ => $f(x) = ke^{-2x} + g(x)$.

Or $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$. Alors $f(x) = ke^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

8 Soient les équations différentielles (E) et (E′) telles que :

(E) : $y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$ et (E′) : $y'' + 2y' + y = 0$

1) Déterminons une fonction polynôme g, de degré deux, solution de (E).

Soit $g(x) = ax^2 + bx + c$ ce polynôme de degré deux solution de (E) telque :

$g''(x) + 2g'(x) + g(x) = x^2 + 2x - 2$ ⇔

$(2a) + 2(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = x^2 + 2x - 2$ ⇔

$2a + 4ax + 2b + ax^2 + bx + c = x^2 + 2x - 2$ ⇔

$ax^2 + x(4a + b) + 2a + 2b + c = x^2 + 2x - 2$

Par identification on a :

$$\begin{cases} a = 1 \\ 4a + b = 2 \\ 2a + 2b + c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases}$$. D'où $g(x) = x^2 - 2x$

2) Démontrons qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est solution de l'équation (E′)

NB :

Montre que ⇔ B, revient à montré que $\begin{cases} A \Rightarrow B \\ et \\ B \Rightarrow A \end{cases}$

Ainsi pour Montre qu'une fonction f est solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$ si et seulement si $f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'})$, on montre que

$$\begin{cases} f \text{ est solution de l'équation } (\boldsymbol{E}) \Rightarrow f-g \text{ est solution de } (\boldsymbol{E'}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad et \\ f-g \text{ est solution de } (\boldsymbol{E'}) \Rightarrow f \text{ est solution de l'équation } (\boldsymbol{E}) \end{cases}$$

- Montrons que f est solution de l'équation $(\boldsymbol{E}) \Rightarrow f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'})$

f est solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$ si et seulement si $f''(x)+2f'(x)+f(x)=x^2+2x-2$ **(1)**

g est solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$ si et seulement si $g''(x)+2g'(x)+g(x)=x^2+2x-2$ **(2)**

Effectuons ainsi la différence des relations **(1)** et **(2)** :

(1) − (2) : $[f''(x)-g''(x)]+2[f'(x)-g'(x)]+[f(x)-g(x)]=0$

$\Leftrightarrow (f-g)''(x)+2(f-g)'(x)+(f-g)(x)=0 \Rightarrow f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'})$

D'où f est solution de l'équation $(\boldsymbol{E}) \Rightarrow f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'})$

- Montrons que $f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'}) \Rightarrow f$ est solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$

Si $f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'})$ alors on a : $(f-g)'(x)+2(f-g)(x)=0 \Leftrightarrow$

$[f''(x)-g''(x)]+2[f'(x)-g'(x)]+[f(x)-g(x)]=0$

$\Leftrightarrow f''(x)-g''(x)+2f'(x)-2g'(x)+f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow$

$f''(x)+2f'(x)+f(x)-g''(x)-2g'(x)-g(x)=0 \quad \Leftrightarrow$

$f''(x)+2f'(x)+f(x)=g''(x)+2g'(x)+g(x)$

Avec $g(x)=x^2-2x$; $g'(x)=2x-2$ et $g''(x)=2$

Alors $f''(x)+2f'(x)+f(x)=g''(x)+2g'(x)+g(x) \Leftrightarrow$

$f''(x)+2f'(x)+f(x)=(2)+2(2x-2)+x^2-2x \Leftrightarrow$

$f''(x)+2f'(x)+f(x)=x^2+2x-2$

D'où $f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E'}) \Rightarrow f$ est solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$

Conclusion : puisque $\begin{cases} f \text{ est solution de l'équation } (\boldsymbol{E}) \Rightarrow f-g \text{ est solution de } (\boldsymbol{E}') \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad et \\ f-g \text{ est solution de } (\boldsymbol{E}') \Rightarrow f \text{ est solution de l'équation } (\boldsymbol{E}) \end{cases}$

Alors une fonction f est solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$ si et seulement si $f-g$ est solution de $(\boldsymbol{E}')$. (Ce qu'il fallait Démontre).

3) a- Résolvons l'équation (E′).

(E′) : $y'' + 2y' + y = 0$

(E.C) : $r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 0$. $(\Delta = 0)$. Alors $r_1 = r_2 = r_0 = -1$

=> S $= (C_1 x + C_2)e^{r_0 x} = (C_1 x + C_2)e^{-x}$. Avec $(C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

b- En déduisons l'ensemble solution de l'équation (E).

On sait que $f(x) - g(x)$ est solution de (E′).

- De même $(C_1 x + C_2)e^{-x}$ est solution de (E′).

Par identification des deux solutions, on a : $f(x) - g(x) = (C_1 x + C_2)e^{-x}$ =>

$f(x) = (C_1 x + C_2)e^{-x} + g(x)$. Or $g(x) = x^2 - 2x$

Alors $f(x) = (C_1 x + C_2)e^{-x} + x^2 - 2x$.

9 1) Résolvons l'équation différentielle d'inconnue f tel que : $x^2 f'(x) + 2xf(x) - 1 = 0$.

$x^2 f'(x) + 2xf(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 \times f(x)\right)' - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 \times f(x)\right)' = 1 \Leftrightarrow$

$\int \left(x^2 \times f(x)\right)' dx = \int 1 dx \Leftrightarrow x^2 \times f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{x^2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$

2) Soit l'équation (E): $x^2 f'(x) - 2xf(x) + f^2(x) = 0$.

On pose $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

a-Montrons que l'équation (E) est équivalent à $x^2 g'(x) + 2xg(x) = 1$.

$g(x) = \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{g(x)}$ et $f'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$

En remplaçant $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ et $f'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$ par leur valeur dans l'équation (E), on a :

(E): $x^2\left[-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right]-2x\left[\frac{1}{g(x)}\right]+\left[\frac{1}{g(x)}\right]^2=0 \Leftrightarrow -\frac{x^2g'(x)}{g^2(x)}-\frac{2x}{g(x)}+\frac{1}{g^2(x)}=0 \Leftrightarrow$

$\frac{-x^2g'(x)-2xg(x)+1}{g^2(x)}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2g'(x)+2xg(x)-1}{g^2(x)}=0 \Leftrightarrow x^2g'(x)+2xg(x)-1=0.$

D'où l'équation (E) est équivalent à $x^2g'(x)+2xg(x)=1$. (Ce qu'il fallait Démontre).

b-Déduisons-en la résolution de l'équation (E).

D'après la question 1), on a : $f(x)=\frac{1}{x}$ et D'après la question 2)-a , on a : $f(x)=\frac{1}{g(x)}$

Par identification, on a : $\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{x} \Leftrightarrow g(x)=x$

D'où la solution de l'équation (E) est $g(x)=x$

10 On se propose de Résous le problème suivant : Trouve une fonction f définie et dérivable sur$]0\ ;\ +\infty[$, s'annulant pour $x=1$ et vérifiant la propriété : pou tout $x>0$, on a :

(E) : $x\times f'(x)-3\times f(x)=3lnx.$

1) Trouvons toutes les fonctions polynômes P du 3ième degré telles que, pour tout réel x, on ait

$x\times P'(x)-3\times P(x)=0.$

Soit $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ où $a\ ;b\ ;c\ e\ d$ sont tous des réels ce polynômes de degré 3 tel que : $P'(x)=3ax^2+2bx+c.$

$x\times P'(x)-3\times P(x)=0 \Leftrightarrow x(3ax^2+2bx+c)-3(ax^3+bx^2+cx+d)=0 \Leftrightarrow$

$3ax^3+2bx^2+cx-3ax^3-3bx^2-3cx-3d=0 \Leftrightarrow -bx^2-2cx-3d=0$

Par identification, on a : $b=0\ ;\ c=0\ et\ d=0$

D'où $\forall\ x\in\mathbb{R}$; on a : $P(x)=ax^3.\ a\in\mathbb{R}^*$.

2) Soit une fonction f définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ telle que $f(1)=0$ et soit h la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par la relation $f(x)=x^3\times h(x)$

a-Calculons $h\ (1)$ et Calcule $f'(x)$ en fonction de $h'(x)$ et $h(x)$.

$f(x)=x^3\times h(x) \Rightarrow h(x)=\frac{f(x)}{x^3}$ et $h\ (1)=\frac{f(1)}{1^3}=\frac{0}{1^3}=0$

$f(x)=x^3\times h(x) \Rightarrow f'(x)=3x^2h(x)+x^3h'(x)$

b-Démontrons que f vérifie (E) si et seulement si$\forall\, x \in\ ]\,0\ ;\ +\infty[\ ;\ h'(x) = \frac{3}{x^4}\, lnx$

(E) : $x \times f\,'(x) - 3 \times f(x) = 3lnx.$

$f(x) = x^3 \times h(x)$ et $f'(x) = 3x^2h(x) + x^3h'(x)$

Remplaçons $f(x)$ et $f'(x)$ par leur valeur dans l'équation (E), on a :

$x[3x^2h(x) + x^3h'(x)] - 3[x^3 \times h(x)] = 3lnx \Leftrightarrow 3x^3h(x) + x^4h'(x) - 3x^3h(x) = 3lnx$

$\Leftrightarrow\ x^4h'(x) = 3lnx\ \Rightarrow h'(x) = \frac{3}{x^4}\, lnx$

D'où f vérifie (E) si et seulement si$\forall\, x \in\ ]\,0\ ;\ +\infty[\ ;\ h'(x) = \frac{3}{x^4}\, lnx$ (Ce qu'il fallait Démontre).

c-On suppose que f vérifie (E).

Démontrons que h est définie sur $]\,0\ ;\ +\infty[$, par $h(x) = \int_1^x \frac{3}{t^4}\, lnt\, dt$

$h\,(1) = 0$ et $h'(x) = \frac{3}{x^4}\, lnx$. Alors h est la primitive de $h' : x \to \frac{3}{x^4}\, lnx$ qui s'annule en 1.

D'où h est définie sur $]\,0\ ;+\infty[$, par $h(x) = \int_1^x \frac{3}{t^4}\, lnt\, dt$

d-Déterminons $h(x)$ en fonction de x par une intégration par partie

$h(x) = \int_1^x \frac{3}{t^4}\, lnt\, dt$

Posons : $u(t) = lnt\ \Rightarrow u(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = \frac{3}{t^4}\ \Rightarrow u(t) = -\frac{1}{t^3}$

$\Rightarrow h(x) = \left[-\frac{lnt}{t^3}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^4} dt = \left[-\frac{lnt}{t^3}\right]_1^x + \left[-\frac{1}{3t^3}\right]_1^x = \left[-\frac{lnt}{t^3} - \frac{1}{3t^3}\right]_1^x$

$\Rightarrow h(x) = -\frac{lnx}{x^3} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3}$

e-Démontrons qu'il existe une unique fonction f solution du problème posé et Donne l'expression de $f(x)$.

$f(x) = x^3 \times h(x)$. Or $h(x) = -\frac{lnx}{x^3} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3}$

$\Rightarrow f(x) = x^3\left(-\frac{lnx}{x^3} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3}\right) = -lnx - \frac{1}{3} + \frac{x^3}{3}$

Puisque h est unique alors f est unique.

11 On se propose de Résous l'équation différentielle : (E_1) : $y' - 2y = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$

1) Déterminons la solution de l'équation différentielle (E_2) : $y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.

$y' - 2y = 0$ => $S = y(x) = ke^{2x}$. Or $y(0) = 1 \Leftrightarrow ke^0 = 1$ => $k = 1$

D'où $y(x) = e^{2x}$.

2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = ln2$ et soit g la fonction définie par la relation : $f(x) = e^{2x} \times g(x)$.

a- Calculons $g(0)$

$f(x) = e^{2x} \times g(x) \Leftrightarrow g(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}$ => $g(0) = \frac{f(0)}{e^0} = \frac{ln2}{1} = ln2$

b- Calculons $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et de $f(x)$.

$g(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}$ => $g'(x) = \frac{f'(x)\times e^{2x} - 2e^{2x}\times f(x)}{e^{4x}} = \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}$

c- Démontrons que f est solution de (E_1) si et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

(E_1) : $y' - 2y = \frac{2}{1+e^{-2x}}$

f est solution de (E_1) si et seulement si $f' - 2f = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$.

Or $f(x) = e^{2x}g(x)$ et $f'(x) = 2e^{2x}g(x) + e^{2x}g'(x) = e^{2x}[g'(x) + 2g(x)]$

$f' - 2f = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$. $\Leftrightarrow$ $e^{2x}[g'(x) + 2g(x)] - 2e^{2x}g(x) = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$ $\Leftrightarrow$

$e^{2x}g'(x) + 2e^{2x}g(x) - 2e^{2x}g(x) = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$ $\Leftrightarrow e^{2x}g'(x) = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$ $\Leftrightarrow$

$g'(x) = -\frac{2}{(1+e^{-2x})e^{2x}}$ => $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

D'où f est solution de (E_1) si et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

d- En déduisons l'expression de $g(x)$, puis celle de $f(x)$ de telle sorte que f soit solution de (E).

D'après le question précédente, $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \Leftrightarrow \int g'(x)\ dx = \int \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} dx \Leftrightarrow$

$g(x) = ln(1 + e^{-2x}) + k$. Or $g(0) = ln2$

$\Leftrightarrow ln(1 + e^{0}) + k = ln2 \Leftrightarrow ln2 + k = ln2 \Rightarrow k = 0$. D'où $g(x) = ln(1 + e^{-2x})$

12 Soit a et b deux nombres réels et n un entier naturel différent de 1.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = ay + by^n$

1) On pose sur $\mathbb{R}$: $Z = y^{1-n}$ (avec $y > 0$).

Déterminons une équation différentielle satisfaite par Z et la Résous.

La fonction Z est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car y l'est) et :

$Z' = (1-n)y'y^{-n}$. Or $y' = ay + by^n$

$\Rightarrow Z' = (1-n)(ay + by^n)y^{-n} = (1-n)(ay + by^n)y^{-n} = (1-n)(ay^{1-n} + by^0)$

$= (1-n)(ay^{1-n} + b)$. Or $Z = y^{1-n}$

$\Rightarrow Z' = (1-n)(aZ + b) \Leftrightarrow Z' = a(1-n)Z + b(1-n)$

$\Rightarrow Z' = ke^{(1-n)ax} - \frac{b}{a}$

2) En déduisons les solutions, strictement positives, de (E) sur $\mathbb{R}$.

Puisque l'on a posé $= y^{1-n}$, alors $y = Z^{\frac{1}{n-1}}$

D'où $\forall\ x \in \mathbb{R};\ y(x) = \left[ke^{(1-n)ax} - \frac{b}{a}\right]^{\frac{1}{n-1}}$

Lorsque $n = 0$, on récupère l'équation différentielle $y' = ay + b$ avec ses solutions :

$y(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$. Cette équation est appelée : équation de Bernoulli.

Equations différentielles dans les cas pratiques.

13 Un tronc de baobab $\boldsymbol{y}$ grossi avec une vitesse proportionnelle à lui-même.

On sait de plus que ce tronc double de volume tous les 10 ans.

Déterminons le temps nécessaire pour tripler de volume.

Par hypothèse, on a : $y' - ay = 0$ où a est le coefficient de proportionnalité.

Notons t le temps (en années).

D'autre part, l'équation différentielle $y' - ay = 0$ a pour solution : $y(t) = ke^{at}. (k \in \mathbb{R}^*)$

Puisque le tronc de baobab double de volume tous les 10 ans, alors on a :

$y(t+10) = 2y(t) \Leftrightarrow ke^{a(t+10)} = 2ke^{at} \Leftrightarrow e^{a(t+10)} = 2e^{at} \Leftrightarrow e^{(at+10a)} = 2e^{at}$

$\Leftrightarrow e^{at} \times e^{10a} = 2e^{at} \Leftrightarrow e^{10a} = 2 \Rightarrow 10a = ln2 \Rightarrow a = \frac{ln2}{10}$

D'où $y(t) = ke^{\frac{ln2}{10}t}$ avec $(k \in \mathbb{R}^*)$

Cherchons maintenant le temps T nécessaire pour tripler de volume.

$y(t+T) = 3y(t) \Leftrightarrow ke^{a(t+T)} = 3ke^{at} \Leftrightarrow e^{a(t+T)} = 3e^{at} \Leftrightarrow e^{(at+aT)} = 3e^{at}$

$\Leftrightarrow e^{at} \times e^{aT} = 3e^{at} \Leftrightarrow e^{aT} = 3 \Rightarrow aT = ln3 \Rightarrow T = \frac{ln3}{a}$. Or $a = \frac{ln2}{10}$

$\Rightarrow T = \frac{ln3}{\frac{ln2}{10}} = \frac{10ln3}{ln2} \approx 15{,}85$ à 10^{-2} près.

Il faut donc attendre 15 ans, 10 mois et 6 jours (aux jours près) pour que le volume du tronc de baobab puisse tripler de volume.

14 Lors du tremblement de terre qui a secoué la centrale nucléaire de FUKUSHIMA au Japon, la teneur du nombre d'atome de radium $N(t)$ échappé à l'instant t est donné par la relation : $N'(t) = aN(t)$ et $N(0) = N_0$ où (t est exprimé en années).

De plus sa teneur en toxine triple chaque deux ans.

1) Déterminons l'expression de $N(t)$ en fonction de N_0 et t.

$N'(t) = aN(t) \Leftrightarrow N'(t) - aN(t) = 0$

Cette équation différentielle est donc sous la forme :

$y' - ay = 0$ qui a pour solution : $y(t) = ke^{at}. (k \in \mathbb{R}^*)$

Donc $N'(t) - aN(t) = 0 \Rightarrow N(t) = N_0e^{at}. (N_0 \in \mathbb{R}^*)$

2) Déterminons le temps au bout du quel la teneur du nombre d'atome de radium aura quadruplé.

Puisque la teneur en toxine triple chaque deux ans, alors on a :

$N(t+2) = 3N(t) \Leftrightarrow N_0 e^{a(t+2)} = 3N_0 e^{at} \Leftrightarrow e^{a(t+2)} = 3e^{at} \Leftrightarrow e^{(at+2a)} = 3e^{at}$

$\Leftrightarrow e^{at} \times e^{2a} = 3e^{at} \Leftrightarrow e^{2a} = 3 \Rightarrow 2a = ln3 \Rightarrow a = \frac{ln3}{2}$

D'où $N(t) = N_0 e^{\frac{ln3}{2}t}$ avec $(N_0 \in \mathbb{R}^*)$

Cherchons maintenant le temps T nécessaire pour quadrupler de teneur.

$N(t+T) = 4N(t) \Leftrightarrow N_0 e^{a(t+T)} = 4N_0 e^{at} \Leftrightarrow e^{a(t+T)} = 4e^{at} \Leftrightarrow e^{(at+aT)} = 4e^{at}$

$\Leftrightarrow e^{at} \times e^{aT} = 4e^{at} \Leftrightarrow e^{aT} = 4 \Rightarrow aT = ln4 \Rightarrow T = \frac{ln4}{a}$. Or $a = \frac{ln3}{2}$

$\Rightarrow T = \frac{ln4}{\frac{ln3}{2}} = \frac{2ln4}{ln3} \approx 3.$

Il faut donc attendre à peu près 3 ans, pour que la teneur du nombre d'atome de radium soit quadruplée.

15 Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à l'instant t, exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction numérique N à variable réelle t. La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre de microbes est la dérivée N' de cette fonction. On a constaté que : $N'(t) = -kN(t)$ où k est un coefficient réel strictement positif. On désigne par N_0 le nombre de microbes à l'instant $t = 0$

1°/ Déterminons $N(t)$ en fonction de N_0 , k et t.

$N'(t) = -kN(t) \Rightarrow N(t) = Ce^{-kt}$.

D'autre part, $N(0) = Ce^0 = C = N_0$.

D'où $N(t) = N_0 e^{-kt}$.

2°/ Déterminons le nombre de microbes au bout de 1 heures si $N_0 = 1000$ et $k = 1$.

$N(1) = 1000e^{-1} \approx 368$

Alors le nombre de microbes au bout de 1 heures est de 368 individus.

3°/ Soit T la période de reproduction du nombre de microbes, c'est-à-dire le temps au bout duquel le nombre d'atome a été divisé par 2. Montrons que $e^{kT} = 2$.

Si, après un temps T, le nombre de microbes a été divisé par 2, on peut écrire $N(t) = \frac{N_0}{2}$.

On a donc : $N(t) = N_0 e^{-kT} = \frac{N_0}{2} \Leftrightarrow e^{-kT} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{e^{kT}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{kT} = 2.$

4°/ Déterminons la période de reproduction T sachant que $k = 6{,}66 \bullet 10^{-5}$.

$e^{kT} = 2 \Leftrightarrow kT = ln2 \quad => T = \frac{ln2}{k}$

Si $k = 6{,}66 \bullet 10^{-5}$, on obtient $T \approx 10407{,}6$ heures.

16 Une substance se dissout dans l'eau avec une vitesse de dissolution proportionnelle à la quantité non dissoute.

A l'instant $t = 0$ (en minutes), on place 20 grammes de cette substance dans une grande quantité d'eau. Sachant que les 10 premiers grammes se dissolvent en 5 minutes.

1) Formons l'équation différentielle expliquant cette situation en fonction de $f'(t)$ et de $f(t)$.

Comme la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $f'(t) = a\big(20 - f(t)\big)$.

Les solutions sont de la forme, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $f(t) = ke^{-at} + 20$.

2) En déduisons une expression de la quantité dissoute $f(t)$, en grammes, en fonction de t.

A l'instant initial, il n'ya pas encore de la quantité dissoute donc :

$$f(0) = 0$$

$$=> C + 20 = 0$$

$$=> C = -20$$

Comme les dix premiers grammes se dissolvent en cinq minutes, on a :

$$f(5) = 10$$

$$=> -20e^{-5a} + 20 = 10$$

$$=> e^{-5a} = \frac{1}{2}$$

$=> a = \frac{ln2}{5} \approx 0{,}14$ à 10^{-2} près.

On a donc, pour $t \in \mathbb{R}_+$: $f(t) = 20\left(1 - e^{-\frac{ln2}{5}t}\right) = 20\left(1 - 2^{-\frac{t}{5}}\right)$

17 Le taux d'alcoolisme $f(t)$ (en gL^{-1}) d'une personne ayant absorbé, en jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie, sur $\mathbb{R}_+$, l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = ae^{-t}$.

Où t est le temps écoulé après l'ingestion (exprimé en heures), et a une constante qui dépend des conditions expérimentales.

1) On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+ : g(t) = f(t)e^t$.

Démontrons que g est une fonction affine.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car les fonctions f et exponentielles le sont.

Alors $g'(t) = f'(t)e^t + f(t)e^t = \big(f'(t) + f(t)\big)e^t$

Puisque f est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+ : g'(t) = a$. D'où $g(t) = at + b$.

Conclusion : La fonction g est bien affine sur $\mathbb{R}_+$.

2) Exprimons $f(t)$ en fonction de t et de a.

On sait que : $g(t) = f(t)e^t$ => $f(t) = \frac{g(t)}{e^t} = g(t)e^{-t}$

Or à l'instant $t = 0$, l'alcool n'est pas encore dans le sang, donc $f(0) = 0$

=> $be^{-t} = 0$ => $b = 0$

D'où $f(t) = ate^{-t}$.

3) Dans cette question, on pose que $a = 5$.

a-Etudions les variations de f et tracer sa courbe.

$f(t) = ate^{-t}$. Puis que $a = 5$. Alors $f(t) = 5te^{-t}$ et $f'(t) = 5e^{-t}(1 - t)$

$5e^{-t} > 0$ .Alors le signe de $f'(t)$ dépend du signe de $1 - t$.

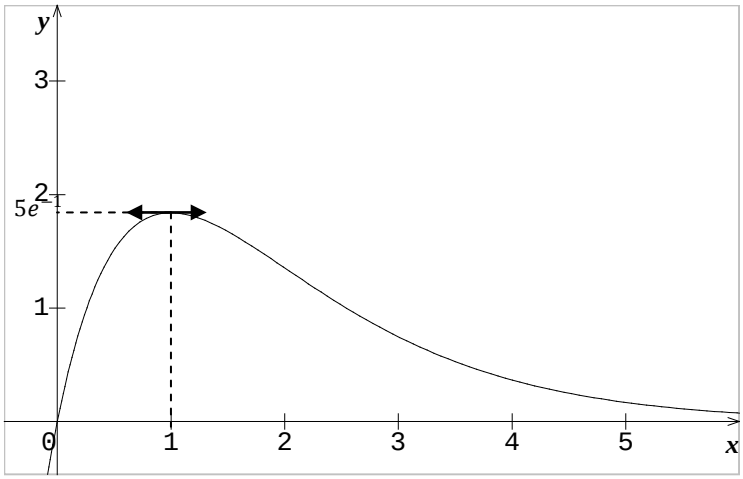
Posons $1 - t = 0$ => $t = 1$

D'où le tableau de variation de $f(t)$ est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$5e^{-1}$	↘	0

D'après le tableau :

$\forall\, x \in [0\,;1]; f$ est croissante et $\forall\, x \in [1\,;+\infty[; f$ est décroissante.



b-Déterminons graphiquement le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout du quel il est atteint.

Graphiquement le taux d'alcoolémie maximal est donné par : $5e^{-1} \approx 1{,}83\ \text{g}L^{-1}$ et cette valeur est atteinte à l'instant $t = 1\ min$

c-Donnons une valeur du délai T (à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à 0,5 en gL^{-1} .

La valeur du délai T au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à 0,5 en gL^{-1} est obtenue en résolvant l'inéquation :$f(t) \leq 0{,}5$.

Résous algébrique l'inéquation :$f(t) \leq 0{,}5$ est pratiquement impossible, alors utilisons le théorème de la bijection sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

Pour tout $t \in [1\ ;\ +\infty[$; f est définie, continue et strictement décroissante, donc réalise une bijection de $[1\ ;\ +\infty[$ vers $[0\ ;5e^{-1}]$.

Alors il existe une unique solution α sur $[1\ ;\ +\infty[$.

Déterminons ainsi un encadrement de α en utilisant le graphique.

Traçons maintenant la droite $y = 0{,}5$ qui coupe la courbe dans l'intervalle $[3\ ;4]$
(Voir figure)

D'où $\alpha \in [3\ ;4] \Leftrightarrow 3 < \alpha < 4$.

Il faut donc 4 heures (à l'heure près par excès) pour pouvoir, par exemple, reprendre le volant.

18 Un bloc de métallique est déposé dans un four dont la température constante est de 1000°C.

La température θ est une fonction du temps t $(en\ heures)$ qui vérifie l'équation différentielle

(E): $\theta'(t) = k[1000 - \theta(t)]$; $k \in \mathbb{R}_+^*$.

1) On pose $y(t) = \theta(t) - 1000$.

Ecrivons une équation différentielle (F) satisfaite par y.

On a $y(t) = \theta(t) - 1000$ => $y'(t) = \theta'(t)$. Or $\theta'(t) = k[1000 - \theta(t)]$

=> $y'(t) = k[1000 - \theta(t)] = 1000k - k\theta(t)$. Or $\theta(t) = y(t) + 1000$

Donc $y'(t) = 1000k - k[y(t) + 1000]$

=> $y'(t) = 1000k - ky(t) - 1000k = -ky(t) \Leftrightarrow y'(t) + ky(t) = 0$

D'où $(\boldsymbol{F})$: $\boldsymbol{y'(t) + ky(t) = 0}$

2) Résolvons (F): $y'(t) + ky(t) = 0$

(F): $y'(t) + ky(t) = 0$

Ainsi la solution générale de (F) est : $t \mapsto y(t) = Ae^{-kt}$; avec $k \in \mathbb{R}$.

D'où $\boldsymbol{y(t) = Ae^{-kt}}$ avec $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$.

Résolvons (E): $\theta'(t) = k[1000 - \theta(t)]$

On sait que $y(t) = \theta(t) - 1000$ => $\theta(t) = y(t) + 1000 \Leftrightarrow \theta(t) = Ae^{-kt} + 1000$

Ainsi la solution générale de (E) est : $t \mapsto \theta(t) = Ae^{-kt} + 1000$; avec $k \in \mathbb{R}$.

D'où $\boldsymbol{\theta(t) = Ae^{-kt} + 1000}$; avec $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$.

3) En déduisons l'expression de $\theta(t)$ en fonction de t uniquement.

- Le bloc, initialement à 40°C est déposé dans le four au temps $t_0 = 0$.

=> $\theta(0) = 40 \Leftrightarrow Ae^0 + 1000 = 40 \Leftrightarrow A + 1000 = 40$ => $A = -960$

Donc $\theta(t) = -960e^{-kt} + 1000$

- Sa température est de 160°C au bout d'une heure.

=> $\theta(1) = 160 \Leftrightarrow -960e^{-k} + 1000 = 160 \Leftrightarrow -960\, e^{-k} = -840$

$\Leftrightarrow e^{-k} = \frac{-840}{-960} \Leftrightarrow e^{-k} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow -k = ln\left(\frac{7}{8}\right)$

D'où l'expression de $\theta(t)$ en fonction de t uniquement est :

$\theta(t) = -960\ e^{tln\left(\frac{7}{8}\right)} + 1000$ ou $\theta(t) = -960\ e^{-tln\left(\frac{8}{7}\right)} + 1000$

4) a- Calculons la température du bloc au temps $t = 3$ heures.

$\theta(3) = -960\ e^{3ln\left(\frac{7}{8}\right)} + 1000 = -960 \times 0{,}7 + 1000 = 328°C$

D'où la température du bloc au bout de 3 heures est $328°C$.

b- Déterminons le temps T à partir duquel la température du bloc dépassera 500°C.

On a : $\theta(t) \geq 500 \Leftrightarrow -960\ e^{tln\left(\frac{7}{8}\right)} + 1000 \geq 500 \Leftrightarrow e^{tln\left(\frac{7}{8}\right)} \leq \frac{500}{960}$

$\Leftrightarrow tln\left(\frac{7}{8}\right) \leq ln\left(\frac{500}{960}\right)$ => $t \geq \frac{ln\left(\frac{500}{960}\right)}{ln\left(\frac{7}{8}\right)}$ car $ln\left(\frac{7}{8}\right) < 0$ => $t \geq 5$. D'où $T = 5$ heures.

D'où la température du bloc dépassera 500°C au bout de 5 heures.

19 A l'instant $t = 0$, un corps à la température $\theta_0 = 60°C$ est placé dans l'air ambiant à la température $\theta_1 = 20°C$. Au bout de 10 $minutes$, la température du corps est 50°C.

Sa température à la date t exprimée en minutes est solution de l'équation différentielle :

$\frac{d\theta(t)}{dt} = -k[\theta(t) - \theta_1]$ où k est une constante réelle. On pose $y(t) = \theta(t) - \theta_1$.

1) a- Déterminons l'équation différentielle vérifiée par y

On sait que : $y'(t) = \theta'(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = -k[\theta(t) - \theta_1] = -k\theta(t) + k\theta_1$.

Or $y(t) = \theta(t) - \theta_1$ => $\theta(t) = y(t) + \theta_1$

Donc $y'(t) = -k\theta(t) + k\theta_1 \Leftrightarrow y'(t) = -k[y(t) + \theta_1] + k\theta_1 = -ky(t) - k\theta_1 + k\theta_1$

=> $y'(t) = -ky(t) \Leftrightarrow y'(t) + ky(t) = 0$

D'où l'équation différentielle vérifiée par y est : $y'(t) + ky(t) = 0$

b- Déterminons y.

La solution générale de y est : $y: t \mapsto y(t) = Ae^{-kt}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

c- En déduisons $\theta(t)$ en fonction de k.

On sait que $y(t) = \theta(t) - \theta_1 \Leftrightarrow \theta(t) = y(t) + \theta_1$. Or $y(t) = Ae^{-kt}$

=> $\theta(t) = Ae^{-kt} + \theta_1$. Or $\theta_1 = 20°C$

=> $\theta(t) = Ae^{-kt} + 20$.

D'où l'expression $\theta(t)$ en fonction de k est : $\boldsymbol{\theta(t) = Ae^{-kt} + 20.}$

d- Déterminons la constante k puis en déduisons l'expression définitive de $\theta(t)$.

- A l'instant $t = 0\ min$, on a : $\theta_0 = 60°C$
  => $\theta(0) = 60 \Leftrightarrow Ae^0 + 20 = 60 \Leftrightarrow A + 20 = 60$ => $A = 40$

  Donc $\theta(t) = 40e^{-kt} + 20$

- A l'instant $t = 10\ min$, on a : $\theta = 50°C$

  => $\theta(10) = 50 \Leftrightarrow 40e^{-10k} + 20 = 50 \Leftrightarrow 40e^{-10k} = 30 \Leftrightarrow e^{-10k} = \frac{30}{40}$

  $\Leftrightarrow e^{-10k} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow -10k = ln\left(\frac{3}{4}\right)$ => $-k = \frac{1}{10} ln\left(\frac{3}{4}\right)$

  D'où l'expression de $\theta(t)$ en fonction de t est : $\boldsymbol{\theta(t) = 40e^{\frac{1}{10}ln\left(\frac{3}{4}\right)t} + 20}$

2) a- Déterminons l'instant au bout du quel la température du corps diminuera de moitié

La température du corps diminuera de moitié si $\theta(t) = 30 \Leftrightarrow 40e^{\frac{1}{10}ln\left(\frac{3}{4}\right)t} + 20 = 30$

$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{10}ln\left(\frac{3}{4}\right)t} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{10} ln\left(\frac{3}{4}\right) t = ln\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{10} ln\left(\frac{3}{4}\right) t = -ln4$

$\Leftrightarrow t = -\frac{10ln4}{ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 48\ min.$

D'où la température du corps diminuera de moitié au bout de 48 $minutes$.

b- Déterminons la température du corps au bout d'une heure

La température du corps au bout d'une heure c'est-à-dire au bout de 60 $minutes$ est :

$\theta(60) = 40e^{\frac{1}{10}ln\left(\frac{3}{4}\right)\times 60} + 20 \approx 27$

D'où au bout d'une heure, la température serait de 27°C.

Barycentres

OBJECTIFS :

Ce chapitre vise à :

• réinvestir les notions vues en classe de première ;

•étendre l'étude de l'outil barycentre à un nombre quelconque de points dans le plan et dans l'espace;

• Détermine des lignes et surfaces de niveaux et les construis.

Commentaires

En première, l'étude de l'outil barycentre s'est limitée à quatre points.

En Terminale cette étude s'étend à un nombre quelconque de points, mais dans la pratique on se limitera à quatre points. Il ne s'agit pas pour le professeur de refaire le cours de première, mais d'utiliser les acquis de cette classe pour la génération des propriétés. En particulier la détermination et la construction dans le plan des lignes de niveau de l'application $M \mapsto \frac{MA}{MB}$ vues en classe de première pourront être réinvesties.

On se référera aux exemples pris dans le domaine de la statistique de la mécanique, etc. aucune théorie n'est faite quant à l'utilisation du symbole Σ qui n'est qu'une simple notation. Dans la pratique on utilisera plutôt une notation du type $\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n}$. Le produit vectoriel n'est pas au programme.

Volume horaire : 10 heures

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Barycentre de n points pondérés Réduction de : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ Réduction de : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, MA_i^2$ • Ligne de niveau de l'application :	• Réduire $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ • Réduire $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, MA_i^2$ • Détermine les lignes et surfaces de

M ↦ Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,;\,\overrightarrow{MB}}\right)$ • définition • Propriétés	niveaux des applications du type : $M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ \mathrm{MA}_i^2$ $M \mapsto \frac{MA}{MB}$ • Construis dans le plan les lignes de niveau de l'application $M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ \mathrm{MA}_i^2$ • Détermine et construis une ligne de niveau de l'application M ↦ Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,;\,\overrightarrow{MB}}\right)$

Remarques et suggestions

En pratique, on utilisera au plus 4 points pondérés. Les nombres complexes peuvent être réinvestis dans cette partie à l'occasion des exercices.

I- Barycentre d'un système de points :

1) Système de points pondérés :

On appelle système de point pondérés, tout ensemble du type :
$\{(\mathbf{A_1}, \alpha_1), (\mathbf{A_2}\ ;\ \alpha_2);\ \ldots;\ (\mathbf{A_n};\ \boldsymbol{\alpha_n})\}$ où les $\boldsymbol{A_i}$ sont les points d'un espace affine et les $\boldsymbol{\alpha_i}$ sont des nombres réels appelés coefficients de pondération.

Avec $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \neq 0)$

2) Barycentre de deux points pondérés

On appelle barycentre de deux points pondérés tout ensemble du type : $\{(A\ ;\alpha_1)\ ;\ (B\ ;\ \alpha_2)\}$ et

l'unique point **G** s'il existe tel que : $\alpha_1\overrightarrow{GA} + \alpha_2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ .En fixant A on a :

$$\alpha_1\overrightarrow{GA} + \alpha_2\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha_1 + \alpha_2)\overrightarrow{GA} = -\alpha_2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\overrightarrow{AB}$$

Avec $(\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0)$

Ainsi si G est le barycentre de $\{(A\ ;\alpha_1)\ ;\ (B\ ;\ \alpha_2)\}$; Alors $A\ ;\ B$ et G sont alignés, et G a pour abscisse $\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$ dans la graduation de repère $(A\ ;\ B)$.

3) Barycentre de trois points pondérés

On appelle barycentre de trois points pondérés tout ensemble du type

$\{(A\ ;\ \alpha_1)\ ;\ (B\ ;\ \alpha_2)\ ;\ (C\ ;\ \alpha_3)\}$ et l'unique point **G** s'il existe tel que :

$\alpha_1\overrightarrow{GA} + \alpha_2\overrightarrow{GB} + \alpha_3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$. En fixant A on a :

$$\alpha_1\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA}\right) + \alpha_2\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) + \alpha_3\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}\right) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}\overrightarrow{AB} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}\overrightarrow{AC} \quad \text{Avec } (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \neq 0)$$

4) Coordonnées du barycentre de 3 points pondérés :

Dans l'espace affine $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$, on considère les points $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}x_C\\y_C\end{pmatrix}$ et $G\begin{pmatrix}x_G\\y_G\end{pmatrix}$
Soit le système $G = bary\{(A\ ;\ \alpha_1)\ ;\ (B\ ;\ \alpha_2)\ ;\ (C\ ;\ \alpha_3)\}$ tel que : $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \neq 0$

Les coordonnées du barycentre G affecté à ce système est: $\begin{cases} x_G = \frac{\alpha_1 x_A + \alpha_2 x_B + \alpha_3 x_C}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ et \\ y_G = \frac{\alpha_1 y_A + \alpha_2 y_B + \alpha_3 y_C}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \end{cases}$

D'une manière générale si A ; B et C sont trois points d'affixes respectives Z_A ; Z_B ; Z_C et si G est le barycentre d'affixe Z_G tel que Z_G = bary$\{(A\ ;\alpha_1)\ ;\ (B\ ;\alpha_2)\ ;\ (C\ ;\alpha_3)\}$, alors on a :

$$Z_G = \frac{\alpha_1 Z_A + \alpha_2 Z_B + \alpha_3 Z_C}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

5) Propriétés du barycentre de trois points pondérés :

Propriété 1 : Le barycentre $\boldsymbol{G}$ d'un système ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont choisis ces points pondérés. C'est-à-dire :

G = bary$\{(A\ ;\alpha_1)\ ;\ (B\ ;\alpha_2)\ ;\ (C\ ;\alpha_3)\}$ ⇔

G = bary $\{(A\ ;\alpha_2)\ ;\ (B\ ;\alpha_1)\ ;\ (C\ ;\alpha_3)\}$ ⇔

G = bary $\{(C\ ;\alpha_3)\ ;\ (B\ ;\alpha_2)\ ;\ (A\ ;\alpha_1)\}$

Propriété 2 : Le barycentre $\boldsymbol{G}$ d'un système ne change pas lorsqu'on multiplie ou lorsqu'on divise chaque coefficient de pondération par une même constante non nulle.

C'est-à-dire : $\forall\, k \in \mathbb{R}^*$ On a :

G = bary$\{(A\ ;\alpha_1)\ ;\ (B\ ;\alpha_2)\ ;\ (C\ ;\alpha_3)\}$ ⇔

G = bary$\{(A\ ;k\alpha_1)\ ;\ (B\ ;k\alpha_2)\ ;\ (B\ ;k\alpha_3)\}$ ⇔

G = $\left\{\left(A\ ;\ \frac{\alpha_1}{k}\right)\ ;\left(B\ ;\ \frac{\alpha_2}{k}\right)\ ;\ \left(C\ ;\ \frac{\alpha_3}{k}\right)\right\}$

Propriété 3 : Le barycentre $\boldsymbol{G}$ d'un système ne change pas lorsqu'on remplace dans le système un certain nombre de points pondérés par leur barycentre partiel $\boldsymbol{G'}$ à condition que ce dernier soit affecté de la somme partielle des coefficients de pondération partielle considérée.

C'est-à-dire :

G = bary$\{(A\ ;\alpha_1)\ ;\ (B\ ;\alpha_2)\ ;\ (C\ ;\alpha_3);\ (D\ ;\alpha_4)\}$⇔

G = bary $\{(A\ ;\alpha_1)\ ;\ (G'\ ;\alpha_2+\alpha_3\ +\alpha_4)\}$

6) Isobarycentre

Tout barycentre G d'un système du type : $\{(A\ ;\ \alpha)\ ;\ (B\ ;\ \alpha)\ ;\ (C\ ;\alpha)\}$ avec $\alpha \neq 0$ est appelé **isobarycentre.**

NB : Dans le cas de **l'isobarycentre**, le point G est toujours le **centre de gravité du triangle ABC**.

II- Fonction vectorielle et scalaire de Leibniz

1) Fonction vectorielle de Leibniz

On appelle fonction vectorielle de Leibniz, toute fonction f définie de E vers V par :

$$\boldsymbol{f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \alpha_3 \overrightarrow{MA_3} + \ldots\ldots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}.}$$

NB : Pour tout point M ∈ E tel que G = bary$\{(A_1;\ \alpha_1);\ (A_2\ ;\ \alpha_2)\ ;\ (A_3\ ;\ \alpha_3);\ \ldots\ldots (A_n\ ;\ \alpha_n)\}$ on a : $f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{MG}\right) + f(G) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_n)\overrightarrow{MG} + f(G)$ avec

$$\boldsymbol{f(G) = \alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \alpha_3 \overrightarrow{GA_3} + \ldots\ldots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n}}$$

2) Fonction scalaire ou numérique de Leibniz

On appelle fonction scalaire de Leibniz, toute fonction f définie de E vers V par :

$$\boldsymbol{f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \alpha_3 MA_3^2 + \ldots\ldots + \alpha_n MA_n^2}$$

NB : Pour tout point M ∈ E tel que G = bary$\{(A_1;\ \alpha_1);\ (A_2\ ;\ \alpha_2)\ ;\ (A_3\ ;\ \alpha_3);\ \ldots\ldots (A_n\ ;\ \alpha_n)\}$ on a : $f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MG^2 + f(G) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_n)MG^2 + f(G)$.

Ainsi pour le barycentre G de 3 points pondérés $\{(A\ ;\ \alpha_1)\ ;\ (B\ ;\ \alpha_2)\ ;\ (C\ ;\ \alpha_3);\ (D\ ;\ \alpha_4)\}$,

On a : $\boldsymbol{f(G) = \dfrac{(\alpha_1\ \alpha_2)AB^2 + (\alpha_1\ \alpha_3)AC^2 + (\alpha_2\ \alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}}$

III-Barycentre et ensemble des points

1) Cercle de centre G et de rayon k

Pour un cercle de centre $\boldsymbol{G}$ et de rayon k, on a : $\boldsymbol{MG = k}$ (avec $k \in \mathbb{R}_+^*$)

NB :

- Si $k = 0$, alors l'ensemble cherché est le singleton $\boldsymbol{G}$.
- Si $k < 0$, alors l'ensemble cherché est vide.

2) Cercle de diamètre $[AB]$

Pour un cercle de diamètre $[AB]$, on a : $\boldsymbol{\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = 0}$

3) Médiatrice du segment $[AB]$

Pour la médiatrice du segment $[AB]$, on a : $\boldsymbol{MA = MB}$

4) Parallélisme à la droite (AB) et passant par un point C.

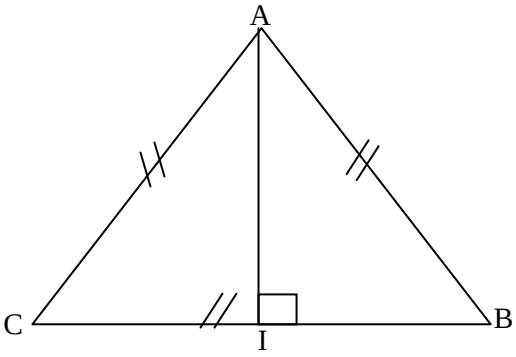
Pour la parallèle à la droite (AB) et passant par un point C, on a : $\boldsymbol{\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{AB}}$ (avec $k \in \mathbb{R}_+^*$)

5) Perpendicularité à la droite (AB) et passant par un point C.

Pour la perpendiculaire à la droite (AB) et passant par un point C, on a : $\boldsymbol{\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} = k}$
(avec $k \in \mathbb{R}_+^*$)

IV- Lois de la médiane dans un triangle :

1) Triangle équilatéral



AB = AC = BC et $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60°$

I Milieu de $[BC]$

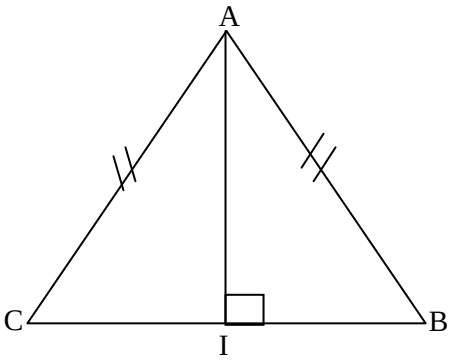
AI Médiane de $[BC]$

On a : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = 2AI$ et $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

2) Triangle isocèle en A

$AB = AC$ et $\hat{B} = \hat{C}$

I Milieu de $[BC]$

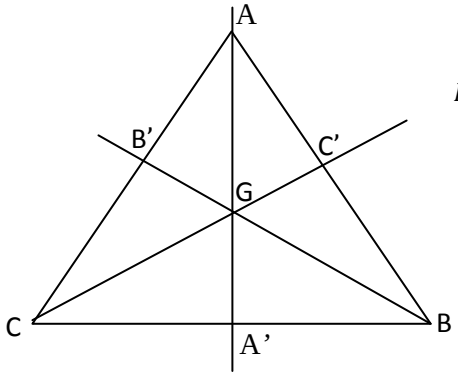


AI Médiatrice de $[BC]$

On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\text{AI}$ et $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$

3) Médiane d'un triangle quelconque



A' Milieu de $[BC]$

B' Milieu de $[AC]$

C' Milieu de $[AB]$

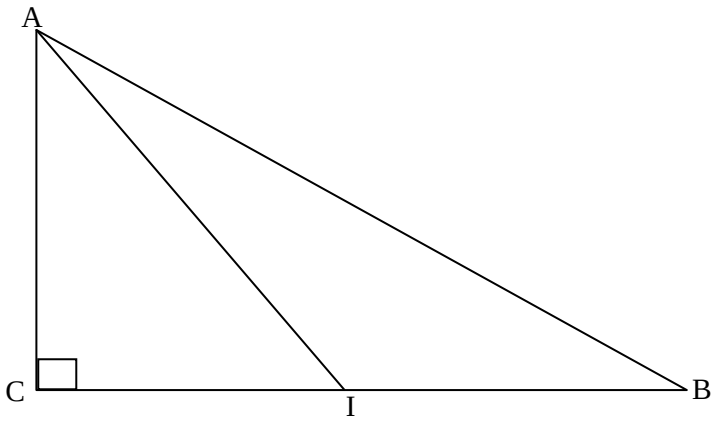
G centre de gravité du triangle ABC

On a: $AG = \frac{2}{3} AA'$; $BG = \frac{2}{3} BB'$; $CG = \frac{2}{3} CC'$

NB : Pour un triangle isocèle, on a $AG = \frac{3}{4} AA'$

4) Théorème de la médiane

Soit ABC un triangle quelconque et I milieu de $[BC]$



a- Première énoncée de la médiane

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

b- Deuxième énoncée de la médiane

$$\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

c- Troisième énoncée de la médiane

$$MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MI} \bullet \overrightarrow{AB}$$

Exercices

Construction de barycentre de deux et trois points pondérés

1 1) Détermine puis Construis le barycentre G (s'il existe) dans chacun des cas suivants :

a- $G_1 = bary\{(A;5)\ ;\ (B;2)\}$; **b-** $G_2 = bary\{(A;3)\ ;\ (B;-8)\}$

2) Détermine puis Construis le barycentre G (s'il existe) dans chacun des cas suivants :

a- $G_1 = bary\{(A;-3)\ ;\ (B;-2);\ (C;3)\}$; **b-** $G_2 = bary\{(A;1)\ ;\ (B;-2);\ (C;1)\}$

Application des fonctions numériques et scalaire de Leibniz

2 Dans le plan affine Euclidien ; on considère un triangle équilatérale ABC dont le côté mesure a.

1) Construis le barycentre G du système $\{(A\ ;\ 4)\ ;\ (B\ ;1)\ ;\ (C\ ;-1)\}$.
2) Soit f : E $\rightarrow \mathbb{R}$ tel que : $f(M) = 4MA^2 + MB^2 - MC^2$

Détermine puis construis l'ensemble des points M du plan tel que $f(M) = \frac{63a^2}{4}$

3 Soit A, B, C trois points du plan P tel que $AB = AC = 5\ cm$ et BC $= 6\ cm$.

1) Construis le triangle ABC puis calcule $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$
2) Soit G le barycentre des points pondérés $\{(A,2)\ ;\ (B,3)\ ;\ (C,3)\}$. Construis G puis calcule AG.
3) Soit f : P $\rightarrow \mathbb{R}$
   $M \rightarrow 2\overrightarrow{MB}\bullet\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}\bullet\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}$

a) Exprime $f(M)$ en fonction de $f(G)$ et MG
b) Calcule la valeur de $f(A)$ puis en déduis celle de $f(G)$.

4) Détermine puis construis l'ensemble des points M du plan tels que : $f(M) = f(A)$.

4 Soit E un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A\ ;\ B\ ;\ C$ de coordonnées respectives : $A(3\ ;1)\ ;\ B(-2\ ;3)\ ;\ C(1\ ;0)$

Soit G le barycentre des points $A\ ;\ B\ ;\ C$ affectés des points : $2\ ;\ 1\ ;\ -1$

1) Trouve les coordonnées de G
2) Trouve suivant les valeurs du nombre réel k l'ensemble des points M tel que : $2MA^2 + MB^2 - MC^2 = k$

3) Détermine puis construis l'ensemble des points M du plan si $k = -35$

5 Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : $AB = 4$; $AC = 6$.
Soit I le milieu du segment $[AB]$.

1) a- Construis le barycentre G = $\{(A, 5)\ ;\ (B, -3)\ ;\ (C, 2)\}$.
b- Calcule $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$.

2) Détermine l'ensemble E_1 des points M du plan tel que :

$\left\| 5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = 2\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \right\|$.

3) Détermine l'ensemble E_2 des points M du plan tel que :

$\left\| 5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \right\|$.

4) Détermine l'ensemble E_3 des points M du plan tel que :

$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 24$.

5) Détermine l'ensemble E_4 des points M du plan tel que :

$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = k$ (on discuteras suivant les valeurs de k).

6) Détermine l'ensemble E_5 des points M du plan tel que :

$5MA^2 - 3MB^2 - 2MC^2 = -72$.

6 Le plan P est muni d'un repère orthonormé(O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
On considère les 4 points A ; B ; C et D tel que : $A\binom{0}{3}$; $B\binom{-1}{0}$; $C\binom{3}{0}$ et $D\binom{x}{y}$

1) Détermine les coordonnées x et y de D sachant que : $\left\| \overrightarrow{DA} \right\| = \left\| \overrightarrow{DB} \right\| = \left\| \overrightarrow{DC} \right\|$

2) Détermine les réels m et n tels que D soit barycentre des points $(A, 1); (B, m)$; (C, n)

3) Trouve l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $4\left\| \overrightarrow{MA} \right\|^2 + 3\left\| \overrightarrow{MB} \right\|^2 + 5\left\| \overrightarrow{MC} \right\|^2 = k$

4) Détermine le réel k $(k > 60)$ tel que $A\binom{0}{3}$ soit élément de (E).

7 Soit A, B, C un triangle équilatéral de côté 3 ; B' le milieu de $[AC]$et un point D tel que :
$4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$

1) Démontre que D est le barycentre des points pondérés $(A, 3)$; $(B, -2)$; $(C, 3)$.
En déduis que D appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

2) Démontre que $\overrightarrow{BB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$

3) Calcule DA^2 et DB^2

4) Détermine l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant la relation :
$3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12$

5) Vérifie que l'isobarycentre du triangle A, B, C appartient à l'ensemble (E) puis trace (E).

(On fera une figure)

8 Dans l'espace E, on note la distance de deux points M et N par MN

1) Soit trois points A; B; C non alignés et I le point défini par : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

De quel coefficients a ; b ; c faut – il affecter respectivement les points A ; B ; C pour que I soit leur barycentre ?

2) On suppose maintenant que le triangle ABC est rectangle en A tel que $AB = 2$; $AC = 1$ et l'ensemble S tel que S = $\{ M \in E \ / \ MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -3\}$

Démontre que S est une sphère de centre I et de rayons r à préciser.

9 Soit ABC un trapèze tel que (AB) parallèle à (CD) .

Soient I ; J et O les milieux respectifs des segments $[AB]$; $[CD]$ et $[IJ]$.

1) Détermine puis construis l'ensemble E_1 des points M du plan tel que :

$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\|$.

2) Les médiatrices des côtés $[AD]$; $[BC]$ se coupent en G. Démontre que $GA^2 + GB^2 = GC^2 + GD^2$.

3) a- Démontre que l'ensemble E_2 : $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$ est non vide.

b- Démontre que $M \in E_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{JC^2 - IA^2}{2}$

c- En déduis que $M \in E_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{GM} = 0$

d- Détermine puis construis E_2

10 On donne trois points A ; B et C distinctes non alignés du plan et on note a ; b et c les longueurs des côtés du triangle ABC tel que $BC = a$; $AC = b$ et $AB = c$.

On se propose d'étudier l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

1) Soit G le centre de gravité du triangle ABC et soit I le milieu du segment$[BC]$.

a- Calcule $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis en déduis que $AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.

On calculera de même les expressions de BG^2 et de CG^2

b- Montre que $AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.

2) a- Reconnaître le nature de (E).

b- On donne $a = 5$; $b = 4$ et $c = 3$. Trace le triangle ABC puis dessiné (E) dans ce cas particulier.

11 Soit ABC un triangle du plan ; I le milieu du segment$[BC]$ et D le barycentre de $\{(A, -1)\ ;\ (B, 2)\ ;\ (C, 2)\}$ (On fera une figure qui sera compléter au fur et à mesure).

1) Exprime $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.

2) Détermine la nature de l'ensemble (E) des points du plan vérifiant :

$\left\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$.

4) Justifier que (E) contient I et en déduis sa construction.

12 Dans le plan affine P rapporté à un repère orthonormé$(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$, on donne les points $A\binom{1}{0}$ et $B\binom{0}{1}$.

1) Détermine puis trace l'ensemble (Γ) des points $M\binom{x}{y}$ du plan tels que le barycentre du système $\{(A, x)\ ;\ (B, y)\ ;\ (C, xy)\}$ n'existe pas.

2) Soit C le point du plan P tel que ABC soit un triangle équilatéral de côté a ($a \in \mathbb{R}^*$)

a- Détermine puis construis le barycentre G des points A ; B et C affectés respectivement des coefficients 2 ; 1 et 1

b- Quel est l'ensemble (δ) des points M du plan tel que :

$2\overrightarrow{MA^2} + \overrightarrow{MB^2} + \overrightarrow{MG^2} = ka^2$ avec $k \in \mathbb{R}$ (On discutera suivant les valeurs du paramètre k)

c- Construis cet ensemble si $k = 2$

13 1) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct$(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. On désigne par A ; B ; C et G les points du plan d'affixes respectives : $Z_A = -1$; $Z_B = 2 + i\sqrt{3}$; $Z_C = 2 - i\sqrt{3}$ et $Z_G = 3$.

a- Réaliser une figure et placer les points A ; B ; C et G.

b- Calcule les distances AB ; BC et AC puis en déduis la nature du triangle ABC.

c- Calcule un argument du complexe $\frac{Z_A - Z_C}{Z_G - Z_C}$ puis en déduis la nature du triangle GAC.

2) Soit (D) l'ensemble des points tels que : $\left(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right)\overrightarrow{CG} = 12$ **(1)**

a- Montre que G est le barycentre du système des points pondérés :

$\{(A, -1)\ ;\ (B, 2)\ ;\ (C, 2)\}$

b- Montre que la relation **(1)** est équivalente à la relation : $\overrightarrow{GM} \bullet \overrightarrow{CG} = -4$ **(2)**

c- Vérifie que le point A appartient à l'ensemble (D).

d- Montre que la relation **(2)** est équivalente à la relation : $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{CG} = 0$

e- En déduis l'ensemble (D) puis le trace.

Application des isobarycentres

14 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$; on considère les points : $A_1\ ;\ A_2\ ;\ ;\ A_3\ ; \ldots\ldots A_n$ dont les affixes sont les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Z^n = 1$ avec $(n \in \mathbb{N}\ ; n \geq 2)$. On désigne par Z_1 le complexe telque $Z_1 = cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

1) Exprime en fonction de Z_1, les racines de l'équation $Z^n = 1$.

2) Détermine l'isobarycentre des points $A_1\ ;\ A_2\ ;\ ;\ A_3\ ; \ldots\ldots A_n$.

3) Détermine l'ensemble des points M du plan tel que :

$$\left\|\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} + \cdots + \overrightarrow{MA_n}\right\| = n$$

15 Dans le plan complexe $\mathbb{C}$ muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$; on considère le polynôme p telque : $p(Z) = Z^3 - (3 + 4i)Z - 2 + 8i$

1) Montre que l'équation $p(Z) = 0$ admet une solution réelle Z_0 que tu détermineras.

2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(Z) = 0$. On désignera par Z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive.

3) Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on considère les points G_0 ; A et B d'affixes respectives Z_0 ; Z_1 et Z_2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle G_n l'isobarycentre des points A ; B et G_{n-1}.

a- Détermine l'affixe de G_1.

b- Soit Z_n l'affixe de G_n. Exprime Z_n en fonction de Z_{n-1}.

5) On pose $U_n = Z_n + 1$.
a- Quelle est la nature de la suite U_n?
b- Etudie la convergence de la suite U_n.

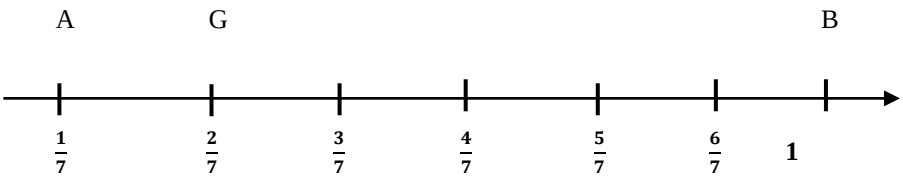
Solutions

Construction de barycentre de 2 et 3 points pondérés

1 1) Déterminons puis Construisons le barycentre G (s'il existe) dans chacun des cas suivants :

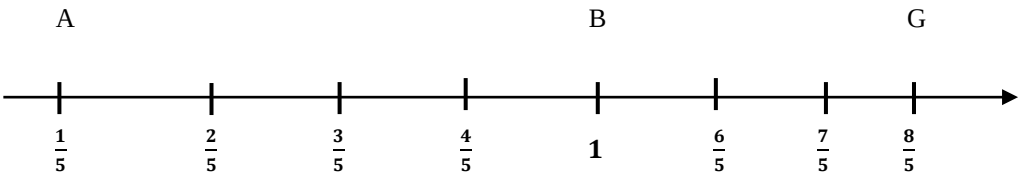
a- $G_1 = bary\{(A;5)\ ;\ (B;2)\}$

5 + 2 = 7 ≠ 0 alors G existe et $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$



b- $G_2 = bary\{(A;3)\ ;\ (B;-8)\}$

3 – 8 = − 5 ≠ 0 donc il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{8}{5}\overrightarrow{AB}$



2) Déterminons puis Construisons le barycentre G (s'il existe) dans chacun des cas suivants :

a- $G_1 = bary\{(A;-3)\ ;\ (B;-2);\ (C;3)\}$

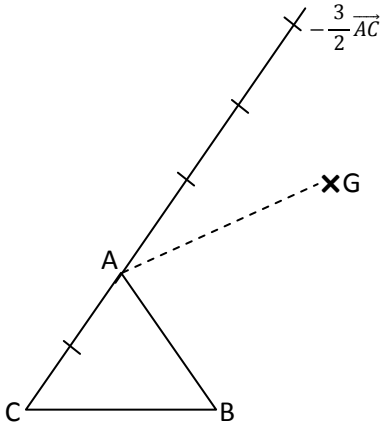
$(-3)+(-2)+(3)=-2\neq 0$, alors G existe.

On a : $-3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$=>\overrightarrow{AG}=\frac{-2}{-3-2+3}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{-3-2+3}\overrightarrow{AC}$

$=>\overrightarrow{AG}=\frac{-2}{-2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{-2}\overrightarrow{AC}$

$=>\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$



b- $G_2=bary\{(A;1)\ ;\ (B;-2);\ (C;1)\}$

$(1)+(-2)+(1)=0$, alors G n'existe pas.

Application des fonctions numériques et scalaire de Leibniz

2 Dans le plan affine euclidien ; on considère un triangle équilatérale A, B, C dont le côté mesure a.

1) Construisons le barycentre G du système $\{(A,4)\ ;\ (B,1)\ ;\ (C,-1)\}$.

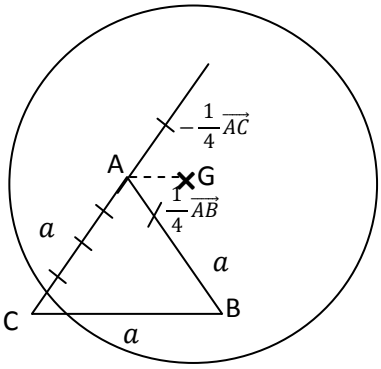
$G=bary\{(A;4)\ ;\ (B;1);\ (C;-1)\}$. On a : $\alpha_1=4$; $\alpha_2=1$ et $\alpha_3=-1$

Puis que $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=4+1-1=4\neq 0$; Alors G existe.

On a: $4\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$=>\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4+1-1}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4+1-1}\overrightarrow{AC}$

$=>\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$



2) Soit f : E $\rightarrow \mathbb{R}$ tel que : $f(M)=4MA^2+MB^2-MC^2$

Déterminons puis construisons l'ensemble des points M du plan tel que $f(M) = \frac{63a^2}{4}$

$f(M) = 4MA^2 + MB^2 - MC^2$(les points de pondérations sont égaux à celui du barycentre G).

Alors on a : $f(M) = \sum \alpha_i \, MG^2 + f(G)$

Or $\sum \alpha_i \, MG^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MG^2 = (4 + 1 - 1)MG^2 = 4MG^2$

Et $f(G) = \frac{(\alpha_1\ \alpha_2)AB^2 + (\alpha_1\ \alpha_3)AC^2 + (\alpha_2\ \alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{4AB^2 - 4AC^2 - BC^2}{4}$

On a : $AB = AC = BC = a$ => $f(G) = \frac{4a^2 - 4a^2 - a^2}{4} = \frac{-a^2}{4}$

D'où $f(M) = 4MG^2 + \frac{-a^2}{4} = 4MG^2 - \frac{a^2}{4}$

Par hypothèse on a : $f(M) = \frac{63a^2}{4} \Leftrightarrow 4MG^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{63a^2}{4} \Leftrightarrow 4MG^2 = \frac{63a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$

$\Leftrightarrow 4MG^2 = \frac{64a^2}{4} \Leftrightarrow MG^2 = \frac{64a^2}{16} \Leftrightarrow MG^2 = 4a^2$ => $MG = 2a$

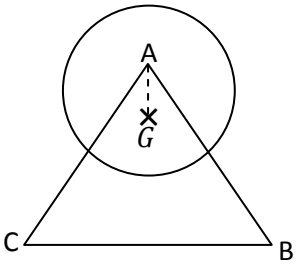
Alors l'ensemble des points M du plan cherché est le cercle de centre G et de rayon $r = 2a$.

Construction : voir figure ci-dessus

3 Soit A, B, C trois points du plan P tel que $AB = AC = 5\ cm$ et BC = 6 cm.

1) Construisons le triangle ABC puis calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Puisque : $AB = AC = 5\ cm$ et BC = 6 cm alors ABC est un triangle isocèle.



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \frac{(5)^2 + (5)^2 - (6)^2}{2} = \frac{50 - 36}{2} = \frac{14}{2} = 7$

=> $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 7$

2) Soit G le barycentre des points pondérés $\{(A, 2)\ ;\ (B, 3)\ ;\ (C, 3)\}$.

Construisons G

Puis que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2 + 3 + 3 = 8 \neq 0$; Alors G existe.

On a: $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$=> \overrightarrow{AG} = \frac{3}{2+3+3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2+3+3}\overrightarrow{AC}$

$=> \overrightarrow{AG} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$ (Pour la construction du point G, voir figure)

Calculons AG.

$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AG}\right)^2 = \left(\frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}\right)^2 \Leftrightarrow AG^2 = \frac{9}{64}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2$

$\Leftrightarrow AG^2 = \frac{9}{64}\left(AB^2 + 2\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AC} + AC^2\right) = \frac{9}{64}(5^2 + 2 \times 7 + 5^2) = 9 => AG = 3$

3) Soit f : P $\rightarrow \mathbb{R}$

$$M \rightarrow 2\overrightarrow{MB}\bullet\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}\bullet\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}$$

a-Exprimons $f(M)$ en fonction de $f(G)$ et MG

$f(M) = 2\overrightarrow{MB} \bullet \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \bullet \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB}$

On sait que $f(M) = \sum \alpha_i \, MG^2 + f(G)$ avec $\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = 1$ et $\alpha_3 = 1$

Or $\sum \alpha_i \, MG^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MG^2 = (2 + 1 + 1)MG^2 = 4MG^2$

D'où $f(M) = 4MG^2 + f(G)$

b-Calculons la valeur de $f(A)$ puis en déduisons celle de $f(G)$.

$f(M) = 2\overrightarrow{MB} \bullet \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \bullet \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB}$

Calculons la valeur de $f(A)$

$=> f(A) = 2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} \bullet \overrightarrow{AB}$

$=> f(A) = 2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$ Avec $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ *et* $\overrightarrow{AA} \bullet \overrightarrow{AB} = \vec{0} => f(A) = 2 \times 7 = 14$.

D'où $f(A) = 14$.

Calculons la valeur de $f(G)$

On sait que $f(M) = 4MG^2 + f(G)$

=> $f(A) = 4AG^2 + f(G)$. Or $AG = 3$ et $f(A) = 14$

=> $14 = 4(3)^2 + f(G) \Leftrightarrow 14 = 36 + f(G)$ => $f(G) = 14 - 36 = -22$

D'où $f(G) = -22$.

4) Déterminons puis construisons l'ensemble des points M du plan tels que : $f(M) = f(A)$.

$f(M) = f(A) \Leftrightarrow 4MG^2 + f(G) = 14$. Or $f(G) = -22$

=> $4MG^2 - 22 = 14 \Leftrightarrow 4MG^2 = 14 + 22 \Leftrightarrow 4MG^2 = 36 \Leftrightarrow MG^2 = 9$ => $MG = 3$

Alors l'ensemble cherché est le cercle de centre G et de rayon $r = AG = 3$

(Pour la construction du cercle, voir figure)

4 Soit E un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé. On considère les points A, B, C de coordonnées respectives : $A(3,1)$; $B(-2,3)$; $C(1,0)$

Soit G le barycentre des points A, B, C affectés des points 2 ; 1 ; -1

1) Trouvons les coordonnées de G

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha_1 x_A + \alpha_2 x_B + \alpha_3 x_C}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ et \\ y_G = \dfrac{\alpha_1 y_A + \alpha_2 y_B + \alpha_3 y_C}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{(2)(3) + (1)(-2) + (-1)(1)}{2 + 1 - 1} = \dfrac{3}{2} \\ et \\ y_G = \dfrac{(2)(3) + (1)(-2) + (-1)(1)}{2 + 1 - 1} = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{3}{2} ; \frac{5}{2}\right)$$

2) Trouvons suivant les valeurs du nombre réel k l'ensemble des points M tel que :

$2MA^2 + MB^2 - MC^2 = k$

Posons $f(M) = 2MA^2 + MB^2 - MC^2 = k$

On sait que $f(M) = \sum \alpha_i MG^2 + f(G)$ avec $\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = 1$ et $\alpha_3 = -1$

Or $\sum \alpha_i MG^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MG^2 = (2 + 1 - 1)MG^2 = 2MG^2$

D'où $f(M) = 2MG^2 + f(G)$

D'autre part $f(G) = \dfrac{(\alpha_1 \alpha_2)AB^2 + (\alpha_1 \alpha_3)AC^2 + (\alpha_2 \alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \dfrac{2AB^2 - 2AC^2 - BC^2}{2}$

De même $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (-2-3)^2 + (3-1)^2 = 25 + 4 = 29$

$$AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (1-3)^2 + (0-1)^2 = 4 + 1 = 5$$

$$BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (1+2)^2 + (0-3)^2 = 9 + 9 = 18$$

$\Rightarrow f(G) = \frac{2\times 29 - 2\times 5 - 18}{2} = \frac{30}{2} = 15$

Alors $f(M) = k \Leftrightarrow 2MG^2 + f(G) = k \Leftrightarrow 2MG^2 + 15 = k \Leftrightarrow 2MG^2 = k - 15 \Leftrightarrow$

$MG^2 = \frac{k-15}{2} \Rightarrow MG = \sqrt{\frac{k-15}{2}}$

- si $k < 15$; alors l'ensemble des points M cherchés est vide.
- si $k = 15$ alors $MG = 0$. Ainsi l'ensemble des points M cherchés est le point G.
- si $k > 15$; alors l'ensemble des points M cherchés est le cercle de centre Get de rayon $r = \sqrt{\frac{k-15}{2}}$

3) Déterminons puis construisons l'ensemble des points M du plan si $k = 23$

Puisque $k = 23 < 15$; alors l'ensemble des points M cherchés est le cercle de centre Get de rayon $r = \sqrt{\frac{k-15}{2}} = \sqrt{\frac{23-15}{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$

5 Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : $AB = 4$; $AC = 6$.

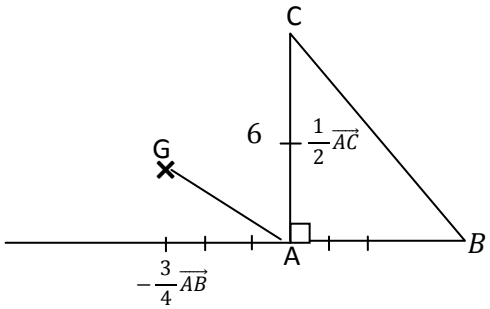
Soit I le milieu du segment $[AB]$.

1) a- Construisons le barycentre G = $\{(A,5)\ ;\ (B,-3)\ ;\ (C,2)\}$.

$G = bary\{(A;5)\ ;\ (B;-3);\ (C;2)\}$. On a : $\alpha_1 = 5$; $\alpha_2 = -3$ et $\alpha_3 = 2$
Puis que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 5 - 3 + 2 = 4 \neq 0$; Alors G existe.

On a: $5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{-3}{5-3+2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5-3+2}\overrightarrow{AC}$



$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{4}\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

b- Calculons $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$.

ABC est un triangle rectangle en A, alors on a : $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$ ($\overrightarrow{AB}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{AC}$)

2) Déterminons l'ensemble E_1 des points M du plan tel que :

$\| 5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \| = 2\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$.

$\| \underbrace{5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}} \| = 2\|\underbrace{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}}\|$.

Introduisons le barycentre G Introduisons le point I

$\Rightarrow \| 5(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) - 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \| = 2\|(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})\|$

$\Leftrightarrow \| 4\overrightarrow{MG} + 5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} \| = 2\|2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\|$.

Or par hypothèse on a :

$5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (Car $G = bary\{(A;5)\ ;\ (B;-3);\ (C;2)\}$)

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ (Car I est milieu du segment $[AB]$)

Alors on a : $\| 4\overrightarrow{MG} \| = 2\|2\overrightarrow{MI}\| \Leftrightarrow 4\| \overrightarrow{MG} \| = 4\|\overrightarrow{MI}\| \Leftrightarrow \| \overrightarrow{MG} \| = \|\overrightarrow{MI}\| \Leftrightarrow MG = MI$

Donc l'ensemble E_1 des points M du plan cherché est la médiatrice du segment $[GI]$

3) Déterminons l'ensemble E_2 des points M du plan tel que :

$\| 5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$.

$\| \underbrace{5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}} \| = \|\underbrace{\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}}\|$.

Introduisons le barycentre G Introduisons le point I

$\Rightarrow \| 5(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) - 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \| = \|(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})\|$

$\Leftrightarrow \| 4\overrightarrow{MG} + 5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} \| = \|\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}\|$.

$\Leftrightarrow \| 4\overrightarrow{MG} + 5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} \| = \|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BI}\|$.

$\Leftrightarrow \| 4\overrightarrow{MG} + 5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} \| = \| \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IA}\|$.

Or par hypothèse on a :

$5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (Car $G = bary\{(A;5)\ ;\ (B;-3);\ (C;2)\}$)

$\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BA}$ (D'aprèsla relation de Chasles)

Alors on a : $\left\| 4\overrightarrow{MG} \right\| = \left\| \overrightarrow{BA} \right\| \Leftrightarrow 4\left\| \overrightarrow{MG} \right\| = \left\| \overrightarrow{BA} \right\| \Leftrightarrow 4MG = BA \Leftrightarrow MG = \frac{1}{4}BA$

Donc l'ensemble E_2 des points M du plan cherché est le cercle de centre Get de rayon

$r = \frac{1}{4}BA$

4) Déterminons l'ensemble E_3 des points M du plan tel que :

$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 24$.

Posons $f(M) = 5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2$

Alors $5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 24 \Leftrightarrow f(M) = 24$

Exprimons ainsi $f(M)$ en fonction de MG et de $f(G)$

On sait que $f(M) = \sum \alpha_i\, MG^2 + f(G)$ avec $\alpha_1 = 5\ ;\ \alpha_2 = -3$ et $\alpha_3 = 2$

Or $\sum \alpha_i\, MG^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MG^2 = (5 - 3 + 2)MG^2 = 4MG^2$ => $f(M) = 4MG^2 + f(G)$

D'autre part $f(G) = \frac{(\alpha_1\, \alpha_2)AB^2 + (\alpha_1\, \alpha_3)AC^2 + (\alpha_2\, \alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{-15AB^2 + 10AC^2 - 6BC^2}{4}$

Avec $AB^2 = 16\ ;\ AC^2 = 36\ \ et\ \ BC^2 = AB^2 + AC^2 = 16 + 36 = 52$ (Théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A)

=> $f(G) = \frac{-15(16) + 10(36) - 6(52)}{4} = \frac{-240 + 360 - 312}{4} = \frac{-192}{4} = -48$

D'où $f(M) = 4MG^2 - 48$

D'autre part, on a : $f(M) = 24$

Alors par identification on a : $4MG^2 - 48 = 24 \Leftrightarrow 4MG^2 = 48 + 24 \Leftrightarrow 4MG^2 = 72$

$\Leftrightarrow MG^2 = 18$ => $MG = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Donc l'ensemble E_3 des points M du plan cherché est le cercle de centre Get de rayon $r = 3\sqrt{2}$

5) Déterminons l'ensemble E_4 des points M du plan tel que :

$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = k$ (on discuteras suivant les valeurs de k).

Posons $f(M) = 5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2$

Alors $f(M) = k \Leftrightarrow 4MG^2 + f(G) = k \Leftrightarrow 4MG^2 - 48 = k \Leftrightarrow MG^2 = \frac{k+48}{4}$

=> $MG = \sqrt{\frac{k+48}{4}} = \frac{\sqrt{k+48}}{2}$

- si $k < -48$; alors l'ensemble des points M cherchés est vide.
- si $k = -48$ alors $MG = 0$. Ainsi l'ensemble E_4 des points M cherchés est le point G.
- si $k > -48$; alors l'ensemble E_4 des points M cherchés est le cercle de centre Get de rayon $r = \frac{\sqrt{k+48}}{2}$

6) Déterminons l'ensemble E_5 des points M du plan tel que :

$5MA^2 - 3MB^2 - 2MC^2 = -72$.

Ici $\sum \alpha_i = 0$ avec $\alpha_1 = 5$; $\alpha_2 = -3$ et $\alpha_3 = -2$; alors on introduit l'origine A des points de pondération.

Donc on a : $5\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA}\right)^2 - 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right)^2 - 2\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = -72$.

$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{MA}\left(3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right) - 3AB^2 - 2AC^2 = -72$

$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{MA}\left(3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right) - 3(16) - 2(36) = -72 \Leftrightarrow -2\overrightarrow{MA}\left(3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right) = 48$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \frac{48}{2\left(3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA}\right)^2 = \left[\frac{48}{2\left(3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)}\right]^2 \Leftrightarrow MA^2 = \frac{2304}{2\left(9AB^2+12\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}+4AC^2\right)}$

$\Leftrightarrow MA^2 = \frac{2304}{2(9\times16+12\times0+4\times36)} = \frac{2304}{576} = 4$

=> $MA = 2$

Donc l'ensemble E_5 des points M du plan cherché est le cercle de centre A et de rayon $r = 2$.

6 Le plan P est muni d'un repère orthonormé(O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
On considère les 4 points A ; B ; C et D tel que : $A\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

1) Déterminons les coordonnées x et y de D sachant que : $\left\|\overrightarrow{DA}\right\| = \left\|\overrightarrow{DB}\right\| = \left\|\overrightarrow{DC}\right\|$

De même $\left(\left\|\overrightarrow{DA}\right\|\right)^2 = (x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2 = (0-x)^2 + (3-y)^2 = x^2 + (3-y)^2$

$$\left(\left\|\overrightarrow{DB}\right\|\right)^2 = (x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2 = (-1 - x)^2 + (0 - y)^2 = (1 + x)^2 + y^2$$

$$\left(\left\|\overrightarrow{DC}\right\|\right)^2 = (x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 = (3 - x)^2 + (0 - y)^2 = (3 - x)^2 + y^2$$

Alors $\left\|\overrightarrow{DA}\right\| = \left\|\overrightarrow{DB}\right\| \Leftrightarrow \left(\left\|\overrightarrow{DA}\right\|\right)^2 = \left(\left\|\overrightarrow{DB}\right\|\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + (3 - y)^2 = (1 + x)^2 + y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 9 - 6y + y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 \Leftrightarrow 2x + 1 - 9 + 6y = 0 \Leftrightarrow 2x + 6y - 8 = 0$

$\Leftrightarrow x + 3y - 4 = 0$ **(1)**

De même $\left\|\overrightarrow{DB}\right\| = \left\|\overrightarrow{DC}\right\| \Leftrightarrow \left(\left\|\overrightarrow{DB}\right\|\right)^2 = \left(\left\|\overrightarrow{DC}\right\|\right)^2 \Leftrightarrow x = 1$ **(2)**

Ainsi des équations **(1) et (2),** on en déduit que $y = 1$

D'où $D\binom{1}{1}$

2) Déterminons les réels m et n tels que D soit barycentre des points $(A, 1)$; (B, m) ; (C, n)

Si D est le barycentre des points $(A, 1)$; (B, m) ; (C, n); alors les coordonnées de D sont telles que :

$$\begin{cases} x_D = \frac{\alpha_1 x_A + \alpha_2 x_B + \alpha_3 x_C}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ et \\ y_D = \frac{\alpha_1 y_A + \alpha_2 y_B + \alpha_3 y_C}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \frac{(1)(0) + (m)(-1) + (n)(3)}{1 + m + n} = \frac{-m + 3n}{m + n + 1} \\ et \\ 1 = \frac{(1)(3) + (m)(0) + (n)(0)}{1 + m + n} = \frac{3}{m + n + 1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{-m + 3n}{m + n + 1} = 1 \\ \frac{3}{m + n + 1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 3n = m + n + 1 \\ 3 = m + n + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m + 2n = 1 \\ m + n = 2 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $m = \frac{3}{4}$ et $n = \frac{5}{4}$

=> $D = \text{bary}\left\{(A, 1); \left(B, \frac{3}{4}\right); \left(C, \frac{5}{4}\right)\right\}$

NB : Le barycentre d'un système ne change pas en multipliant ou en divisant chaque coefficient de pondération par une même constante non nulle.

D'où $D = \text{bary}\left\{(A, 1); \left(B, \frac{3}{4}\right); \left(C, \frac{5}{4}\right)\right\}$ ou $D = \text{bary}\{(A, 4); (B, 3); (C, 5)\}$

3) Trouvons l'ensemble (E) tel que : $4\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2 + 3\left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2 + 5\left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2 = k$

$4\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2 + 3\left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2 + 5\left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2 = k \Leftrightarrow 4MA^2 + 3MB^2 + 5MC^2 = k$

Posons $f(M) = 4MA^2 + 3MB^2 + 5MC^2$

(Les points de pondérations sont égaux à celui du barycentre D).

Alors on a : $f(M) = \sum \alpha_i \, MD^2 + f(D)$

Or $\sum \alpha_i \, MD^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MD^2 = (4 + 3 + 5)MG^2 = 12MD^2$

Et $f(D) = \frac{(\alpha_1 \, \alpha_2)AB^2 + (\alpha_1 \, \alpha_3)AC^2 + (\alpha_2 \, \alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{12AB^2 + 20AC^2 + 15BC^2}{12}$

Avec $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (-1 - 0)^2 + (0 - 3)^2 = 10$

$AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (3 - 0)^2 + (0 - 3)^2 = 18$

$BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (3 + 1)^2 + (0 - 0)^2 = 16$

$A\binom{0}{3}$; $B\binom{-1}{0}$; $C\binom{3}{0}$ et $D\binom{x}{y}$

=> $f(D) = \frac{12 \times 10 + 20 \times 18 + 15 \times 16}{12} = 60$

Alors $f(M) = k \Leftrightarrow 12MD^2 + f(D) = k \Leftrightarrow 4MD^2 + 60 = k \Leftrightarrow MD^2 = \frac{k - 60}{4}$

=> $MD = \sqrt{\frac{k - 60}{4}} = \frac{\sqrt{k - 60}}{2}$

- si $k < 60$; alors l'ensemble (E) des points M cherchés est vide.
- si $k = 60$; alors $MG = 0$. Ainsi l'ensemble (E) des points M cherchés est le point D.
- si $k > 60$; alors l'ensemble (E) des points M cherchés est le cercle de centre $D\binom{1}{1}$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{k - 60}}{2}$

4) Déterminons le réel k $(k > 60)$tel que $A\binom{0}{3}$ soit élément de (E).

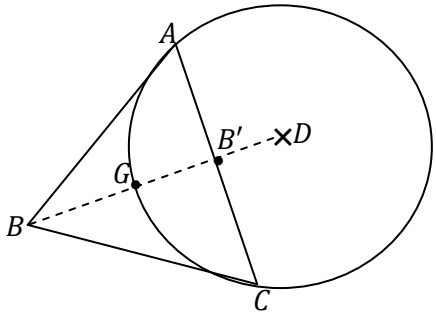
Pour $k > 60$, on a : le cercle de centre $D\binom{1}{1}$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{k - 60}}{2}$

Alors le point $A\binom{0}{3}$ est élément du ce cercle si et seulement si : $d(A\,;D) = r$, c'est-à-dire que le point A appartient au cercle (E) si la distance du centre D au point A vaut le rayon r.

Donc $d(A\,;D) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \frac{\sqrt{k - 60}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \frac{\sqrt{k - 60}}{2} \Leftrightarrow$

$2\sqrt{5} = \sqrt{k-60} \Leftrightarrow \left(2\sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{k-60}\right)^2 \Leftrightarrow 20 = k - 60 \Rightarrow k = 80$

7 Soit A, B, C un triangle équilatéral de côté 3 ; B' le milieu de $[AC]$et un point D tel que : $4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$



1) Démontrons que D est le barycentre des points pondérés $(A,3)$; $(B,-2)$; $(C,3)$.

Par hypothèse on a : $4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$ (Introduisons le barycentre D).

Alors on a : $4\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD}\right) = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}\right) + 3\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}\right)$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BD} + 3\overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

D'où D = bary $\{(A,3)\ ;\ (B,-2)\ ;\ (C,3)\}$.

En déduisons que D appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

On sait que D = bary $\{(A,3)\ ;\ (B,-2)\ ;\ (C,3)\}$.

D'autre part B' est le milieu de $[AC]$ alors : $\overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'C} = \vec{0}$

D'où $3\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(3\overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{DC}\right) - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\underbrace{\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\right)}_{\textbf{Introduisons } \boldsymbol{B'}} - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0}$

$\Rightarrow\ 3\left[\left(\overrightarrow{DB'}+\overrightarrow{B'A}\right)+\left(\overrightarrow{DB'}+\overrightarrow{B'C}\right)\right]-2\overrightarrow{DB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\ 3\left[\underbrace{\left(\overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{B'C}\right)}_{\vec{0}}+\underbrace{\left(\overrightarrow{DB'}+\overrightarrow{DB'}\right)}_{2\overrightarrow{DB'}}\right]-2\overrightarrow{DB}=\vec{0}$

$\Rightarrow\ 3\left(2\overrightarrow{DB'}\right)-2\overrightarrow{DB}=\vec{0}\ \Leftrightarrow 6\overrightarrow{DB'}-2\overrightarrow{DB}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{DB'}-\overrightarrow{DB}=\vec{0}$

Alors D appartient à la droite (BB') qui est la médiatrice de $[AC]$

Conclusion : D appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

2) Démontrons que $\overrightarrow{BB'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$

D'après la question 1), on a : $3\overrightarrow{DB'}-\overrightarrow{DB}=\vec{0}$ (Introduisons le point B).

$\Rightarrow 3\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BB'}\right)-\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BB}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{BB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{BB'}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{BB'}=-2\overrightarrow{DB}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{BB'}=2\overrightarrow{BD}\quad\Rightarrow\overrightarrow{BB'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$

3) Calculons DA^2 et DB^2

D = bary $\{(A,3)\ ;\ (B,-2)\ ;\ (C,3)\}$.

Alors $\overrightarrow{AD}=\frac{-2}{3-2+3}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{3-2+3}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\frac{-2}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\ \Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AD}\right)^2=\left(\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)^2$

$\Leftrightarrow AD^2=\frac{1}{4}AB^2-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}+\frac{9}{16}AC^2$. Or $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}$

$\Rightarrow\ AD^2=\frac{1}{4}AB^2-\frac{3}{4}\left(\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}\right)+\frac{9}{16}AC^2$

$= \frac{1}{4}\ AB^2 - \frac{3AB^2+3AC^2-3BC^2}{8} + \frac{9}{16}AC^2$

$= \frac{4AB^2-6AB^2-6AC^2+6BC^2+9AC^2}{16}$

(Or ABC est un triangle équilatérale tel que AB = AC = BC = 3)

$\Rightarrow\ AD^2 = \frac{-2AB^2+3AC^2+6BC^2}{16} = \frac{-2AB^2+3AB^2+6AB^2}{16} = \frac{7AB^2}{16} = \frac{7\times(3)^2}{16} = \frac{7\times9}{16} = \frac{63}{16}$

$\Rightarrow\ AD^2 = \frac{63}{16}$

De même d'après la question 2), on a : $\overrightarrow{BB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} \ \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BD}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\overrightarrow{BB'}\right)^2$

$\Leftrightarrow BD^2 = \frac{9}{4}BB'^2$

ABC étant équilatérale, on a : $BB' = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

D'où $BD^2 = \frac{9}{4}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}\times\frac{27}{4} = \frac{243}{16}$

4) Déterminons l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant la relation :

$3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12$

Posons $f(M) = 3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2$

Alors $MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12 \Leftrightarrow f(M) = 12$

Exprimons ainsi $f(M)$ en fonction de MD et de $f(D)$

On sait que $f(M) = \sum \alpha_i\, MD^2 + f(D)$ avec $\alpha_1 = 3$; $\alpha_2 = -2$ et $\alpha_3 = 3$

Or $\sum \alpha_i\, MD^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MD^2 = (3-2+3)MD^2 = 4MD^2$ => $f(M) = 4MD^2 + f(D)$

D'autre part $f(D) = \frac{(\alpha_1\,\alpha_2)AB^2 + (\alpha_1\,\alpha_3)AC^2 + (\alpha_2\,\alpha_3)BC^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} = \frac{-6AB^2+9AC^2-6BC^2}{4}$

Or ABC est équilatérale tel que AB = AC = BC = 3

$\Rightarrow f(D) = \frac{-6(3)^2+9(3)^2-6(3)^2}{4} = \frac{-27}{4}$

Donc $f(M) = 4MD^2 + f(G) \Leftrightarrow f(M) = 4MD^2 - \frac{27}{4}$

D'autre part $f(M) = 12$

Par identification, on a : $4MD^2 - \frac{27}{4} = 12$

$\Leftrightarrow 4MD^2 = 12 + \frac{27}{4} \Leftrightarrow 4MD^2 = \frac{75}{4} \Leftrightarrow MD^2 = \frac{75}{16}$ => $MD = \sqrt{\frac{75}{16}} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$

Alors l'ensemble (E) des points M cherchés est le cercle de centre Det de rayon $r = \frac{5\sqrt{3}}{4}$

5) Vérifions que l'isobarycentre du triangle A, B, C appartient à l'ensemble (E) puis trace (E).

(On fera une figure)

G étant l'isobarycentre des points A ; B et C, on a : D ; B' et G sont alignés.

Par conséquent $DG = DB' + B'G$ $(voir\ figure)$

Or $B'G = \frac{1}{3}BB' = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $DB' = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

=> $DG = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

D'où G appartient à l'ensemble (E)

8 Dans l'espace E, on note la distance de deux points M et N par MN

1) Soit trois points A; B; C non alignés et I le point défini par : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Déterminons les coefficients a ; b ; c qu'il faut affecter respectivement aux points A ; B ; C pour que I soit leur barycentre

I= bary$\{(A;a)$; $(B;b)$; $(C;c)\}$ si et seulement si : $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Par hypothèse, on a : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ (Introduisons le barycentre I)

=> $2(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{II}) - 2(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) - (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}) = \vec{0}$.

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Avec $\overrightarrow{II} = \vec{0}$.

$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Par identification avec $a\overrightarrow{IA} + b\,\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$; On a : $a = 1$; $b = -2$ et $b = -1$

2) On suppose maintenant que le triangle ABC est rectangle en A tel que $AB = 2$; $AC = 1$ et l'ensemble S tel que S = $\{ M \in E \,/\, MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -3\}$

Si ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 2$; $AC = 1$ alors on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow BC^2 = (2)^2 + (1)^2 = 4 + 1 = 5$ => $BC^2 = 5$

Par hypothèse, on a : I= bary$\{(A;1)\ ;\ (B;-2)\ ;\ (C;-1)\}$

Démontrons que S est une sphère de centre W et de rayons r à préciser.

$MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -3$

Posons $f(M) = MA^2 - 2MB^2 - MC^2$

Alors $MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -3 \Leftrightarrow f(M) = -3$

Exprimons ainsi $f(M)$ en fonction de MI et de $f(I)$

On sait que $f(M) = \sum \alpha_i\, MI^2 + f(I)$ avec $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = -2$ et $\alpha_3 = -1$

Or $\sum \alpha_i\, MI^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MI^2 = (1 - 2 - 1)MI^2 = -2MI^2$

=> $f(M) = -2MI^2 + f(I)$

I= bary$\{(A;1)\ ;\ (B;-2)\ ;\ (C;-1)\}$

D'autre part $f(I) = \dfrac{(\alpha_1\,\alpha_2)AB^2 + (\alpha_1\,\alpha_3)AC^2 + (\alpha_2\,\alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \dfrac{-2AB^2 - AC^2 + 2BC^2}{-2}$

Or ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 2$; $AC = 1$ et $BC = \sqrt{5}$

=> $f(I) = \dfrac{-2(2)^2 - (1)^2 + 2\left(\sqrt{5}\right)^2}{-2} = -\dfrac{1}{2}$

Donc $f(M) = -2MI^2 + f(I) \Leftrightarrow f(M) = -2MI^2 - \dfrac{1}{2}$

D'autre part $f(M) = -3$

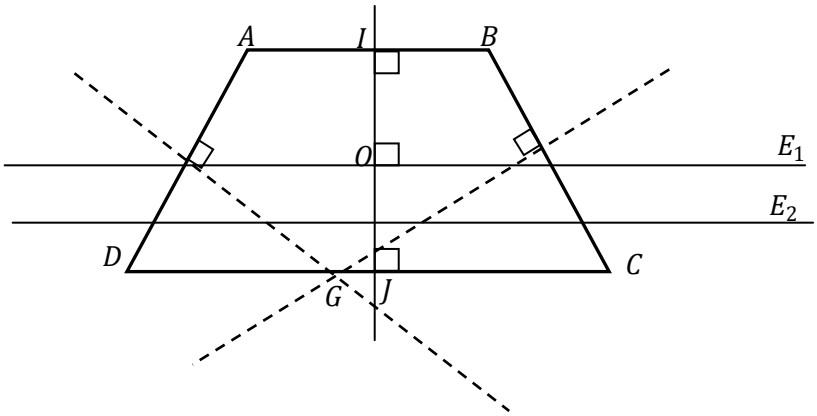
Par identification, on a : $-2MI^2 - \frac{1}{2} = -3$

$\Leftrightarrow -2MI^2 = -3 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2MI^2 = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow MI^2 = \frac{5}{4}$ => $MI = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Alors l'ensemble S des points M cherchés est une sphère de centre I de rayon $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$

9 Soit ABC un trapèze tel que (AB) parallèle à (CD) .

Soient I ; J et O les milieux respectifs des segments $[AB]$; $[CD]$ et $[IJ]$.



1) Déterminons puis construisons l'ensemble E_1 des points M du plan tel que :

$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$.

On a : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$.

- Introduisons le point I dans $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$ (car I est milieu de $[AB]$ => $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$)

- Introduisons le point I dans $\|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$ (car J est milieu de $[CD]$=> $\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$)

$\|\underbrace{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}}\| = \|\underbrace{\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}}\|$.

Introduisons I Introduisons J

=> $\|(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})\| = \|(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC}) + (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JD})\|$.

$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\| = \|\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JD}\|$.

$\Leftrightarrow \left\|2\overrightarrow{MI} + \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right)\right\| = \left\|2\overrightarrow{MJ} + \left(\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}\right)\right\|$.

Or $\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) = \left(\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}\right) = \vec{0}$

=> $\left\|2\overrightarrow{MI}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MJ}\right\|$.

$\Leftrightarrow 2\left\|\overrightarrow{MI}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MJ}\right\|$.

$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MI}\right\| = \left\|\overrightarrow{MJ}\right\|$.

$\Leftrightarrow MI = MJ$

Alors l'ensemble E_1 des points M cherché est la médiatrice du segment $[IJ]$

Construction : (voir figure)

2) Les médiatrices des côtés $[AD]$; $[BC]$ se coupent en G.

Démontrons que $GA^2 + GB^2 = GC^2 + GD^2$.

- G appartient à la médiatrice de $[AD]$ => $GA = GD \Leftrightarrow GA^2 = GD^2$ **(1)**
- G appartient à la médiatrice de $[BC]$ => $GB = GC \Leftrightarrow GB^2 = GC^2$ **(2)**

En effectuant la somme membre des relations **(1)** et **(2),** on obtient :

$GA^2 + GB^2 = GC^2 + GD^2$.(ce qu'il fallait Démontre)

3) a- Démontrons que l'ensemble E_2 : $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$ est non vide.

On sait que : $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$ (en posant $M = G$), on a :

$GA^2 + GB^2 = GC^2 + GD^2$ ce qui veut dire que G appartient à l'ensemble E_2.

D'où l'ensemble E_2 : $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$ est non vide.

b- Démontrons que $M \in E_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \bullet \overrightarrow{OM} = \frac{JC^2 - IA^2}{2}$

On sait que $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$ est non vide. Alors :

- Introduisons le point I dans $MA^2 + MB^2$ (car I est milieu de $[AB]$=> $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$)
- Introduisons le point I dans $MC^2 + MD^2$ (car J est milieu de $[CD]$=>$\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$)

$=> \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JC}\right)^2+\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JD}\right)^2$

Après développement et arrangement, on a :

$2MI^2+IA^2+IB^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=2MJ^2+JC^2+JD^2+2\overrightarrow{MJ}\left(\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}\right)$

Or $\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=\left(\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}\right)=\vec{0}$

$=> 2MI^2+IA^2+IB^2=2MJ^2+JC^2+JD^2$

D'autre part, I est milieu de $[AB]$ $=> IA^2=IB^2$

De même J est milieu de $[DC]$ $=> JD^2=JC^2$

$=> 2MI^2+IA^2+IB^2=2MJ^2+JC^2+JD^2 \Leftrightarrow 2MI^2+IA^2+IA^2=2MJ^2+JC^2+JC^2$

$\Leftrightarrow 2MI^2+2IA^2=2MJ^2+2JC^2$

$\Leftrightarrow MI^2+IA^2=MJ^2+JC^2$

$\Leftrightarrow MI^2-MJ^2=JC^2-IA^2$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MJ}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MJ}\right)=JC^2-IA^2$

$\Leftrightarrow \left(-\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{MJ}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MJ}\right)=JC^2-IA^2$

$\Leftrightarrow -\left(\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MJ}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MJ}\right)=JC^2-IA^2$

$\Leftrightarrow -\left(\overrightarrow{IJ}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MJ}\right)=JC^2-IA^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{JI}\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MJ}\right)=JC^2-IA^2$

Introduisons le point O dans $\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MJ}\right)$ (car O est milieu de $[IJ]$=> $\overrightarrow{JO}+\overrightarrow{OJ}=\vec{0}$)

$=> \overrightarrow{JI}\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OJ}\right)=JC^2-IA^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{JI}\left(2\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}\right)=JC^2-IA^2$. Or $\overrightarrow{JO}+\overrightarrow{OJ}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{JI}\left(2\overrightarrow{MO}\right)=JC^2-IA^2$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{JI}\bullet\overrightarrow{MO}=JC^2-IA^2$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{OM}=JC^2-IA^2$ $=> \overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{OM}=\frac{JC^2-IA^2}{2}$ (ce qu'il fallait Démontre)

c- En déduisons que $M \in E_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{GM} = 0$

D'après la question b), on a : $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{JC^2 - IA^2}{2}$

Alors $G \in E_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OG} = \frac{JC^2 - IA^2}{2}$

Alors : $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OG} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OG} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OG}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}(\overrightarrow{GM}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{GM} = \vec{0}$

d- Déterminons puis construis E_2

Puisque $E_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{GM} = \vec{0}$. Alors l'ensemble E_2 est donc la droite passant part G et perpendiculaire à la droite (IJ).

10 On donne trois points A ; B et C distinctes non alignés du plan et on note a ; b et c les longueurs des côtés du triangle ABC tel que $BC = a$; $AC = b$ et $AB = c$.

On se propose d'étudier l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

1) Soit G le centre de gravité du triangle ABC et soit I le milieu du segment$[BC]$.

a- Calculons $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

On sait que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$ => $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$

Or $BC = a$; $AC = b$ et $AB = c$.

=> $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = c^2 + b^2 - a^2$

En déduisons que $AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.

Puisque : G est le centre de gravité du triangle ABC; alors on a :

$G = \text{bary}\{(A;1) ; (B;1) ; (C;1)\}$ avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 0$

=> $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{1+1+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{1+1+1}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

$\Leftrightarrow AG^2 = \frac{1}{9}\left(AB^2 + 2\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AC} + AC^2\right) = \frac{1}{9}(c^2 + c^2 + b^2 - a^2 + b^2)$

$\Rightarrow AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$

De même on a : $BG^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$ et $CG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2a^2 - c^2)$

b- Montrons que $AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$.

D'après 1) a-), on a :

$AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$ **(1)**

$BG^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$ **(2)**

$CG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2a^2 - c^2)$ **(3)**

En effectuant la somme membre à membre des relations : **(1) ; (2) et (3),** on obtient :

$$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{9}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right) + \frac{1}{9}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right) + \frac{1}{9}\left(2b^2 + 2a^2 - c^2\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2b^2 + 2a^2 - c^2\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(3b^2 + 3c^2 + 3a^2\right) = \frac{3}{9}\left(b^2 + c^2 + a^2\right) = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

D'où $AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ (ce qu'il fallait Démontre)

2) a- Déterminons la nature de (E).

On a (E) : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Posons $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$

Alors $MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow f(M) = a^2 + b^2 + c^2$

Exprimons ainsi $f(M)$ en fonction de MG et de $f(G)$

On sait que $f(M) = \sum \alpha_i \, MG^2 + f(G)$ avec $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 1$ et $\alpha_3 = 1$

Or $\sum \alpha_i \, MG^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MG^2 = (1 + 1 + 1)MG^2 = 3MG^2$ => $f(M) = 3MG^2 + f(G)$

D'autre part $f(G) = \frac{(\alpha_1 \, \alpha_2)AB^2 + (\alpha_1 \, \alpha_3)AC^2 + (\alpha_2 \, \alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{3}$

Avec $AB^2 = c^2$; $AC^2 = b^2$ et $BC^2 = a^2$

=> $f(G) = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$

D'où $f(M) = 3MG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$

D'autre part, on a : $f(M) = a^2 + b^2 + c^2$

Alors par identification on a : $3MG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} = a^2 + b^2 + c^2$

$\Leftrightarrow 3MG^2 = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$

$\Leftrightarrow 3MG^2 = \frac{3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - a^2 - b^2 - c^2}{3}$

$\Leftrightarrow 3MG^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2}{3}$

$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2}{9}$

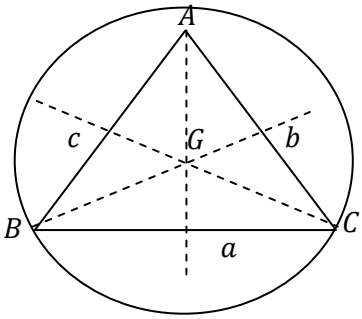
$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{9}$ => $MG = \frac{\sqrt{2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}}{3}$

Donc l'ensemble (E) des points M du plan cherché est le cercle de centre Get de rayon $r = \frac{\sqrt{2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}}{3}$

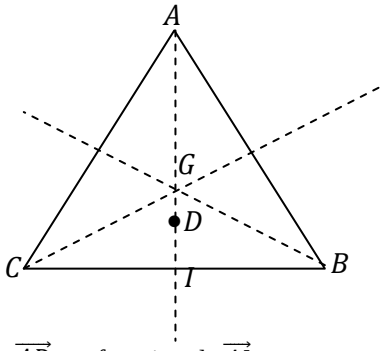
b- On donne $a = 5$; $b = 4$ et $c = 3$.

Si $a = 5$; $b = 4$ et $c = 3$, alors :

L'ensemble (E) des points M du plan cherché est le cercle de centre Get de rayon $r = \frac{10}{3}$



11 Soit ABC un triangle du plan ; I le milieu du segment$[BC]$ et D le barycentre de $\{(A\,,-1)\ ;\ (B\,,2)\ ;\ (C\,,2)\}$ (On fera une figure qui sera compléter au fur et à mesure).



1) Exprimons $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.

$D = bary\{(A\,,-1)\ ;\ (B\,,2)\ ;\ (C\,,2)\}$ Avec $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = -1+2+2 = 3 \neq 0$

=> $-\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

=>$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{-1+2+2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{-1+2+2}\overrightarrow{AC}$

=> $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

=> $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

Puisque I est le milieu du segment $[BC]$; alors on a : $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

=> $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\left[\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)+\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right)\right]$

$= \frac{2}{3}\left[\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right]$

$= \frac{2}{3}\left[2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right]$. Or $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

=> $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\left(2\overrightarrow{AI}\right) = \frac{4}{3}\overrightarrow{AI}$

D'où $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AI}$

2) Déterminons la nature de l'ensemble (E) des points du plan vérifiant :

$\left\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$.

Pour $\left\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\|$ (Introduisons le barycentre D)

Pour $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$.(Introduisons l'isobarycentre G) Avec :

$G = bary\{(A,1)\ ;\ (B,1)\ ;\ (C,1)\}$ => $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Donc $\left\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$

$\Leftrightarrow \left\|\sum \alpha_i \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC}\right\| = \left\|\sum \alpha_i \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right\|$

$\Leftrightarrow \left\|3\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right\|$

Or $D = bary\{(A,-1)\ ;\ (B,2)\ ;\ (C,2)\}$ => $-\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

Et $G = bary\{(A,1)\ ;\ (B,1)\ ;\ (C,1)\}$ => $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Donc $\left\|3\overrightarrow{MD} + -\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right\|$

$\Leftrightarrow \left\|3\overrightarrow{MD} + \vec{0}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MG} + \vec{0}\right\|$

$\Leftrightarrow \left\|3\overrightarrow{MD}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MG}\right\|$

$\Leftrightarrow 3\left\|\overrightarrow{MD}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{MG}\right\|$

$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MD}\right\| = \left\|\overrightarrow{MG}\right\|$

$\Leftrightarrow MD = MG$

Alors l'ensemble (E) des points M du plan cherché est la médiatrice du segment $[DG]$

3) Justifions que (E) contient I et en déduisons sa construction.

On a (E) : $\left\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$.

(E) contient I si et seulement si $\|-\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC}\| = \|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\|$.

$\Leftrightarrow \|-\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC}\| = \|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\|$.

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$. Or $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$=> -\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA}$

D'où (E) contient I.

12 Dans le plan affine P rapporté à un repère orthonormé(O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$), on donne les points

$A\binom{1}{0}$ et $B\binom{0}{1}$.

1) Déterminons puis traçons l'ensemble (Γ) des points $M\binom{x}{y}$ du plan tels que le barycentre du système $\{(A, x)\ ;\ (B, y)\ ;\ (C, xy)\}$ n'existe pas.

Le barycentre du système $\{(A, x)\ ;\ (B, y)\ ;\ (C, xy)\}$ n'existe pas si et seulement si :

$x + y + xy = 0 \Leftrightarrow y(x+1) + x = 0 => y = -\frac{x}{x+1}$ avec $x \neq -1$

L'ensemble cherché est donc l'équation d'une hyperbole

Pour la construction, posons $f(x) = -\frac{x}{x+1}$

$Df = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty\ ;\ -1[\cup]-1\ ;\ +\infty[$

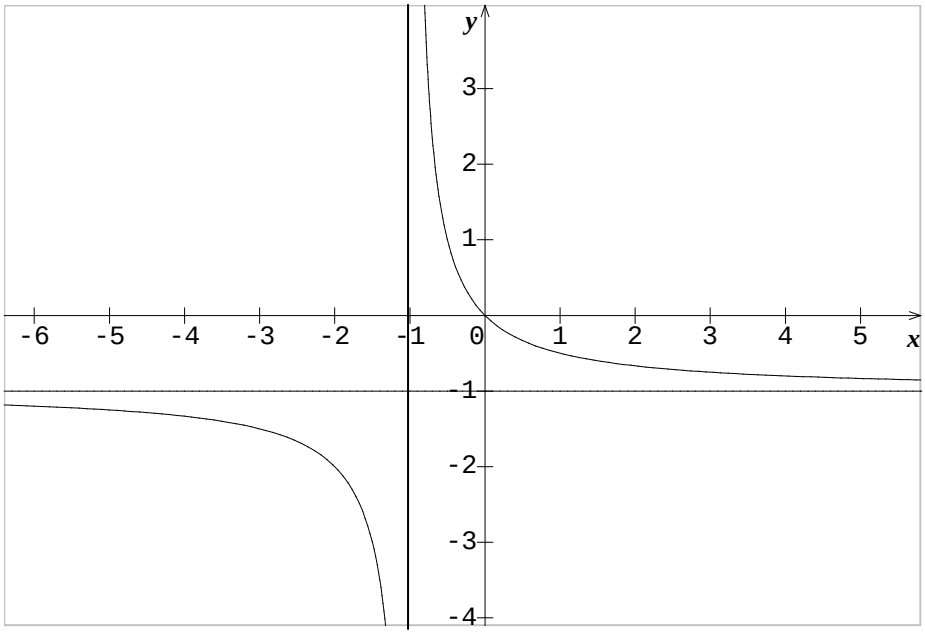
$lim\ f(x) = lim\ f(x) = -1$; $lim\ f(x) = -\infty$ et $lim\ f(x) = +\infty$

$x \to -\infty$ $x \to +$ $x \to -1^-$ $x \to -1^+$

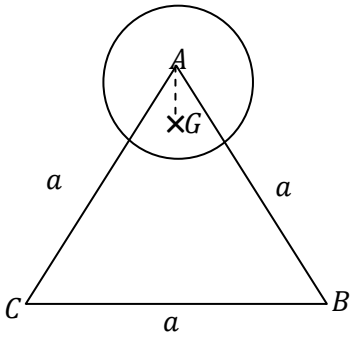
$f(x) = -\frac{x}{x+1}$ => $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		‖	$-$	
$f(x)$	-1 ↘		‖	$+\infty$ ↘	
		$-\infty$	‖		-1



2) Soit C le point du plan P tel que ABC soit un triangle équilatéral de côté a ($a \in \mathbb{R}^*$)



a- Déterminons puis construisons le barycentre G des points A ; B et C affectés respectivement des coefficients 2 ; 1 et 1

$G = bary\{(A\,,2)\ ;\ (B\,,1)\ ;\ (C\,,1)\}$ Avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2 + 1 + 1 = 4 \neq 0$

=> $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

=>$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2+1+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2+1+1}\overrightarrow{AC}$

=> $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

b- Déterminons l'ensemble (δ) des points M du plan tel que :

$2\overrightarrow{MA^2} + \overrightarrow{MB^2} + \overrightarrow{MG^2} = ka^2$ avec $k \in \mathbb{R}$ (On discutera suivant les valeurs du paramètre k)

Posons $f(M) = 2\overrightarrow{MA^2} + \overrightarrow{MB^2} + \overrightarrow{MG^2}$

(Les points de pondérations sont égaux à celui du barycentre G).

Alors on a : $f(M) = \sum \alpha_i \, MG^2 + f(G)$

Or $\sum \alpha_i \, MG^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MG^2 = (2 + 1 + 1)MG^2 = 4MG^2$

Et $f(G) = \dfrac{(\alpha_1\ \alpha_2)AB^2 + (\alpha_1\ \alpha_3)AC^2 + (\alpha_2\ \alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \dfrac{2AB^2 + 2AC^2 + BC^2}{4}$

Or ABC est équilatérale de côté a => $AB = AC = BC = a$

=> $f(G) = \dfrac{2a^2 + 2a^2 + a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{4}$

Alors $f(M) = ka^2 \Leftrightarrow 4MG^2 + f(G) = ka^2 \Leftrightarrow 4MG^2 + \dfrac{5a^2}{4} = ka^2 \Leftrightarrow 4MG^2 = \dfrac{a^2(4k-5)}{4}$

$\Leftrightarrow MG^2 = \dfrac{a^2(4k-5)}{16}$ => $MG = \sqrt{\dfrac{a^2(4k-5)}{16}} = \dfrac{a}{4}\sqrt{4k-5}$

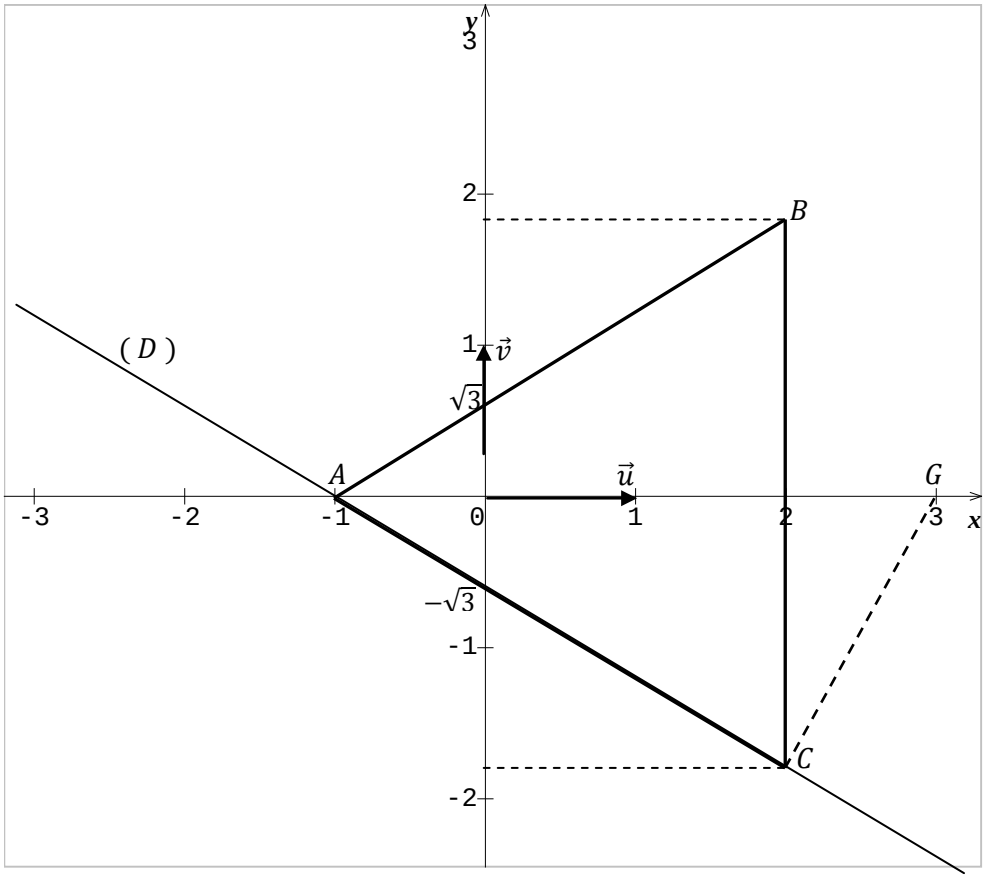
- si $k < \dfrac{5}{4}$; alors l'ensemble (E) des points M cherchés est vide.
- si $k = \dfrac{5}{4}$; alors $MG = 0$. Ainsi l'ensemble (E) des points M cherchés est le point G.
- si $k > \dfrac{5}{4}$; alors l'ensemble (E) des points M cherchés est le cercle de centre G et de rayon $r = \dfrac{a}{4}\sqrt{4k-5}$

c- Construisons cet ensemble si $k = 2$

Si $k = 2$; alors l'ensemble (E) des points M cherchés est le cercle de centre G et de rayon $r = \dfrac{a}{4}\sqrt{3}$

13 1) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$). On désigne par A ; B ; C et G les points du plan d'affixes respectives : $Z_A = -1$; $Z_B = 2 + i\sqrt{3}$; $Z_C = 2 - i\sqrt{3}$ et $Z_G = 3$.

a- Réalisons une figure et plaçons les points A ; B ; C et G.



b- Calculons les distances AB ; BC et AC puis en déduisons la nature du triangle ABC.

$AB = |Z_B - Z_A| = \left|\left(2 + i\sqrt{3}\right) - (-1)\right| = \left|2 + i\sqrt{3} + 1\right| = \left|3 + i\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{3}$

=> $AB = 2\sqrt{3}$

$BC = |Z_C - Z_B| = \left|\left(2 - i\sqrt{3}\right) - \left(2 + i\sqrt{3}\right)\right| = \left|2 - i\sqrt{3} - 2 - i\sqrt{3}\right| = \left|-2i\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{3}$

=> $BC = 2\sqrt{3}$

$AC = |Z_C - Z_A| = \left|\left(2 - i\sqrt{3}\right) - (-1)\right| = \left|2 - i\sqrt{3} + 1\right| = \left|3 - i\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{3}$

=> $AC = 2\sqrt{3}$

Puisque $AB = BC = AC = 2\sqrt{3}$, alors on en déduit que ABC est un triangle équilatéral.

c- Calculons un argument du complexe $\frac{Z_A - Z_C}{Z_G - Z_C}$ puis en déduisons la nature du triangle GAC.

$\frac{Z_A - Z_C}{Z_G - Z_C} = \frac{(-1)-(2-i\sqrt{3})}{(3)-(2-i\sqrt{3})} = \frac{-1-2+i\sqrt{3}}{3-2+i\sqrt{3}} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \frac{4i\sqrt{3}}{4} = i\sqrt{3}$

=> $arg\left(\frac{Z_A - Z_C}{Z_G - Z_C}\right) = arg(i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$

Puisque $arg\left(\frac{Z_A - Z_C}{Z_G - Z_C}\right) = \frac{\pi}{2}$, alors on en déduit que GAC est un triangle rectangle en C.

2) Soit (D) l'ensemble des points tels que : $\left(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right)\overrightarrow{CG} = 12$ **(1)**

a- Montrons que G est le barycentre du système des points pondérés :

$\{(A, -1)\ ;\ (B, 2)\ ;\ (C, 2)\}$

Puis que $\sum \alpha_i = -1 + 2 + 2 = 3 \neq 0$. Alors il existe G tel que :

$G = bary\{(A, -1)\ ;\ (B, 2)\ ;\ (C, 2)\}$

b- Montrons que la relation **(1)** est équivalente à la relation : $\overrightarrow{GM} \bullet \overrightarrow{CG} = -4$ **(2)**

On a : $\left(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right)\overrightarrow{CG} = 12$ **(1)** (Introduisons le point G)

=> $\left[-\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right) + 2\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right) + 2\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)\right]\overrightarrow{CG} = 12$

=> $\left(-\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GC}\right)\overrightarrow{CG} = 12$

=> $\left[3\overrightarrow{MG} + \left(-\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC}\right)\right]\overrightarrow{CG} = 12$. Or $-\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

=> $3\overrightarrow{MG} \bullet \overrightarrow{CG} = 12 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \bullet \overrightarrow{CG} = 4 \Leftrightarrow -\overrightarrow{GM} \bullet \overrightarrow{CG} = 4 \Leftrightarrow \overrightarrow{GM} \bullet \overrightarrow{CG} = -4$

D'où $\overrightarrow{GM} \bullet \overrightarrow{CG} = -4$ **(2)** (ce qu'il fallait Démontre)

c- Vérifions que le point A appartient à l'ensemble (D).

On a : $\overrightarrow{GM} \bullet \overrightarrow{CG} = -4$ **(2)**

Le point A appartient à l'ensemble (D) si et seulement si $\overrightarrow{GA} \bullet \overrightarrow{CG} = -4$

$\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ => $\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix} x_G - x_C \\ y_G - y_C \end{pmatrix}$ => $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

=> $\overrightarrow{GA} \bullet \overrightarrow{CG} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = (-4)(1) + (0)(\sqrt{3}) = -4$

D'où le point A appartient à l'ensemble (D).

d- Montrons que la relation **(2)** est équivalente à la relation : $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{CG} = 0$

On a : $\overrightarrow{GM} \bullet \overrightarrow{CG} = -4$ **(2)** (Introduisons le point A)

=> $\left[\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM}\right) \bullet \overrightarrow{CG}\right] = -4$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} \bullet \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{CG} = -4$. Or $\overrightarrow{GM} \bullet \overrightarrow{CG} = -4$

=> $-4 + \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{CG} = -4 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{CG} = 0$

D'où la relation **(2)** est équivalente à la relation : $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{CG} = 0$ (ce qu'il fallait Démontrer)

e- En déduisons l'ensemble (D) puis le traçons.

Puisque $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{CG} = 0$, alors l'ensemble (D) est la droite passant par le point A et perpendiculaire à la droite CG.

Application des isobarycentres

14 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$; on considère les points : $A_1\ ;\ A_2\ ;\ ;\ A_3\ ;\ \ldots\ldots A_n$ dont les affixes sont les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Z^n = 1$ avec $(n \in \mathbb{N}\ ;\ n \geq 2)$. On désigne par Z_1 le complexe telque $Z_1 = cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

1) Exprimons en fonction de Z_1, les racines de l'équation $Z^n = 1$.

Les racines de l'équation $Z^n = 1$ sont les nombres complexes z_k tels que :

$z_k = cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ Avec $k \in \{1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ldots\ ;\ (n-1)\}$. Donc :

$Z_1 = cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

$Z_2 = cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{4\pi}{n}\right) = cos2\left(\frac{2\pi}{n}\right) + isin2\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \left[cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^2 = Z_1^2$

$Z_3 = cos\left(\frac{6\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{6\pi}{n}\right) = cos3\left(\frac{2\pi}{n}\right) + isin3\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \left[cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^3 = Z_1^3$

=> $Z_n = \left[cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^n = Z_1^n$

2) Déterminons l'isobarycentre des points $A_1\ ;\ A_2\ ;\ ;\ A_3\ ;\ \ldots\ldots A_n$.

L'isobarycentre G associé aux points A_1 ; A_2 ; ; A_3 ; … … . . A_n est défini par :

$\{(A_1\,;1)\,;\ (A_2\,;1)\,;(A_3\,;1)\ \ldots\ldots(A_n\,;1)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\overrightarrow{GA_3}+\cdots\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$

En introduisant le point A_1, on a :

$\overrightarrow{GA_1}+\left(\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}\right)+\cdots+\left(\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{A_1A_n}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{A_1A_n}=\vec{0} \Leftrightarrow$

$n\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_1A_n}=\vec{0} \Leftrightarrow$

$n\overrightarrow{GA_1}=-\left(\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_1A_n}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow$

$-n\overrightarrow{A_1G}=-\left(\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_1A_n}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow$

$n\overrightarrow{A_1G}=\left(\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_1A_n}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{A_1G}=\frac{1}{n}\left(\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_1A_n}\right)$

3) Déterminons l'ensemble des points M du plan tel que :

$\left\|\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MA_3}+\cdots+\overrightarrow{MA_n}\right\|=n$

On a $\left\|\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MA_3}+\cdots+\overrightarrow{MA_n}\right\|=n \Leftrightarrow$

$\left\|\sum\alpha_n\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\overrightarrow{GA_3}+\cdots\overrightarrow{GA_n}\right\|=n \Leftrightarrow$

$\left\|\sum\alpha_n\overrightarrow{MG}+\vec{0}\right\|=n \Leftrightarrow$ (Car $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\overrightarrow{GA_3}+\cdots\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$)

$\left\|n\overrightarrow{MG}\right\|=n \Leftrightarrow n\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=n \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MG}\right\|=1 \Leftrightarrow MG=1.$

Alors l'ensemble des points M du plan cherché est le cercle de centre G et de rayon $r=1$.

15 Dans le plan complexe $\mathbb{C}$ muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$; on considère le polynôme p telque : $p(Z)=Z^3-(3+4i)Z-2+8i$

1) Montrons que l'équation $p(Z)=0$ admet une solution réelle Z_0 que je déterminerai.

Soit $Z_0=a$ cette solution réelle telque $a^3-(3+4i)a-2+8i=0 \Leftrightarrow$

$(a^3-3a-2)+i(8-4a)=0$ => $\begin{cases} a^3-3a-2=0 & (1) \\ 8-4a=0 & (2) \end{cases}$

En résolvant l'équation (2), on a : $a=2$. D'où $Z_0=2$ est la solution réelle.

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(Z)=0$. On désignera par Z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive.

$p(Z)=0 \Leftrightarrow (Z_0-2)\left(Z_1+1-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\left(Z_1+1+\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)=0$

=> $Z_0=2$ ou $Z_1=-1+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ ou $Z_2=-1-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

=> $S=\left\{2\,;\,-1+\sqrt{2}+i\sqrt{2}\,;-1-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right\}$

3) Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on considère les points G_0 ; A et B tels que :

$G_0 \to Z_0$; $A \to Z_1$ et $B \to Z_2$ et soit G_n l'isobarycentre des points A ; B et G_{n-1} tel que $G_n=\{(A\,;1)\,;\,(B\,;1)\,;(G_{n-1}\,;1)\}$

a- Déterminons l'affixe de G_1.

$G_n=\{(A\,;1)\,;\,(B\,;1)\,;(G_{n-1}\,;1)\}$ => $G_1=\{(A\,;1)\,;\,(B\,;1)\,;(G_0\,;1)\}$

=> $Z_{G_1}=\frac{Z_1+Z_2+Z_0}{1+1+1}=\frac{\left(-1+\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)+(-1-\sqrt{2}-i\sqrt{2})+2}{1+1+1}=\frac{0}{3}=0$ => $G_1\binom{0}{0}$

Donc l'affixe du point G_1 est l'origine du repère.

b- Soit Z_n l'affixe de G_n.

Exprimons Z_n en fonction de Z_{n-1}.

Si Z_n l'affixe de$G_n=\{(A\,;1)\,;\,(B\,;1)\,;(G_{n-1}\,;1)\}$ alors $Z_n=\frac{Z_1+Z_2+Z_{n-1}}{1+1+1}$

=> $Z_n=\frac{\left(-1+\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)+(-1-\sqrt{2}-i\sqrt{2})+Z_{n-1}}{1+1+1}=\frac{-2+Z_{n-1}}{3}=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}Z_{n-1}$

6) On pose $U_n=Z_n+1$.

a- Déterminons la nature de la suite U_n

$U_n=Z_n+1$ => $U_n=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}Z_{n-1}+1$

=> $U_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}Z_{n-1}$

=> $U_n = \frac{1}{3}(1 + Z_{n-1})$ et $U_{n+1} = \frac{1}{3}(1 + Z_n) = \frac{1}{3}U_n$

D'où U_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $U_0 = Z_0 + 1 = 3$

b- Etudions la convergence de la suite U_n.

Pour étudier la convergence de la suite U_n, exprimons U_n en fonction de n.

Puisque U_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $U_0 = 3$ alors son expression en fonction de n est : $U_n = U_0(q)^n = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$lim\ U_n = \quad lim\ 3\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ car $lim\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \quad (q < 1)$

$n \to +\infty \qquad n \to +\infty \qquad n \to +\infty$

Par conséquent U_n est une suite convergente et converge vers 0.

Applications affines

ISOMETRIES PLANES

OBJECTIFS :

Ce chapitre vise à :

• compléter l'étude des isométries du plan faite dans les classes précédentes par la composition et la décomposition d'isométries ;

• utiliser les compositions et les décompositions pour résoudre des problèmes ;

• faire la classification des isométries.

Commentaires

En Première, on ne compose que des transformations de même nature et la notion d'isométrie n'est pas au programme. En Terminale, la mise en œuvre de la composition de deux isométries et la décomposition d'une isométrie permettront d'étudier les propriétés de ces isométries.

Volume horaire : 16 heures

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
•Définition d'une isométrie. • Décomposition d'une translation et d'une rotation en un produit de symétries orthogonales. • Composée d'une rotation et d'une translation. • composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale. • Composition d'une translation et d'une symétrie orthogonale. • Symétrie glissée. • Classification des isométries : - à l'aide de leurs points invariants ; - en déplacements et antidéplacements • Conservation du barycentre et du contact par une homothétie ou une isométrie	• Utiliser la composée de deux isométries pour : • Démontre une propriété ; • construire une figure ; • Détermine un ensemble de points. • Détermine la nature de la composée de deux isométries. • Mettre en œuvre la décomposition des isométries pour Détermine les éléments caractéristiques de la composée de deux isométries. • Détermine la nature d'une isométrie connaissant l'ensemble des points invariants.

Remarques et suggestions

Dans les classes antérieures, on a entrainé les élèves à utiliser les transformations, (symétries, translations, rotations, homothéties) aux niveaux I et II (voir document EM 2C page 21) pour résoudre des problèmes de géométrie.

En Terminale, on poursuivra cet entraînement en le complétant par le niveau III : *Utiliser les* composées des isométries pour Démontre une propriété, pour construire une figure, pour Détermine un lieu géométrique.

Au niveau III les isométries intervenant dans cette composition doivent être suggérées.

On traitera les notions suivantes qui n'ont pas été vues en Première :

La définition d'une isométrie ; les propriétés de conservation du produit scalaire, du barycentre et du contact par les isométries. La définition de la symétrie glissée comme composée d'une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'une symétrie orthogonale d'axe (D) telle que $\vec{u}$ soit vecteur directeur de (D) est à adopter.

Plan n°1

Elle correspond à la lecture dans l'ordre des différentes rubriques du programme. Après avoir défini les isométries (§I), on compose systématiquement toutes celle que l'on connaît en terminant par l'introduction des symétries glissées, découvertes comme composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale (§II). On termine par la classification et l'étude des déplacements et antidéplacements (§III et IV). L'intérêt de cette approche est de faire beaucoup manipuler les théorèmes de décomposition, principalement sous forme d'activités.

Plan n°2

Elle consiste à ne traiter dans § 1 que les composées qui doivent être traitées directement (deux symétries orthogonales et deux rotations). Les autres seront traitées comme application des classifications. Dans cette approche, la symétrie glissé est découverte par l'étude des isométries sans point invariant. L'intérêt de cette approche est de faire manipuler les différents modes de raisonnement sur les isométries.

Isométries planes : plan n°1

I- Isométries :
1. Définition (livre ISM, page 71)
2. Conservation du produit scalaire (livre ISM, page 71)
3. Conservation du barycentre (livre ISM, page 72)

II- Composition d'isométries :
1. Rotation (Rappels).
2. Composée de deux symétries orthogonales :

a) D'axes parallèles,

b) D'axes sécants (vu en première, à rappeler)
3. Décomposition d'une translation (livre 1 SM, page 64)
4. Décomposition d'une rotation (livre 1 SM, page 67)
5. Composée de deux rotations :
a) De même centre,
b) De centre distinct (vu en première, page 69. Il est bon de refaire la démonstration en utilisant les théorèmes de décomposition).
6. Composée d'une translation et d'une rotation. (traité directement dans le livre TSM page 8. Il vaut mieux utiliser les théorèmes de décomposition).
7. Systèmes glissées (livre TSM page 83. Pour une étude plus complète, on peut utiliser le livre de TC collection IRMA).
8. Composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale (Non traité dans le livre TSM. Utiliser les théorèmes de décomposition).

III – Classification des isométries (livre TSM page 86) :

1. Isométrie admettant trois points invariants non alignés
2. Isométries distinctes de l'identité admettant deux points invariants distincts
3. Isométries admettant un unique point invariant
4. Isométries sans point invariant.

VI – Déplacement, antidéplacement :

1. Propriété.
Théorème : Toute symétrie orthogonale transforme un angle orienté en son opposé. (Ce résultat, vu dans les classes précédentes, n'a jamais été démonté, on peut le faire en utilisant l'expression analytique d'une symétrie orthogonale dans un repère convenablement choisi).
2. Définition (livre TSM page 88)
3. Propriétés (livre TSM page 88)
4. Détermination (livre TSM page 89).

Isométries planes : plan n°2

I- Isométries :
1. Définition
2. Conservation du produit scalaire
3. Conservation du barycentre

II- Composition d'isométries
1. Rotation
2. Composée de deux symétries orthogonales :
a) D'axes parallèles ;
b) D'axes sécants

3. Décomposition d'une translation
4. Décomposition d'une rotation
5. Composition de deux rotations :
   a) De même centre,
   b) De centres distincts.

III- Classification des isométries

1. Propriété : Toute symétrie orthogonale transforme un angle orienté en son opposé.
2. Définition.
3. Propriétés
4. Composée d'une translation et d'une rotation. (la composée d'une translation et d'une rotation qui n'est pas l'identité est un déplacement et donc une rotation).
5. Composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale (la composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale est une antidéplacement et donc une symétrie orthogonale ou une symétrie glissée).
6. Détermination d'une isométrie.

GEOMETRIE PLANE ET NOMBRES COMPLEXES

OBJECTIFS :

Ce chapitre vise à Défini l'écriture complexe des transformations du plan pour résoudre des problèmes et géométrie.

Commentaires

Il ne s'agit pas de faire une théorie sur les transformations et leurs écritures complexes, mais d'utiliser ces écritures.

Volume horaire : 6 heures

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Ecriture complexe des transformations : - Translations - Symétries centrales - Symétries orthogonales par rapport aux axes du repère - Homothéties de centre Ω et de rapport λ.	• Détermine l'écriture complexe associée à une transformation donnée. • Détermine les éléments caractéristiques d'une transformation dont on connaît l'écriture complexe

- Rotation de centre Ω et d'angle Θ	• Utiliser l'écriture complexe pour résoudre des problèmes.

Remarques et suggestions

Ce chapitre doit être traité avant les similitudes. Cependant, il peut être intégré soit aux nombres complexes soit aux similitudes directes. Mais l'écriture complexes d'une similitude directe qui n'est ni une isométrie, ni une homothétie sera traitée dans le chapitre "Similitudes".

SIMILITUDES DIRECTES PLANES

OBJECTIFS :

Ce chapitre vise à :

• compléter l'étude des propriétés des homothéties ;

• Défini les similitudes directes du plan et faire une étude géométrique de ces transformations ;

• utiliser les similitudes directes pour résoudre des problèmes.

Commentaires

En classe de première, les similitudes n'ont pas été vues que les propriétés de conservation du barycentre et du contact par les homothéties.

Lors de l'énoncé de la définition d'une similitude directe « Une similitude directe de rapport ($k > 0$) est la composée d'une homothéties de rapport k et d'un déplacement », on fera remarquer que la décomposition d'une similitude directe en composée d'homothétie et de rotation n'est pas unique.

Les similitudes indirectes ne sont pas au programme.

Volume horaire : 14 heures

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Définition : une similitude directe de rapport λ ($\lambda > 0$) est la composée d'une homothétie de rapport λ et d'un déplacement • Forme réduite et éléments caractéristiques d'une similitude directe • Ecriture complexe d'une similitude directe de centre Ω, de rapport λ ($\lambda > 0$) Et d'angle Θ • Propriétés de conservation • Propriété : toute similitude directe multiplie les distances par le rapport. • La composée d'une homothétie de rapport k et d'un déplacement est une similitude directe de rapport $\|k\|$ • Similitude directe déterminée par deux points et leurs images	• Détermine et construire l'image d'un point, d'une droite, d'un segment, d'un cercle par une similitude directe définie par : - Son centre, son angle et son rapport ; - Son centre, un point et son image ; - Son rapport, son angle, un point et son image • Utiliser une similitude directe du plan pour : - Résoudre des problèmes de construction ; - Calcule des distances et des aires ; - Détermine des lieux géométriques ; - Démontre des propriétés (parallélisme, orthogonalité, contact….). • Détermine les éléments caractéristiques d'une similitude directe définie par : - Son centre, un point et son image ; - Deux points et leurs images.

Remarques et suggestions

Il est indispensable de mettre en place des écritures complexes des translations, les rotations et les homothéties avant d'aborder ce chapitre.

On fera remarquer que les translations, les rotations, et les homothéties sont des cas particuliers de similitudes directes.

L'homothétie de rapport k négatif est la composée d'une homothétie de rapport $\|k\|$ et d'une rotation d'angle π.

Pour la recherche du centre d'une similitude directe qui n'est pas un déplacement, l'élève sera guidé.

Après avoir défini la similitude directe du plan ; on pourra la Caractérise analytiquement au moyen des écritures complexes.

I- Généralité:

1) Définition

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel. Une application de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}$ est dite affine lorsqu'elle est de la forme $\vec{u} \to A + \varphi(\vec{u})$ où φ est une application linéaire de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}$ (**endomorphisme** de $\mathcal{E}$) dans l'espace après le choix d'une origine O.

Remarque : φ est appelé **l'endomorphisme** associé à l'application affine f.

Par contre à un même endomorphisme peuvent être associées plusieurs application affines dans les expressions analytiques en changent les constantes.

2) Propriétés

P_1 : Les applications affines conservent le barycentre de n points pondérés : c'est-à-dire si f est une application affine, l'image du barycentre d'un système de n points pondérés est le barycentre du système des images de ces points affectés des mêmes coefficients.

Ainsi nous retenons que :

- L'image une droite est une droite.
- L'image d'un plan est un plan.
- L'image d'un segment est un segment.

P_2 : La réciproque d'une transformation affine du plan est une transformation affine du plan.

Exemples d'applications affines :

L'homothétie de centre Ω et de rapport k ; La translation de vecteur $\vec{u}$; la symétrie et la projection de base et de direction données et la rotation de centre Ω et d'angle θ sont des exemples d'applications affines.

3) Application vectorielle associée à une application affine

a) **Définition** : soit f une application affine du plan P dans P et A ; B ; C et D quatre points du plan d'images respectives A' ; B' ; C' et D'.
On appelle application affine vectorielle associée à f , toute application vectorielle $\boldsymbol{v}$ dans $\boldsymbol{v}$ notée φ tel que : $\forall A \in$ p et $\forall B \in$ p on a : $\overrightarrow{A'B'} = \varphi(\overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{f(A)f(B)}$.
D'où $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$.

b) **Propriétés** :

Soit f une application affine du plan p dans p et φ l'application linéaire associée à f.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan vectorielle $\boldsymbol{v}$ et pour tout réel α donné, on a les propriétés suivantes :

P_1: $\varphi(\alpha\vec{u}) = \alpha\varphi(\vec{u})$.

P_2:$\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$.

P_3: $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$

P_4: $\varphi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(\vec{u_i})$

4) <u>Points invariants par une application affine *f*</u>

a) <u>Définition</u>

Soit f une application affine du plan P dans P. L'ensemble des points invariants par f est soit un ensemble **vide**, soit un **singleton**, soit une droite ou encore un **plan** tout entier.

b) <u>Propriétés :</u>

P_1 : L'image d'une droite par une transformation affine est une droite.

P_2 : Si (AB) et (CD) sont deux droites parallèles du plan et ($A'B'$) et ($C'D'$) leur images respectives par une application affine f du plan, alors les droites ($A'B'$) et ($C'D'$) sont parallèles.

P_3 : Soit f une application affine du plan P dans P.

- Si f est bijective alors f(P) = P
- Si f n'est pas bijective alors f (P) est un singleton ou une droite.

5) <u>Expression analytique d'une application affine *f*</u>

a) <u>Définition</u> :

Le plan est muni d'une repère (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$). Soit f une application affine du plan et soit φ sont application linéaire associée. Soit (a ; a') ; (b ; b') et (c ; c') les coordonnées respectives de $\varphi(\vec{\imath})$; $\varphi(\vec{\imath})$ $et\ de\ O'$ avec $O' = f(O)$.

On a : $\overrightarrow{O'M'} = \varphi(\overrightarrow{OM})$

$= \varphi(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})$

$= x\varphi\vec{\imath} + y\varphi\vec{\jmath}$

$= x\left(a\vec{\imath} + a'\vec{\jmath}\right) + y\left(b\vec{\imath} + b'\vec{\jmath}\right)$

$= xa\vec{\imath} + xa'\vec{\jmath} + yb\vec{\imath} + yb'\vec{\jmath}$

$= (ax + by)\vec{\imath} + (a'x + b'y)\vec{\jmath}$

$=> (x' - c')\vec{\imath} + (y' - c')\vec{\imath} = (ax + by)\vec{\imath} + (a'x + b'y)\vec{\jmath}$

Par identification on a :

$=> \begin{cases} (x' - c') = (ax + by) \\ (y' - c') = (a'x + b'y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - c' = ax + by \\ y' - c' = a'x + b'y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = ax + by + c' \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$

b) propriété:

Une application f est dite affine lorsque sont expression analytique est sous la forme :

$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$ Avec $a;\ b; c\ ; a'\ ; b'\ ; c'$ tous des nombres réels.

II- Expressions analytiques des transformations

1) Expression analytique d'une translation de vecteur translateur $\vec{u}\binom{a}{b}$

Soient $\boldsymbol{M}\binom{x}{y}$ **et** $\boldsymbol{M'}\binom{x'}{y'}$ deux points quelconques du plan d'affixes respectives Z et Z'.

Soit $\vec{\boldsymbol{u}}\binom{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ un vecteur du plan d'affixe $a + ib$.

La translation de vecteur $\vec{u}$ est donnée par la relation : $\overrightarrow{\boldsymbol{MM'}} = \vec{\boldsymbol{u}} \Leftrightarrow \boldsymbol{Z' - Z = a + ib}$

$\Leftrightarrow (x' + iy') - (x + iy) = a + ib \Leftrightarrow (x' - x) + i(y' - y) = a + ib \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$.

D'où l'expression analytique d'une translation de vecteur $\vec{u}$ est : $\begin{cases} \boldsymbol{x' = x + a} \\ \boldsymbol{y' = y + b} \end{cases}$.

2) Expression analytique d'une homothétie de rapport k et de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$

Soient $\boldsymbol{M}\binom{x}{y}$ **et** $\boldsymbol{M'}\binom{x'}{y'}$ deux points quelconques du plan d'affixes respectives Z et Z' .

Soit $\boldsymbol{\Omega}\binom{\boldsymbol{x_0}}{\boldsymbol{y_0}}$ d'affixe $\omega = x_0 + iy_0$ le centre de l'homothétie.

L'homothétie de rapport k et de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$ est donnée par la relation : $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega M'}} = \boldsymbol{k}\ \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega M}}$

$<=> \boldsymbol{Z' - \omega = k(Z - \omega)} \Leftrightarrow (x' + iy') - (x_0 + iy_0) = k[(x + iy) - (x_0 + iy_0)] \Leftrightarrow$

$(x' - x_0) + i(y' - y_0) = k[(x - x_0) + i(y - y_0)] \Leftrightarrow$

$(x' - x_0) + i(y' - y_0) = k(x - x_0) + ki(y - y_0) \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x' - x_0 = k(x - x_0) \\ y' - y_0 = k(y - y_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x_0 = kx - kx_0 \\ y' - y_0 = ky - ky_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx - kx_0 + x_0 \\ y' = ky - ky_0 + y_0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx + x_0 - kx_0 \\ y' = ky + y_0 - ky_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx + x_0(1 - k) \\ y' = ky + y_0(1 - k) \end{cases}.$

D'où l'expression analytique d'une homothétie de rapport k et de centre $\Omega\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ est :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x' = kx + x_0(1 - k)} \\ \boldsymbol{y' = ky + y_0(1 - k)} \end{cases}.$$

3) Expression analytique d'une rotation d'angle Θ et de centre $\boldsymbol{\Omega\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}$

Soient $\boldsymbol{M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$ **et** $\boldsymbol{M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}$ deux points quelconques du plan d'affixes respectives Z et Z' .

Soit $\boldsymbol{\Omega\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}$ d'affixe $\omega = x_0 + iy_0$ le centre de la rotation

La rotation d'angle Θ et de centre $\Omega\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ est donnée par la relation $\boldsymbol{\overrightarrow{\Omega M'} = e^{i\theta}\,\overrightarrow{\Omega M}} \Leftrightarrow$

$Z' - \omega = e^{i\theta}(Z - \omega) \Leftrightarrow (x' + iy') - (x_0 + iy_0) = e^{i\theta}[(x + iy) - (x_0 + iy_0)] \Leftrightarrow$

$(x' - x_0) + i(y' - y_0) = e^{i\theta}[(x - x_0) + i(y - y_0)]$. Or $e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$ =>

$(x' - x_0) + i(y' - y_0) = (cos\theta + isin\theta)[(x - x_0) + i(y - y_0)] \Leftrightarrow$

$(x' - x_0) + i(y' - y_0) =$

$(xcos\theta - x_0cos\theta - ysin\theta + y_0sin\theta) + i(xsin\theta - x_0sin\theta - ycos\theta - y_0cos\theta)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = xcos\theta - ysin\theta - x_0cos\theta + y_0sin\theta + x_0 \\ y' = xsin\theta + ycos\theta - x_0sin\theta - y_0cos\theta + y_0 \end{cases}$

D'où l'expression analytique d'une rotation d'angle Θ et de centre $\Omega\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ est:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x' = xcos\theta - ysin\theta - x_0cos\theta + y_0sin\theta + x_0} \\ \boldsymbol{y' = xsin\theta + ycos\theta - x_0sin\theta - y_0cos\theta + y_0} \end{cases}$$

4) Expression analytique d'une symétrie centrale de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$

Soient $\boldsymbol{M}\binom{x}{y}$ un point du plan d'affixe Z et $\boldsymbol{M}''\binom{-x}{-y}$ d'affixe Z'' sont symétrique par rapport à l'origine $O\binom{0}{0}$ d'affixe $Z_0 = 0$. Soient $\boldsymbol{M}'\binom{x'}{y'}$ un point quelconque du plan d'affixe Z' et $\boldsymbol{\Omega}\binom{x_0}{y_0}$ d'affixe $\omega = x_0 + iy_0$ le centre de la symétrie.

La symétrie centrale de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$ est donnée par la relation $\overrightarrow{M''M'} = 2\,\overrightarrow{O\Omega} \Leftrightarrow$

$Z' - Z'' = 2(Z_0 - \omega) \Leftrightarrow (x' + iy') - (-x - iy) = 2(x_0 + iy_0 - 0) \Leftrightarrow$

$x' + iy' + x + iy = 2(x_0 + iy_0) \Leftrightarrow (x' + x) + i(y' + y) = 2x_0 + 2iy_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 2x_0 \\ y' = -y + 2y_0 \end{cases}$.

D'où l'expression analytique d'une symétrie centrale de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$ est:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x' = -x + 2x_0} \\ \boldsymbol{y' = -y + 2y_0} \end{cases}.$$

5) Expression analytique d'une symétrie orthogonale d'axe (Δ) : $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$

De même l'expression analytique d'une symétrie orthogonale est :

$$\begin{cases} x' = x\cos 2\theta + y\sin 2\theta - 2ab \\ y' = x\sin 2\theta - y\cos 2\theta - 2ac \end{cases}$$

6) Expression analytique d'une similitude directe

Soient $\boldsymbol{M}\binom{x}{y}$ **et** $\boldsymbol{M}'\binom{x'}{y'}$ deux points quelconques du plan d'affixes respectives Z et Z'.

Soit $\boldsymbol{z' = az + b}$ ***avec*** $\boldsymbol{a}$ ***et*** $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^*$,l'expression complexe d'une similitude directe.

On a : $z' = az + b \Leftrightarrow x' + iy' = a(x + iy) + b \Leftrightarrow x' + iy' = ax + aiy + b \Leftrightarrow$

$x' + iy' = (ax + b) + aiy \Leftrightarrow \begin{cases} x' = ax + b \\ y' = ay \end{cases}$.

D'où l'expression analytique d'une similitude directe est : $\begin{cases} \boldsymbol{x' = ax + b} \\ \boldsymbol{y' = ay} \end{cases}$.

7) Expression analytique d'une similitude indirecte

Si $\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$ **et** $\boldsymbol{M}'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont deux points quelconques du plan tel que

$\boldsymbol{z' = a\bar{z} + b \ avec \ a \ \ et \ \ b} \in \mathbb{C}^*$,

alors l'expression analytique d'une similitude indirecte est : $\begin{cases} x' = ax + b \\ y' = -ay \end{cases}$

8) Expression analytique d'une réflexion d'axe Δ

- Réflexion d'axe **Δ** par rapport à la droite d'équation $y = x$, on a : $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

- Réflexion d'axe **Δ** par rapport à la droite d'équation $y = 0$, on a : $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

- Réflexion d'axe **Δ** par rapport à la droite d'équation $x = 0$, on a : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

III- Les isométries planes

1) Définition :

On appelle isométrie plane, toute application du plan dans lui-même qui **conserve la distance.**

Pour tous points M et N du plan d'images respectives M' et N', on a : $\boldsymbol{MN = M'N'}$.

2) Classification des isométries

a- Isométrie positive ou déplacement

- **Définition** : une isométrie est dite positive ou déplacement lorsqu'elle conserve les angles orientés.

Exemple : la rotation et la translation

- **Expression analytique** :

L'expression analytique d'une isométrie positive est :

$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases} avec \ a^2 + b^2 = 1$

- **Propriétés :**

P_1 : Tout déplacement (**isométrie positive**) est une similitude directe de rapport $k = 1$

P_2 : Les déplacements sont des transformations qui conservent l'angle orienté **(Rotation ; translation ; symétrie centrale)**

- **Classification des déplacements à partir de l'ensemble des points invariants**

Ensemble des points invariants par f	**Nature de la transformation f**
Plan P	f est l'identité du plan
Ensemble vide $\emptyset$	f est la translation du vecteur non nul
Singleton {A}	f est la rotation de centre A

b- Isométrie négative ou antidéplacement

- **Définition** : une isométrie est dite négative ou antidéplacement lorsqu'elle transforme tout angle orienté en son opposé.

Exemple : la symétrie orthogonale et la symétrie glissée

- **Expression analytique** :

L'expression analytique d'une isométrie négative est :

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + c' \end{cases} avec - a^2 - b^2 = -1$$

- **Propriétés**

P_1 : Tout antidéplacement (**isométrie négative**) est une similitude indirecte de rapport $k = 1$

P_2 : Les antidéplacements sont des transformations qui conservent l'angle orienté **(symétrie orthogonale ; réflexion ; symétrie glissée)**

- **Classification des antidéplacements à partir de l'ensemble des points invariants**

Ensemble des points invariants par f	**Nature de la transformation f**
Droite (D)	f est la symétrie orthogonale par rapport à (D)
Ensemble vide $\emptyset$	f est la symétrie glissée

IV- Caractérisation des transformations

1) Cas de la transformation $f : Z' = aZ + b$

- $si\ a = 1$, alors f est une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'affixe b.
- si $a = -1$, alors f est une symétrie centrale de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$ d'affixe $w = \frac{1}{2}b$.
- $si\ a \in \mathbb{R}^* - \{-1\ ;1\}$, alors f est une homothétie de rapport $k = |a|$ et de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$ d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.
- $si\ a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = 1\ alors\ f$ est une rotation d'angle $\alpha = arg(a)$ et de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$ d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.
- $si\ a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| \neq 1\ alors\ f$ est une similitude directe de rapport $k = |a|$, d'angle $\alpha = \arg(a)$ et de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$ d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.

2) Cas de la transformation $f : Z' = a\bar{Z} + b$

- Si $|a| = 1$, alors f est une symétrie orthogonale d'axe l'ensemble des solutions de $Z' = Z$.
- Si $|a| \neq 1\ \ alors\ f$ est une similitude indirecte de rapport $k = |a|$, d'angle $\alpha = \arg(a)$, $d'\ axe\ (\Delta) :\ y = px + q$ et de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$ d'affixe $w = \frac{b+a\bar{b}}{1-a\bar{a}}$

V- Composée des transformations

- La composée de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est **une translation $\vec{u} + \vec{v}$.**

- La composée de deux homothéties $h_1(\Omega\ ;\ k_1)$ et $h_2(\Omega\ ;\ k_2)$ est **une homothétie $h(\Omega\ ;\ k_1 \bullet k_2)$** . $Avec\ k_1 \neq k_2$.

- La composée de deux homothéties $h_1(\Omega_1\ ;\ k_1)$ et $h_2(\Omega_2\ ;\ k_2)$ est :
  - Une homothétie $h(\Omega\ ;\ k_1 \bullet k_2)$ si $k_1 \bullet k_2 \neq 1$.
  - Une translation de vecteur $\vec{u}$ si $k_1 \bullet k_2 = 1$.
- La composée d'une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'une homothétie $h(\Omega\ ;\ k)$ est :
  - Une translation si $k = 1$.
  - Une homothétie si $k \neq 1\ et\ \vec{u} = \vec{0}$.

- La composée d'une homothétie et d'une isométrie est une similitude.

- La composée d'une homothétie et d'une symétrie orthogonale est une similitude indirecte.

- La composée de deux antidéplacements est un déplacement.

- La composée de deux déplacements est un déplacement.

- La composée d'un antidéplacement et un déplacement est un antidéplacement.

- La composée de deux rotations r et r' d'angles respectifs α et α' est :

  - Une rotation d'angle $\alpha + \alpha' \; si \; \alpha + \alpha' \neq 0$
  - Une translation $\alpha + \alpha' = 0$

- La composée d'une rotation et d'une translation est une symétrie orthogonale.

VI- Notion sur les matrices

1- Définition :

Une **matrice** $\boldsymbol{A}$ est un tableau rectangulaire d'éléments de k nombres réels.

Un tel tableau est représenté de la manière suivante :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{1;1}} & \boldsymbol{a_{1;2}} \ldots & \boldsymbol{a_{1;j}} \ldots & \boldsymbol{a_{1;p}} \\ \boldsymbol{a_{2;1}} & \boldsymbol{a_{2;2}} \ldots & \boldsymbol{a_{2;j}} \ldots & \boldsymbol{a_{2;p}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{a_{i;1}} & \boldsymbol{a_{i;2}} \ldots & \boldsymbol{a_{i;j}} \ldots & \boldsymbol{a_{i;p}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{a_{n;1}} & \boldsymbol{a_{n;2}} & \boldsymbol{a_{n;j}} & \boldsymbol{a_{n;p}} \end{pmatrix} \text{ Ou } A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ ou } \left(a_{i,j}\right)$$

NB :

- La matrice A est dite de taille $n \times p$ si le tableau possède $\boldsymbol{n}$ lignes et $\boldsymbol{p}$ colonnes.
- Les nombres du tableau sont appelés les **coefficients** de A.
- Le coefficient situé à la $\boldsymbol{i}$ **−ème ligne** et à la $\boldsymbol{j}$ **−ème colonne** est noté $\boldsymbol{a_{i;j}}$.
- Deux matrices sont **égales** lorsqu'elles ont la même taille et que les coefficients correspondants sont égaux.
- L'ensemble des matrices à $\boldsymbol{n}$ lignes et $\boldsymbol{p}$ colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $M_{n,p}(\mathbb{R})$. Les éléments de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ sont appelés **matrices réelles.**

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ est une matrice $\boldsymbol{2 \times 3}$ avec $\boldsymbol{a_{1;1} = 1}$ et $\boldsymbol{a_{2;3} = 7}$

2- Matrices particulières :

a- Matrice carrée : Une matrice est dite carrée si le nombre de lignes $\boldsymbol{n}$ est égal aux nombres de colonnes p $(n = p)$. On la note :

$$\mathbf{A=}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{1;1}} & a_{1;2} \dots\dots\dots a_{1;p} \\ a_{2;1} \quad . & \boldsymbol{a_{2;2}} \dots\dots\dots a_{2;p} \\ & \ddots \\ a_{n;1} & a_{n;2} \quad \dots \quad \dots . \quad \boldsymbol{a_{n;n}} \end{pmatrix}$$

Les éléments $\boldsymbol{a_{1;1}}$; $\boldsymbol{a_{2;2}}$; …. ; $a_{n;n}$ forment la **diagonale principale** de la matrice.

b- Matrice ligne : Une matrice est dite ligne si elle n'a qu'une seule ligne $(\boldsymbol{n = 1})$.

On la note : A= $\left(\boldsymbol{a_{1;1}} \; ; \; \boldsymbol{a_{1;2}} \dots \boldsymbol{a_{1;p}}\right)$

c- Matrice colonne : Une matrice est dite colonne si elle n'a qu'une seule colonne $(\boldsymbol{p = 1})$. On la note : A= $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{1;1}} \\ \boldsymbol{a_{2;1}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_{n;1}} \end{pmatrix}$

d- Matrice nulle : Une matrice est dite nulle si elle est de taille $n \times p \; et$ que tous ces coefficients sont des zéros. On la note : $0_{n\times p}$ ou plus simplement 0.

3- Opération sur les matrices

a- Somme de deux matrices :

Soient A et B deux matrices ayant la même taille $n \times p$. Leur somme $S = A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ définie par : $S_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

Autrement dit faire la somme $A + B$, revient à faire la somme des coefficients de même emplacement.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ alors $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

b- Produit d'une matrice par un scalaire :

Le produit d'une matrice $A = \left(a_{i,j}\right)$ de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$, est la matrice $\left(\alpha a_{i,j}\right)$ formée en multipliant chaque coefficient de A par α.

Ce produit est noté $\boldsymbol{\alpha \bullet A}$ ou simplement $\boldsymbol{\alpha A}$.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\alpha = 2$ alors $\alpha A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

NB : la matrice $(-1)A$ est l'opposée de A et est notée $-A$. La différence $A - B$ est définie par : $A + (-B)$.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ alors $A - B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Propriétés :

Soient A, B et C trois matrices appartenant à $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K}$ deux scalaires.

1. $A + B = B + A$: la somme est commutative,
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$: la somme est associative,
3. $A + 0 = A$: la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition,
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

c- Produit de deux matrices :

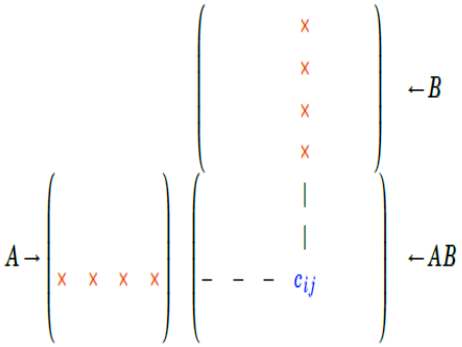
Le produit de deux matrices A et B n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égale au nombre de lignes de B.

A cet effet si $A = (a_{ij})$ est une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ est une matrice $p \times q$.

Alors le produit $P = AB$ est une matrice $n \times q$ dont les coefficients P_{ij} sont définis par :

$P_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + \cdots a_{ik}\, b_{kj} + \cdots a_{ip}\, b_{pj}$.

Ainsi de manière plus pratique, on peut disposer les calculs de la manière suivante :



Avec cette disposition, on considère d'abord la ligne de la matrice A située à gauche du coefficient que l'on veut Calcule (ligne représentée par des × dans A) et aussi la colonne de la matrice B située au-dessus du coefficient que l'on veut Calcule (colonne représentée par des × dans B). On calcule le produit du premier coefficient de la ligne par le premier coefficient de la colonne ($a_{i1} \times b_{1j}$), que l'on ajoute au produit du deuxième coefficient de la ligne par le deuxième coefficient de la colonne ($a_{i2} \times b_{2j}$), que l'on ajoute au produit du troisième. . .

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors $A - B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

On dispose d'abord le produit correctement (à gauche) : la matrice obtenue est de taille

2×2. Puis on calcule chacun des coefficients, en commençant par le premier coefficient

$C_{11} = 1 \times 1 + 2 \times (-1) + 3 \times 1 = 2$ (au milieu), puis les autres (à droite).

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Un exemple intéressant est le produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne :

$$u = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Alors $u \times v$ est une matrice de taille 1×1 dont l'unique coefficient est donnée par :

$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + \cdots a_n b_n$. Ce nombre s'appelle le **produit scalaire** des vecteurs u et v.

Calcule le coefficient c_{ij} dans le produit $A \times B$ revient donc à Calcule le produit scalaire des vecteurs formés par la $i - ème$ ligne de A et la $j - ème$ colonne de B.

Pièges à évité :

- Premier piège : Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.

En effet, il se peut que $\boldsymbol{AB}$ soit défini mais pas $\boldsymbol{BA}$, ou que $\boldsymbol{AB}$ et $\boldsymbol{BA}$ soient tous deux définis mais pas de la même taille. Mais même dans le cas où $\boldsymbol{AB}$ et $\boldsymbol{BA}$ sont définis et de la même taille, on a en général $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$.

Exemple :

$$\begin{pmatrix}5 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 3\\ -2 & -6\end{pmatrix} \qquad \text{mais} \qquad \begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 2\\ 29 & -2\end{pmatrix}.$$

- Deuxième piège : $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$.

Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul. En d'autres termes, on peut avoir $A \neq 0$ et $B \neq 0$ mais $AB = 0$.

Exemple :

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

- Troisième piège : $AB = AC$ n'implique pas $B = C$ on peut avoir $AB = AC$ et $B \neq 0$

Exemple :

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 5 & 4\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 5 & 4\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad AB=AC=\begin{pmatrix}-5 & -4\\ 15 & 12\end{pmatrix}$$

Propriétés :

1. $A(BC)=(AB)C$: associativité du produit,
2. $A(B+C)=AB+AC$ et $(B+C)A=BA+CA$: distributivité du produit par rapport à la somme,
3. $A\cdot 0=0$ et $0\cdot A=0$.

4- Matrice identité

a- **Définition** : On appelle matrice identité, toute matrice dont ses éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous ses autres éléments sont égaux à 0.
Elle se note I_n ou simplement I. Dans le calcul matriciel, la matrice identité joue un rôle analogue à celui du nombre 1 pour les réels. C'est l'élément neutre pour la multiplication.

$$I_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$$

b- **Propriété** :

Si A est une matrice $n \times p$, alors : on a : $\boldsymbol{I_n \times A = A}$

5- Déterminant d'une matrice (Règle de Sarrus)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. On appelle **déterminant** de A, le réel noté $\boldsymbol{det(M_A)}$ tel que : $\boldsymbol{det(M_A)} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

6- Bijection – Projection – Points invariants –Involution

a- Déterminant :

Soit f l'application affine tel qu'on ait : $f : \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$

Soit $mat(f)$ la matrice A de f tel que $mat(f)$ = A = $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$

Soit $det(A)$ le déterminant de la matrice A tel qu'on ait : $det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

b- Bijection

Une application f est dite bijective ou réalise une bijection si et seulement si :

$det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$

N.B : On utilise la même méthode pour Montre que trois points A, B, C forment un repère du plan c'est-à-dire $det(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) \neq 0$

c- Projection

Une application f est une projection si et seulement si, $fof = f$, c'est-à-dire s'il existe trois points : $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $M''\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \in P$ tel que : $M'' = f(M) = f(M') \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x'' = ax' + by' + c \\ y'' = a'x' + b'y' + c' \end{cases}$

d- Points invariants

Une application f admet un point invariant si et seulement si, $\begin{cases} x' = x' \\ y' = y' \end{cases}$ c'est-à-dire s'il existe deux points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in P$ tel que : $M' = f(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x = ax + by + c \\ y = a'x + b'y + c' \end{cases}$

e- **Involution**

Une application f est involutive ou réalise une involution si et seulement si : La matrice au carrée de f est égale à la matrice identité c'est-à-dire : $Mat(f^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercices

1 Soit $A(3\ ;\ 0)$ et $B(1\ ;\ -1)$ deux points du repère $(\ O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$

1) Montre qu'il existe une application affine telle que : $\begin{cases} f(0) = B \\ f(B) = B \\ f(A) = A \end{cases}$

2) Calcule les coordonnées (x', y') de $f(M) = M'$ en fonction des coordonnées (x, y) de M.

3) Calcule fof et déduis la nature et les éléments caractéristiques de l'application f.

2 Détermine la traduction complexe de la transformation f dans chacun des cas :

1) f est la transformation qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + 3i$

2) f est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + 3i$

3) f est la rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$ qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + i$

3 Dans le plan $(\ O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ on considère les points :

$A\binom{2}{0}\ ;\ B\binom{1}{1}\ ;\ C\binom{-2}{-1}\ ;\ A'\binom{3}{10}\ ;\ B'\binom{4}{6}\ ;\ C'\binom{-3}{-1}$

Soit f l'application affine du plan tel que : $f(A) = A'\ ;\ f(B) = B'\ ;\ f(C) = C'$.

1) Montre que f est bijective

2) Détermine l'expression analytique de f.

4 Le plan est muni du repère $(\ O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le

point M' de coordonnées (x', y') tel que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases}$

1) Démontre que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe que l'on Précisera.
2) Démontre que $fof = f$
3) a) Détermine l'ensemble des points invariants par f.
   b) En déduis la nature des éléments caractéristiques.

5 On considère dans le plan $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$ les points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) \\ y' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) \end{cases}$$

1) Démontre que $fof = id$

2) Démontre que l'ensemble des points invariants par f est une droite (D) que l'on Précisera.

3) Soit M un point du plan et M' son image par f.

a) Démontre que le point I milieu de $[MM']$ appartient à la droite (D).
b) Démontre que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe orthogonale à celle de (D).
c) En déduis les éléments caractéristiques de f.

6 Le plan euclidien P est rapporté à un repère orthonormé$(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$.
Etant donné un nombre réel a, on appelle T l'application de P dans P qui a tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

fait correspondre le point $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x' = (a-1)x + 2y \\ y' = ax + y \end{cases}$

1) Détermine le réel a pour que Ta soit bijective.

2) Détermine l'ensemble des points invariants par Ta.

3) Détermine a pour que Ta soit involutive et Caractérise géométriquement l'application Ta correspondant à cette valeur de a obtenue.

7 On considère l'application g de E dans E qui à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point

$M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -y + 2 \end{cases}$

1) Montre que g est affine, sans point invariant et que son endomorphisme associe φ est involutif.

2) a- Démontre que gog est une translation.

b- Soit $\vec{u}$ le vecteur de cette translation et t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$.

Précise la nature de l'application S telle que g = tos puis Prouver que $tos = sot$.

3) Montre que l'image (C') de la courbe (C_{-1}) par g a pour équation $y = -x + 2 + lnx$.

8 Soit l'application affine f.

f: P→P ; $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases}x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3}\end{cases}$

1) Vérifie que f est bijective.

2) Détermine l'ensemble des points invariants par f.

3) On désigne par Z et Z' les affixes respectives des points M et M'. Exprime Z' en fonction de Z.

4) En déduis la nature et les éléments caractéristiques de f.

9 Dans le plan P, on considère la translation $t_{\vec{u}}$ définie par $t_{\vec{u}}(A) = B$ où $A\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$

1) Caractérise cette translation.

2) Détermine le point C' image du point $C\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ par $t_{\vec{u}}$

10 Le plan P est rapporté à un repère orthonormé(O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives $a = 1 + i$ et $b = -4 - i$
Soit T la transformation du plan P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$.

1) Exprime z' en fonction de z.

2) Montre que T admet un seul point invariant Ω dont on Donnea l'affixe. En déduis que T est une homothétie dont on Précisera le centre et le rapport.

11 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine f : P → P qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases}x' = x - y - 1\\ y' = x + y - 1\end{cases}$$

1) Exprime Z' en fonction de Z.

2) En déduis la nature et les éléments caractéristiques de f.

12 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soient l'application affine f et g deux applications de P → P qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tel que :

$$f : \begin{cases}x' = 2x + 1\\ y' = 2y + 1\end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases}x' = x + 2\\ y' = y - 1\end{cases}$$

1) Pour chacune des applications f et g :

a- Détermine l'ensemble des points invariants, Précise celles qui sont bijectives.

b- Précise la nature et les éléments caractéristiques de chacune d'elles.

2) Défini analytiquement la réflexion d'axe Δ d'équation $y = x$.

13 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine f : P → P qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases}x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1\\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \sqrt{3}\end{cases}$$

1) Vérifie que f est bijective.

2) Détermine l'ensemble des points invariants par f

3) f est elle une isométrie ? Justifie votre réponse.

14 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine f : P → P qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases}$$

1) Montre que f admet un seul point invariant J.

2) Montre que $\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$ puis en déduis la nature et les éléments caractéristiques de f

3) Détermine le centre et le rayon du cercle (C') image du cercle (C) d'équation :
$x^2 + y^2 - 2y = 0$ par f.

15 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine f : P → P qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = 3x + 5y \\ y' = -2x - 3y - 2 \end{cases}$$

1) Montre que f est une application et admet un seul point invariant dont on Déterminera les coordonnées.

2) Quels sont la nature géométrique et les éléments caractéristiques de fof ? En déduis

$fofofof$

16 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine T_α : P → P qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tel que :

$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$ où α est un paramètre réel.

1) Montre que $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, T_α est bijective et admet un unique point invariant que l'on Précisera.

2) Montre qu'il existe une valeur unique de α pour la quelle T_α est une homothétie H dont Précisera le centre et le rapport.

3) a- Montre qu'il existe deux valeurs de α pour les quelles T_α est une isométrie.

b- Vérifie que ces deux isométries sont réciproques l'une de l'autre. On les notera R et R^{-1}

17 Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ d'unité $2cm$.

Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ et f_α l'application du plan complexe dans lui-même qui, au point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' telle que : $Z' = (1 + itan\alpha)Z - itan\alpha$.

1) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f_α .

2) Soit Ω le point d'affixe 1 et M un point du plan distinct de Ω. Montre que si α n'est pas nul, alors $MM'\Omega$ est un triangle rectangle en M. Pour quelle valeur de α, ce triangle est-il isocèle ?

3) On pose dans cette partie $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et on note $A;\ B;\ C$ et D les points d'affixes respectives : $i\ ;\ 2i\ ;\ -1\ et\ -1+i$.

a) Placer les points $A;\ B;\ C$ et D dans le plan.

b) Démontre que ABDC est un parallélogramme dont on Précisera l'aire en cm^2

c) Donne l'expression analytique de $f_{\frac{\pi}{4}}$.

d) En déduis les coordonnées des points $A'\ ;\ B'\ ;\ C'\ et\ D'$, images respectives par $f_{\frac{\pi}{4}}$ des points $A\ ;\ B\ ;\ C\ et\ D$.

e) Placer ces images dans le plan

18 Dans le plan complexe P, on considère les points A d'affixe $Z_A = 1\ ;\ M$ d'affixe Z et N d'affixe

$Z_N = iZ - (1+i)$. On note T_λ l'application qui à tout point d'affixe Z, associe le point M', barycentre des points pondérés $(M\ ;\ \lambda)\ ;\ (N\ ;\ -\lambda)$ et $(A\ ;\ 1)$ où λ est un nombre réel non nul.

1-Démontre que pour tout M du plan, le point N est l'image de M par une rotation dont on Précisera les éléments caractéristiques.

2- a- Démontre que l'affixe Z' du point M'est telle que $Z' = \lambda(1-i)\,Z + \lambda(1+i) + 1$.

b- Démontre que T_λ est une similitude directe dont on Précisera l'affixe du centre Ω ; le rapport et l'angle.

c-Pour quelles valeurs de λ , T_λ est-elle une rotation ?

d-Donne dans chacun de ces cas l'angle et l'affixe de son centre.

e- Exprime les coordonnées $(x' ; y')$ du point M' en fonction de celles $(x ; y)$ de M pour chacun des valeurs de λ obtenus.

3- Le nombre réel λ étant strictement positif, on lui associe le point $P(-ln\,\lambda ;\ ln\,\lambda)$.
Soit P' le point du plan tel que $T_\lambda(P) = P'$

a- Détermine les coordonnées de P' en fonction de λ.

b- Démontre que lorsque λ décrit $\mathbb{R}_+^*$; l'ensemble des points P' est la courbe (Γ) d'équation

$y = 2(x-1)ln(x-1) + (x-1)$.

4- On pose $h(x) = y$ de sorte que la courbe de la fonction numérique h est (Γ)

a-Dresse le tableau de variation $de\ h$.

b- Précise une équation de chacune des éventuelles asymptotes à (Γ)

c- Représenter (Γ) dans un repère orthonormé du plan.

19 On donne deux points distincts A et B du plan affine et k un réel non nul. Soit M_1; l'image du point M par l'homothétie de centre A et de rapport k.

Soit M' le barycentre des points B et M_1 affectés respectivement des coefficients α et 1, où α est un nombre réel distinct de -1.

Soit f l'application du plan P qui à tout point M du plan associe le point M'.

1) Montre que pour tout point M du plan, on a : $(\alpha+1)\overrightarrow{MM'} = (1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB}$.

2) Montre que si $k = \alpha + 1$ alors f est une translation dont on Déterminera le vecteur translateur.

3) Montre que si $k \neq \alpha + 1$, il existe un unique point invariant G par f puis en déduis alors que f est une homothétie de centre G dont on Déterminera le rapport.

20 On désigne par $(o ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan P. Soit a un nombre réel et f_a l'application affine de P dans luis - même qui au point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = (a+3)x - ay + a + 9 \end{cases}$$

1) a- Démontre que pour toute valeur non nulle de a, f_a est une bijection.

b- Détermine l'application f_a^{-1}, réciproque de f_a pour $a \neq 0$.

c- Détermine l'ensemble des points invariants par f_a. (On discutera suivant les valeurs du un nombre réel a).

2) a- Démontre que seule f_1 est une involution dont on Caractérisera.

b- Démontre que seule f_{-1} est la composée d'une symétrie s et d'une translation t dont le vecteur est un directeur de l'ensemble des points invariants par s, c'est-à-dire que $f_{-1} = tos$.

21 Dans un espace affine euclidienne E rapporté à un repère orthonormé $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$, on donne les points $A\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$

1) Montre qu'il existe un et un seul retournement (demi-tour) noté f tel que $f(O) = A$ et $f(B) = B$. Caractérise géométriquement ce retournement et Donne sa représentation analytique.

2) Soit g l'application de E vers E qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ telle que :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z + 2 \end{cases}$$

Détermine la nature de g et ces éléments caractéristiques. On Précisera $g(A)$ et $g(B)$.

3) Soit $h = fog$. Montre que h est déplacement dont on Déterminera la nature et les éléments caractéristiques.

22 Le plan affine E est rapporté à un repère orthonormé $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ )$.

On considère l'application f de E dans E qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ telle que : $\begin{cases} x' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

1) a- Montre que pour tout point M, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur constant.

b- Etudier l'ensemble des points invariants par f.

c- Reconnaître la nature de l'application f.

2) Soit g l'application de E dans E qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ associe le point $M''\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$ telle que

$$:\begin{cases}x'' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\\ y'' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\end{cases}$$

a- Montre que g peut s'écrire hof où h est une application de E dans E que l'on Précisera.

b- Sans Calcule, Vérifie que $hof = foh$.

Solutions

1 Soit $A\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ deux points du repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$

1) Montrons qu'il existe une application affine telle que : $\begin{cases}f(0) = B\\ f(B) = B\\ f(A) = A\end{cases}$

On a : $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$$\text{dét}\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right) = \begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix} = -3 \Rightarrow \text{dét}\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right) \neq 0$$

Alors $\left(0\,;\overrightarrow{AB}\right)$est un repère du plan par conséquent il existe une affine car si $\text{dét}\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right) \neq 0$ alors $O;\ A\ ;\ B$ ne sont pas alignés.

2) Calculons les coordonnées $(x'\ ;\ y')$ de $f(M) = M$ en fonction des coordonnées $(x\,;y)$ de M.

L'expression analytique de l'application f dans le repère $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ )$ est :

$$f:\begin{cases}x' = ax + by + c\\ y' = a'x + b'y + c'\end{cases}$$

$$f(0) = B \Leftrightarrow \begin{cases}c = 1\\ c' = -1\end{cases}$$

$$f(B) = B \Leftrightarrow \begin{cases}a - b + 1 = 1\\ a' - b' - 1 = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a - b = 0\\ a' - b' = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = b\\ a' = b'\end{cases}$$

$f(A) = A \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+1=3 \\ 3a'-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ a'=\frac{1}{3} \end{cases}$. D'où $\begin{cases} x' = \frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+1 \\ y' = \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y-1 \end{cases}$

3) Calculons fof puis en déduisons la nature et les éléments caractéristiques de f.

Soient $M(x,y)$; $M'(x',y')$; $M''(x'',y'')$ trois points du plan tels que : $f(M) = f(M') = M''$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{2}{3}x'+\frac{2}{3}y'+1 \\ y'' = \frac{1}{3}x'+\frac{1}{3}y'-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+1\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y-1\right)+1 \\ y'' = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+1\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y-1\right)-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+1 \\ y'' = \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' \end{cases} \Leftrightarrow fof = f$$

Nature et éléments caractéristiques de f:

- $fof = f \Leftrightarrow f$ est une projection
- $f(A) = A$ et $f(B) = B$ alors la droite (AB) est invariante par f ; La projection se fait sur (AB).
- $f(o) = B$ alors la projection de fait parallèlement à la droite (OB).

2 Déterminons la traduction complexe de la transformation f dans chacun des cas :

1) f est la translation qui transforme A d'affixe $-1+i$ en B d'affixe $-2+3i$

La traduction complexe d'une translation est : $f(Z) = Z + q$.

$f(A) = B \Leftrightarrow f(-1+i) = -2+3i \Leftrightarrow -1+i+q = -2+3i \Rightarrow q = -1+2i$

D'où $f(Z) = Z - 1 + 2i$

2) f est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ qui transforme A d'affixe $-1+i$ en B d'affixe $-2+3i$

La traduction complexe d'une homothétie est $f(Z) = kZ + q$.

$f(A) = B \Leftrightarrow f(-1+i) = -2+3i \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(-1+i)+q = -2+3i \Rightarrow q = -\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$

D'où $f(Z) = \frac{1}{2}Z - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$

3) f est la rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$ qui transforme A d'affixe $-1+i$ en B d'affixe $-2+i$

La traduction complexe d'une rotation $est\ f(Z) = e^{i\theta}Z + q$

$f(A) = B \Leftrightarrow f(-1+i) = -2+i \Leftrightarrow e^{i\frac{3\Pi}{4}}\ e^{i\frac{3\pi}{4}}(-1+i) + q = -2+i$

=> q = $-2 + i\left(1+\sqrt{2}\right)$. D'où $f(Z) = Ze^{i\frac{3\pi}{4}} - 2 + i\left(1+\sqrt{2}\right)$

3 Dans le plan $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ on considère les points :

$A\binom{2}{0}$; $B\binom{1}{1}$; $C\binom{-2}{-1}$; $A'\binom{3}{10}$; $B'\binom{4}{6}$; $C'\binom{-3}{-1}$

Soit f l'application affine du plan tel que : $f(A) = A'$; $f(B) = B'$; $f(C) = C'$.

1) Montrons que f est bijective

f est bijective si et seulement si $det\left(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}\right) \neq 0$ et $det\left(\overrightarrow{A'B'}\ ;\overrightarrow{A'C'}\right) \neq 0$

On a $det\left(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}\right) = 5$ et $det\left(\overrightarrow{A'B'}\ ;\overrightarrow{A'C'}\right) = -13$.

Puisque $det\left(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}\right) \neq 0$ et $det\left(\overrightarrow{A'B'}\ ;\overrightarrow{A'C'}\right) \neq 0$. Alors f est une application bijective.

2) Déterminons l'expression analytique de f.

L'expression analytique de f est de la forme $f : \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$

Avec $a;\ b; c\ ; a'\ ; b'\ ; c'$ tous des nombres réels que l'on Déterminera.

$\begin{cases} \varphi\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{A'B'} \\ \varphi\left(\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{A'C'} \end{cases}$ et $\begin{cases} \varphi(\vec{\imath}) = a\vec{\imath} + a'\vec{\jmath} \\ \varphi(\vec{\jmath}) = b\vec{\imath} + b'\vec{\jmath} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(-\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = \vec{\imath} - 4\vec{\imath} \\ \varphi(-4\vec{\imath} - \vec{\jmath}) = -6\vec{\imath} - 11\vec{\jmath} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\varphi(\vec{\imath}) + \varphi(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} - 4\vec{\imath} \\ -4\varphi(\vec{\imath}) - \varphi(\vec{\jmath}) = -6\vec{\imath} - 11\vec{\jmath} \end{cases}$

En effectuant la somme des équations (1) et (2) , on a :

$-5\varphi(\vec{\imath}) = -5\vec{\imath} - 15\vec{\jmath} \Leftrightarrow \varphi(\vec{\imath}) = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$. De même $\varphi(\vec{\jmath}) = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$

$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(\vec{\imath}) = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} \\ \varphi(\vec{\jmath}) = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} \end{cases} \Rightarrow a = 1 ; b = 3 ; a' = 3$ et $b' = -1$

$\Rightarrow \begin{cases} x' = x + 2y + c \\ y' = 3x - y + c' \end{cases}$

D'autre part on a : $f(A) = A \Rightarrow \begin{cases} x'_A = x_A + 2y_A + c \\ y'_A = 3x_A - y_A + c' \end{cases}$ Or $A\binom{2}{0}$ et $A'\binom{3}{10} \Rightarrow$

$\begin{cases} 3 = 2 + 2(0) + c \\ 10 = 3(2) - (0) + c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ c' = 4 \end{cases}$

Ainsi l'expression analytique de f est : $\begin{cases} x' = x + 2y + 1 \\ y' = 3x - y + 4 \end{cases}$

4 Le plan est muni du repère $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées $(x ; y)$ associe le point M' de coordonnées (x', y') tel que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases}$

1) Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe que l'on Précisera.

$\overrightarrow{MM'}\binom{x'-x}{y'-y} \Rightarrow \begin{cases} x' - x = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) - x \\ y' - y = \frac{1}{3}(2x - y - 12) - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = \frac{1}{3}(x - 2y - 6) \\ y' - y = \frac{2}{3}(x - 2y - 6) \end{cases} \Rightarrow \vec{u}\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3}\right)$

En posant $k = x - 2y - 6$ on a : $\overrightarrow{MM'} = k\vec{u}$

Ainsi le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a même direction que le vecteur $\vec{u}$

2) Démontrons que $fof = f$

Soit $M\binom{x}{y}$; $M'\binom{x'}{y'}$; $M''\binom{x''}{y''}$ tel que : $f(M) = M'$ et $f(M') = M'' \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x'' = \frac{1}{3}(4x' - 2y' - 6) \\ y'' = \frac{2}{3}(2x' - y' - 12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{1}{3}\left[4\left(\frac{1}{3}(4x - 2y - 6)\right) - 2\left(\frac{1}{3}(2x - y - 12)\right) - 6\right] \\ y'' = \frac{2}{3}\left[2\left(\frac{1}{3}(4x - 2y - 6)\right) - \left(\frac{1}{3}(2x - y - 12)\right) - 12\right] \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x'' = \frac{1}{3}(4x' - 2y' - 6) \\ y'' = \frac{1}{3}(2x' - y' - 12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' \end{cases} \Rightarrow fof = f.$

Donc on a : $M' = M''$. Ainsi $fof = f$.

3) a- Déterminons l'ensemble des points invariants par f.

On a $f : \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases}$ et f admet un point invariant si et seulement si $f(M) = M'$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y = \frac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 6 = 0 \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

D'où l'ensemble des points invariants par f est la droite (D) d'équation $x - 2y - 6 = 0$

b) En déduisons la nature et les éléments caractéristiques $de\ f$.

* $fof = f$ alors f est une projection

* $\overrightarrow{MM'} = k\vec{u}$ alors l'ensemble des points invariants par f est la projection sur (D) et de direction $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

5 On considère dans le plan $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\vec{\jmath})$ les points $M(x,y)$ et $M'\ (x',y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) \\ y' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) \end{cases}$$

1) Démontrons que $fof = id$

Soient $M(x,y)$; $M'\ (x',y')$; $M''\ (x'',y'')$ trois points du plan tels que :

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{13}(5x' - 12y' + 24) \\ y'' = \frac{1}{13}(-12x' - 5y' + 36) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{13}\left[5\left(\frac{1}{13}(5x - 12y + 24)\right) - 12\left(\frac{1}{13}(2x - y - 12)\right) + 24\right] \\ y'' = \frac{1}{13}\left[-12\left(\frac{1}{13}(-12x - 5y + 36)\right) - 5\left(\frac{1}{13}(2x - y - 12)\right) + 36\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{1}{13}(13x) \\ y'' = \frac{1}{13}(13y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{1}{13}(13x) \\ y'' = \frac{1}{13}(13y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = x \\ y'' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = x + 0y \\ y'' = 0x + y \end{cases}$$. Alors la matrice associée à ce système est :

$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = matrice\ identité$. D'où $fof = id$

2) Démontrons que l'ensemble des points invariants par f est une droite (D) que l'on Précisera.

f admet un point invariant si et seulement si il existe deux points $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ tel que $f(M) = M'$ c'est-à-dire

$$\begin{cases}x = x'\\ y = y'\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24)\\ y = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \frac{5}{13}x - \frac{13}{13}y + \frac{24}{13}\\ y = -\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y + \frac{36}{13}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}y = -\frac{2}{3}x + 2\\ y = -\frac{2}{3}x + 2\end{cases}$$

D'où l'ensemble des points invariants est la droite (D) d'équation : $y = -\frac{2}{3}x + 2$

3) Soit M un point du plan et M' son image par f.

a-Démontons que le point I milieu de $[MM']$ appartient à la droite (D).

Les coordonnées du milieu de I du segment $[MM']$ sont données par : $\begin{cases}x_I = \frac{x_M + x_{M'}}{2}\\ y_I = \frac{y_M + y_{M'}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}x_I = \frac{x + x'}{2}\\ y_I = \frac{y + y'}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_I = \frac{x + \frac{1}{13}(5x - 12y + 24)}{2}\\ y_I = \frac{y + \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36)}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_I = \frac{18x - 12y + 24}{26}\\ y_I = \frac{-12x + 8y + 36}{26}\end{cases}$$

Ainsi pour que I appartienne à la droite (D) : $y = -\frac{2}{3}x + 2$ il faut que les coordonnées de I vérifient l'équation de la droite (D).

Alors en remplaçant y par y_I et x par x dans (D), on a : 0 = 0

Conclusion I appartient à la droite (D).

b) Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe orthogonale à celle de (D).

$$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}x' - x\\ y' - y\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x' - x = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) - x\\ y' - y = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) - y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x' - x = \frac{4}{13}(-2x - 3y + 6)\\ y' - y = \frac{6}{13}(-2x - 3y + 6)\end{cases}$$

=> $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{4}{13}\\ \frac{6}{13}\end{pmatrix}$ en posant $k = x - 2y - 6$ on a : $\overrightarrow{MM'} = k\vec{u}$

En posant $k = -2x - 3y + 6$, on a : $\overrightarrow{MM'} = k\vec{u}$

Ainsi le vecteur $\overrightarrow{MM'} = k\vec{u}$ à une direction fixe orthogonale à celle de (D).

c) En déduisons la nature et les éléments caractéristiques de f.

- $fof = id$ alors f est une involution
- $\overrightarrow{MM'} = k\vec{u}$ alors l'ensemble des points invariants par f est la perpendiculaire à (D) et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\frac{4}{13} ; \frac{6}{13}\right)$

6 Le plan euclidien P est rapporté à un repère orthonormé(O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

Etant donné un nombre réel a, on appelle T l'application de P dans P qui a tout point $M(x, y)$ fait correspondre le point M' (x', y') tel que : $\begin{cases} x' = (a-1)x + 2y \\ y' = ax + y \end{cases}$

1) Déterminons le réel a pour que T_a soit bijective :

T_a est bijective si, et seulement si l'équation $T_a(M) = M'$ où M' est un point donné du plan euclidien P, a une solution et une seule, c'est-à-dire si et seulement si le système linéaire

$\begin{cases} x' = (a-1)x + 2y \\ y' = ax + y \end{cases}$ Admet une solution et une seule. Ainsi il faut et il suffit que le déterminant du système soit nul.

Soit φ l'endomorphisme associé à T_a.

La matrice de T_a dans la base $(\vec{\imath} ; \vec{\jmath})$ est $M_a = \begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ et le déterminant associé à cette matrice est $detM_a = \begin{vmatrix} a-1 & 2 \\ a & 1 \end{vmatrix} = (a-1) - 2a = -a - 1 = -(a+1) \neq 0$

Donc T_a est bijective si et seulement si $-(a+1) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1$

2) Déterminons l'ensemble des points invariants par T_a.

T_a admet un point invariant si et seulement si $Ta(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x' = (a-1)x + 2y & (1) \\ y' = ax + y & (2) \end{cases}$

Dans (2), on a : $y = ax + y \Leftrightarrow ax = 0 \Rightarrow a = 0$

Dans (1), on a : $y = x$

Ainsi l'ensemble des points invariants est la première bissectrice d'équation $y = x$

Si $a \neq 0$, alors $x = 0$ et dans (1) $y = 0$

Ainsi l'ensemble des points invariants est l'origine $O\binom{0}{0}$ du repère.

3) Déterminons a pour que Ta soit involutive. T_a est involutive si et seulement si $T_a 0 T_a$ = Id c'est-à-dire $T_a 0 T_a$ soit égale à l'application identique de P dans P

Soit A la matrice de l'application linéaire T_a. On a alors : $T_a 0 T_a$ = id si et seulement si

$A^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Or $A = \begin{pmatrix}a-1 & 2\\ a & 1\end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix}a-1 & 2\\ a & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}a-1 & 2\\ a & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2+1 & 2a\\ a^2 & 2a+1\end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a^2+1 & 2a\\ a^2 & 2a+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+1=1\\ 2a=0\\ a^2=0\\ 2a+1=1\end{cases} \Rightarrow a = 0$

D'où $a = 0$

L'application T_0 correspondante a pour points invariants ceux de la droite $y = x$ d'après 2°).

Soit f l'application linéaire associée à T_0, cherchons les vecteur $\vec{u}$ du plan vectoriel associé à P tels que $f(\vec{u}) = -\vec{u}$

$f(\vec{u}) = -\vec{u}$ si et seulement si $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x\\ -y\end{pmatrix}$ où $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$sont les composantes de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$. D'où $\begin{cases}-x+2y=-x\\ y=-y\end{cases}$

La solution est donnée par $y = 0$ et x quelconque. Les vecteurs $\vec{u}$ sont les vecteurs de composante $(\alpha\,;0)$avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ainsi, ils constituent la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{\imath}$.

L'application T_0 est donc la symétrie affine par rapport à la première bissectrice de direction la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{\imath}$.

7 On considère l'application g de E dans E qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$

tel que : $\begin{cases}x' = x+y\\ y' = -y+2\end{cases}$

1) Montrons que g est affine, sans point invariant et que son endomorphisme associe φ est involutif.

g Admet un point invariant si et seulement si $g(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = x + y \\ y = -y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

(Impossible) donc g n'admet pas de points invariants.

Ainsi l'endomorphisme φ a pour matrice $M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et

$M^2(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Mat\ (id)$. D'où φ est involutif.

2) a- Démontrons que gog est une translation.

$(gog)(M) = M'' \Leftrightarrow \begin{cases} x" = x' + y' \\ y" = -y' + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x" = (x + y) + (-y + 2) \\ y" = -(-y + 2) + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x" = x + 2 \\ y" = y \end{cases}$

D'où gog est la translation ponctuelle de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

b- Soit $\vec{u}$ le vecteur de cette translation et t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$

Précisons la nature de l'application S telle que g = toS puis Prouvons que toS = Sot.

* $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

* g n'admet pas de point invariant.

* φ est involutif

* gog est la translation du vecteur $\vec{u}$

Ces conditions étant réunis nous dirons que g = toS = Sot avec t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$et S est la symétrie affine par rapport à une droite D engendrée par $\frac{1}{2}\vec{u}$

g = toS (composons à gauche par t^{-1}), on a : S = t^{-1}og => S(M) = M_1 $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x^{'} - 1 \\ y_1 = y^{'} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x + y - 1 \\ y_1 = -y + 2 \end{cases}$ Avec t^{-1} la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{u}$

$S(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = x + y \\ y = -y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 1 \end{cases}$ .Alors on a la droite (D): $y = 1$

De même $\varphi(\vec{u}) = -\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = x + y \\ -y = y \end{cases}$ .Alors on a la droite (Δ): $2x + y = 0$

S est donc la symétrie affine par rapport à (D) parallèlement à (Δ).

3) Montrons que l'image (C') de la courbe (C_{-1}) par g à pour équation $y = -x + 2 + lnx$.

Avec (C_{-1}) la courbe de la fonction $f_m(x) = mx + e^x$ où $m \in \mathbb{R}$

- La droite (D) à pour équation $x = 0$
- Son image par g est $M\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} \in (D) \Leftrightarrow g(M) = M'$ avec $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ tel que $\begin{cases}x' = y\\y' = -y+2\end{cases}$ $\Leftrightarrow y' = -x' + 2$.

D'où l'image de la droite (D) est la droite d'équation $y = -x + 2$

L'image de la droite (Δ) d'équation $y = -x$ est : $\begin{cases}x' = 0\\y' = x+2\end{cases} \Leftrightarrow x' = 0$

C'est-à-dire l'image de (Δ) est la droite (D) d'équation $x = 0$.

8 Soit l'application affine $f: P \to P$; $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases}x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\\y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3}\end{cases}$

1) Vérifions que f est bijective.

Soit φ l'endomorphisme associé à f .

La matrice de f dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ est $M = \begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$ et le déterminant associé à cette

Matrice est $det\varphi = \begin{vmatrix}1 & -\sqrt{3}\\\sqrt{3} & 1\end{vmatrix}$

Alors f est bijective si et seulement si $detM \neq 0$

$detM = \begin{vmatrix}1 & -\sqrt{3}\\\sqrt{3} & 1\end{vmatrix} = (1) + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 1 + 3 = 4 \neq 0$. Alors f est bijective.

2) Déterminons l'ensemble des points invariants par f.

f admet un point invariant si et seulement si $f(M) = M$

$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases}x' = x\\y' = y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\\y = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1\\y = 2\end{cases}$

D'où $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est le point invariant.

3) Soit Z et Z' d'affixes respectives M et M'.

Exprimons Z' en fonction de Z.

On sait que: $Z' = x' + iy'$. Or $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$

En remplaçant x' et y' par leur valeur dans $Z' = x' + iy'$; on a :

=> $Z' = (x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) + i(x\sqrt{3} + y - \sqrt{3})$

$= x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + ix\sqrt{3} + iy - i\sqrt{3}$

$= x + i^2y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + ix\sqrt{3} + iy - i\sqrt{3}$

$= (x + ix\sqrt{3}) + (iy + i^2y\sqrt{3}) + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$

$= x(1 + i\sqrt{3}) + iy(1 + i\sqrt{3}) + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$

$= (1 + i\sqrt{3})(x + iy) + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$. Or $Z = x + iy$

=> $Z' = (1 + i\sqrt{3})Z + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$.

4) En déduisons la nature et les éléments caractéristiques.

NB :

Si $Z' = aZ + b$ avec $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| \neq 1$. *Alors on a*: une similitude directe de rapport $k = |a|$, d'angle $\alpha = arg(a)$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1 - a}$.

On a : $Z' = (1 + i\sqrt{3})Z + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$. Avec $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$

Ici $a = 1 + i\sqrt{3} \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = |1 + i\sqrt{3}| = 2 \neq 1$.

Alors f est une similitude directe dont les éléments caractéristiques sont :

- Rapport : $k = |a| = |1 + i\sqrt{3}| = 2$.

a- Angle θ est tel que : $\theta = \arg(a) = \arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

- Centre $A(1 ; 2)$ (point invariant)

9 Dans le plan P, on considère la translation $t_{\vec{u}}$ définie par $t_{\vec{u}}$(A) = B où $A\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$.

1) Caractérisons cette translation.

$t_{\vec{u}}$(A) = B si $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$ => alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+3\\7-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$. D'où $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ est le vecteur de translation.

2) Déterminons le point C′ image du point $C\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ par $t_{\vec{u}}$

On a : $t_{\vec{u}}$(C) = C' $\Leftrightarrow \overrightarrow{CC'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_{C'} - x_C\\y_{C'} - y_C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_{C'} - 0\\y_{C'} + 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_{C'}\\y_{C'} + 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_{C'} = 4\\y_{C'} = 6 - 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_{C'} = 4\\y_{C'} = 4\end{cases}$. D'où $C'\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$

10 Le plan P est rapporté à un repère orthonormé(O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives $a = 1 + i$ et $b = -4 - i$
Soit T la transformation du plan P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$.

1) Exprimons z' en fonction de z.

On a : $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$

$\Leftrightarrow \quad Z_{M'} - Z_0 = 2(Z_M - Z_A) + Z_M - Z_B$

$\Leftrightarrow \quad Z_{M'} - Z_0 = 2Z_M - 2Z_A + Z_M - Z_B$

$\Leftrightarrow \quad Z' - 0 = 2Z - 2(1 + i) + Z - (-4 - i)$

$\Leftrightarrow \quad Z' = 3Z - 2(1 + i) - (-4 - i)$

$\Leftrightarrow \quad Z' = 3Z - 2 - 2i + 4 + i$

$\Leftrightarrow \quad Z' = 3Z + 2 - i$

2) Montrons que T admet un seul point invariant Ω dont on Donnea l'affixe.

T admet un seul point invariant si et seulement si $Z' = Z$.

$Z' = Z \Leftrightarrow Z = 3Z + 2 - i \Leftrightarrow -2Z = 2 - i \Leftrightarrow Z = -1 + \frac{1}{2}i.$

D'où $\Omega\left(-1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ est le point invariant.

En déduisons que T est une homothétie dont on Précisera le centre et le rapport.

NB :

Si $Z^{'} = aZ + b$ avec $a \in \mathbb{R}^{*} - \{-1\ ;1\}$, alors on a : une homothétie de rapport $k = |a|$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.

On a : $Z^{'} = 3Z + 2 - i$. Avec $a = 3$ et $b = 2 - i$

Ici $a = 3 \in \mathbb{R}^{*} - \{-1\ ;1\}$, alors T est une homothétie dont les éléments caractéristiques sont :

- Rapport : $k = |a| = |3| = 3$

- Centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a} = \frac{2-i}{1-3} = \frac{2-i}{-2} = \frac{2-i}{-2} = -1 + \frac{1}{2}i$

=> $\Omega\left(-1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ est le centre de l'homothétie.

11 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé($O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}$) et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine f : P → P qui à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow M'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x^{'} = x - y - 1 \\ y^{'} = x + y - 1 \end{cases}$$

1) Exprimons Z' en fonction de Z.

On sait que $Z^{'} = x^{'} + iy'$. Or $\begin{cases} x^{'} = x - y - 1 \\ y^{'} = x + y - 1 \end{cases}$

En remplaçant $x^{'}\ et\ y'$ par leur valeur dans $Z^{'} = x^{'} + iy^{'}$; on a :

$Z^{'} = (x - y - 1) + i(x + y - 1)$

$= x - y - 1 + ix + iy - i$

$= x + ix - y + iy - 1 - i$

$= x + ix + i^{2}y + iy - 1 - i$

$= x(1 + i) + iy(1 + i) - 1 - i$

$= (1+i)(x+iy) - 1 - i$. Or $Z = x + iy$

=>$Z' = (1+i)Z - 1 - i$

2) En déduisons la nature et les éléments caractéristiques de f.

NB :

Si $Z' = aZ + b$ avec $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| \neq 1$. *Alors on a*: une similitude directe de rapport $k = |a|$, d'angle α = arg(a) et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.

On a : $Z' = (1+i)Z - 1 - i$. Avec $a = 1 + i$ et $b = -1 - i$

Ici $a = 1 + i \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = |1+i| = \sqrt{2} \neq 1$.

Alors f est une similitude directe dont les éléments caractéristiques sont :

- Rapport : $k = |a| = |1+i| = \sqrt{2}$

- Centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a} = \frac{-1-i}{1-(1+i)} = \frac{-1-i}{1-1-i} = \frac{-1-i}{-i} = -1 + \frac{1}{2}i = 1 - i$

=> $\Omega(1\ ;\ -1)$ est le centre de la similitude directe.

12 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé($O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}$) et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soient l'application affine f et g deux applications de P → P qui à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que : $f : \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 1 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$

1) Pour chacune des applications f et g :

a- Déterminons l'ensemble des points invariants, précisons celles qui sont bijectives.

Pour l'application f.

f Admet un point invariant si et seulement si $f(M) = M$ c'est-à-dire $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

=> $\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$ => $A(-1\ ;\ -1)$ est le point invariant.

f est bijective si et seulement si $detM \neq 0$

Soit φ l'endomorphisme associé à f .

La matrice de f dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ est $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et le déterminant associé à cette

Matrice est $detM = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

$detM = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Alors f est bijective.

Pour l'application g.

g Admet un point invariant si et seulement si $g(M) = M$ c'est-à-dire $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = x + 2 \\ y = y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -1 \\ 0 = -1 \end{cases}$ $\Rightarrow g$ n'admet pas de point invariant.

g est bijective si et seulement si $detM' \neq 0$

Soit φ' l'endomorphisme associé à g .

La matrice de g dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ est $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et le déterminant associé à cette

Matrice est $detM' = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$detM' = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Alors g est bijective.

b- Précisons la nature et les éléments caractéristiques de chacune d'elles.

Pour l'application f.

1ère Méthode

On a $f : \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 1 \end{cases}$

Exprimons Z' en fonction de Z.

On sait que $Z' = x' + iy'$. Or $\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 1 \end{cases}$

En remplaçant x' et y' par leur valeur dans $Z' = x' + iy'$; on a :

$Z' = (2x + 1) + i(2y + 1)$

$= 2x + 1 + 2iy + i$

$= 2x + 2iy + 1 + i$

$= 2(x + iy) + 1 + i$. Or $Z = x + iy$

=>$Z' = 2Z + 1 + i$

NB :

Si $Z' = aZ + b$ avec $a \in \mathbb{R}^* - \{-1 ; 1\}$, alors on a : une homothétie de rapport $k = |a|$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1 - a}$.

On a : $Z' = 2Z + 1 + i$. Avec $a = 2$ et $b = 1 + i$

Ici $a = 2 \in \mathbb{R}^* - \{-1 ; 1\}$, alors f est une homothétie dont les éléments caractéristiques sont :

- Rapport : $k = |a| = |2| = 2$

- Centre $A(-1 ; -1)$: point invariant.

2ième Méthode

On a $f : \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 1 \end{cases}$ sous la forme $\begin{cases} x' = kx + x_0(1 - k) \\ y' = ky + y_0(1 - k) \end{cases}$

qui est l'expression analytique d'une homothétie de rapport k et de centre $A(x_0 ; y_0)$.

D'où f est une homothétie de rapport $k = 2$ et de Centre $A(-1 ; -1)$: point invariant.

Pour l'application g.

1ère Méthode

On a $g : \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$

Exprimons Z' en fonction de Z.

On sait que $Z' = x' + iy'$. Or $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$

En remplaçant x' et y' par leur valeur dans $Z' = x' + iy'$; on a :

$Z' = (x + 2) + i(y - 1)$

$= x + 2 + iy - i$

$= x + iy + 2 - i$

$= (x + iy) + 2 - i$. Or $Z = x + iy$

=>$Z' = Z + 2 - i$

NB :

$si\ a = 1$, alors on a une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'affixe b.

On a : $Z' = Z + 2 - i$. Avec $a = 1$ et $b = 2 - i$

Ici $a = 1$, alors g est une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'affixe $b = 2 - i$ => $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

2ième Méthode

On a : $g : \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$ sous la forme $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

qui est l'expression analytique d'une translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

D'où g est une translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

2) Définissons analytiquement la réflexion d'axe Δ d'équation $y = x$.

Soit (S) la réflexion d'axe (Δ) d'équation $y = x$ tel que : $\forall\ M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$; on a :

$S(M) = M'$ => $\overrightarrow{MM'}$ est un vecteur normal de (Δ).

Soit I le milieu de $[MM']$ => $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire au vecteur normal $\vec{n}(-1\ ;\ 1)$.

Alors il existe un réel k tel que $\overrightarrow{MM'} = k\vec{n}$

D'où $\overrightarrow{MM'} = k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-k\\k\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = -k \\ y' - y = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - k \\ y' = y + k \end{cases}$

Si I est le milieu de $[MM']$ alors : $I\left(\frac{x'+x}{2}\ ;\ \frac{y'+y}{2}\right)$.

I appartient à (Δ) $si\ et\ seulement\ si\ \frac{x'+x}{2} = \frac{y'+y}{2} \Leftrightarrow x' + x = y' + y$. Or $\begin{cases} x' = x - k \\ y' = y + k \end{cases}$

En remplaçant x' et y' par leur valeur dans $x' + x = y' + y$; on a :

$(x - k) + x = (y + k) + y \Leftrightarrow x - k + x = y + k + y \Leftrightarrow 2x - 2y - 2k = 0$

$\Leftrightarrow x - y - k = 0 \Leftrightarrow k = x - y$

D'où l'expression analytiquement de la réflexion d'axe Δ d'équation $y = x\ est$:

$$\begin{cases} x' = x - (x - y) \\ y' = y + (x - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - x + y \\ y' = y + x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

13 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine f : P → P qui à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases}$$

1) Vérifions que f est bijective.

f Est bijective si et seulement si $detM \neq 0$

Soit φ l'endomorphisme associé à f .

La matrice de f dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ est $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et le déterminant associé à cette

Matrice est : $detM = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

$detM = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \neq 0$. Alors f est bijective.

2) Déterminons l'ensemble des points invariants par f

f Admet un point invariant si et seulement si $f(M) = M$ c'est-à-dire $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y\sqrt{3} = 2 \\ -x\sqrt{3} + y = -2\sqrt{3} \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $x = 2$ et $y = 0$

D'où $A\binom{2}{0}$ est le point invariant.

3) Vérifions si f est une isométrie

f est une isométrie si et seulement si son expression analytique est sous la forme :

$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases}$ C'est-à-dire si $detM = a^2 + b^2 = 1$ avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

On a $f : \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases}$ => $detM = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

D'où f est une isométrie et cette isométrie est positive car $a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

14 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine f : P → P qui à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases}$

1) Montrons que f admet un seul point invariant J.

f Admet un point invariant si et seulement si $f(M) = M$ c'est-à-dire $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

=> $\begin{cases} x = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + 2 \\ 2y = y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$

D'où $J\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ est le point invariant.

2) Montrons que $\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$

$\overrightarrow{JM'} = \begin{pmatrix} x' - 2 \\ y' + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + 1 - 2 \\ \frac{1}{2}y - 2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - 1 \\ \frac{1}{2}y + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x - 2) \\ \frac{1}{2}(y + 4) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x - 2 \\ y + 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$

D'où : $\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$

En déduisons la nature et les éléments caractéristiques de f

$\overrightarrow{JM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM}$ Sous la forme $\overrightarrow{\Omega M'} = \boldsymbol{k}\,\overrightarrow{\Omega M}$ qui est l'expression d'une homothétie de rapport k et de centre Ω.

D'où f est une homothétie de rapport $k = \frac{1}{2}$ et de centre $J\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

3) Déterminons le centre et le rayon du cercle (C') image du cercle (C) d'équation : $x^2 + y^2 - 2y = 0$ par f.

On a : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x' = x + 2 \\ 2y' = y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x' - 2 \\ y = 2y' + 4 \end{cases}$

En remplaçant x et y par leur valeur dans $x^2 + y^2 - 2y = 0$, on a :

$(2x' - 2)^2 + (2y' + 4)^2 - 2(2y' + 4) = 0$

$\Leftrightarrow 4(x' - 1)^2 + 4(y' + 2)^2 - 4(y' + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + (y' + 2)^2 - (y' + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + y'^2 + 4y' + 4 - y' - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + y'^2 + 3y' + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + (y'^2 + 3y') + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + \left[y'^2 - 2\left(-\frac{3}{2}\right)y'\right] + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + \left(y' + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + \left(y' + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + \left(y' + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$

$\Leftrightarrow (x' - 1)^2 + \left(y' + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

D'où (C') est le cercle de centre $\left(1 ; -\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $r = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

15 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine f : P → P qui à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que :

$\begin{cases} x' = 3x + 5y \\ y' = -2x - 3y - 2 \end{cases}$

1) Montrons que f est une application.

f Est une application si et seulement si $detM \neq 0$

Soit φ l'endomorphisme associé à f .

La matrice de f dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ est $M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ et le déterminant associé à cette

Matrice est : $detM = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$

$detM = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 10 = 1 \neq 0$. Alors f est une application.

Montrons que f admet un seul point invariant dont on Déterminera les coordonnées.

f Admet un point invariant si et seulement si $f(M) = M$ c'est-à-dire $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

$=> \begin{cases} x = 3x + 5y \\ y = -2x - 3y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ -2x - 4y = 2 \end{cases}$

La résolution de ce système donne : $x = -5$ et $y = 2$

D'où $\Omega(-5\,;\,2)$ est le point invariant.

2) Déterminons la nature géométrique et les éléments caractéristiques de fof

fof Est tel que : $\begin{cases} x'' = 3x' + 5y' \\ y'' = -2x' - 3y' - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = 3(3x + 5y) + 5(-2x - 3y - 2) \\ y'' = -2(3x + 5y) - 3(-2x - 3y - 2) - 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = 9x + 15y - 10x - 15y - 10 \\ y'' = -6x - 10y + 6x + 9y + 6 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = -x - 10 \\ y'' = -y + 4 \end{cases}$

Exprimons ainsi Z'' en fonction de Z

$Z'' = x'' + iy''$. Or $\begin{cases} x'' = -x - 10 \\ y'' = -y + 4 \end{cases}$

En remplaçant x'' et y'' par leur valeur dans $Z'' = x'' + iy''$, on a :

$Z'' = (-x - 10) + i(-y + 4)$

$= -x - 10 - iy + 4i$

$= -(x + iy) - 10 + 4i$. Or $Z = x + iy$

$=> Z'' = -Z - 10 + 4i$

NB :

Si $a = -1$, alors f est la symétrie centrale de centre Ω d'affixe $w = \frac{1}{2}$b.

On a : $Z' = Z + 2 - i$. Avec $a = -1$ et $b = -10 + 4i$

Ici $a = -1$, alors f est une symétrie centrale de centre Ω d'affixe $w = \frac{1}{2}$b = $\frac{1}{2}(-10 + 4i)$.

=> $w = -5 + 2i$

D'où $\Omega(-5\,;2)$ est le centre de la symétrie centrale.

En déduisons $fofofof$

Puisque fof est une symétrie centrale alors $fofofof = (fof)o(fof)$ qui est la composée de deux symétries centrales.

Or la composée de deux symétries centrales est une symétrie centrale.

16 Le plan affine euclidienne P est muni d'un repère orthonormé(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) et on désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des corps complexes.

Soit l'application affine T_α : P → P qui à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que :

$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$ où α est un paramètre réel.

1) Montrons que ∀ α ∈ $\mathbb{R}$, T_α est bijective

T_α Est bijective si et seulement si $detM_\alpha \neq 0$

Soit φ l'endomorphisme associé à T_α.

La matrice de T_α dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est $M_\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\alpha \\ \alpha & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et le déterminant associé à cette

matrice est $detM_\alpha = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\alpha \\ \alpha & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (\alpha)^2 = \frac{1}{4} + \alpha^2 \neq 0$. Alors T_α est bijective .

Montrons que T_α admet un unique point invariant que l'on Précisera.

T_α Admet un point invariant si et seulement si $T_\alpha(M) = M$ c'est-à-dire $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2\alpha y = 0 \\ 2\alpha x - 3y = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne : $x = 0$ et $y = 0$

D'où $\Omega(0\,;0)$ est le point invariant.

2) Montons qu'il existe une valeur unique de α pour la quelle T_α est une homothétie H dont Précisera le centre et le rapport.

Pour cela exprimons Z' en fonction de Z.

On sait que $Z' = x' + iy'$. Or $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$

En remplaçant x' et y' par leur valeur dans $Z' = x' + iy'$; on a :

$$Z' = \left(-\frac{1}{2}x - \alpha y\right) + i\left(\alpha x - \frac{1}{2}y\right)$$

$$= -\frac{1}{2}x - \alpha y + i\alpha x - \frac{1}{2}yi$$

$$= \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}yi\right) + (-\alpha y + i\alpha x)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}yi\right) + (i^2\alpha y + i\alpha x)$$

$$= -\frac{1}{2}(x + iy) + i\alpha(x + iy)$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + i\alpha\right)(x + iy). \text{ Or } Z = x + iy$$

$$\Rightarrow Z' = \left(-\frac{1}{2} + i\alpha\right)Z$$

NB : Si $Z' = aZ + b$, on dit que T_α est une homothétie $a \in \mathbb{R}^* - \{-1\,;1\}$

Avec $a = -\frac{1}{2} + i\alpha$

Alors $a = -\frac{1}{2} + i\alpha \in \mathbb{R}^* - \{-1\,;1\}$ si et seulement si $\alpha = 0$.

D'où T_α est une homothétie si $\alpha = 0$.

3) a- Montrons qu'il existe deux valeurs de α pour les quelles T_α est une isométrie.

T_α est une isométrie si et seulement si son expression analytique est sous la forme :

$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases}$ C'est-à-dire si $\det(Matf) = a^2 + b^2 = 1$

On a T_α : $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$ => $detM_\alpha = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\alpha \\ \alpha & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (\alpha)^2$

$detM_\alpha = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (\alpha)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \alpha^2 = 1$ => $\alpha^2 = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{3}{4}$

=> $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b- Vérifions que ces deux isométries sont réciproques l'une de l'autre. On les notera R et R^{-1}

D'où on a R^+: $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$ et R^{-1}: $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$

En observant, on remarque que ces deux isométries sont réciproques l'une de l'autre.

17 Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ d'unité 2cm.

Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ et f_α l'application du plan complexe dans lui-même qui, au point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' telle que : $Z' = (1 + itan\alpha)Z - itan\alpha$.

1) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de f_α .

NB :

Si $Z' = aZ + b\ \ avec\ \ a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| \neq 1\ alors\ f$ est une similitude directe de rapport $k = |a|$, d'angle α = arg(a) et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.

On a : $Z' = (1 + itan\alpha)Z - itan\alpha$. Avec $a = 1 + itan\alpha\ \ et\ \ b = -itan\alpha$

$|a| = |1 + itan\alpha| = \sqrt{1 + tan^2\alpha} = \sqrt{\frac{1}{cos^2\alpha}} = \frac{1}{cos\alpha} \neq 1$

$Alors\ f_\alpha$ Est une similitude directe dont les éléments caractéristiques sont :

b- Rapport : $k = |a| = |1 + itan\alpha| = \sqrt{1 + tan^2\alpha} = \sqrt{\frac{1}{cos^2\alpha}} = \frac{1}{cos\alpha}$

c- Angle : $\theta = arg\,(a) = arg(1 + itan\alpha) = \alpha.$

d- Centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a} = \frac{-itan\alpha}{1-(1+itan\alpha)} = \frac{-itan\alpha}{1-1-itan\alpha} = \frac{-itan\alpha}{-itan\alpha} = 1$ => $\Omega(1;0)$

2) Soit Ω le point d'affixe 1 et M un point du plan distinct de Ω.

e- Montrons que pour $\alpha \neq 0$; alors $MM'\Omega$ est un triangle rectangle en M.

$MM'\Omega$ est un triangle rectangle en M si et seulement si $\frac{Z_\Omega - Z_M}{Z_{M'} - Z_M} = ib$ ou $-ib$

Avec $Z_\Omega = 1$; $Z_{M'} = Z' = (1 + itan\alpha)Z - itan\alpha$ et $Z_M = Z$

$$\frac{Z_\Omega - Z_M}{Z_{M'} - Z_M} = \frac{(1)-(Z)}{[(1+itan\alpha)Z - itan\alpha] - Z} = \frac{1-Z}{Z + iZtan\alpha - itan\alpha - Z} = \frac{1-Z}{iZtan\alpha - itan\alpha}$$

$$= \frac{1-Z}{-itan\alpha\,(1-Z)} = \frac{1}{-itan\alpha} = \frac{itan\alpha}{tan^2\alpha} = \frac{i}{tan\alpha} = \frac{1}{tan\alpha} i$$ (Sous la forme ib).

D'où $MM'\Omega$ est un triangle rectangle en M.

f- Déterminons la valeur de α pour que ce triangle soit isocèle

$MM'\Omega$ est un triangle isocèle en M si et seulement si $\frac{Z_\Omega - Z_M}{Z_{M'} - Z_M} = i \Leftrightarrow \frac{1}{tan\alpha} i = i \Leftrightarrow$

$\frac{1}{tan\alpha} = 1 \Leftrightarrow tan\alpha = 1$ => $\alpha = \frac{\pi}{4}$

3) On pose dans cette partie $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et on note A; B; C et D les points d'affixes respectives : i ; $2i$; -1 et $-1 + i$.

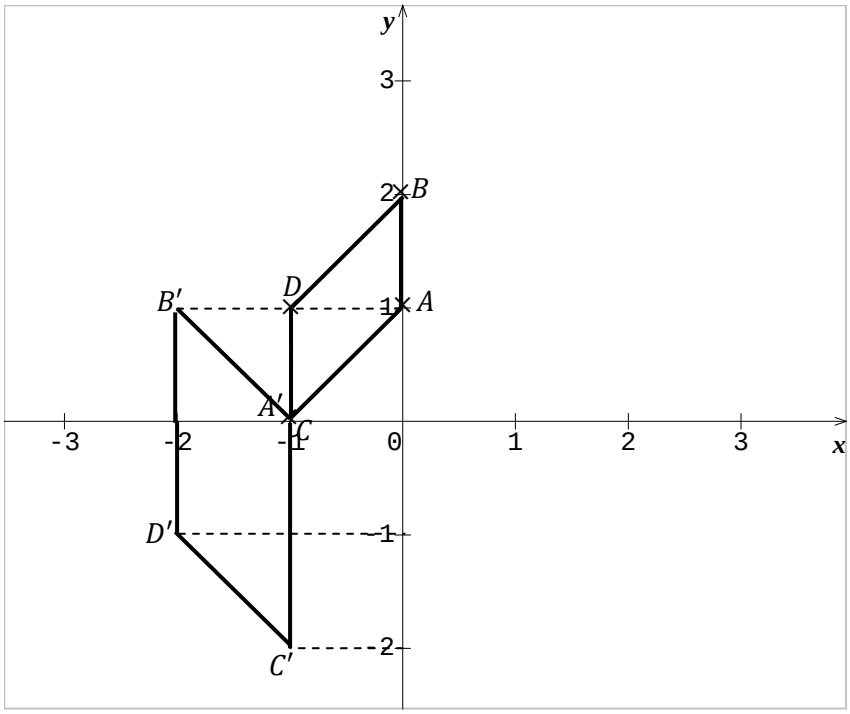
a) Plaçons les points A; B; C et D dans le plan.

$A \to i$ => $A\binom{0}{1}$

$B \to 2i$ => $B\binom{0}{2}$

$C \to -1$ => $C\binom{-1}{0}$

$D \to -1 + i$ => $D\binom{-1}{1}$



b) Démontrons que $ABDC$ est un parallélogramme dont on Précisera l'aire en cm^2

$ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ =>$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix}$ =>$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Puisque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $ABDC$ est un parallélogramme.

c) Donnons l'expression analytique de $f_{\frac{\pi}{4}}$.

On a f_α : $Z' = (1 + itan\,\alpha)Z - itan\,\alpha$

=> $f_{\frac{\pi}{4}}$: $Z' = (1 + itan\frac{\pi}{4})Z - itan\frac{\pi}{4}$

=> $f_{\frac{\pi}{4}}$: $Z' = (1 + i)Z - i$

Alors $Z' = (1 + i)Z - i$

$\Leftrightarrow x' + iy' = (1+i)(x+iy) - i$

$\Leftrightarrow x' + iy' = (x-y) + i(x+y-1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$

D'où l'expression analytique de $f_{\frac{\pi}{4}}$ est : $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$

d) En déduisons les coordonnées des points A' ; B' ; C' et D', images respectives par $f_{\frac{\pi}{4}}$ des points A ; B ; C et D.

$f_{\frac{\pi}{4}}(A) = A' \Leftrightarrow A'\begin{pmatrix} 0-1 \\ 0+1-1 \end{pmatrix}$ => $A'\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f_{\frac{\pi}{4}}(B) = B' \Leftrightarrow B'\begin{pmatrix} 0-2 \\ 0+2-1 \end{pmatrix}$ => $B'\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f_{\frac{\pi}{4}}(C) = C' \Leftrightarrow C'\begin{pmatrix} -1-0 \\ -1+0-1 \end{pmatrix}$ => $C'\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$f_{\frac{\pi}{4}}(D) = D' \Leftrightarrow D'\begin{pmatrix} -1-1 \\ -1+1-1 \end{pmatrix}$ => $D'\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

e) Plaçons ces images dans le plan (Voir figure)

18 Dans le plan complexe P, On donne :

$Z_A = 1$

$Z_N = iZ - (1+i)$.

$M' = bary\{(M\ ;\ \lambda)\ ;\ (N\ ;\ -\lambda);\ (A\ ;1)\}$

$T_\lambda(M) = M'$ Où λ est un nombre réel non nul.

1-Démontrons que pour tout M du plan, le point N est l'image de M par une rotation dont on Précisera les éléments caractéristiques.

$Z_N = iZ - (1+i)$. (Sous la forme $Z' = aZ + b$) avec $a = i$ et $b = -1 - i$

Puisque $a = i \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = |i| = 1$ $alors$ f est une rotation dont les éléments caractéristiques sont :

- Rapport : $k = |a| = |i| = 1$.

- Angle : $\theta = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$

- Centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-1-i}{1-i} = \frac{-(1+i)^2}{2} = -i$ => $\Omega(0\,;\,-1)$

2- a- Démontrons que l'affixe Z' du point M'est telle que $Z' = \lambda(1-i)\,Z + \lambda(1+i) + 1$.

On a : $M' = bary\{(M\,;\,\lambda)\,;\,(N\,;\,-\lambda);\,(A\,;1)\}$

=> $Z' = \frac{\lambda Z_M - \lambda Z_N + Z_A}{\lambda - \lambda + 1} = \frac{\lambda Z_M - \lambda Z_N + Z_A}{1} = \lambda Z_M - \lambda Z_N + Z_A$

=> $Z' = \lambda Z - \lambda[iZ - (1+i)] + 1$

$= \lambda Z - \lambda iZ + \lambda(1+i) + 1$

$= \lambda(1-i)\,Z + \lambda(1+i) + 1$. D'où T_λ: $Z' = \lambda(1-i)\,Z + \lambda(1+i) + 1$.

b- Démontrons que T_λ est une similitude directe dont on Précisera l'affixe du centre Ω ; le rapport et l'angle

NB : Si $Z' = aZ + b \;\; avec \;\; a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| \neq 1 \; alors \; f$ est une similitude directe de rapport $k = |a|$, d'angle $\alpha = \arg(a)$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.

On a T_λ: $Z' = \lambda(1-i)\,Z + \lambda(1+i) + 1$. Avec $a = \lambda(1-i)$ et $b = \lambda(1+i) + 1$

Ici $a = \lambda(1-i) \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = |\lambda(1-i)| = \sqrt{2\lambda^2} = \lambda\sqrt{2} \neq 1$

Alors T_λ est une similitude dont les éléments caractéristiques sont :

- Rapport : $k = |a| = |\lambda(1-i)| = \sqrt{2\lambda^2} = \lambda\sqrt{2}$

- Angle : $\theta = \arg[\lambda(1-i)] = -\frac{\pi}{4}$

- Centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{\lambda(1+i)+1}{1-[\lambda(1-i)]} = \frac{1-2i\lambda^2}{(1-\lambda)^2+\lambda^2}$

$= \frac{1}{(1-\lambda)^2+\lambda^2} + i\frac{-2\lambda^2}{(1-\lambda)^2+\lambda^2}$ => $\Omega\left(\frac{1}{(1-\lambda)^2+\lambda^2}\;;\;\frac{-2\lambda^2}{(1-\lambda)^2+\lambda^2}\right)$

c-Déterminons les valeurs de λ , pour la quelle T_λ est une rotation.

T_λ Est une rotation $si \; a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = 1$ or $a = \lambda(1-i)$

Puis que λ est un nombre réel non nul alors $\lambda(1-i) \in \mathbb{C}^* - \{1\}$

Alors la seconde condition est satisfaite si $|a| = 1 \Leftrightarrow\ |\lambda(1-i)| = 1\ \Leftrightarrow\sqrt{2\lambda^2} = 1$

$$\Leftrightarrow |\lambda|\sqrt{2} = 1\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} -\lambda\sqrt{2} = 1 \\ ou \\ \lambda\sqrt{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ ou \\ \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

d-Donnons dans chacun de ces cas l'angle et l'affixe de son centre.

g- Pour $\boldsymbol{\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$, on a :

- Angle : $\theta = \arg\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right] = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$
- Centre $\Omega\left(\frac{1}{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\ ;\ \frac{-2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right) \Rightarrow \Omega\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\ ;\ -\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$

h- Pour $\boldsymbol{\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}}$, on a :

- Angle : $\theta = \arg\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right] = -\frac{\pi}{4}$
- Centre $\Omega\left(\frac{1}{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\ ;\ \frac{-2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right) \Rightarrow \Omega\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\ ;\ -\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$

e- Exprimons les coordonnées $(x'\,;y')$ du point M' en fonction de celles $(x\,;y)$ de M pour chacun des valeurs de λ obtenus.

i- Pour $\boldsymbol{\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$, on a :

$$T_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}:\ Z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\,Z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) + 1$$

$$\Leftrightarrow x' + iy = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(x+iy)\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) + 1$$

$$\Leftrightarrow x' + iy = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x+y+1-\sqrt{2}\right)\ +\ i\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x+y+1-\sqrt{2}\right) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y-1) \end{cases}$$

j- Pour $\boldsymbol{\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}}$, on a :

$T_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$: $Z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\,Z + \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) + 1$

$\Leftrightarrow x' + iy = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(x+iy) - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) + 1$

$\Leftrightarrow x' + iy = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x + y + 1 + \sqrt{2}\right) + i\frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y + 1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x + y + 1 + \sqrt{2}\right) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y + 1) \end{cases}$

3- Le nombre réel λ étant strictement positif, on lui associe le point $P(-ln\lambda\,;\ ln\lambda)$.

Soit P' le point du plan tel que $T_\lambda(P) = P'$

a- Déterminons les coordonnées de P' en fonction de λ.

Pour cela Exprimons les coordonnées $(x'\,;y')$ du point M' en fonction de celles $(x\,;y)$ de M

On a : T_λ: $Z' = \lambda(1-i)\,Z + \lambda(1+i) + 1$

$\Leftrightarrow x' + iy = \lambda(1-i)(x+iy) + \lambda(1+i) + 1$

$\Leftrightarrow x' + iy = \lambda\left(x + y + 1 + \frac{1}{\lambda}\right) + i\lambda(-x + y + 1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \lambda\left(x + y + 1 + \frac{1}{\lambda}\right) \\ y' = \lambda(-x + y + 1) \end{cases}$

Alors $T_\lambda(P) = P' \Leftrightarrow \begin{cases} x_{P'} = \lambda\left(-ln\lambda + ln\lambda + 1 + \frac{1}{\lambda}\right) \\ y_{P'} = \lambda\left(ln\lambda + ln\lambda + 1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{P'} = \lambda\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \\ \square_{P'} = \lambda(2ln\lambda + 1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{P'} = \lambda + 1 \\ y_{P'} = 2\lambda ln\lambda + \lambda \end{cases}$ => $P'(\lambda + 1\ ;\ 2\lambda ln\lambda + \lambda\ )$

b- Démontrons que lorsque λ décrit $\mathbb{R}_+^*$; l'ensemble des points P' est la courbe (Γ) d'équation

$y = 2(x-1)ln(x-1) + (x-1)$.

On a : $\begin{cases} x_{P'} = \lambda + 1 \\ y_{P'} = 2\lambda ln\lambda + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = 2\lambda ln\lambda + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x - 1 & (\mathbf{1}) \\ y = 2\lambda ln\lambda + \lambda & (\mathbf{2}) \end{cases}$

En éliminant λ entre les équations $(\mathbf{1})$ et $(\mathbf{2})$ **;** on a :

$y = 2(x-1)ln(x-1) + (x-1)$

D'où lorsque λ décrit $\mathbb{R}_+^*$; l'ensemble des points P' est la courbe (Γ) d'équation

$y = 2(x-1)ln(x-1) + (x-1)$.

4- On pose $h(x) = y$ de sorte que la courbe de la fonction numérique h est (Γ)

a- Dressons le tableau de variation $de\ h$.

$h(x) = y \Leftrightarrow h(x) = 2(x-1)ln(x-1) + (x-1)$

$Dh = \{x/x \in \mathbb{R}\,; x-1 > 0\}$ => $Dh =]1\,; +\infty[$

$lim\ h(x) = lim\ 2(x-1)ln(x-1) + (x-1)$

$x \to 1 \qquad x \to 1$

Effectuons un changement de variable en posant $X = x - 1$

Si $x \to 1$ Alors $X \to 0$

D'où $lim\ h(x) \Leftrightarrow lim\ 2XlnX + X = 0$

$x \to 1 \qquad X \to 0$

De même

$lim\ h(x) = lim\ 2(x-1)ln(x-1) + (x-1)$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

Effectuons un changement de variable en posant $X = x - 1$

Si $x \to +\infty$ Alors $X \to +\infty$

D'où $lim\ h(x) \Leftrightarrow lim\ 2XlnX + X = +\infty$

$x \to +\infty \qquad X \to +\infty$

$h(x) = 2(x-1)ln(x-1) + (x-1)$ => $h'(x) = 2ln(x-1) + 3$

Posons $h'(x) > 0 \Leftrightarrow 2ln(x-1) + 3 > 0 \Leftrightarrow ln(x-1) > -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x - 1 > e^{-\frac{3}{2}}$

$\Leftrightarrow x > e^{-\frac{3}{2}} + 1$.

Ainsi on dira que pour les $x > e^{-\frac{3}{2}} + 1$; on a : $h'(x) > 0$.

D'où le tableau de variation de h est le suivant :

x	1		$e^{-\frac{3}{2}}+1$		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖ 0	↘	$-0{,}44$	↗	$+\infty$

b- Précisons une équation de chacune des éventuelles asymptotes à (Γ)

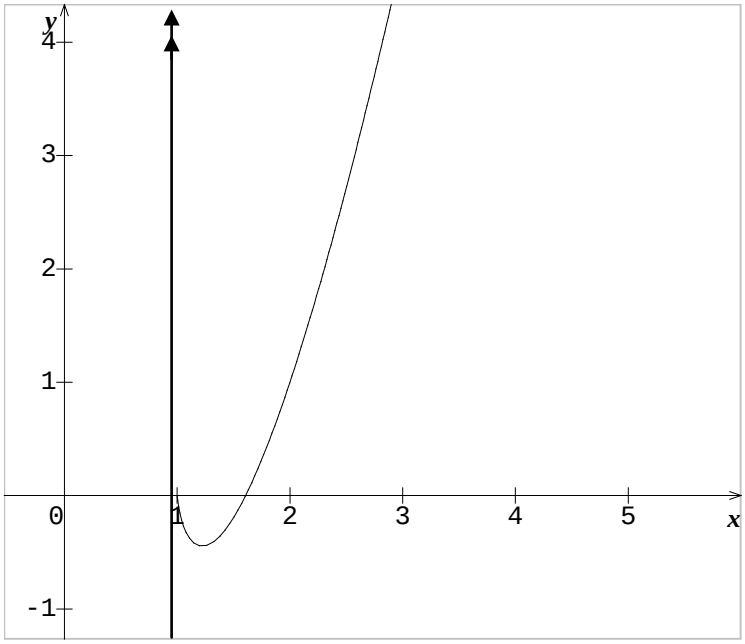
$x = 1$ Est asymptote verticale en $+\infty$

$lim\ \frac{h(x)}{x} = +\infty$

$x \to +\infty$

Alors la courbe (Γ) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (oy)

c- Représentons (Γ) dans un repère orthonormé du plan.



19 On donne deux points distincts A et B du plan affine et k un réel non nul tel que :

k- M_1; est l'image du point M par l'homothétie de centre A et de rapport k $\Leftrightarrow$

$M_1 = h_{(A;k)}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM_1} = k\overrightarrow{AM}$

l- $M' = bary\{(B\,,\alpha)\,;\,(M_1\,,1)\}$

1) Montrons que pour tout point M du plan, on a : $(\alpha+1)\overrightarrow{MM'} = (1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB}$.

$M' = bary\{(B\,,\alpha)\,;\,(M_1\,,1)\}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\alpha\overrightarrow{M'B}}_{} + \underbrace{\overrightarrow{M'M_1} = \vec{0}}_{}$

Introduisons Introduisons

Le point *M* Le point *A*

=> $\alpha\left(\overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AM_1}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{M'M} + \alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AM_1} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{M'M} + \alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AM_1} = \vec{0}$.

Or d'après la relation de Chasles on a : $\overrightarrow{M'A} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MA}$

Alors $\alpha\overrightarrow{M'M} + \alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AM_1} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{M'M} + \alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM_1} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \left(\alpha\overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{M'M}\right) + \alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM_1} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\alpha+1)\overrightarrow{M'M} + \alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM_1} = \vec{0}$

Or par hypothèse on a : $\overrightarrow{AM_1} = k\overrightarrow{AM}$

Alors $(\alpha+1)\overrightarrow{M'M} + \alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM_1} = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha+1)\overrightarrow{M'M} + \alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{AM} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\alpha+1)\overrightarrow{M'M} + \alpha\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MA} = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha+1)\overrightarrow{M'M} + \alpha\overrightarrow{MB} + (1-k)\overrightarrow{MA} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\alpha+1)\overrightarrow{M'M} + (1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\alpha+1)\overrightarrow{M'M} = -(1-k)\overrightarrow{MA} - \alpha\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\alpha+1)\overrightarrow{MM'} = (1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

D'où pour tout point M du plan, on a : $(\alpha+1)\overrightarrow{MM'} = (1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{B}$.

2) Montrons que si $k = \alpha + 1$ alors f est une translation dont on Déterminera le vecteur translateur.

On sait que $(\alpha+1)\overrightarrow{MM'} = (1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB}$. Or $k = \alpha + 1$

=> $(1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MM'}$.

D'où $(1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB}$ est un vecteur constant et par conséquent $f(M) = M'$ avec

$\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{\alpha+1}\vec{u}$ Où $\vec{u} = (1-k)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB} + \alpha\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{u} = \alpha\overrightarrow{AB}$

En conclusion f est une translation de vecteur $\vec{v} = \frac{\alpha}{\alpha+1}\overrightarrow{AB}$

3) Montrons que si $k \neq \alpha + 1$, il existe un unique point invariant G par f

Si $k \neq \alpha + 1$, le système $\{(B\ , 1-k)\ ;\ (B\ , \alpha)\}$ admet un barycentre G tel que :

$\alpha\overrightarrow{GB} + (1-k)\overrightarrow{GA} = \vec{0} \Leftrightarrow f(G) = G$.

D'où G est le seule point invariant par f.

En déduisons alors que f est une homothétie dont on Déterminera les éléments caractéristiques

$(\alpha+1)\overrightarrow{MM'} = \alpha\overrightarrow{MG} + (1-k)\overrightarrow{GA} \Leftrightarrow (\alpha+1)\overrightarrow{GM'} = -k\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = \frac{k}{\alpha+1}\overrightarrow{GM}$

D'où f est une homothétie de rapport $\frac{k}{\alpha+1}$ et de centre G.

20 On désigne par $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan P. Soit a un nombre réel et f_a l'application affine de P dans luis - même qui au point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = (a+3)x - ay + a + 9 \end{cases}$$

1) a- Démontrons que pour toute valeur non nulle de a, f_a est une bijection.

Soit φ l'endomorphisme associé à f_a.

La matrice de f_a dans la base $(\vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ est $M_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a+3 & -a \end{pmatrix}$

Ainsi le déterminant associé à cette matrice est : $detM_a = \begin{vmatrix} a & 0 \\ a+3 & -a \end{vmatrix}$

$detM_a = \begin{vmatrix} a & 0 \\ a+3 & -a \end{vmatrix} = -a^2 - 0(a+3) = -a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0.$

D'où pour toute valeur non nulle de a , f_a est bijective.

b- Déterminons l'application f_a^{-1}, réciproque de f_a pour $a \neq 0$.

Pour $a \neq 0$, $f_a(M) = M' \Leftrightarrow f_a^{-1}(M') = M \Leftrightarrow \begin{cases} x' = ax \\ y' = (a+3)x - ay + a + 9 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{a}x' \\ ay = \frac{a+3}{a}x' - y' + a + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{a}x' \\ y = \frac{a+3}{a^2}x' - \frac{1}{a}y' + \frac{a+9}{a} \end{cases}$$

D'où f_a^{-1} est définie par :

f_a^{-1}: $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ Avec $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a}x \\ y_1 = \frac{a+3}{a^2}x - \frac{1}{a}y + \frac{a+9}{a} \end{cases}$

c- Déterminons l'ensemble des points invariants par f_a. (On discutera suivant les valeurs du un nombre réel a).

L'ensemble des points invariants par f_a est donné par $f_a(M) = M \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = ax \\ y = (a+3)x - ay + a + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)x = 0 \\ (a+3)x - (a+1)y = -a - 9 \end{cases}$$

Le déterminant associé à ce système est $detM_a = \begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ a+3 & -(a+1) \end{vmatrix} = -(a-1)(a+1)$

Alors $detM_a = 0 \Leftrightarrow -(a-1)(a+1) = 0 \Leftrightarrow a = 1$ ou $a = -1$

m- **<u>Si $\boldsymbol{a = 1}$</u>**

On a $f_1(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 4x - y + 10 \end{cases} \Leftrightarrow 4x - 2y = -10 \Leftrightarrow 2x - y + 5 = 0$

D'où pour $\boldsymbol{a = 1}$, l'ensemble des points invariants chercher est la droite d'équation :

$2x - y + 5 = 0$

n- **<u>Si $\boldsymbol{a = -1}$</u>**

On a $f_{-1}(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x \\ y = 2x + y + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2x = -8 \end{cases}$ ce qui est absurde.

D'où pour $a = -1$, l'ensemble des points invariants n'existe pas.

2) a- Démontrons que seule f_1 est une involution.

On a $f_1 : \begin{cases} x' = x \\ y' = 4x - y + 10 \end{cases}$

Soit φ l'endomorphisme associé à f_1.

Ainsi la matrice de f_1 dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ est $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

Par conséquent f_1 est involutive si et seulement si $M_1 \times M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ = (matrice identique)

$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ => $M_1 \times M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'où f est involutive.

Caractérisons cette involution.

- On sait que la droite d'équation : $2x - y + 5 = 0$ est l'ensemble des points invariants par f_1.

- On sait que aussi que $\varphi_{-1}(\vec{u}) = -\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x \\ -y = 4x - y \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

Conclusion : f_1 est la symétrie affine par rapport à la droite $2x - y + 5 = 0$ parallèlement à la droite vectorielle $x = 0$.

b- Démontrons que seule f_{-1} est la composée d'une symétrie s et d'une translation $\boldsymbol{t}$ dont le vecteur est un directeur de l'ensemble des points invariants par s, c'est-à-dire que $f_{-1} = tos$.

On a $f_{-1} : \begin{cases} x' = -x \\ y' = 2x + y + 8 \end{cases}$

Soit φ' l'endomorphisme associé à f_{-1}.

Ainsi la matrice de f_{-1} dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ est $M_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Par conséquent $M_{-1} \times M_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matrice identique)

D'où f_{-1} est involutive.

D'autre part, f_{-1} n'admet pas de point invariant donc $f_{-1} = tos = sot$ où s est une symétrie et t une translation.

$f_{-1}of_{-1} = (tos)o(sot) = to(sos)ot = tot.$

Si $\vec{u}$ est le vecteur de la translation t, alors $tot = t_{2\vec{u}}$ et par conséquent $t_{2\vec{u}} = f_{-1}of_{-1}$.

D'autre part on sait que $f_{-1}of_{-1}$ est définie par : $\begin{cases} x'' = x \\ y'' = y + 16 \end{cases}$ => $2\vec{u}$ a pour coordonnées $(0\,;16)$ et par conséquent $\vec{u}(0\,;8)$.

$f_{-1} = tos \Leftrightarrow s = t^{-1}of_{-1} \Leftrightarrow s$ Est définie analytiquement par : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = 2x + y \end{cases}$

$s(M) = M \Leftrightarrow x = 0.$

L'ensemble des points invariants par s est la droite d'équation $x = 0$.

Nous remarquons que le vecteur $\vec{u}(0\,;8)$ appartient à la direction de cette droite.

21 Dans un espace affine euclidienne E rapporté à un repère orthonormé $(o\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$, on donne les points $A\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$

1) Montrons qu'il existe un et un seul retournement (demi-tour) noté f tel que $f(O) = A$ et $f(B) = B$. Puis caractérisons géométriquement ce retournement et donnons sa représentation analytique.

Un demi-tour étant une rotation d'axe Δ et d'angle π, il est aussi considéré comme une symétrie orthogonale d'axe Δ. Ainsi un demi-tour peut être Détermine par un point invariant (un point de Δ) et un point n'appartenant pas à Δ et son image ; donc $f(O) = A$ et $f(B) = B$ définissent un seul demi-tour f. Soit I le milieu du segment $[O;A]$ alors l'axe du demi-tour f est la droite (IB). Nous avons $I\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (IB) \Leftrightarrow$ il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{IM} = \lambda\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases}$

L'axe Δ = (IB) de $\vec{\imath}$ est engendré par $\vec{\jmath}$. Le plan orthogonal à cet axe est donc par $(\vec{\imath}\,;\vec{k})$. Ainsi en désignant par φ l'endomorphisme associé à f, alors on a :

$\varphi(\vec{j}) = \vec{j}$; $\varphi(\vec{\imath}) = -\vec{\imath}$ et $\varphi(\vec{k}) = -\vec{k}$.

La matrice de φ dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ est donc $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$. Soit $M\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ un point de E tel

que $f(M) = M'\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{f(0)f(M)} = \varphi(\overrightarrow{OM}) \Leftrightarrow \begin{cases}x' = -x\\ y' = y\\ z' = -z+2\end{cases}$

2) Soit g l'application de E vers E qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}$ telle que :

$$\begin{cases}x' = x\\ y' = y\\ z' = -z+2\end{cases}$$

Déterminons la nature de g et ces éléments caractéristiques. On Précisera $g(A)$ et $g(B)$.

g Est une isométrie affine car son endomorphisme associé est une isométrie vectorielle.

$g(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases}x = x\\ y = y\\ z = -z+2\end{cases} \Leftrightarrow z = 1$. Alors l'ensemble des points invariants par g est le

plan π d'équation $z - 1 = 0$. g est donc la symétrie orthogonale par rapport à π.

Par conséquent $g(A) = C$ et $g(B) = D$.

3) Soit $h = fog$. Montrons que h est déplacement dont on Déterminera la nature et les éléments caractéristiques.

On sait que f est un demi-tour et g la symétrie orthogonale par rapport à π.

Donc fog est un déplacement et nous remarquons que $(fog)(B) = f[g(B)] = f(D) = B$.

De même, $(fog)(I) = f[g(I)] = I$. D'où la droite (IB) est invariante par $fog = h$.

En conclusion : h est la rotation affine d'axe la droite (IB).

22 Le plan affine E est rapporté à un repère orthonormé $(o\,;\vec{\imath}\,;\vec{j}\,)$.

On considère l'application f de E dans E qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ telle que : $\begin{cases}x' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2}\\ y' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

1) a- Montrons que pour tout point M, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur constant.

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} - x\\ \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} - y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$

Avec $\begin{cases}X = -\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2}\\ Y = \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}X = -\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2}\\ Y = -\sqrt{3}\left(-\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2}\right)\end{cases} \Leftrightarrow$

$Y = -\sqrt{3}X$. D'où le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ appartient la droite vectorielle d'équation $Y = -\sqrt{3}X \Leftrightarrow$

$\sqrt{3}X + Y = 0$

b- Etudions l'ensemble des points invariants par f.

$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases}x = -\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2}\\ y = \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow -x - \sqrt{3} + 2 = 0$

L'ensemble des points invariants par f est donc la droite (D) : $-x - \sqrt{3} + 2 = 0$.

c- Déterminons la nature de l'application f.

Des questions a) et b) , nous déduisons que f est la projection affine sur la droite (D) parallèlement au vecteur $\vec{u}$.

2) Soit g l'application de E dans E qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$associe le point $M''\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$ telle que

: $\begin{cases}x'' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\\ y'' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\end{cases}$

a- Montrons que g peut s'écrire hof où h est une application de E dans E que l'on Précisera.

$\begin{cases}x'' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\\ y'' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x'' = x' + \frac{\sqrt{3}}{2}\\ y'' = y' + \frac{1}{2}\end{cases}$

Alors M'' est l'image de M' par la translation de vecteur $\vec{v}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

D'où $g = hof$ où h est la translation de vecteur $\vec{v}$.

b- Sans Calcule, vérifions que $hof = foh$.

h Étant une translation, elle commute avec toute application affine.

D'où $hof = foh$.