

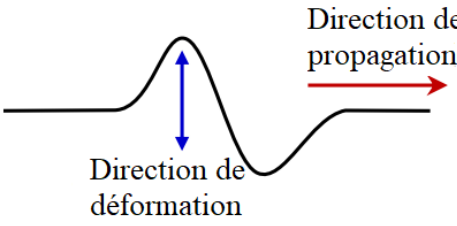
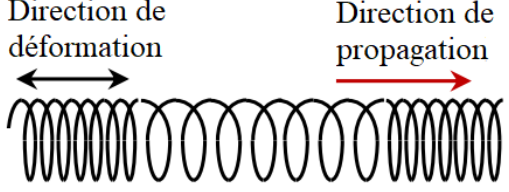
Les ondes mécaniques progressives

iv. Les ondes mécaniques

1) Définition

Onde mécanique : est le phénomène de propagation d'une perturbation dans un milieu matériel élastique sans transport de la matière

2) Type d'ondes mécaniques progressives

Onde transversale	Onde longitudinale
La déformation du milieu matériel est perpendiculaire à la direction de propagation 	La déformation du milieu matériel est parallèle à la direction de propagation. 

3) Dimension d'onde

Onde monodimensionnelle	Onde bidimensionnelle	Onde tridimensionnelle
La propagation a lieu dans une seule direction	La propagation a lieu dans un plan (deux dimensions)	La propagation a lieu dans l'espace (trois dimensions)

4) L'onde sonore

L'onde sonore est une onde mécanique longitudinales tridimensionnelle sa propagation nécessite la présence d'un milieu matériel

5) Superposition de deux ondes

Deux ondes mécaniques peuvent se superposer sans se perturber

v. La célérité de propagation d'une onde

1) Définition

La célérité (vitesse de propagation) V d'une onde progressive dans un milieu monodimensionnelle est

donnée par : $V = \frac{d}{\Delta t} = \frac{MM'}{\Delta t}$ avec $\begin{cases} V : \text{la vitesse de l'onde en (m/s)} \\ d : \text{la distance parcourue par l'onde en (m)} \\ \Delta t : \text{la durée de parcours (s)} \end{cases}$

2) Facteurs influençant sur la vitesse de propagation

✚ Influence de l'élasticité du milieu

La célérité d'une onde augmente avec l'élasticité du milieu de propagation.

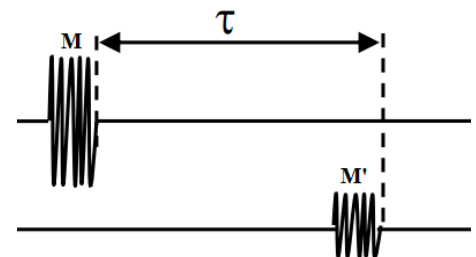
✚ Influence de l'inertie du milieu

Plus l'inertie du milieu est grande plus la célérité est faible.

3) Le retard temporel

Le mouvement du point M' reproduit le mouvement du point M mais avec un décalage dans le temps ou retard τ exprimé par la relation :

$$\tau = \frac{MM'}{V} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tau : \text{le retard temporel en (s)} \\ MM' : \text{la distance entre M et M' en (m)} \\ V : \text{la vitesse de l'onde en (m/s)} \end{cases}$$



La relation entre Y_M l'amplitude du point M et $Y_{M'}$ l'amplitude du point M' est : $Y_{M'}(t) = Y_M(t - \tau)$

Les ondes mécaniques progressives périodiques

i. Onde mécanique progressive périodique

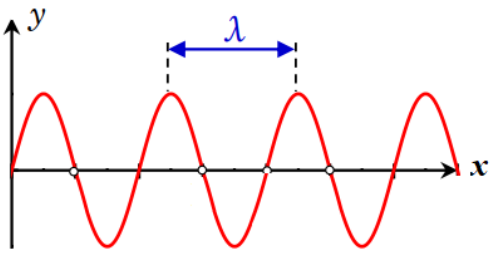
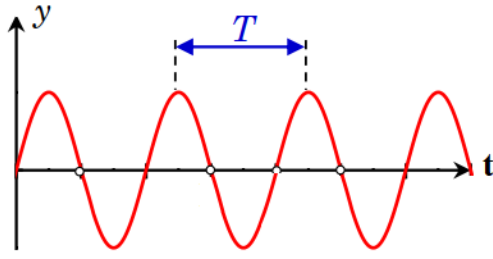
1) Onde mécanique progressive périodique

Une onde mécanique est périodique si la perturbation se répète identique à lui-même à des intervalles de temps identiques

2) Onde mécanique progressive sinusoïdale

Une onde progressive périodique est dite sinusoïdale si la perturbation créée par la source entraîne une variation sinusoïdale en fonction du temps

ii. Caractéristiques d'une onde progressive périodique

Périodicité spatiale (longueur d'onde λ)	Périodicité temporelle (la période T)
la longueur d'onde est la distance séparant deux points consécutifs du milieu de la propagation présentant le même état vibratoire	Le période est la durée qui sépare deux points consécutifs du milieu de propagation présentant le même état vibratoire
	

Remarque : La fréquence est le nombre de périodes par unité de temps : $N = \frac{1}{T}$

1) Vitesse de propagation d'une onde périodique

$$V = \frac{\lambda}{T} = N \cdot \lambda \quad \text{Avec} \quad \begin{cases} V : \text{la vitesse de l'onde en (m/s)} \\ \lambda : \text{la longueur d'onde en (m)} \\ T : \text{la période en (s)} \\ N : \text{la fréquence en (Hz)} \end{cases}$$

2) Mouvements de deux points du milieu de propagation

Deux points M_1 et M_2 d'un milieu vibrent en phase si :

$$M_1 M_2 = k \cdot \lambda$$

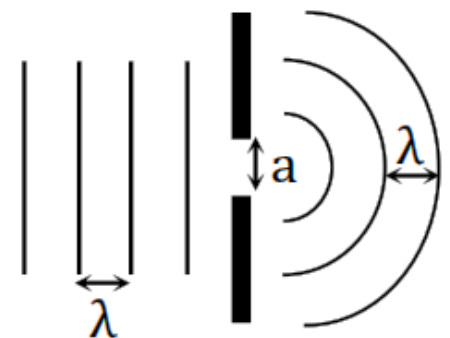
Deux points M_1 et M_2 d'un milieu vibrent en opposition de phase si : $M_1 M_2 = (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$

iii. Phénomène de diffraction

Lorsqu'une onde mécanique franchit un obstacle ou traverse une ouverture, il peut se produire le phénomène de diffraction

Pour avoir ce phénomène, il faut que : $a \leq \lambda$

Les deux ondes incidente et diffractée ont même fréquence N et même vitesse V et même longueur d'onde λ



iv. Milieu dispersif

Un milieu est **dispersif** si la vitesse (célérité) de l'onde dans le milieu dépend de la fréquence de la source

v. Le stroboscope

Un stroboscope est un flash électronique capable d'émettre des éclairs à une fréquence réglable N_s , il permet d'étudier les phénomènes périodiques rapides, concédons un mouvement périodique de période T :

Si $T = k \cdot T_s$	Si $T < T_s$	Si $T > T_s$
l'onde est immobile	mouvement de l'onde est ralenti dans le sens direct	mouvement de l'onde est ralenti dans le sens inverse

Propagation d'une onde lumineuse

i. Onde lumineuse

1) Définitions

- ✚ L'onde lumineuse est la propagation d'une perturbation électromagnétique dans les milieux transparents
- ✚ La lumière est une onde électromagnétique dont célérité dans le vide est : $c = 3.10^8 \text{ m/s}$
- ✚ Lumière monochromatique : lumière constituée d'une seule radiation (une seule longueur d'onde)
- ✚ Lumière polychromatique : lumière constituée d'un ensemble de lumières monochromatiques

2) Vitesse de propagation d'une onde lumineuse

La célérité dans le vide	La célérité dans un milieu matériel
$C = \frac{\lambda_0}{T} = v \cdot \lambda_0$	$V = \frac{\lambda}{T} = v \cdot \lambda$
λ_0 : Longueur d'onde dans le vide	λ : Longueur d'onde un milieu matériel

Remarque

- ✚ La fréquence de l'onde lumineuse ν ne dépend pas du milieu de propagation
- ✚ Domaine des ondes lumineuses visibles : $\lambda \in [400\text{nm}; 800\text{nm}]$

ii. Diffraction d'une onde lumineuse monochromatique

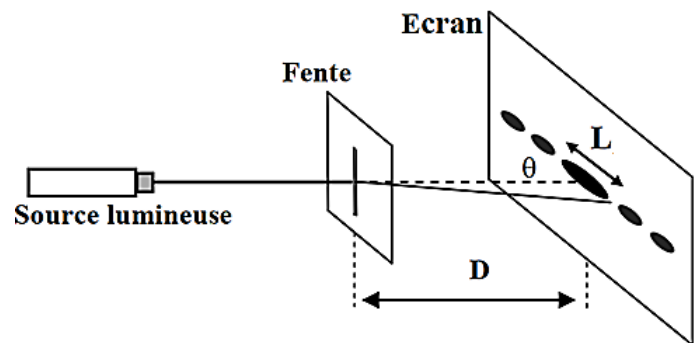
1) Aspect ondulatoire de la lumière

La lumière monochromatique subit le phénomène de diffraction par une fente ($a \leq \lambda$) ce qui montre que la lumière a un aspect ondulatoire

2) Ecart angulaire θ

L'écart angulaire du faisceau diffracté est l'angle entre le milieu de la tache centrale et la première extinction

$$\theta = \frac{\lambda}{a} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \theta : \text{L'écart angulaire en (rad)} \\ \lambda : \text{La longueur d'onde en (m)} \\ a : \text{La largeur de la fente en (m)} \end{cases}$$



- ✚ Pour un angle θ très petit ($\tan \theta \approx \theta$) on peut montrer que : $L = \frac{2\lambda \cdot D}{a}$

iii. Dispersion de la lumière

1) Indice de réfraction

On définit l'indice de réfraction n dans un milieu transparent pour une lumière monochromatique par :

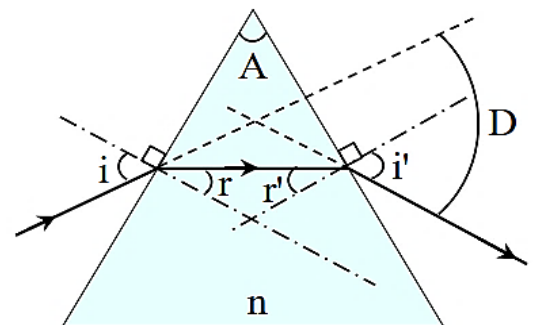
$$n = \frac{C}{V} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} V : \text{La vitesse de la lumière dans un milieu d'indice } n \\ C : \text{La célérité de la lumière dans le vide} \end{cases}$$

2) Dispersion de la lumière blanche par un prisme

- ✚ La dispersion de la lumière est la décomposition de la lumière polychromatique en radiations de différentes couleurs
- ✚ Lorsque la lumière blanche travers le prisme, la lumière se décompose en plusieurs couleurs et chaque couleur subit une déviation D

3) Les formules de prisme

- ✚ Loi de la réfraction (1^{ère} face) : $\sin i' = n \sin r'$
- ✚ Loi de la réfraction (2^{ème} face) : $\sin i = n \sin r$
- ✚ L'angle du prisme : $A = r + r'$
- ✚ La déviation : $D = i + i' - A$

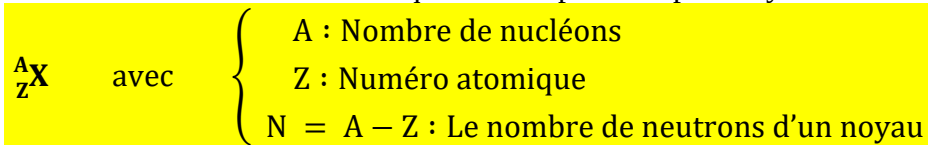


La décroissance radioactive

i. Stabilité et instabilité des noyaux

1) Composition du noyau

Le noyau d'un atome associé à un élément chimique X est représenté par le symbole :



2) Isotopes

Deux noyaux isotopes ont le même nombre de protons mais des nombres de neutrons différents (Z identique mais A différents)

ii. La radioactivité

1) Définition

La radioactivité est une transformation naturelle, spontanée et imprévisible d'un noyau ${}^A_ZX$ instable en un noyau ${}^{A'}_{Z'}Y$ plus stable avec l'émission d'une ou de plusieurs particules (α , β et souvent un rayonnement γ)

2) Lois de conservation (lois de Soddy)

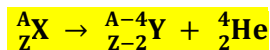
La réaction nucléaire obéit à des lois de conservation (lois de Soddy) :

- ✚ Conservation du nombre de charge Z
- ✚ Conservation du nombre des nucléons A

3) La radioactivité α , β^- et β^+

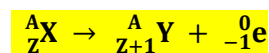
La radioactivité α

Transformation nucléaire d'un noyau ${}^A_ZX$ instable en un noyau ${}^{A'}_{Z'}Y$ plus stable avec l'émission d'un noyau d'Hélium ${}^4_2\text{He}$



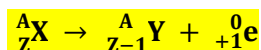
La radioactivité β^-

Transformation nucléaire d'un noyau ${}^A_ZX$ instable en un noyau ${}^{A'}_{Z'}Y$ plus stable avec l'émission d'un électron ${}^0_{-1}e$



La radioactivité β^+

Transformation nucléaire d'un noyau ${}^A_ZX$ instable en un noyau ${}^{A'}_{Z'}Y$ plus stable avec l'émission d'un positron ${}^0_{+1}e$



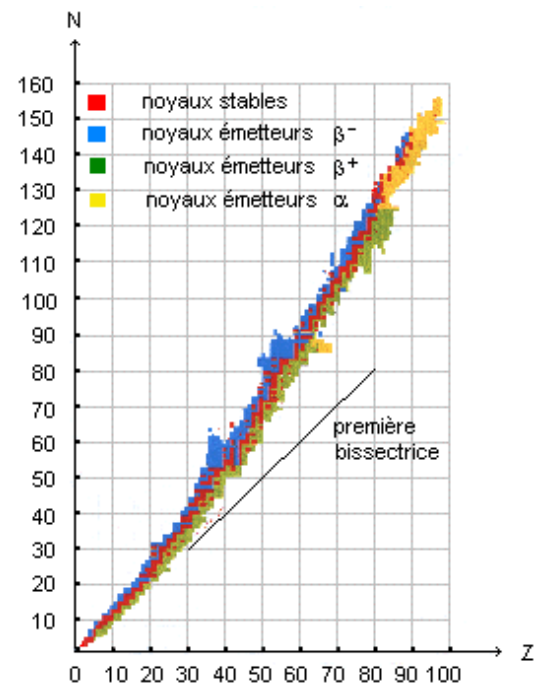
4) Emission gamma γ

Le noyau issu d'une désintégration α ou β est souvent dans un état excité, il se désexcite en libérant un rayonnement électromagnétique γ :



5) Famille radioactive

Une famille radioactive est une suite de nucléides descendant d'un même noyau (noyau père), par une suite de désintégrations successives jusqu'à l'obtention d'un noyau stable



iii. La décroissance radioactive

1) Loi de décroissance radioactive

Le nombre de noyaux $N(t)$ d'un échantillon radioactif suit la loi de décroissance radioactive :

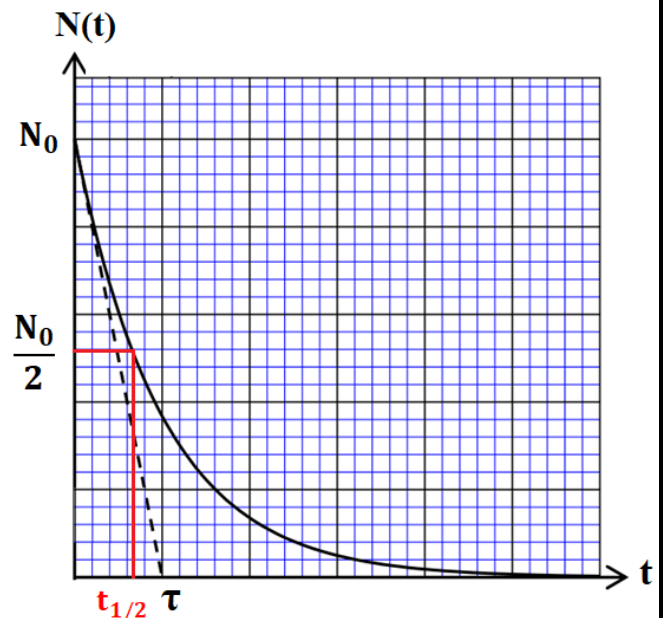
$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad \begin{cases} N(t): \text{nombre de noyaux à l'instant } t \\ N_0: \text{nombre de noyaux à } t = 0 \text{ s} \\ \lambda: \text{constante radioactive} \end{cases}$$

Remarque

On montre : $m = m_0 e^{-\lambda t}$ et $n = n_0 e^{-\lambda t}$

2) Constante du temps et demi vie

✚ Demi-vie $t_{1/2}$ d'un échantillon radioactif est la durée au bout de laquelle le nombre des noyaux radioactifs se divise en deux.



✚ La constante de temps τ est donnée par la relation : $\tau = \frac{1}{\lambda}$

Remarque

La relation entre la demi-vie et la constante radioactive : $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \cdot \ln 2$

3) Activité d'une source radioactive

✚ L'activité a mesure le nombre moyen de désintégrations par unité de temps elle s'exprime en becquerels (Bq) :

$$a(t) = -\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N(t)$$

✚ 1Bq correspond à une désintégration par seconde

✚ La loi de la décroissance radioactive en fonction de l'activité a :

$$a(t) = a_0 e^{-\lambda t} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a(t): \text{l'activité à l'instant } t \\ a_0: \text{l'activité à } t = 0 \text{ s} \\ \lambda: \text{constante radioactive} \end{cases}$$

v. La datation par le carbone 14

Dès qu'un être vivant mort, le carbone '14' n'est plus renouvelé il se met à décroître.

Pour déterminer l'âge du matériau mort, on mesure l'activité $a(t)$ du carbone 14 d'un échantillon de matériau mort et on mesure l'activité a_0 d'un même matériau vivant et on applique la formule :

$$a(t) = a_0 e^{-\lambda t} \Leftrightarrow t = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{a_0}{a(t)}$$

Formules mathématiques

$\frac{d(e^{ax})}{dx} = ae^x$	$\frac{d(\ln ax)}{dx} = \frac{a}{x}$
$e^0 = 1$	$\ln 1 = 0$
$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$	$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$
$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$	$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
$(e^a)^b = e^{a \cdot b}$	$\ln(a^b) = b \ln a$
$e^{\ln a} = a$	$\ln(e^a) = a$

Noyaux, masse et énergie

i. Équivalence masse - énergie

1) Relation d'Einstein

Toute particule de masse m possède une énergie E donnée par la relation d'Einstein : $E = m \cdot c^2$

c : La célérité de la lumière dans le vide $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

2) Unités de masse et d'énergie

L'unité de masse atomique : u	Unité d'énergie : eV
$1u \approx 1,6 \times 10^{-27} \text{ kg}$	$1 \text{ MeV} = 10^6 eV = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$

Remarque : On utilise souvent : $1u = 931.5 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$

ii. Energie de liaison du noyau

1) Défaut de masse du noyau Δm

Le défaut de masse Δm d'un noyau ${}^A_Z X$ est la différence entre la somme des masses de ses nucléons pris séparément et la masse du noyau :

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m({}^A_Z X)$$

2) Énergie de liaison d'un noyau E_l

L'énergie de liaison E_l d'un noyau est l'énergie que le milieu extérieur doit fournir à un noyau ${}^A_Z X$ pour le dissocier en nucléons séparés :

$$E_l = \Delta m \cdot c^2 = [Zm_p + (A - Z)m_n - m({}^A_Z X)] \cdot c^2$$

3) Energie de liaison par nucléon ξ

L'énergie de liaison par nucléon ξ est donnée par :

$$\xi = \frac{E_l}{A} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} E_l : \text{énergie de liaison} \\ A : \text{nombre de nucléons} \end{cases}$$

✚ Un noyau est d'autant **plus stable** que son énergie de liaison par nucléon est **grande**

iii. Réaction nucléaire

1) La fusion nucléaire

La fusion est une réaction nucléaire au cours de laquelle deux noyaux légers s'unissent pour former un noyau lourd. (Exemple : ${}^3_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n}$)

2) La fission nucléaire

La fission est une réaction nucléaire au cours de laquelle un neutron lent (neutron thermique) brise un noyau lourd pour former deux noyaux plus légers. (Exemple ${}^1_0\text{n} + {}^{235}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{94}_{38}\text{Sr} + {}^{140}_{54}\text{Xe} + 2 \cdot {}^1_0\text{n}$)

3) Energie d'une réaction nucléaire

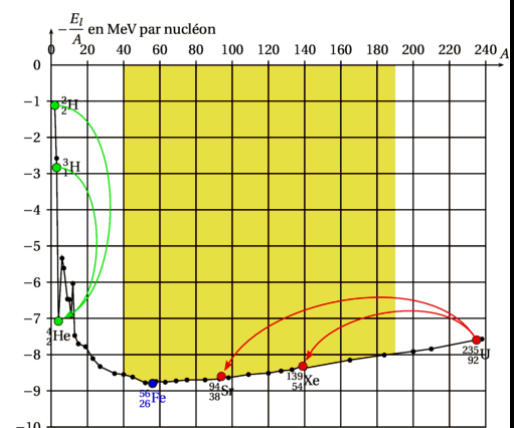
L'énergie de la transformation nucléaire est donnée par la relation suivante :

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = \left[\sum m_{(\text{produits})} - \sum m_{(\text{réactifs})} \right] c^2$$

iv. Stabilité des noyaux et courbe d'Aston

✚ La courbe d'Aston représente $\frac{-E_l}{A}$ en fonction de A , permet de comparer la stabilité des noyaux atomiques et de prévoir la nature de réaction nucléaire qui peut se produire.

✚ La partie jaune de la courbe d'Aston ci-contre contient les noyaux stables

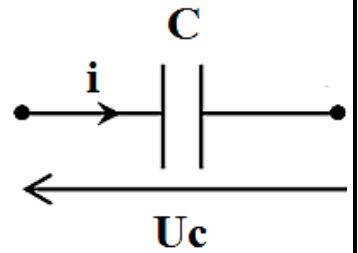


Dipôle RC

i. Le condensateur

1) Définition

Le condensateur est un dipôle constitué de deux armatures conductrices séparées par un isolant, chaque condensateur est caractérisé par sa capacité C en Farad (F)



2) Relation charge – tension

La charge q d'un condensateur, est liée à la tension U_C par la relation :

$$q = C \cdot U_C \quad \text{Avec} \quad \begin{cases} U_C : \text{tension aux bornes de condensateur en (V)} \\ q : \text{la charge du condensateur en (C)} \end{cases}$$

3) Charge électrique et intensité du courant

L'intensité du courant $i(t)$ traversant un condensateur est la variation de la charge q au cours du temps t .

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{dU_C}{dt}$$

Remarque : dans le cas d'un courant constant la relation devient : $I_0 = \frac{C \cdot U_C}{\Delta t}$

4) Association des condensateurs

Association en série	Association en dérivation
$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$	$C_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^N C_i$

5) Energie électrique stockée dans un condensateur

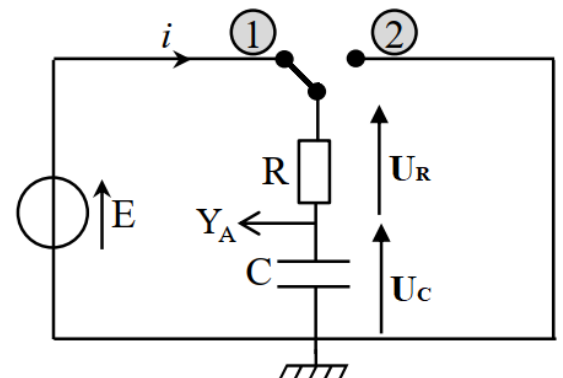
L'énergie E_e stockée dans un condensateur, est donnée par : $E_e = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_C^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C}$

ii. Charge et décharge d'un condensateur

1) Charge du condensateur

a) Etude expérimental

On réalise le montage expérimental ci-contre, à l'instant $t=0$ s on place l'interrupteur dans la position (1) et on visualise la variation de la tension $U_C(t)$ aux bornes du condensateur en fonction de temps, on obtient la courbe de la figure ci-dessous



b) Etude théorique

L'équation différentielle vérifiée par $U_C(t)$

En appliquant la loi d'additivité des tensions

$$U_C + U_R = E \quad \Leftrightarrow \quad U_C + R \cdot i = E$$

$$U_C + R \cdot C \frac{dU_C}{dt} = E \quad (1)$$

Détermination de $U_C(t)$

La solution de l'équation différentielle est sous la forme

$$U_C(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + B$$

En remplaçant $U_C(t)$ dans (1) et en utilisant les conditions initiales : $A = -B = E$ et $\tau = RC$

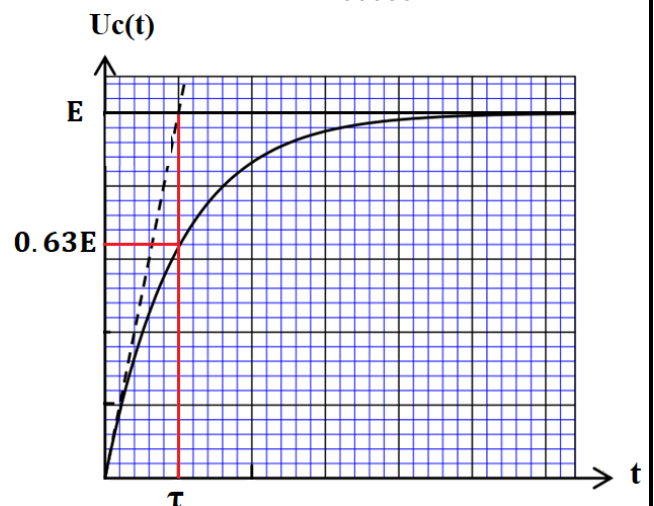
$$U_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Détermination de $q(t)$

$$q(t) = C \cdot U_C(t) = C \cdot E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Détermination de $i(t)$

$$i(t) = C \cdot \frac{dU_C}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$



2) Décharge du condensateur

a) Etude expérimentale

Après avoir chargée le condensateur on bascule l'interrupteur vers la position (2) (montage ci-contre)

On visualise la variation de la tension $U_C(t)$ aux bornes du condensateur en fonction de temps, on obtient la courbe de la figure ci-dessous

b) Etude théorique

✚ L'équation différentielle vérifiée par $U_C(t)$

En appliquant la loi d'additivité des tensions

$$U_C + U_R = 0$$

$$U_C + R \cdot i = 0$$

$$U_C + R \cdot C \frac{dU_C}{dt} = 0 \quad (2)$$

✚ Détermination de $U_C(t)$

La solution de l'équation différentielle est sous la forme

$$U_C(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + B$$

En remplaçant $U_C(t)$ dans (2) et en utilisant les conditions initiales : $A = E$ et $B = 0$ et $\tau = RC$

$$U_C(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$$

✚ Détermination de $q(t)$

$$q(t) = C \cdot U_C(t) = C \cdot E e^{-\frac{t}{\tau}}$$

✚ Détermination de $i(t)$

$$i(t) = C \cdot \frac{dU_C}{dt} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

✚ $\tau = RC$: la constante du temps du dipôle RC

3) La constante du temps

a) Détermination de la constante de temps

Cas de la charge	Cas de la décharge
$U_C(\tau) = 0.63 E$	$U_C(\tau) = 0.37 E$

Remarque

✚ La durée de la charge et de la décharge est $\Delta t \approx 5\tau$

✚ La durée de la charge et de la décharge augmente lorsque la capacité C et/ou la résistance R augmente

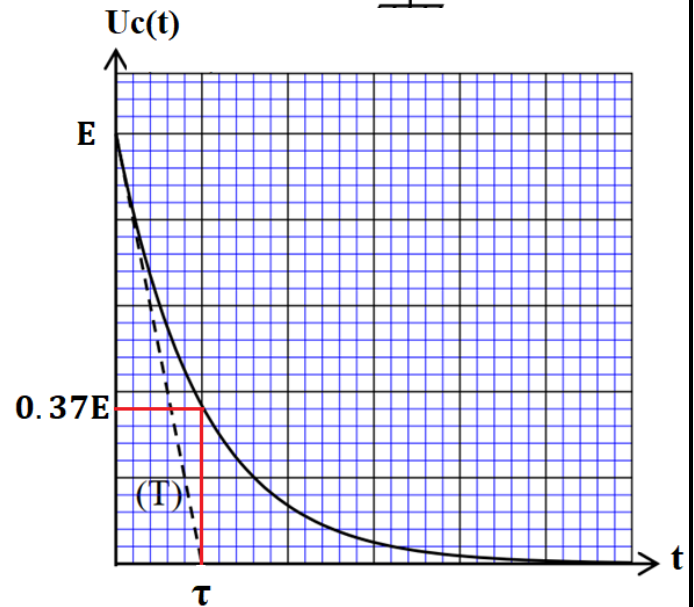
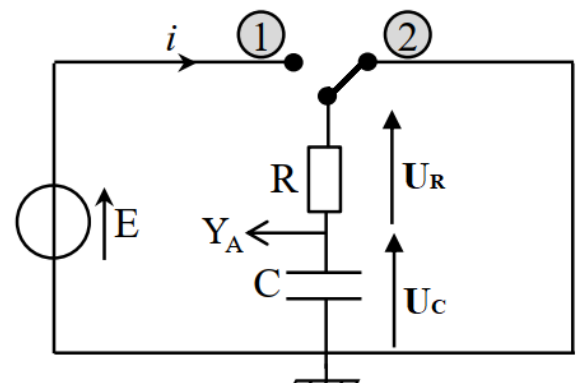
b) Analyse dimensionnel du constant de temps τ

$$\text{On a } \tau = RC \Leftrightarrow [\tau] = [R] \cdot [C]$$

$$\text{On a } U = R \cdot I \Leftrightarrow [R] = \frac{[U]}{[I]}$$

$$\text{On a } i(t) = C \cdot \frac{dU_C}{dt} \Leftrightarrow [C] = \frac{[I] \cdot [t]}{[U]}$$

$$[\tau] = [R] \cdot [C] = \frac{[U]}{[I]} \cdot \frac{[I] \cdot [t]}{[U]} \Leftrightarrow [\tau] = [t]$$



Dipôle RL

i. La bobine

1) Définition

Une bobine est un dipôle passif, formée d'un enroulement cylindrique, d'un fil électrique recouvert par un isolant, la bobine est caractérisée par son inductance L , exprimé en Henry (H)

2) La tension aux bornes de la bobine

La tension U_L aux bornes de la bobine est donnée par :

$$U_L = r \cdot i + L \frac{di}{dt} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} L : \text{L'inductance de la bobine en (H)} \\ r : \text{La résistance interne de la bobine en } (\Omega) \\ i : \text{L'intensité du courant en (A)} \end{cases}$$

Remarque

Courant continu $I = \text{cte}$	Résistance interne négligeable ($r = 0$)
$U_L = r \cdot i$	$U_L = L \frac{di}{dt}$

3) Influence de la bobine dans un circuit

Une bobine permet de retarder l'établissement ou la rupture (annulation) du courant qui la traverse

4) Energie emmagasiné dans une bobine

L'énergie magnétique stockée dans une bobine, est donnée par :

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$$

ii. Etablissement et rupture du courant

1) Etablissement du courant

a) Etude expérimental

On réalise le montage expérimental ci-contre à l'instant $t=0s$ on ferme l'interrupteur K et on visualise la variation de l'intensité du courant $i(t)$ en fonction de temps

On obtient la courbe de la figure ci-dessous

b) Etude théorique

✚ L'équation différentielle vérifiée par $i(t)$

En appliquant la loi d'additivité des tensions :

$$\begin{aligned} U_L + U_R &= E \\ r \cdot i + L \frac{di}{dt} + R \cdot i &= E \\ (R + r)i + L \frac{di}{dt} &= E \\ i + \frac{L}{R + r} \frac{di}{dt} &= \frac{E}{R + r} \end{aligned}$$

✚ Détermination de $i(t)$

La solution de l'équation différentielle est sous la forme :

$$i(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + B$$

En remplaçant $i(t)$ dans l'équation différentielle et en

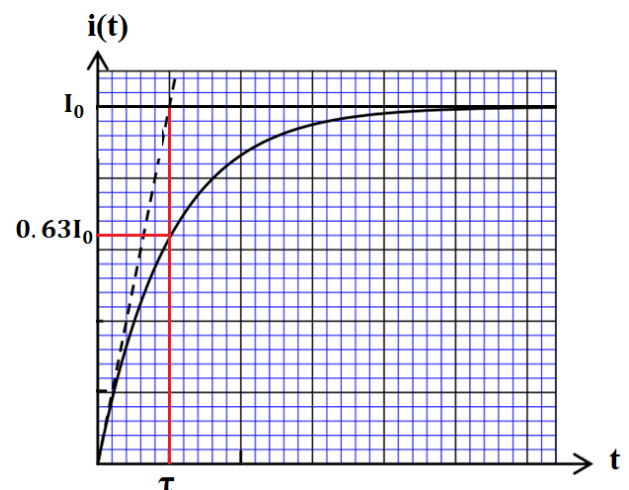
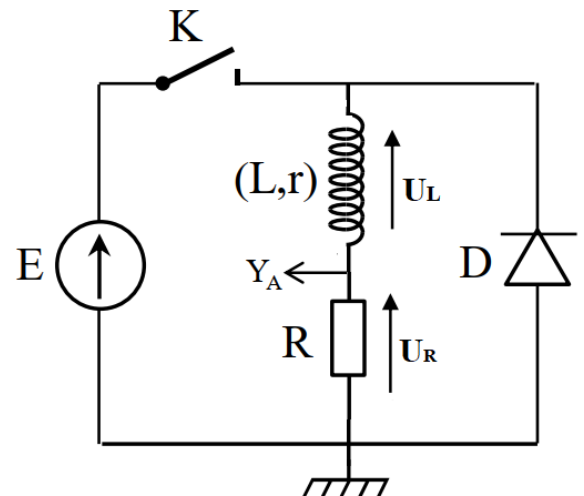
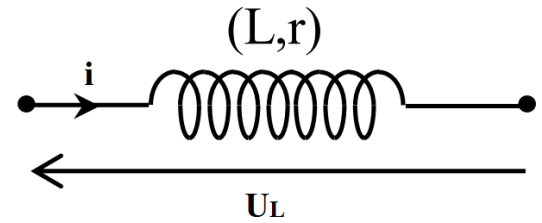
utilisant les conditions initiales : $A = -B = \frac{E}{R+r}$ et $\tau = \frac{L}{R+r}$

D'où

$$i(t) = I_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

✚ $I_0 = \frac{E}{R+r}$: La valeur maximale de l'intensité du courant

✚ $\tau = \frac{L}{R+r}$: La constante du temps du dipôle RL



2) Rupture du courant

Etude expérimentale

Après avoir établi le courant dans la bobine on ouvre l'interrupteur K (montage ci-contre) et on visualise la variation de l'intensité du courant $i(t)$ en fonction de temps (la figure ci-dessous)

Remarque

Le rôle de la diode dans le circuit est de protéger la bobine de la surtension qui peut apparaître à ces bornes lors de l'ouverture de l'interrupteur

Etude théorique

✚ L'équation différentielle vérifiée par $i(t)$

En appliquant la loi d'additivité des tensions :

$$U_L + U_R = 0$$

$$r \cdot i + L \frac{di}{dt} + R \cdot i = 0$$

$$(R + r)i + L \frac{di}{dt} = 0$$

$$i + \frac{L}{R+r} \cdot \frac{di}{dt} = 0$$

✚ Détermination de $i(t)$

La solution de l'équation différentielle est sous la forme

$$i(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + B$$

En remplaçant $i(t)$ dans l'équation différentielle et en

utilisant les conditions initiales : $A = \frac{E}{R+r} = I_0$ et $B = 0$ et $\tau = \frac{L}{R+r}$

D'où :

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

✚ $I_0 = \frac{E}{R+r}$: La valeur maximale de l'intensité du courant

✚ $\tau = \frac{L}{R+r}$: La constante du temps du dipôle RL

3) La constante du temps

a) Détermination de la constante du temps

Etablissement du courant	Rupture du courant
$i(\tau) = 0.63 I_0$	$i(\tau) = 0.37 I_0$

Remarque

✚ La durée de l'établissement et de la rupture du courant est $\Delta t \approx 5\tau$

✚ La durée de l'établissement et de la rupture augmente lorsque l'inductance L et/ou la résistance $R + r$ diminue

b) Analyse dimensionnel du constant de temps τ

$$\text{On a } \tau = \frac{L}{R+r} = \frac{L}{R_T}$$

$\Leftrightarrow$

$$[\tau] = \frac{[L]}{[R]}$$

$$\text{On a } U = R \cdot I$$

$\Leftrightarrow$

$$[R] = \frac{[U]}{[I]}$$

$$\text{Et } U = L \frac{di}{dt}$$

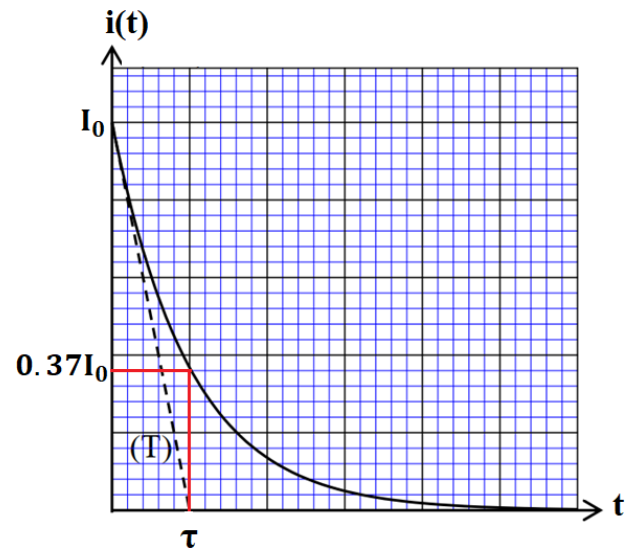
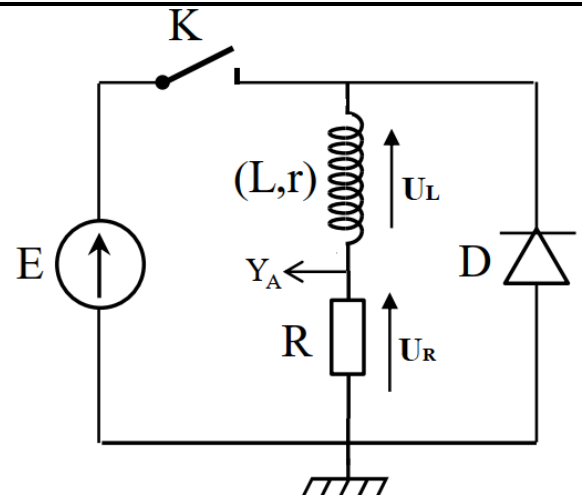
$\Leftrightarrow$

$$[L] = \frac{[U] \cdot [t]}{[I]}$$

$$[\tau] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{[I]}{[U]} \cdot \frac{[U] \cdot [t]}{[I]} = [t]$$

$\Leftrightarrow$

$$\text{Donc } [\tau] = [t]$$



Circuit RLC en série

i. Circuit RLC

1) Equation différentielle vérifiée par $U_C(t)$

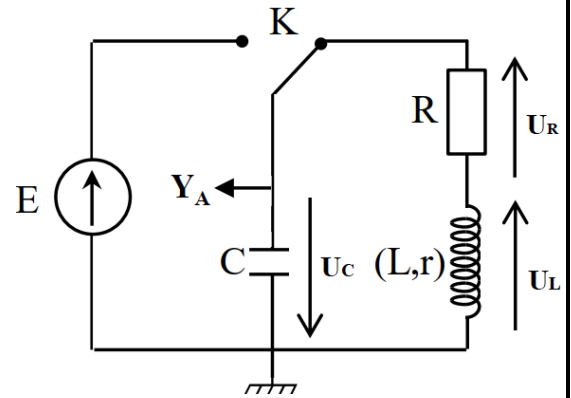
Circuit RLC : association série d'un condensateur chargé de capacité C et d'une bobine d'inductance L et un conducteur ohmique de résistance R

En appliquant la loi d'additivité des tensions :

$$U_C + U_R + U_L = 0 \Leftrightarrow U_C + R \cdot i + r \cdot i + L \frac{di}{dt} = 0$$

$$U_C + (R + r)i + L \frac{di}{dt} = 0 \Leftrightarrow U_C + (R + r)C \frac{dU_C}{dt} + LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2 U_C}{dt^2} + \frac{R + r}{L} \frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{LC} U_C = 0$$



ii. Circuit LC

Circuit LC : association série d'un condensateur chargé de capacité C et d'une bobine idéale ($L, r = 0$)

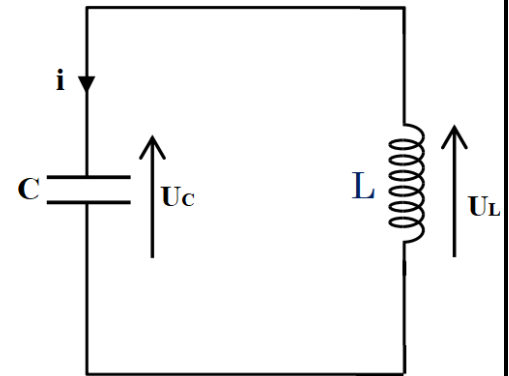
1) Equation différentielle vérifiée par $U_C(t)$

En appliquant la loi d'additivité des tensions :

$$U_C + U_L = 0 \Leftrightarrow U_C + L \frac{di}{dt} = 0$$

$$U_C + L \frac{di}{dt} = 0 \Leftrightarrow U_C + LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2 U_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} U_C = 0$$



La solution de l'équation différentielle est sous la forme :

$$U_C(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \text{ avec } \begin{cases} U_m: \text{la valeur maximale de la tension} \\ T_0: \text{la période propre} \\ \varphi: \text{la phase à l'origine des temps} \end{cases}$$

En remplaçant $U_C(t)$ dans l'équation différentielle on trouve la période propre : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

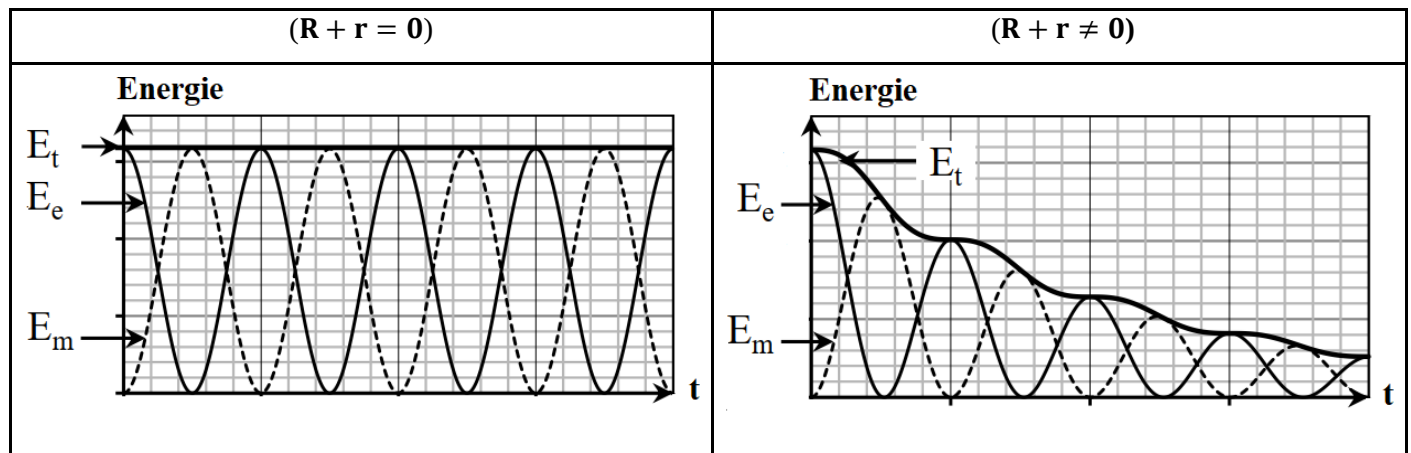
iii. Régimes d'oscillations

1) Les trois régimes d'oscillations

Régime périodique	Régime pseudopériodique	Régime apériodique
$(R + r = 0)$ la période propre : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$	$(R + r \text{ faible})$ la pseudo-période : $T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$	$(R + r \text{ grande})$ pas d'oscillations

2) L'énergie dans un circuit RLC

✚ L'énergie totale d'un circuit (RLC) série est donnée par : $E_T = E_m + E_e = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_C^2 + \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$



✚ Dans le régime périodique ($R + r = 0$) il y a conservation de l'énergie totale $\frac{dE_T}{dt} = 0$

$$E_T = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_{C_{\max}}^2 = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i_{\max}^2$$

✚ Dans le régime pseudo périodique et apériodique ($R + r \neq 0$) il y a dissipation d'énergie par effet joule

$$\frac{dE_T}{dt} = -(R + r) \cdot i^2$$

3) Entretien des oscillations

Principe

Dans un circuit (RLC), l'amortissement des oscillations est dû à une perte d'énergie par effet Joule. Les oscillations peuvent être entretenues par un générateur G qui compense les pertes d'énergie.

Etude théorique

On réalise le montage suivant dans lequel le générateur G délivre une tension proportionnelle à l'intensité du courant qu'il débite. $U_G = k \cdot i$

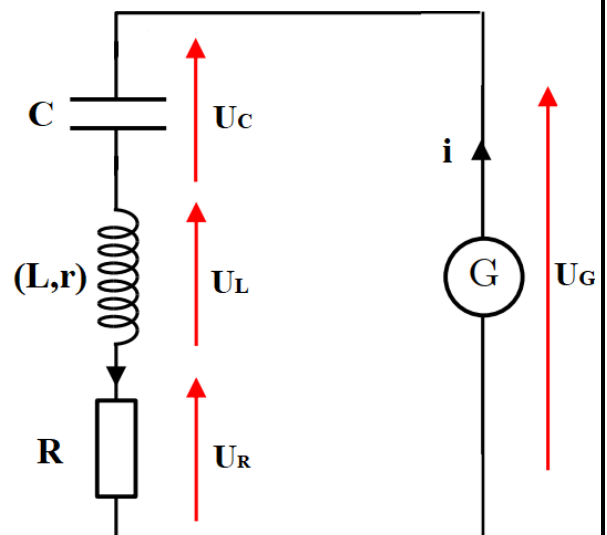
En appliquant la loi d'additivité des tensions :

$$\begin{aligned} U_C + U_R + U_L &= U_G \\ U_C + R \cdot i + r \cdot i + L \frac{di}{dt} &= k \cdot i \\ U_C + (R + r - k)i + L \frac{di}{dt} &= 0 \\ U_C + (R + r - k)C \frac{dU_C}{dt} + LC \frac{d^2U_C}{dt^2} &= 0 \\ \frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{R+r-k}{L} \cdot \frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{LC} U_C &= 0 \end{aligned}$$

On règle k sur la valeur : $k = R + r$

L'équation différentielle devient : $\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} U_C = 0$

C'est l'équation différentielle d'un circuit (LC) non amortie de période $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$



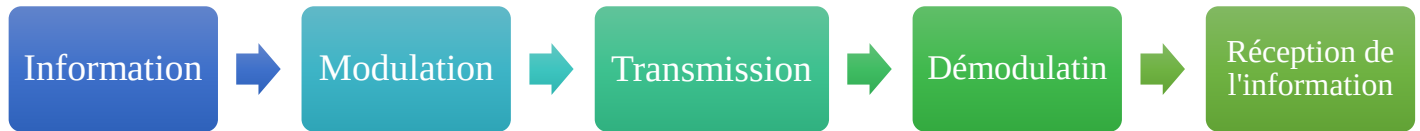
Les ondes électromagnétiques - Modulation

i. Ondes électromagnétiques

1) Définition

Les ondes électromagnétiques se propagent dans toutes les directions dans un milieu homogène et isolant, Leurs vitesse de propagation dans le vide (célérité) vaut : $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$

2) Transmission d'information



Remarque

Pour transmettre un signal sinusoïdal de la forme : $u(t) = U_m \cdot \cos(2\pi f \cdot t + \varphi)$, on peut moduler une de ces caractéristiques : l'amplitude U_m , la fréquence f ou la phase à l'origine φ

ii. Modulation d'amplitude

1) Principe de modulation

Le principe de modulation d'amplitude consiste à transmettre une onde de basse fréquence à l'aide d'une onde électromagnétique porteuse de haute fréquence

2) La modulation d'amplitude

Soit $S(t)$: le signal sinusoïdal de basse fréquence à transmettre (signal modulant), de fréquence f_s

Pour transmettre $S(t)$ on utilise une onde électromagnétique porteuse $p(t)$ de fréquence $F_p \gg f_s$

Signal modulant	Onde porteuse
$S(t) = S_m \cdot \cos(2\pi f_s t)$	$p(t) = P_m \cdot \cos(2\pi F_p t)$

3) Expression de la tension modulée en amplitude

Pour que la tension soit modulée il faut que son expression soit de la forme : $u(t) = U_m(t) \cdot \cos(2\pi F_p t)$

✚ Pratiquement on utilise la composante **AD633**

✚ On obtient la tension modulée $u(t)$ en amplitude en multipliant les deux fonctions $k(S(t) + U_0)$ et $p(t)$

$$u(t) = k \cdot (S(t) + U_0) \cdot p(t) = kP_m [S_m \cos(2\pi f_s t) + U_0] \cos(2\pi F_p t)$$

$$u(t) = kP_m U_0 \left[\frac{S_m}{U_0} \cos(2\pi f_s t) + 1 \right] \cos(2\pi F_p t)$$

On pose $A = kP_m U_0$ et $m = \frac{S_m}{U_0}$:

$$u(t) = A [m \cos(2\pi f_s t) + 1] \cos(2\pi F_p t)$$

$$u(t) = U_m(t) \cdot \cos(2\pi F_p t)$$

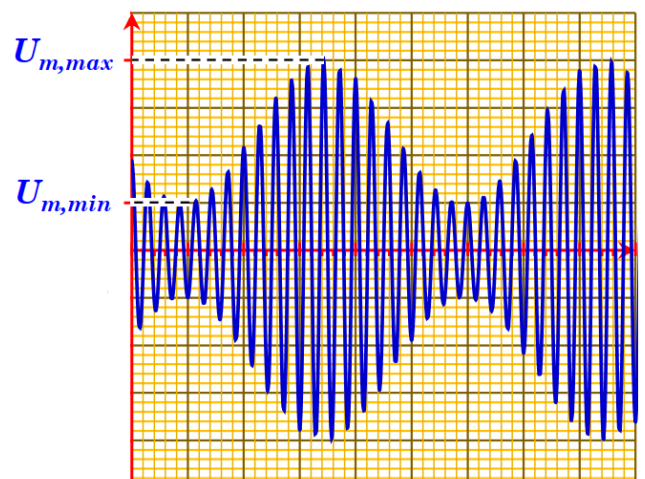
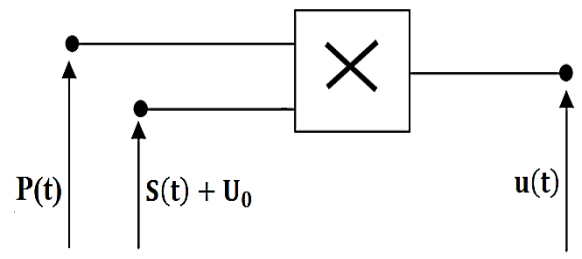
$$\text{Avec } U_m(t) = A [m \cos(2\pi f_s t) + 1]$$

4) Qualité de la modulation

✚ Le taux de modulation m est défini par la relation :

$$m = \frac{S_m}{U_0} = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}}$$

✚ Pour obtenir une modulation d'amplitude de bonne qualité il faut que : $m < 1$ et $F_p \gg f_s$



iii. Démodulation d'amplitude

1) Principe

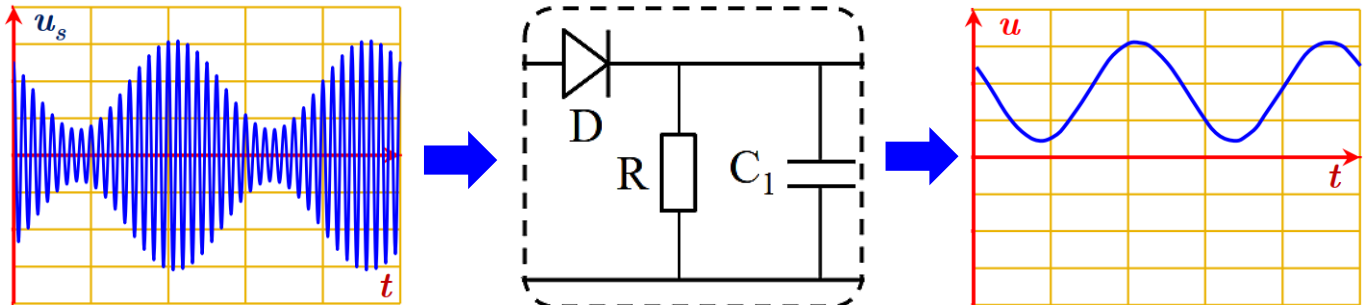
La démodulation consiste à extraire le signal modulant $s(t)$ du signal modulé $u(t)$.

2) Détection d'enveloppe

Constitué par une diode et une association **RC** parallèle qui constitue un filtre passe-bas

✚ La diode supprime les alternances négatives de la tension modulée

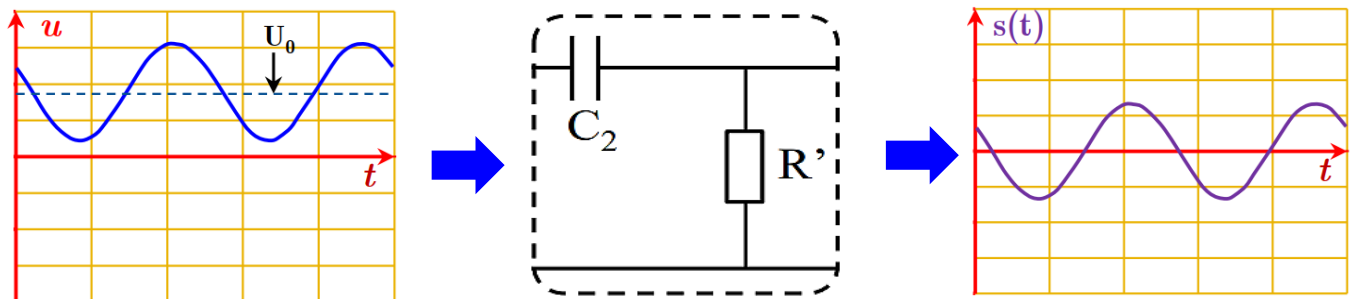
✚ Le circuit **RC** permet d'éliminer la tension due à la porteuse



Remarque : Pour avoir une bonne détection d'enveloppe il faut que : $T_p < \tau = RC_1 < T_s$

3) Élimination de la tension de décalage U_0

Cette étape consiste à éliminer la tension constante U_0 par un filtre passe-haut (qui laisse passer les signaux de hautes fréquences).



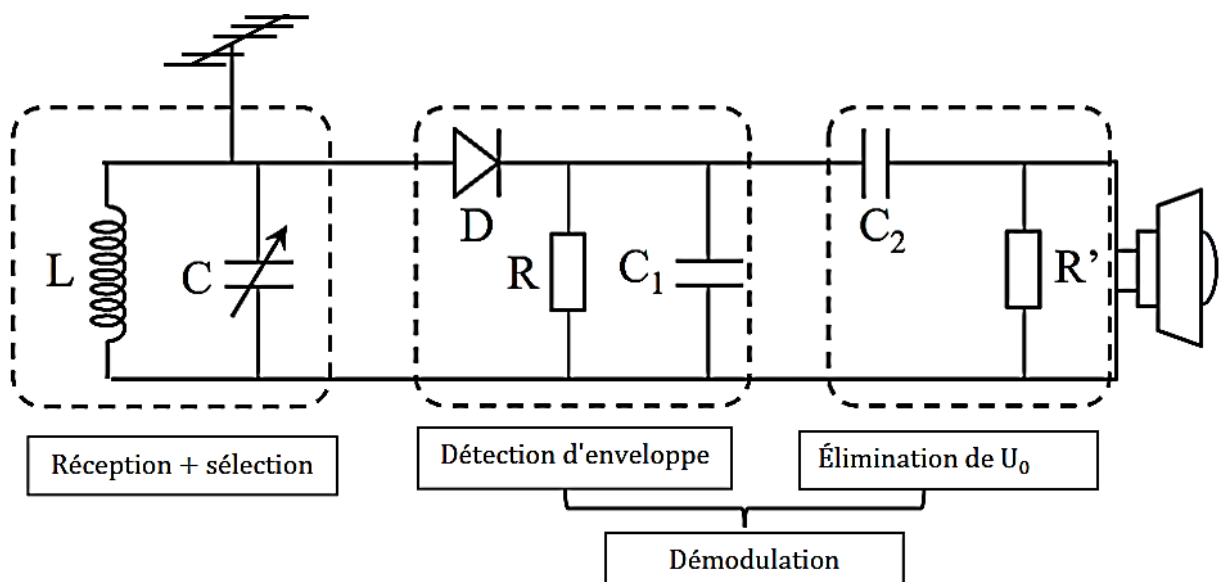
iv. Réaliser un récepteur d'émission radio AM

Un récepteur radio **AM** est composé des éléments suivants :

- ✚ Une antenne qui capte les ondes radio.
- ✚ Un circuit **LC** pour sélectionner la fréquence de l'onde porteuse que l'on veut capter
- ✚ Un circuit de démodulation d'amplitude

Remarque

Pour sélectionner un signal émet, il faut que : $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = F_p$ avec $\begin{cases} f_0: \text{fréquence propre du circuit LC} \\ F_p: \text{fréquence de l'onde porteuse} \end{cases}$



Lois de Newton

i. Repérage d'un point d'un mobile

1) Vecteur position

La position du centre d'inertie G d'un système (S) est repérée à chaque instant par le vecteur position $\overrightarrow{OG}$

Dans un repère cartésien : $\overrightarrow{OG} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

✚ Le module du vecteur position : $\|\overrightarrow{OG}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

2) Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse instantanée du centre d'inertie G du solide est égal à la dérivée par rapport au temps du vecteur position :

$$\vec{v}_G = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$$

$$\vec{v}_G = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

✚ Le module du vecteur vitesse : $\|\vec{v}_G\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

3) Vecteur accélération

Le vecteur accélération instantanée du centre d'inertie G du solide est égal à la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse :

$$\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2}$$

$$\vec{a}_G = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

Le module du vecteur accélération : $\|\vec{a}_G\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

4) La base locale de Frénet

La base de Frénet est un repère mobile lié au mouvement du point M , son origine est le point M et ses vecteurs unitaires sont :

$\vec{u}$: Tangent à la trajectoire et dirigé dans le sens du mouvement

$\vec{n}$: Normal à la trajectoire et dirigé vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire

L'accélération dans la base de Frénet :

$$\vec{a}_G = a_T\vec{u} + a_N\vec{n} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_T = \frac{dv}{dt} : \text{accélération tangentielle} \\ a_N = \frac{v^2}{\rho} : \text{accélération normale} \end{cases}$$

Avec ρ le rayon de courbure de la trajectoire au point M

Remarque

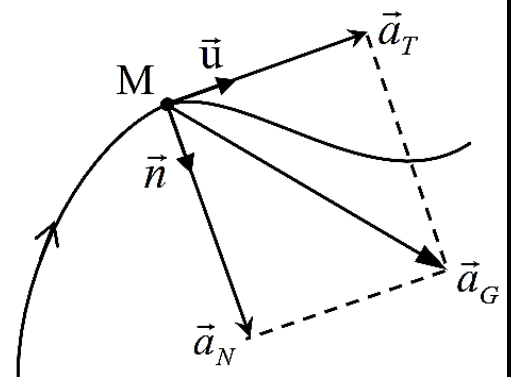
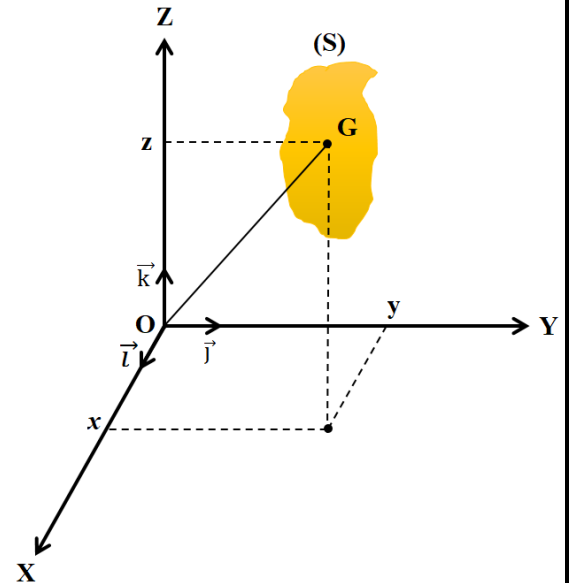
Dans le cas où la trajectoire est circulaire on a : $\rho = R$

5) Référentiels galiléens

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel la première loi de Newton (principe d'inertie) est vérifiée

Remarque

Si R est un référentiel galiléen, tout référentiel R' en translation rectiligne uniforme par rapport à R est un référentiel galiléen



ii. Les lois de Newton

1) La 1^{ère} loi de Newton (principe d'inertie)

Énoncé : dans un référentiel galiléen lorsque un système est isolé ou pseudo-isolé alors son centre d'inertie est immobile ou animé d'un mouvement rectiligne uniforme :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{V} = \vec{Cte} \\ \vec{V} = \vec{0} \end{cases}$$

2) La 2^{ème} loi de Newton (principe fondamentale de la dynamique)

Énoncé : dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures exercées sur un système est égale au produit de sa masse par le vecteur accélération $\vec{a}_G$

$$m \vec{a}_G = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

3) La 3^{ème} loi de Newton (principe d'action et de réaction)

Énoncé : La force $\vec{F}_{A/B}$ exercée par un système A sur un système B et la force $\vec{F}_{B/A}$ exercée par le système B sur un système A ont les mêmes valeurs, mêmes directions et des sens opposés

$$\vec{F}_{B/A} = -\vec{F}_{A/B}$$

iii. Mouvement rectiligne uniformément varié

1) Définition

Le mouvement du centre d'inertie G d'un corps solide est rectiligne uniformément varié, si la trajectoire de G est rectiligne et le vecteur accélération est constante

$$\vec{a}_G = \vec{cte}$$

2) Les équations horaires du mouvement

On considère un mouvement rectiligne uniformément varié : $\vec{a}_G = \vec{cte}$

On suppose que le mouvement s'effectue selon l'axe (Ox) :

$$a_x = cte$$

✚ L'équation horaire de la vitesse $V_x(t)$ est :

$$V_x(t) = a_x \cdot t + V_{x0}$$

✚ L'équation horaire de l'abscisse $x(t)$ est :

$$x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 + V_{x0} t + x_0$$

iv. Application

Un skieur de masse m et de centre d'inertie G part à $t_0 = 0$ au point A avec une vitesse initiale V_0 .

Partie AB : les frottements sont négligeables

Le système étudié : (Le skieur)

✚ Les forces exercées :

Le poids $\vec{P} = m \vec{g}$

La réaction du plan $\vec{R}$

✚ On applique la 2^{ème} loi de Newton :

$$m \vec{a}_G = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \Leftrightarrow m \vec{a}_G = \vec{P} + \vec{R}$$

Par projection sur l'axe (Ox) : $m a_x = m g \sin \beta + 0 \Leftrightarrow$ l'accélération :

$$a_x = g \sin \beta$$

L'équation horaire du mouvement est :

$$x(t) = \frac{g \sin \beta}{2} t^2 + V_0 t + x_A$$

Partie BC : le mouvement se fait avec frottement

Les frottements équivalent à une force horizontale d'intensité $f = R_T$ constante et de sens opposé au sens du mouvement

✚ Les forces exercées sur le skieur dans la partie BC

Le poids $\vec{P} = m \vec{g}$

La réaction du plan $\vec{R}$

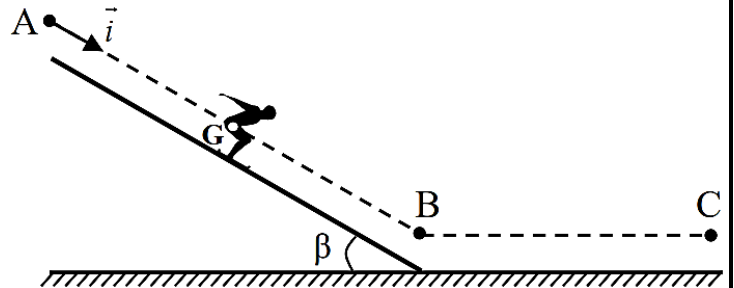
✚ On applique la 2^{ème} loi de Newton $m \vec{a}_G = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \Leftrightarrow m \vec{a}_G = \vec{P} + \vec{R}$

Projection sur l'axe (Ox) : $m a_x = 0 - f \Leftrightarrow$ l'accélération :

$$a_x = -\frac{f}{m}$$

✚ L'équation horaire du mouvement :

$$x(t) = -\frac{f}{2m} t^2 + V_B t + x_B$$



La chute verticale d'un solide

i. La chute libre d'un corps solide

1) Définition

Un solide est en chute libre s'il n'est soumis qu'à son poids

2) Equations horaires du mouvement

Soit un solide (S) de masse m en chute libre dans le champ de pesanteur

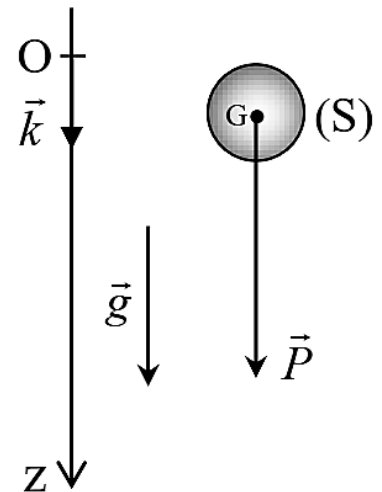
On étudie le mouvement du solide (S) dans le repère $R(O, \vec{k})$

✚ On applique la deuxième loi de Newton :

$$\begin{aligned} m \vec{a}_G &= \sum \vec{F}_{\text{ext}} \quad \Leftrightarrow \quad m \vec{a}_G = \vec{P} \\ m \vec{a}_G &= m \vec{g} \quad \Leftrightarrow \quad a_z = g \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{z} = g \\ &\quad \quad \quad \mathbf{V_z = g t + V_0} \end{aligned}$$

✚ L'équation horaire du mouvement $z(t)$ est :

$$z(t) = \frac{1}{2} g t^2 + V_{z0} t + z_0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} V_{z0} : \text{la vitesse à } t = 0s \\ z_0 : \text{l'altitude à } t = 0s \end{cases}$$



ii. La chute verticale avec frottement

1) Forces exercées par un fluide sur un solide

a) Poussée d'Archimède

La poussée d'Archimède $\vec{F}_a$: est une force de contact exercée par un fluide (liquide ou gaz) sur un solide immergé dans ce fluide

b) Caractéristiques de la pousse d'Archimède

- ✚ **Point d'application** : centre d'inertie de la partie immergée
- ✚ **Direction** : verticale
- ✚ **Sens** : du fluide vers le corps immergé
- ✚ **Intensité** : $F_a = \rho_f \cdot V_{\text{im}} \cdot g = m_f \cdot g$

c) Force de frottement fluide

Les forces exercées par un fluide sur un solide (S) sont équivalentes à une force unique $\vec{f}$

d) Caractéristiques de la force de frottement fluide

- ✚ **Point d'application** : centre d'inertie de (S)
- ✚ **Direction** : direction de $\vec{V}$ la vitesse du centre d'inertie de (S)
- ✚ **Sens** : sens opposé du sens de $\vec{V}$.
- ✚ **Intensité** : $f = k \cdot V^n$ avec $\begin{cases} k : \text{Constante dépend du fluide} \\ V : \text{Vitesse de G} \\ n : \text{nombre entière} \end{cases}$

Remarque

- ✚ Pour des vitesses faibles : $n = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f = k V$
- ✚ Pour des vitesses importantes : $n = 2 \quad \Leftrightarrow \quad f = k V^2$

2) Equation différentielle vérifiée par la vitesse

On considère une bille de masse m , en chute verticale dans une éprouvette remplie d'huile, on étudie le mouvement de la bille dans le repère $R(O, \vec{k})$ orienté vers le bas (figure ci-contre)

✚ Le système étudié : (la bille)

✚ Les forces exercées sur la bille :

Le poids de la bille $\vec{P} = m \vec{g} = mg\vec{k}$

Poussée d'Archimède $\vec{F}_a = -m_f \vec{g} = -m_f g \vec{k}$

Force de frottement fluide $\vec{f} = -k \cdot \vec{V}^n = -kV^n \vec{k}$

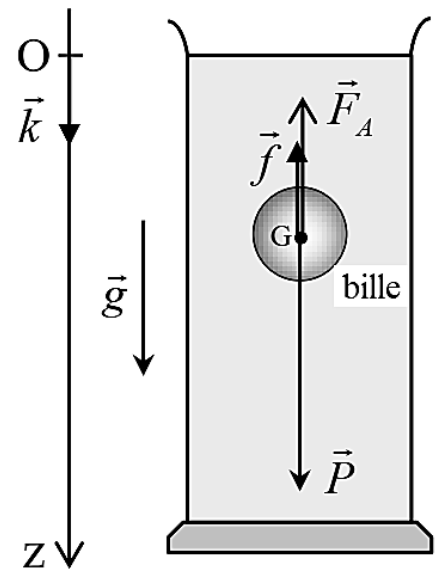
✚ On applique la 2^{ème} loi de Newton

$$m \vec{a}_G = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \Leftrightarrow m \vec{a}_G = \vec{P} + \vec{F}_a + \vec{f}$$

Projection sur (Oz) $m a_z = mg - m_f g - kV^n$

$$\frac{dV}{dt} = g(1 - \frac{m_f}{m}) - \frac{k}{m} V^n$$

$$\frac{dV}{dt} = A - B V^n \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A = g(1 - \frac{m_f}{m}) \\ B = \frac{k}{m} \end{cases}$$



3) Les grandeurs caractérisant le mouvement

a) La constante de temps τ

La tangente à la courbe $V = f(t)$ au point O coupe l'asymptote en un point d'abscisse τ appelé temps caractéristique

b) La vitesse limite V_{lim}

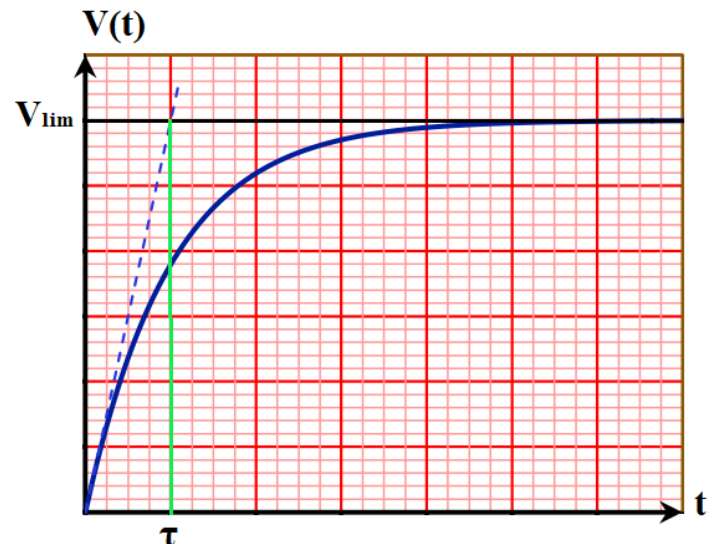
La fonction $V(t)$ se stabilise à une vitesse limite V_{lim}

$$\frac{dV}{dt} = A - B V_{\text{lim}}^n = 0 \Leftrightarrow V_{\text{lim}} = (\frac{A}{B})^{\frac{1}{n}}$$

c) L'accélération initiale a_0

L'accélération initiale est donnée par :

$$a_0 = A - B V_0^n = A \Leftrightarrow a_0 = g(1 - \frac{m_f}{m})$$



4) Résolution de l'équation différentielle par la méthode d'Euler

La méthode d'Euler est une méthode numérique permet de résoudre l'équation différentielle $\frac{dV}{dt} = A - B V^n$

Les étapes de la méthode d'Euler

✚ 1^{ère} étape : calcul de l'accélération a_i à la date t_i : $a_i = A - B V_i^n$

✚ 2^{ème} étape : calcul de la vitesse V_i à la date $t_i = t_{i-1} + \Delta t$ (Δt : appelée pas du calcul)

$$a_i = \frac{V_i - V_{i-1}}{\Delta t} \Leftrightarrow V_i = a_{i-1} \Delta t + V_{i-1}$$

Etape i	Date t_i	Vitesse V_i	Accélération a_i
0	$t_0 = 0$	V_0	$a_0 = A - B V_0^n$
1	$t_1 = t_0 + \Delta t$	$V_1 = a_0 \Delta t + V_0$	$a_1 = A - B V_1^n$
2	$t_2 = t_1 + \Delta t$	$V_2 = a_1 \Delta t + V_1$	$a_2 = A - B V_2^n$
3	$t_3 = t_2 + \Delta t$	$V_3 = a_2 \Delta t + V_2$	$a_3 = A - B V_3^n$

Mouvements plans

i. Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur

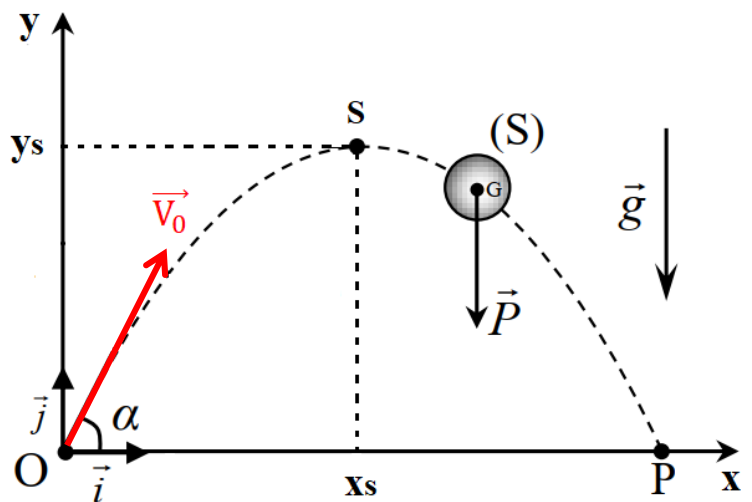
Un projectile (S) de masse m est lancée en un point O avec une vitesse initiale $\vec{V}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale, le projectile se déplace dans un champ de pesanteur $\vec{g}$ (supposé uniforme)

1) Equations horaires du mouvement

On étudie le mouvement dans le repère $R(O, \vec{i}, \vec{j})$

- Le système étudié : (le projectile)
- La seule force exercée sur le projectile (S) est son poids $\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{j}$
- On applique la 2^{ème} loi de Newton

$$m \vec{a}_G = \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P}$$



$$(1) \quad m \vec{a}_G = -mg \vec{j}$$

- Les conditions initiales : $\begin{cases} V_{0x} = V_0 \cdot \cos \alpha \\ V_{0y} = V_0 \cdot \sin \alpha \end{cases}$ et $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$

Projection de (1) sur l'axe (Ox)	Projection de (1) sur l'axe (Oy)
$a_x = 0$ $\frac{dV_x}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0$ $V_x(t) = V_0 \cdot \cos \alpha$ $x(t) = V_0 \cdot \cos \alpha \cdot t$	$a_y = -g$ $\frac{dV_y}{dt} = -g \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g$ $V_y(t) = -g t + V_0 \cdot \sin \alpha$ $y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \cdot \sin \alpha t$

2) Les caractéristiques de la trajectoire

a) Équation de la trajectoire

En éliminant le paramètre temps t des équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ on obtient l'équation de la trajectoire

$$y = \frac{g}{2 \cdot V_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha \cdot x \quad (\text{Équation d'une parabole})$$

b) La portée x_P

La portée est la distance entre le point de lancement O et le point d'impact P sur le plan horizontal

C'est la valeur de x qui annule y : $x_P = OP = \frac{2 \cdot V_0^2 \cdot \cos \alpha \sin \alpha}{g}$

Remarque : la portée est maximale pour un angle $\alpha = 45^\circ$

c) Le sommet / la flèche S de la trajectoire

Le sommet S de la trajectoire est l'altitude maximale atteinte par le projectile.

Au point S : $V_y(t_s) = 0 \Leftrightarrow -g t_s + V_0 \cdot \sin \alpha = 0 \Leftrightarrow t_s = \frac{V_0 \cdot \sin \alpha}{g}$

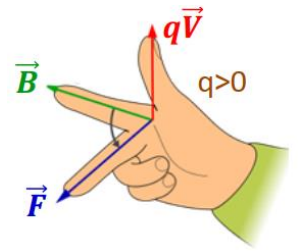
- On remplace t_s dans $x(t)$ et $y(t)$: les coordonnées du sommet S :
$$\begin{cases} x_S = \frac{V_0^2 \cdot \cos \alpha \sin \alpha}{g} \\ y_S = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \end{cases}$$

ii. Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique

1) Force magnétique

Toute particule chargée (de charge q) en mouvement avec une vitesse $\vec{V}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$ est soumise à la force de Lorentz donnée par :

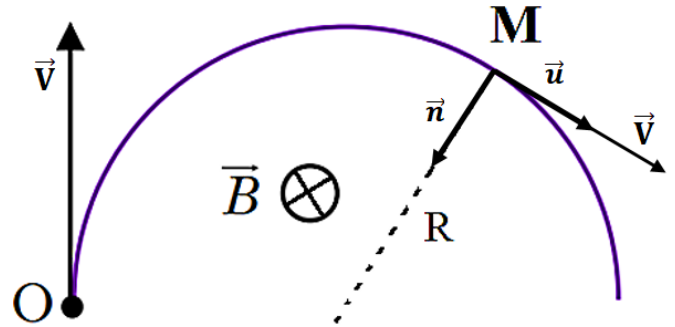
$$\vec{F} = q \cdot \vec{V} \wedge \vec{B}$$



Règle de la main droite

2) Étude du mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme

On considère une particule chargée en mouvement dans un champ magnétique uniforme dont le vecteur $\vec{B}$ est orthogonal au vecteur vitesse $\vec{V}$ de la particule. La particule de charge q pénètre dans le champ magnétique en O à $t = 0$



✚ Le système étudié : (la particule chargée)

✚ Les forces exercées sur la particule :

La force magnétique $\vec{F} = q \cdot \vec{V} \wedge \vec{B}$ de module $F = |q| \cdot B \cdot \sin(\vec{V} \cdot \vec{B})$

(On néglige le poids de la particule)

✚ On applique la 2^{ème} loi de Newton : $m \vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \Leftrightarrow m \vec{a} = \vec{F} = q \cdot \vec{V} \wedge \vec{B}$

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \cdot \vec{V} \wedge \vec{B}$$

3) Le rayon de courbure de la trajectoire

✚ L'accélération dans la base de Frénet : $\vec{a} = \frac{q}{m} \cdot V \cdot B \cdot \sin(\vec{V} \cdot \vec{B}) \vec{n} = \frac{dV}{dt} \vec{u} + \frac{V^2}{\rho} \vec{n}$

✚ La vitesse de la particule : $\frac{dV}{dt} = 0$ d'où $V = \text{cte}$

On a : $\frac{V^2}{\rho} = \frac{q}{m} \cdot V \cdot B \cdot \sin(\vec{V} \cdot \vec{B})$ et $(\vec{V} \perp \vec{B}) \Leftrightarrow \sin(\vec{V} \cdot \vec{B}) = 1$

✚ Le rayon de courbure de la trajectoire est $\rho = \frac{m \cdot V}{|q| \cdot B} = \text{cte} = R$, la trajectoire est donc circulaire

4) La nature du mouvement de la particule

Puisque le rayon de la courbure est constante $\rho = \frac{m \cdot V}{|q| \cdot B} = \text{cte}$ et la vitesse est constante $V = \text{cte}$ donc le mouvement de la particule chargée est circulaire uniforme

Satellites artificielles et planètes

i. Les lois de Kepler

Référentielle héliocentrique

Est un référentielle a pour origine le centre du soleil et ces axes sont dirigés vers trois étoiles lointaines

Référentielle géocentrique

Est un référentielle a pour origine le centre de la terre et ces axes sont dirigés vers trois étoiles lointaines

1^{er} loi de Kepler : Loi des orbites

Dans un référentiel héliocentrique, chaque planète décrit une ellipse dont le centre du Soleil occupe un des foyers

2^{ème} loi de Kepler : Loi des aires

Le segment de droite reliant les centres de gravité de soleil (S) et de la planète (P) balaie des aires égales pendant des durées égales

3^{ème} loi de Kepler : Loi des périodes

Le rapport du carré de la période de révolutions T et le cube du demi grand axe a est constant.

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{cte}$$

ii. Étude du mouvement d'une planète autour du soleil

1) Loi de la gravitation universelle (rappel)

Deux corps ponctuels **A** et **B**, de masses m_A et m_B , séparés par la distance d , exercent l'un sur l'autre des forces d'interactions $\vec{F}_{A/B}$ et $\vec{F}_{B/A}$ ayant :

✚ Même droite d'action (AB)

✚ Des sens opposés

✚ Même intensité : $F_{A/B} = F_{B/A} = G \cdot \frac{m_A m_B}{d^2}$

G : constante de gravitation universelle $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ (S.I)}$

2) Étude du mouvement d'une planète autour du soleil

Une planète (**P**) de masse m_P décrit un mouvement autour du soleil.

On choisit le référentiel héliocentrique pour étudier le mouvement

✚ Le système étudié : (la planète P)

✚ Les forces exercées sur (P) :

La force exercée par le soleil : $\vec{F}_{S/P} = -G \cdot \frac{m_P M_S}{r^2} \vec{u}_{SP}$

✚ On applique la 2^{ème} loi de Newton :

$$m_P \vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \Leftrightarrow m_P \vec{a} = \vec{F}_{S/P} = -G \cdot \frac{m_P M_S}{r^2} \vec{u}_{SP}$$
$$\vec{a} = -G \cdot \frac{M_S}{r^2} \vec{u}_{SP}$$

Remarque : $\vec{u}_{SP} = -\vec{n}$

✚ Dans la base de Frénet : $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u} + \frac{v^2}{r} \vec{n} = G \cdot \frac{M_S}{r^2} \vec{n}$

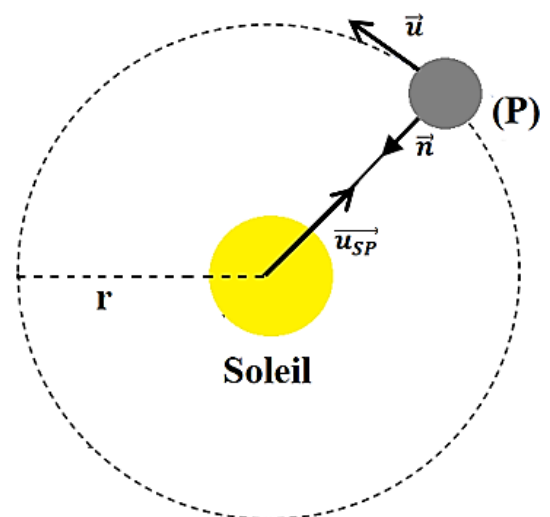
$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_S}{r^2}$$

✚ La vitesse du centre de la planète est alors : $V = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{r}}$

La période de révolution T

La période de révolution d'une planète est la durée d'un tour complet de son centre autour du soleil

$$\text{On a} \quad T = \frac{2\pi \cdot r}{V} \quad \text{et} \quad V = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{r}} \quad \Leftrightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M_S}}$$



3) Étude du mouvement d'un satellite autour de la terre

Un satellite (S) de masse m_S décrit un mouvement autour de la terre

On choisit le référentiel géocentrique pour étudier le mouvement.

Le système étudié : (le satellite S)

✚ Les forces exercées sur (S) :

La force exercée par la terre $\vec{F}_{T/S} = -G \cdot \frac{m_S M_T}{r^2} \vec{u}_{TS}$

✚ On applique la 2^{ème} loi de Newton :

$$m_S \vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \Leftrightarrow m_S \vec{a} = \vec{F}_{T/S} = -G \cdot \frac{m_S M_T}{r^2} \vec{u}_{TS}$$

✚ Dans la base de Frénet :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u} + \frac{v^2}{r} \vec{n} = G \cdot \frac{M_T}{r^2} \vec{n}$$

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_T}{r^2}$$

✚ La vitesse du centre du satellite est alors :

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{(R_T + h)}}$$

avec

$$r = R_T + h$$

La période de révolution T

La période de révolution d'un satellite est la durée d'un tour complet autour de la terre,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{G \cdot M_T}}$$

4) La satellisation

La satellisation c'est mettre un satellite sur son orbite autour de la terre et de lui donner une vitesse suffisante pour avoir un mouvement circulaire uniforme autour de la terre

5) Les satellites géostationnaires

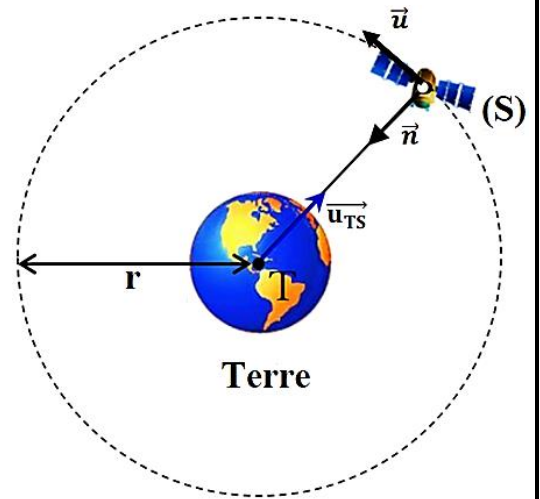
Pour qu'un satellite soit géostationnaire par rapport à la terre, il faut :

- ✚ Qu'ils décrivent un mouvement circulaire uniforme dans un plan contenant l'équateur.
- ✚ Qu'ils tournent dans le même sens que la terre.
- ✚ Que leur période de révolution soit égale à la période de rotation de la terre ($T_{\text{terre}} \approx 24h$).

Remarque

On peut calculer la hauteur h à laquelle un satellite soit géostationnaire par rapport à la terre

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{G \cdot M_T}} \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{\frac{T^2 G M_T}{4\pi^2}} - R_T$$



Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

i. Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

1) Définition

Un corps solide est en mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Δ) si : tous les points du solide décrivent des trajectoires circulaires centrées sur l'axe de rotation (Δ).

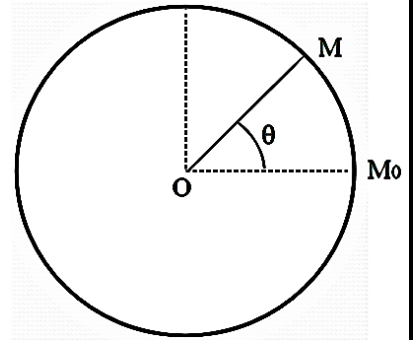
2) Abscisse curviligne et abscisse angulaire

L'abscisse angulaire du point M à l'instant t est défini par :

$$\theta(t) = (\widehat{OM_0, OM})$$

L'abscisse curviligne du point M à l'instant t est défini par :

$$S(t) = \widehat{M_0 M}$$



3) Relation entre l'abscisse curviligne et l'abscisse angulaire

L'abscisse angulaire et l'abscisse curviligne sont liées par la relation :

$$S = R \cdot \theta \quad \text{avec} \quad R : \text{le rayon de la trajectoire circulaire décrit par le point } M.$$

4) La vitesse angulaire

La vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est la dérivée par rapport au temps de l'abscisse angulaire : $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$

La vitesse linéaire V est la dérivée par rapport au temps de l'abscisse curviligne : $V = \frac{dS}{dt}$

La relation entre la vitesse angulaire et la vitesse linéaire : $V = R \cdot \dot{\theta}$

5) L'accélération angulaire

L'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ est la dérivée par rapport au temps de la vitesse angulaire : $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

Dans la base de Frénet : $\vec{a}_G = a_T \vec{u} + a_N \vec{n}$ avec $\begin{cases} a_T = \frac{dv}{dt} = R \cdot \ddot{\theta} \\ a_N = \frac{v^2}{R} = R \cdot \dot{\theta}^2 \end{cases}$

ii. La relation fondamentale de la dynamique (RFD)

1) Rappel (moment d'une force)

Le moment par rapport à un axe Δ d'une force $\vec{F}$ est donné par la relation :

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = \pm F \cdot d$$

Le signe ($\pm$) dépend du sens positif de rotation

2) Énoncé de la RFD

Dans un référentiel galiléen, la somme des moments des forces, appliquées à un solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ), est égale au moment d'inertie J_{Δ} du solide multiplié par l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$

$$\Sigma M_{\Delta}(\vec{F}_{\text{ext}}) = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$$

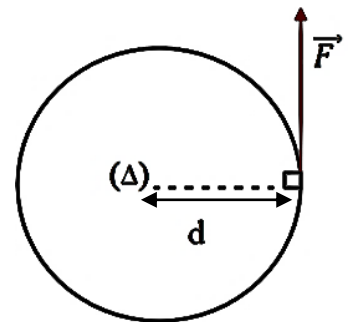
3) Cas particulières

Si $\ddot{\theta} = 0$, le solide est en mouvement de rotation uniforme, l'équation horaire du mouvement :

$$\theta(t) = \dot{\theta} t + \theta_0$$

Si $\ddot{\theta} = \text{cte}$ le solide est en mouvement de rotation uniformément variée, l'équation horaire du mouvement

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \ddot{\theta} t^2 + \dot{\theta} t + \theta_0$$



Systèmes oscillants - aspects énergétiques

i. Oscillateur mécanique

1) Définition

Oscillateur mécanique : est un mobile qui effectue un mouvement de va et viens autour de sa position d'équilibre stable (exemples : pendule élastique, pendule de torsion, pendule pesant, pendule simple)

2) Caractéristiques des mouvements oscillatoires

✚ La position d'équilibre stable

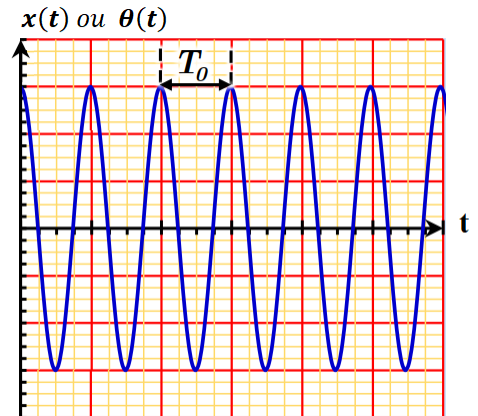
La position à laquelle le système tend à revenir lorsqu'on l'éloigne légèrement

✚ La période propre

Le temps nécessaire pour effectuer une oscillation

✚ L'amplitude

La grandeur qui exprime le décalage de l'oscillateur de sa position d'équilibre



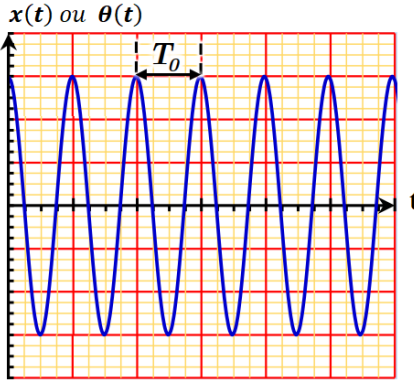
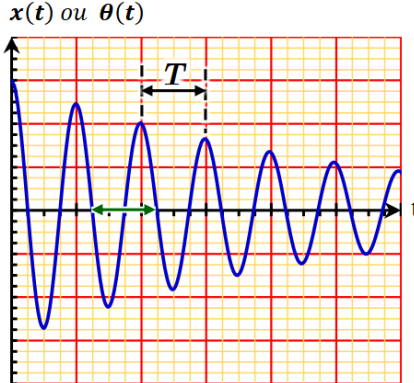
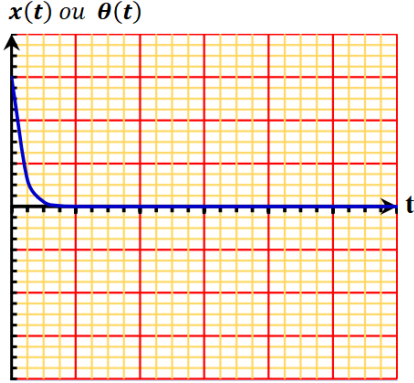
3) Amortissement des oscillations mécaniques

L'amortissement d'un système est une atténuation de l'amplitude à cause du frottement

✚ **Frottement fluide** : frottement qui se fait entre l'oscillateur et un corps fluide (atténuation non linéaire)

✚ **Frottement solide** : frottement qui se fait entre l'oscillateur et un corps solide (atténuation linéaire)

On distingue trois régimes :

Régime périodique	Régime pseudopériodique	Régime apériodique
 (pas de frottement) la période propre : T_0	 faible amortissement la pseudo-période : $T \approx T_0$	 fort amortissement pas d'oscillations

4) Oscillations forcées

Oscillations forcée est liée l'oscillateur avec un appareil appelé exciteur qui impose sa période T_e à l'oscillateur (résonateur)

5) La résonance

Le phénomène de résonance mécanique se produit lorsque la période T_e des oscillations forcées est voisine de la période propre T_0 du résonateur

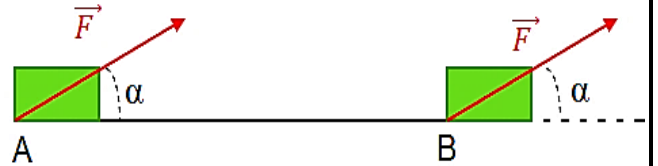
ii. Travail d'une force

1) Travail d'une force (cas de translation)

a) Travail d'une force constante

Le travail d'une force constante $\vec{F}$ appliquée à un corps solide en translation rectiligne, entre A et B, est donné par :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{AB}\| \cdot \cos \alpha$$



b) Le travail d'une force non constante

Le travail d'une force non constante est donné par :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_{x_A}^{x_B} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Exemple : le travail de la force du rappel $\vec{T} = -k x \vec{i}$ exercée par un ressort sur un solide se déplace entre les positions x_A et x_B est :

$$W_{AB}(\vec{T}) = \int_{x_A}^{x_B} \vec{T} \cdot d\vec{x} = \int_{x_A}^{x_B} -k \cdot x \cdot dx = -k \int_{x_A}^{x_B} x \cdot dx = -k \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_A}^{x_B} = -\frac{1}{2} k x_B^2 + \frac{1}{2} k x_A^2$$

2) Travail d'une force (cas de rotation)

a) Le travail d'une force de moment constant

L'expression du travail d'une force de moment constante est :

$$W_{\theta_2 \rightarrow \theta_1}(\vec{F}) = M_{\Delta}(\vec{F}) \cdot \Delta \theta$$

b) Le travail d'une force de moment non constant

L'expression du travail d'une force de moment non constante est :

$$W_{\theta_2 \rightarrow \theta_1}(\vec{F}) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_{\Delta}(\vec{F}) \cdot d\theta$$

Exemple : le travail de couple de torsion de moment $M_{\Delta}(C) = -C \cdot \theta$ exercée par un fil de torsion sur un solide se déplace entre les positions θ_1 et θ_2 :

$$W_{\theta_1 \rightarrow \theta_2}(M_{\Delta}(C)) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_{\Delta}(C) \cdot d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} -C \cdot \theta \cdot d\theta = -C \int_{\theta_1}^{\theta_2} \theta \cdot d\theta = -C \left[\frac{\theta^2}{2} \right]_{\theta_1}^{\theta_2} = -\frac{1}{2} C \theta_2^2 + \frac{1}{2} C \theta_1^2$$

iii. Energie d'un solide

1) Énergie cinétique

Cas de translation	Cas de rotation
$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$	$E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2 = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2$

2) L'énergie potentielle

Energie potentielle de pesanteur	Energie potentielle élastique	Energie potentielle de torsion
$E_{pp} = m g z + Cte$	$E_{pe} = \frac{1}{2} k x^2 + Cte$	$E_{pt} = \frac{1}{2} C \theta^2 + Cte$

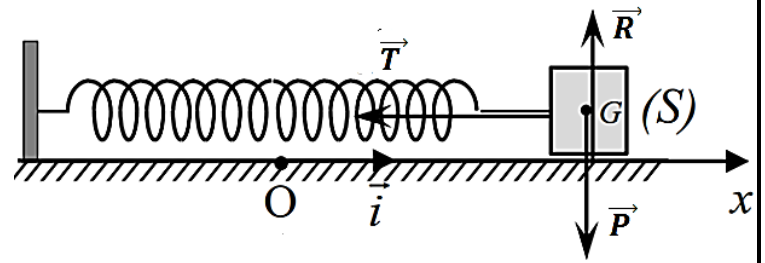
3) Énergie mécanique

L'énergie mécanique d'un corps solide est égale à la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle

Régime périodique	Régime pseudopériodique
Conservation de l'énergie mécanique (pas de frottement)	Diminution de l'énergie mécanique à cause du frottement

iv. Pendule élastique

Un pendule élastique, ou système (solide-ressort) est constitué d'un solide, de masse m , fixé à un ressort, de longueur initiale l_0 et de constante de raideur k . Soit $R(O, \vec{i})$ repère d'étude



1) Etude dynamique

Le système étudié : (solide (S))

Les forces exercées sur (S) :

➤ Le poids de la bille $\vec{P} = -m g \vec{j}$

➤ Réaction du plan $\vec{R} = -R \vec{j}$

➤ Tension du ressort $\vec{T} = -k x \vec{i}$

$$\begin{aligned} \text{2^{ème} loi de Newton} \quad m \vec{a}_G &= \sum \vec{F}_{\text{ext}} & \Leftrightarrow & \quad m \vec{a}_G = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} \\ \text{Projection sur l'axe (Ox)} \quad m a_x &= 0 - kx + 0 & \Leftrightarrow & \quad m \ddot{x} = -kx \end{aligned}$$

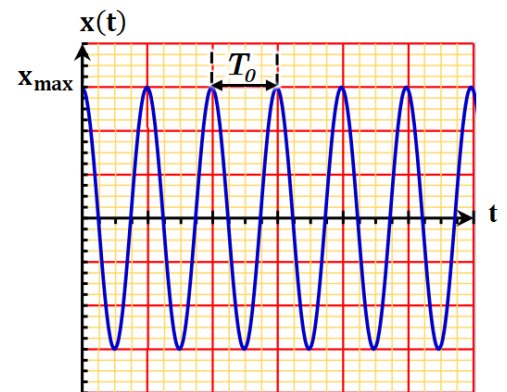
D'où l'équation différentielle : $\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$

La solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right) \text{ avec } \begin{cases} X_m : \text{Amplitude maximale} \\ T_0 : \text{la période propre} \\ \varphi : \text{la phase à l'origine des temps} \end{cases}$$

En remplaçant $x(t)$ et $\ddot{x}(t)$ dans l'équation différentielle on

obtient la période propre : $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$



2) Etude énergétique

a) Energie cinétique

L'énergie cinétique du pendule élastique est donnée par :

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

b) Energie potentielle élastique E_{Pe}

L'énergie potentielle élastique d'un pendule élastique est l'énergie qu'il possède grâce à la déformation du ressort.

$$E_{Pe} = \frac{1}{2} k x^2 + \text{Cte}$$

Souvent on prend ($E_{Pe} = 0$ pour $x = 0$) ; donc $\text{Cte} = 0$ d'où : $E_{Pe} = \frac{1}{2} k x^2$

c) Energie mécanique

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle (on prend : $E_{PP} = 0$)

$$E_m = E_C + E_{PP} + E_{Pe} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

d) Conservation de l'énergie mécanique

En absence du frottement l'énergie mécanique est conservée : $E_m = \frac{1}{2} m V_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} k X_{\text{max}}^2$

Remarque

On peut déterminer l'équation différentielle à partir de la conservation de l'énergie mécanique

$$E_m = \text{cte} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

v. Pendule de torsion

1) Le moment du couple de torsion (rappel)

Quand un solide tourne autour de l'axe du fil, le fil réagit à la torsion en exerçant des forces de rappel équivalentes à un couple de moment :

$$\mathbf{M}_\Delta(\mathbf{C}) = -\mathbf{C} \cdot \theta \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \theta : \text{l'angle de torsion en (rad)} \\ \mathbf{C} : \text{constante de torsion dépend du fil} \end{cases}$$

2) Etude dynamique

Le pendule de torsion est constitué d'un fil de torsion et d'une tige horizontale, lorsqu'en écarte la tige de sa position d'équilibre il oscille autour de sa position d'équilibre

✚ On repère les positions de la tige à chaque instant par l'abscisse angulaire $\theta(t)$

Les forces exercées sur (la tige) :

- $\vec{P}$ Le poids de la tige de moment $M_\Delta(\vec{P}) = 0$ (La droite d'action de $\vec{P}$ est confondu avec (Δ))
- $\vec{R}$ Force exercée par le fil de moment $M_\Delta(\vec{R}) = 0$ (La droite d'action de $\vec{R}$ est confondu avec (Δ))
- Couple de torsion de moment $M_C = -C \cdot \theta$

✚ On applique la relation fondamentale de la dynamique de rotation : $\Sigma M_\Delta(\vec{F}_{\text{ext}}) = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$

$$M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) + M_C = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

$$0 + 0 - C \cdot \theta = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

D'où l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta} \cdot \theta = 0$$

✚ La solution est de la forme :

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \theta_m : \text{Amplitude maximale} \\ T_0 : \text{la période propre} \\ \varphi : \text{la phase à l'origine des temps} \end{cases}$$

En remplaçant $\ddot{\theta}(t)$ et $\theta(t)$ dans l'équation différentielle on obtient la

période propre :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$$

3) Etude énergétique

a) Energie cinétique

L'énergie cinétique du pendule de torsion est définie par : $E_C = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2$

b) Energie potentielle de torsion E_{Pt}

L'énergie potentielle de torsion d'un pendule de torsion est définie par : $E_{Pt} = \frac{1}{2} C \theta^2 + Cte$

Souvent on prend ($E_{Pt} = 0$ pour $\theta = 0$) ; donc $Cte = 0$ d'où :

$$E_{Pt} = \frac{1}{2} C \theta^2$$

c) Energie mécanique

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle

$$E_m = E_C + E_{Pt} = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C \theta^2$$

d) Conservation de l'énergie mécanique

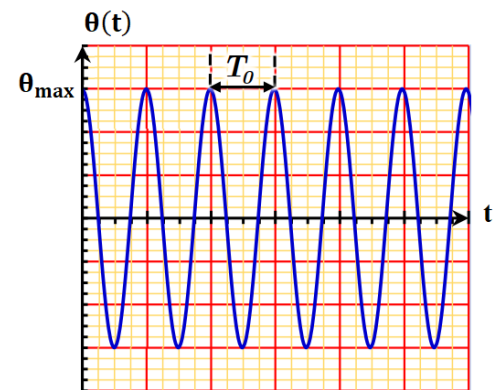
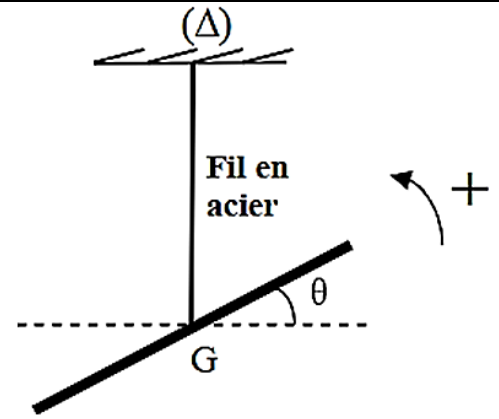
En absence du frottement l'énergie mécanique est conservée

$$E_m = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} C \theta_{\text{max}}^2$$

Remarque

On peut déterminer l'équation différentielle à partir de la conservation de l'énergie mécanique

$$E_m = cte \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta} \cdot \theta = 0$$



vi. Pendule Pesant

On appelle pendule pesant tout solide mobile autour d'un axe ne passant pas par son centre de gravité et placé dans un champ de pesanteur.

1) Etude dynamique

On repère les positions du solide (S) par l'abscisse angulaire $\theta(t)$

✚ Les forces exercées sur (S) :

- $\vec{P}$ Le poids
- $\vec{R}$ Force exercée par l'axe (Δ)
- Le moment de $\vec{P}$: $M_{\Delta}(\vec{P}) = -mgL \sin \theta$
- Le moment de $\vec{R}$: $M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$

(La droite d'action de $\vec{R}$ est confondu avec l'axe (Δ))

✚ On applique la relation fondamentale de la dynamique de rotation

$$M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{R}) = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$$

$$-mgL \sin \theta + 0 = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$$

✚ L'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{mgL}{J_{\Delta}} \sin \theta = 0$$

✚ Pour des petites oscillations ($\sin \theta \sim \theta$) :

$$\ddot{\theta} + \frac{mgL}{J_{\Delta}} \theta = 0$$

✚ La solution de l'équation différentielle (petites oscillations) est :

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \text{ avec } \begin{cases} \theta_m : \text{Amplitude maximale} \\ T_0 : \text{la période propre} \\ \varphi : \text{la phase à l'origine des temps} \end{cases}$$

En remplaçant $\ddot{\theta}(t)$ et $\theta(t)$ dans l'équation différentielle on obtient la

période propre :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{mgL}}$$

2) Etude énergétique

a) Energie cinétique

L'énergie cinétique du pendule pesant est définie par : $E_C = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2$

b) Energie potentielle de torsion E_{Pt}

L'énergie potentielle d'un pendule pesant est : $E_{PP} = mgL(1 - \cos \theta) + Cte$

Pour des petites oscillations on a : $\cos \theta \sim 1 - \frac{\theta^2}{2}$ d'où : $E_{PP} = \frac{1}{2} mgL \theta^2 + Cte$

c) Energie mécanique

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle

$$E_m = E_C + E_{PP} = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mgL \theta^2$$

d) Conservation de l'énergie mécanique

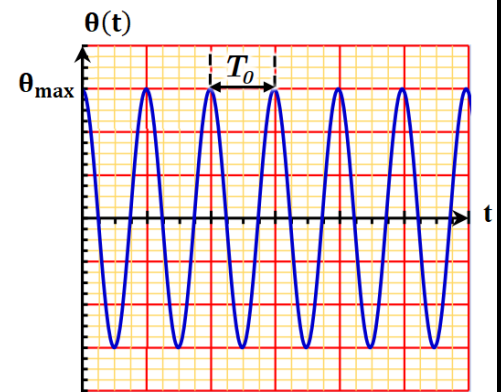
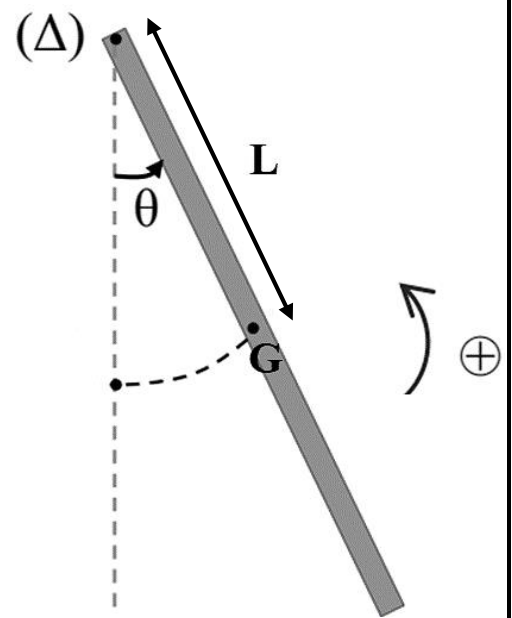
En absence du frottement l'énergie mécanique est conservée

$$E_m = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}_{max}^2 = \frac{1}{2} mgL \theta_{max}^2$$

Remarque

On peut déterminer l'équation différentielle à partir de la conservation de l'énergie mécanique

$$E_m = cte \Leftrightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgL}{J_{\Delta}} \theta = 0$$



vii. Le pendule simple

Le pendule simple est une masse ponctuelle fixée à l'extrémité d'un fil inextensible de masse négligeable, et oscillant sous l'effet de la pesanteur

1) Etude dynamique

On repère les positions du solide (S) par l'abscisse angulaire $\theta(t)$

Les forces exercées sur (S) :

- $\vec{P}$ Le poids
- $\vec{R}$ Force exercée par l'axe (Δ)
- $M_{\Delta}(\vec{P}) = -mgL \sin \theta$
- $M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$ (Le droite d'action de $\vec{R}$ est confondu avec (Δ))

On applique la relation fondamentale de la dynamique de rotation

$$M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{R}) = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$$

$$(J_{\Delta} = mL^2) \quad -mgL \sin \theta + 0 = mL^2 \cdot \ddot{\theta}$$

D'où l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

Pour des petites oscillations $\sin \theta \sim \theta$:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

La solution de l'équation différentielle (petites oscillations) est :

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \theta_m : \text{Amplitude maximale} \\ T_0 : \text{la période propre} \\ \varphi : \text{la phase à l'origine des temps} \end{cases}$$

En remplaçant $\ddot{\theta}(t)$ et $\theta(t)$ dans l'équation différentielle on obtient la

période propre :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

2) Etude énergétique

a) Energie cinétique

L'énergie cinétique du pendule pesant est définie par : $E_C = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2$ Car ($J_{\Delta} = mL^2$)

b) Energie potentielle E_{PP}

L'énergie potentielle d'un pendule simple est : $E_{PP} = mgL(1 - \cos \theta) + Cte$

Pour des petites oscillations on a : $\cos \theta \sim 1 - \frac{\theta^2}{2}$ d'où : $E_{PP} = \frac{1}{2} mgL \theta^2 + Cte$

c) Energie mécanique

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle

$$E_m = E_C + E_{PP} = \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mgL \theta^2$$

d) Conservation de l'énergie mécanique

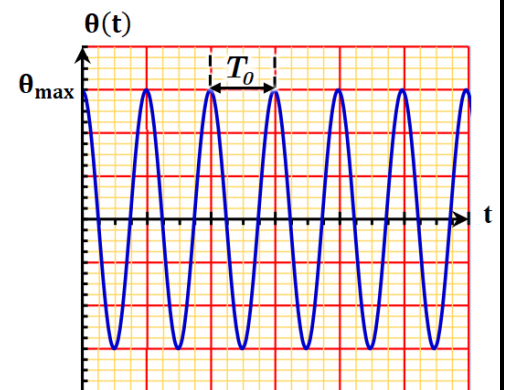
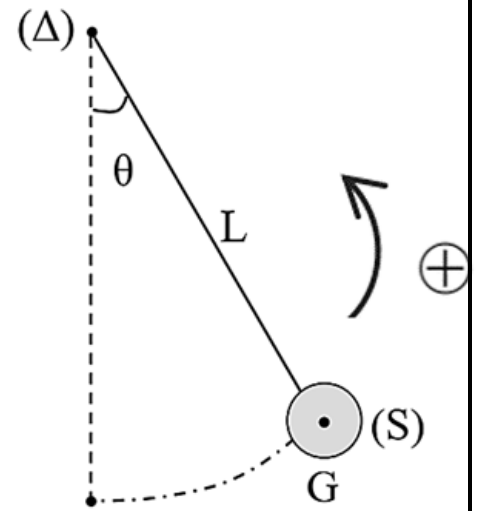
En absence du frottement l'énergie mécanique est conservée

$$E_m = \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}_{\max}^2 = \frac{1}{2} mgL \theta_{\max}^2$$

Remarque

On peut déterminer l'équation différentielle à partir de la conservation de l'énergie mécanique

$$E_m = cte \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$$



Atome et mécanique de Newton

i. Loi de newton et loi de coulomb

1) Loi de newton

Deux corps ponctuels **A** et **B**, de masses m_A et m_B , séparés par la distance **d**, exercent l'un sur l'autre des forces d'interactions $\vec{F}_{A/B}$ et $\vec{F}_{B/A}$ ayant :

- ✚ Même droite d'action (AB)
- ✚ Des sens opposés
- ✚ Même intensité : $F_{A/B} = F_{B/A} = G \cdot \frac{m_A m_B}{d^2}$ G : constante de gravitation universelle $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ S.I}$

2) Loi de coulomb

Deux corps **A** et **B** de charge q_A et q_B , séparés par la distance **d**, exercent l'un sur l'autre des forces électrostatiques $\vec{F}_{A/B}$ et $\vec{F}_{B/A}$ ayant :

- ✚ Même droite d'action (AB)
- ✚ Des sens opposés
- ✚ Même intensité : $F_{A/B} = F_{B/A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_A q_B}{d^2}$ avec ϵ_0 : La permittivité dans le vide $\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ S.I}$

ii. Limites de la mécanique de Newton

1) Mécanique classique

La mécanique de Newton n'est pas utilisable à l'échelle atomique et moléculaire pour expliquer quelques phénomènes physiques comme l'échange énergétique entre la matière et la lumière

2) Mécanique quantique

a) Quantification de l'énergie

Lorsque un atome est excité par rayonnement l'énergie échangée **E** entre la matière et un rayonnement ne peut prendre que des valeurs **définies** et **discrètes** ; on dit que cette énergie est quantifiée

b) Le photon

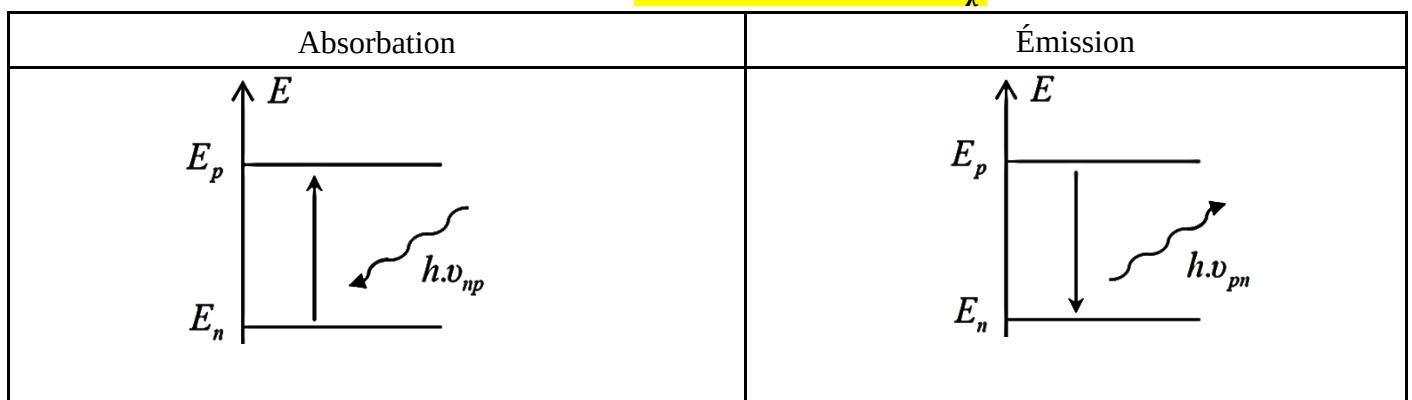
Le photon est une onde électromagnétique de fréquence ν et de longueur d'onde dans le vide λ

L'énergie de chaque photon est : $E = h \nu = \frac{h c}{\lambda}$ avec $\begin{cases} E : \text{Energie du photon} \\ h : \text{Constante de Planck} \\ c : \text{Célérité de la lumière dans le vide} \end{cases}$

3) Émission et absorptions d'un photon

Les atomes, les molécules et les noyaux possèdent des niveaux d'énergies quantifiées.

Lorsque ces entités échangent de l'énergie avec le milieu extérieur, elles transitent d'un niveau d'énergie E_P à un niveau d'énergie E_n ou réciproquement. $\Delta E = E_P - E_n = h \nu = \frac{h c}{\lambda}$



Transformations rapides et transformations lentes

i. Réaction d'oxydoréduction

1) Définitions

Oxydant : est une espèce chimique capable de capter un ou plusieurs électrons (noté **Ox**)

Réducteur : est une espèce chimique capable de céder un ou plusieurs électrons (noté **Red**)

Oxydation : est une perte d'électrons $Red \rightarrow Ox + ne^-$

Réduction : est un gain d'électrons $Ox + ne^- \rightarrow Red$

2) Couple d'oxydoréduction (Ox/Red)

Le couple **Ox/Red** constitué par un oxydant et le réducteur correspondant.

On associe au couple **Ox/Red** une demi-équation d'oxydo-réduction : $Ox + n.e^- \rightleftharpoons Red$

✚ Pour équilibrer la demi-équation oxydo-réduction, on suit les étapes suivantes :

- Conservation des éléments autre que l'oxygène (**O**) et l'hydrogène(**H**)
- Conservation de l'élément oxygène (**O**) en ajoutant des molécules **H₂O**
- Conservation de l'élément Hydrogène (**H**) en ajoutant des ions **H⁺**
- Conservation de la charge électrique en ajoutant des électrons **e⁻**

3) Équation de la réaction d'oxydo-réductions

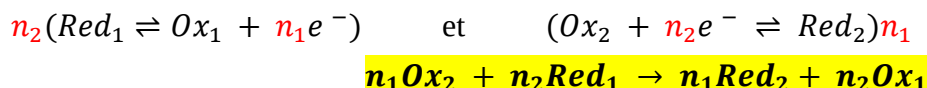
Une réaction oxydo-réduction met en jeu deux couples : **Ox₁/Red₁** et **Ox₂/Red₂**

Pour établir l'équation de la réaction on suit les étapes suivantes :

1) Écrire les demi-équations oxydo-réductions :



2) On fait la somme (1) + (2) de sorte que le nombre d'électrons échangés soit le même



ii. Transformation rapide et transformation lente

1) Transformation rapide

Transformation se fait en une durée trop courte pour être suivie par l'œil ou par les instruments de mesures

2) Transformation lente

Transformation peut être suivie par l'œil ou par les instruments de mesures

3) Méthodes physiques pour suivi une transformation lente

✚ **Conductimétrie** : Pour les milieux réactionnels contenant des ions.

✚ **pH-mètre** : Pour les milieux réactionnels contenant des ions **H₃O⁺** et **HO⁻**

✚ **Mesure de volume ou de pression** : Lorsqu'un gaz est mis en jeu.

iii. Facteurs cinétiques

Les facteurs cinétiques : grandeurs qui ont une influence sur la vitesse d'évolution d'un système chimique

L'influence de la température	L'influence des concentrations initiales
La vitesse d'évolution d'un système chimique est d'autant plus grande que sa température est plus Elevée	La vitesse d'évolution d'un système chimique est d'autant plus grande que les concentrations en réactifs sont plus importantes

Suivi temporel d'une transformation

i. Suivi temporel d'une transformation chimique

1) Définition

Suivi l'évolution d'une transformation chimique c'est connaître sa composition à chaque instant.

2) Méthodes de suivi l'évolution d'une transformation

Méthodes physiques	Méthode chimique
La conductimétrie La mesure de la pression au de volume La mesure du pH	Le dosage

ii. Vitesse de réaction et le temps de demi-réaction

1) Vitesse de réaction

La vitesse volumique de réaction v est définie par :

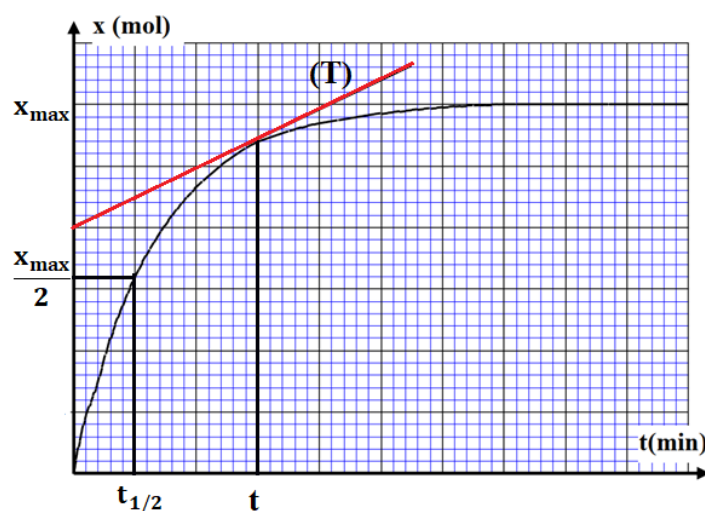
$$v = \frac{1}{V} \cdot \frac{dx}{dt} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v : \text{la vitesse volumique en } (\text{mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}) \\ V : \text{volume total de la solution en } (\text{m}^3) \\ dx : \text{la variation de l'avancement en } (\text{mol}) \\ dt : \text{la variation de temps en } (\text{s}) \end{cases}$$

2) Détermination graphique du v

Pour déterminer la vitesse volumique de la réaction à un instant t , on calcule le coefficient directeur $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ de la tangente (T) de la courbe $x = f(t)$ à l'instant t et on le divise par le volume total de la solution V

3) Temps de demi-réaction

Le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ est le temps nécessaire pour que l'avancement de la réaction soit égal à la moitié de sa valeur finale $x(t_{1/2}) = \frac{x_f}{2}$



Remarque

- Si la transformation est totale $x_f = x_{\max}$
- Généralement la vitesse de la réaction diminue au cours du temps car les concentrations des réactifs diminuent

4) Autres expressions de la vitesse de la réaction

On peut exprimer aussi la vitesse de la réaction en fonction de :

Concentration d'un ion formé	Le volume du gaz formé	La pression du gaz formé	La conductivité σ
$v = \frac{1}{a} \cdot \frac{d[\text{ion}]}{dt}$	$v = \frac{1}{a \cdot V \cdot V_m} \cdot \frac{dV(\text{gaz})}{dt}$	$v = \frac{x_{\max}}{V \cdot \Delta P_{\max}} \cdot \frac{d\Delta P}{dt}$	$v = \frac{x_{\max}}{V \cdot \sigma_{\max}} \cdot \frac{d\sigma}{dt}$

a : Le coefficient stœchiométrique de l'élément chimique suivi.

iii. Vitesse de la réaction et facteurs cinétiques

1) La température

Plus la température est élevée, plus les collisions sont élevées et plus la réaction est rapide.

2) La concentration initiale des réactifs

Plus les concentrations initiales des réactifs sont élevées, plus les collisions sont élevées et plus la réaction est rapide.

Transformations chimiques qui ont lieu dans les deux sens

i. Rappels sur les acides et les bases

1) Définitions au sens de Bronsted

Acide : est une espèce chimique susceptible de céder au moins un proton H^+

Base : est une espèce chimique susceptible de capter au moins un proton H^+

2) Couple acide/base

Le couple (HA/A^-) est composé d'un acide AH et de sa base conjuguée A^- , possible de passer de l'acide à la base et inversement par perte au gain d'un proton H^+

On associe au couple (HA/A^-) une demi-équation acido-basique : $HA \rightleftharpoons A^- + H^+$

Remarque

Les espèces chimiques appartenant à deux couples sont appelées des ampholytes (exemple H_2O)

3) Réactions acido-basiques

Une réaction acido-basique est une réaction qui met en jeu un transfert de proton H^+ entre les réactifs.

La réaction acido-basique met en jeu deux couples acide/base : A_1H/A_1^- et A_2H/A_2^- .

Les demi-équations acido-basiques :



L'équation bilan de la réaction : $A_1H + A_2^- \rightarrow A_1^- + A_2H$

4) Définition du pH d'une solution

Le pH d'une solution est défini par la relation : $pH = -\log[H_3O^+] \Leftrightarrow [H_3O^+] = 10^{-pH}$

ii. Taux d'avancement final τ

1) Avancement final et l'avancement maximal

L'avancement maximal $x_{\max}$ est l'avancement qui correspond à l'état final théorique

L'avancement final x_f est la valeur de l'avancement qui correspond à l'état final réel

2) Taux d'avancement final τ

Le taux d'avancement final d'une réaction, noté τ , est donné par :

$$\tau = \frac{x_f}{x_{\max}} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } \tau = 1 : \text{ la réaction est totale} \\ \text{Si } \tau < 1 : \text{ la réaction est limitée} \end{cases}$$

3) Réaction limitée

Lorsque la réaction est limitée $\tau < 1$ la réaction aura lieu dans les deux sens, l'équation de la réaction s'écrit par deux flèches :

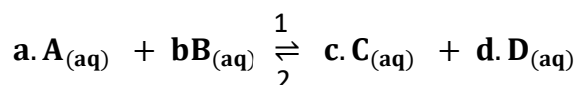


Lorsque la réaction est limitée, l'état final du système est dans un état d'équilibre chimique

4) Interprétation microscopique de l'état d'équilibre chimique

A l'équilibre les concentrations des réactifs et des produits restent constantes

Au niveau microscopique la réaction s'effectuent dans les deux sens (1) et (2) avec la même vitesse



Etat d'équilibre d'un système chimique

i. État d'équilibre d'un système chimique

1) Quotient de réaction Q_r

Considérons l'équation de la réaction : $a.A_{(aq)} + b.B_{(aq)} \xrightleftharpoons{\frac{1}{2}} c.C_{(aq)} + d.D_{(aq)}$

Le quotient de la réaction est une grandeur qui nous renseigne sur l'évolution du système étudié :

Le quotient de la réaction Q_r est donné par : $Q_r = \frac{[C]^c \cdot [D]^d}{[A]^a \cdot [B]^b}$

[X] : La concentration molaire de l'espèce chimique X, en (mol/L)

Remarque

Les solides et l'eau ne figurent pas dans l'expression de ce quotient

2) La constante d'équilibre K

La constante d'équilibre K est le quotient de réaction à l'équilibre : $K = Q_{réq} = \frac{[C]_{éq}^c \cdot [D]_{éq}^d}{[A]_{éq}^a \cdot [B]_{éq}^b}$

La constante d'équilibre ne dépend que de la température.

Remarque : dans le cas d'un équilibre chimique, l'avancement final est noté $x_{éq}$

ii. Conductance et conductivité d'une solution

1) La conductance

La conductance d'une solution est donnée par la relation :

$$G = \sigma \cdot \frac{S}{L} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma : \text{la conductivité de la solution en } (S \cdot m^{-1}) \\ S : \text{la surface des électrodes en } (m^2) \\ L : \text{la distance entre les plaques en } (m) \end{cases}$$

2) La conductivité

La conductivité de la solution est égale à la somme des conductivités molaires des ions de la solution.

$$\sigma = \sum \lambda_i \cdot [X_i] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma : \text{la conductivité en } (S \cdot m^{-1}) \\ \lambda_i : \text{la conductivité molaire ionique en } (S \cdot m^2 \cdot mol^{-1}) \\ [X_i] : \text{la concentration de l'ion } X_i \text{ en } (mol \cdot m^{-3}) \end{cases}$$

3) Détermination de la constante d'équilibre par la mesure de la conductivité

Exemple : considérons une solution de volume V d'acide éthanóïque CH_3COOH de concentration C

L'équation de la réaction de l'acide éthanóïque avec l'eau : $CH_3COOH + H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + CH_3COO^-$

Équation de la réaction		$CH_3COOH + H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + CH_3COO^-$			
État du système	Avancement	Quantités de matière en (mol)			
État initial	0	C.V	En excès	0	0
État intermédiaire	x	C.V - x		x	x
État final	x_{max}	C.V - x_{max}		x_{max}	x_{max}
	$x_{éq}$	C.V - $x_{éq}$		$x_{éq}$	$x_{éq}$

✚ L'expression de la conductivité : $\sigma_{éq} = \lambda_{H_3O^+} [H_3O^+]_{éq} + \lambda_{CH_3COO^-} [CH_3COO^-]_{éq}$

✚ D'après le tableau d'avancement : $[H_3O^+]_{éq} = [CH_3COO^-]_{éq}$ et $[CH_3COOH]_{éq} = C - [H_3O^+]_{éq}$

✚ Connaissant la conductivité à l'équilibre on peut calculer la valeur de $[H_3O^+]_{éq}$:

$$[H_3O^+]_{éq} = \frac{\sigma_{éq}}{(\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{CH_3COO^-})}$$

✚ La constante d'équilibre est donnée par : $K = \frac{[H_3O^+]_{éq}^2}{C - [H_3O^+]_{éq}}$

iii. Facteurs influençant sur le taux d'avancement

1) Influence de la constante d'équilibre

Exemple

Considérons la réaction de la transformation entre l'acide méthanoïque et l'eau selon l'équation de la réaction suivante :



Le tableau d'avancement :

Équation de la réaction		$\text{HCOOH} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_3\text{O}^+ + \text{HCOO}^-$			
État du système	Avancement	Quantités de matière en (mol)			
État initial	0	C.V	En excès	0	0
État intermédiaire	x	C.V - x		x	x
État d'équilibre	x_{max}	C.V - x_{max}		x_{max}	x_{max}
	$x_{\text{éq}}$	C.V - $x_{\text{éq}}$		$x_{\text{éq}}$	$x_{\text{éq}}$

✚ L'avancement maximal de la réaction : $x_{\text{max}} = \text{C.V}$

✚ Le taux d'avancement $\tau = \frac{x_{\text{éq}}}{\text{C.V}}$ $\Leftrightarrow x_{\text{éq}} = \tau \cdot \text{C.V}$

✚ D'après le tableau d'avancement : $[\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{éq}} = [\text{HCOO}^-]_{\text{éq}} = \frac{x_{\text{éq}}}{V}$ et $[\text{HCOOH}]_{\text{éq}} = \frac{\text{C.V} - x_{\text{éq}}}{V}$

On a : $K = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{éq}} \cdot [\text{HCOO}^-]_{\text{éq}}}{[\text{HCOOH}]_{\text{éq}}} = \frac{x_{\text{éq}}^2}{(\text{C.V} - x_{\text{éq}}) \cdot V}$ et $x_{\text{éq}} = \tau \cdot \text{C.V}$

La constant d'équilibre en fonction du taux de l'avancement :

$$K = \frac{\text{C} \cdot \tau^2}{(1 - \tau)}$$

Conclusion

Plus la constante d'équilibre **K** est grande plus le taux d'avancement τ est élevé.

2) Influence de l'état initial d'un système

Plus la concentration de la solution est faible plus le taux d'avancement τ est élevé

Exemple

Acide éthanoïque de concentration initiale $C_i(\text{mol/L})$	$5 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$
Taux d'avancement τ	0.02	0.06	0.17

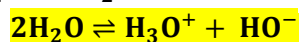
Transformation acido-basique en solution aqueuse

i. Le produit ionique de l'eau

1) Autoprotolyse de l'eau

L'autoprotolyse de l'eau est une réaction acido-basique entre l'acide H_2O et la base H_2O

Les deux couples mis en jeu sont : $\text{H}_3\text{O}^+ / \text{H}_2\text{O}$ et $\text{H}_2\text{O} / \text{HO}^-$



2) Produit ionique de l'eau

Le produit ionique de l'eau est défini par : $K_e = [\text{H}_3\text{O}^+].[\text{HO}^-]$ À 25°C, $K_e = 10^{-14}$

Remarque

On utilise souvent le $\text{p}K_e$ défini par : $\text{p}K_e = -\log K_e \Leftrightarrow K_e = 10^{-\text{p}K_e}$

3) Solution neutre, acide, basique

✚ Une solution est neutre si : $[\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{HO}^-] \Leftrightarrow \text{pH} = \frac{\text{p}K_e}{2}$ à 25°C on a $\text{pH} = 7$

✚ Une solution est acide si : $[\text{H}_3\text{O}^+] > [\text{HO}^-] \Leftrightarrow \text{pH} < \frac{\text{p}K_e}{2}$ à 25°C on a $\text{pH} < 7$

✚ Une solution est basique si : $[\text{H}_3\text{O}^+] < [\text{HO}^-] \Leftrightarrow \text{pH} > \frac{\text{p}K_e}{2}$ à 25°C on a $\text{pH} > 7$

ii. La constante d'acidité K_A d'un couple acide/base

1) Définition

L'acide AH réagit avec l'eau selon l'équation : $\text{AH} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_3\text{O}^+ + \text{A}^-$

La constante d'acidité K_A est la constante d'équilibre associée à l'équation de la réaction d'un acide avec l'eau

La constante d'acidité K_A associée au couple AH/A^- est : $K_A = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+].[\text{A}^-]}{[\text{AH}]}$

$$\text{p}K_A = -\log K_A \Leftrightarrow K_A = 10^{-\text{p}K_A}$$

iii. La relation entre $\text{p}K_A$ et pH

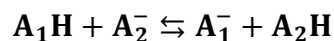
Pour tout couple acide/base AH/A^- , on a : $K_A = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+].[\text{A}^-]}{[\text{AH}]}$

$$\log K_A = \log[\text{H}_3\text{O}^+] + \log \frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]} \Leftrightarrow -\log[\text{H}_3\text{O}^+] = -\log K_A + \log \frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]}$$

$$\text{pH} = \text{p}K_A + \log \frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]}$$

iv. Constante d'équilibre associée à une réaction acido-basique

Soit la réaction acido-basique entre l'acide A_1H du couple $\text{A}_1\text{H} / \text{A}_1^-$ et la base A_2^- du couple $\text{A}_2\text{H} / \text{A}_2^-$:



La constante d'équilibre K de la réaction est : $K = \frac{[\text{A}_1^-].[\text{A}_2\text{H}]}{[\text{A}_1\text{H}].[\text{A}_2^-]} \Leftrightarrow K = \frac{K_{A1}}{K_{A2}} = 10^{\text{p}K_{A2} - \text{p}K_{A1}}$

Remarque

Une transformation chimique peut être considérée totale si $K > 10^4$

v. Comparer le comportement d'acides et de bases en solution

1) Comportement des acides dans une solution

Pour une même concentration, un acide A_1 est plus fort qu'un acide A_2 , si le taux d'avancement final de sa réaction avec l'eau est plus grand $\tau_1 > \tau_2$ (on montre que : $\tau = \frac{10^{-pH}}{c}$)

2) Comportement des bases dans une solution

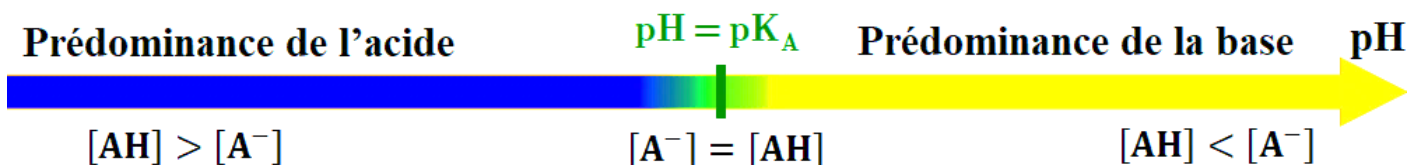
Pour une même concentration, une base B_1 est plus forte qu'une base B_2 , si le taux d'avancement final de sa réaction avec l'eau est plus grand $\tau_1 > \tau_2$ (on montre que : $\tau = \frac{10^{pH-pK_e}}{c}$)

vi. Diagramme de prédominance et de distribution

1) Diagramme de prédominance

Pour un couple acide-base AH/A^- dans une solution aqueuse on a : $pH = pK_A + \log \frac{[A^-]}{[AH]}$

- ✚ Si $pH = pK_A \Leftrightarrow [A^-] = [AH]$ pas de prédominance
- ✚ Si $pH < pK_A \Leftrightarrow [A^-] < [AH]$ prédominance de l'acide
- ✚ Si $pH > pK_A \Leftrightarrow [A^-] > [AH]$ prédominance de la base

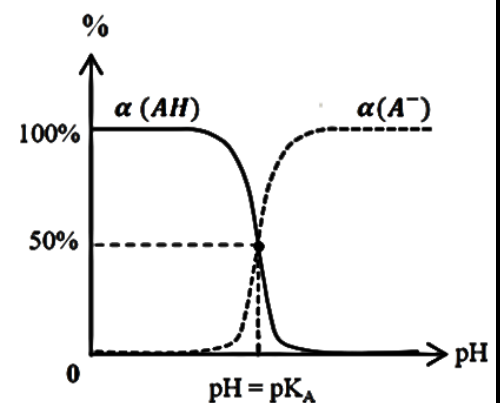


2) Diagramme de distribution

On considère une solution aqueuse, contenant un acide AH et sa base conjuguée A^- , la figure ci-contre représente le diagramme de distribution

$\alpha(AH)$: Le pourcentage d'acide AH dans la solution

$\alpha(A^-)$: Le pourcentage de la base A^- dans la solution



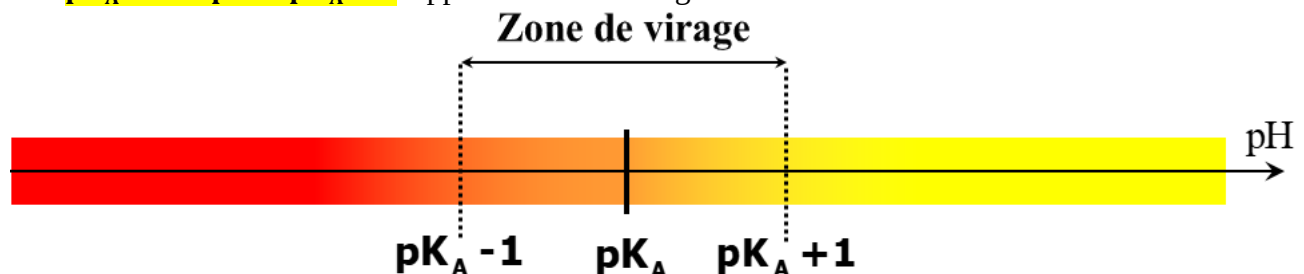
vii. Indicateurs colorés

1) Définition

Un indicateur coloré est un couple acide/base noté HIn/In^- dont la forme basique et la forme acide ont des couleurs différentes.

2) Zone de virage

La zone $pK_A - 1 < pH < pK_A + 1$ appelée zone de virage de l'indicateur coloré.



Remarque

L'indicateur colore convenable pour réaliser un titrage colorimétrique est l'indicateur coloré dont sa zone de virage contient la valeur du pH de l'équivalence

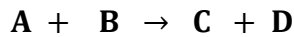
viii. Dosage acido-basiques

1) Définition

- Doser une espèce chimique en solution, c'est déterminer sa concentration molaire dans la solution.
- La réaction de dosage est **rapide, totale et unique**

2) Dosage par mesure de pH

Considérons l'équation de la réaction de dosage suivante :



A est le réactif titré de concentration C_A et de volume V_A
et **B** est le réactif titrant de concentration C_B

- Au cours du dosage on mesure la valeur du **pH** pour chaque valeur du volume V_B ajouté et on trace la courbe : $\text{pH} = f(V_B)$

- A l'équivalence on a : $C_A \cdot V_A = C_B \cdot V_{BE}$

3) Détermination (pH_E, V_{BE})

a) Méthode des tangentes

On trace les deux tangentes aux courbes parallèles entre elles et on trace la perpendiculaire commune à ces deux droites parallèles puis on construit la médiatrice du segment obtenu

b) Méthode de la courbe dérivée

La courbe $\frac{dpH}{dV_B} = f(V_B)$ permet de déterminer V_{BE}

4) Taux d'avancement de réaction de titrage (Exemple)

Dans un bécher, on verse un volume $V_A = 20\text{mL}$ de solution d'acide éthanóïque de concentration $C_A = 0.01\text{mol.L}^{-1}$ puis on y ajoute le volume $V_B = 5\text{mL}$ de solution de soude (NaOH) de concentration $C_B = 0.02\text{mol.L}^{-1}$. La mesure du **pH** a donné la valeur : **pH=4.8**, On s'intéresse à déterminer le taux d'avancement de la réaction du titrage lorsque on ajoute le volume V_B

- L'équation de la réaction de titrage : $\text{CH}_3\text{COOH} + \text{HO}^- \rightarrow \text{CH}_3\text{COO}^- + \text{H}_2\text{O}$

Équation de la réaction		$\text{CH}_3\text{COOH} + \text{HO}^- \rightarrow \text{CH}_3\text{COO}^- + \text{H}_2\text{O}$			
État du système	Avancement	Quantités de matière en (mol)			
État initial	0	$C_A \cdot V_A$	$C_B \cdot V_B$	0	En excès
État final	$x_{\max}$	$C_A \cdot V_A - x_{\max}$	$C_B \cdot V_B - x_{\max}$	$x_{\max}$	
	x_f	$C_A \cdot V_A - x_f$	$C_B \cdot V_B - x_f$	x_f	

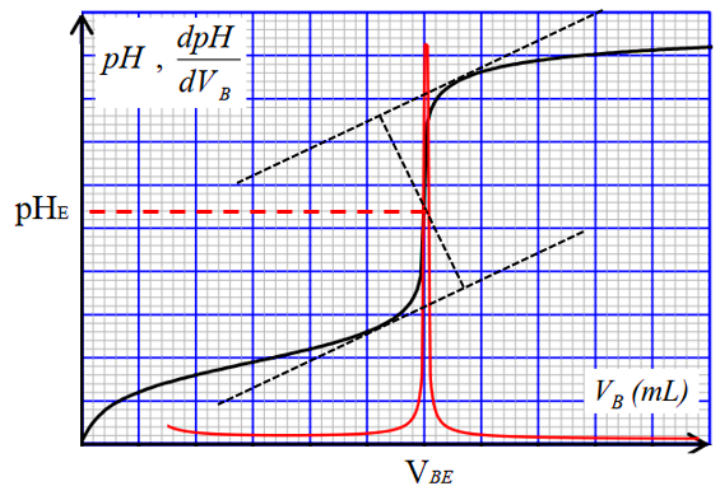
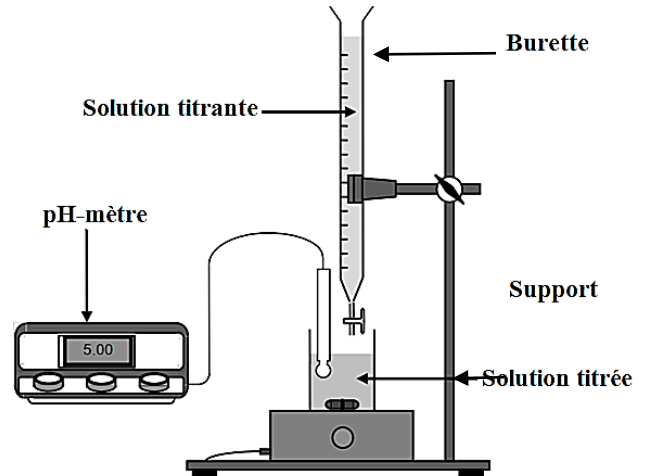
- Puisque $V_B < V_{BE}$ donc le réactif limitant est HO^- et l'avancement maximale $x_{\max} = C_B \cdot V_B$

- D'après le tableau d'avancement $n_f(\text{HO}^-) = C_B \cdot V_B - x_f$

D'où $x_f = C_B \cdot V_B - n_f(\text{HO}^-) = C_B \cdot V_B - [\text{HO}^-]_f \cdot (V_A + V_B)$

On a $K_e = [\text{H}_3\text{O}^+] \cdot [\text{HO}^-] \Leftrightarrow [\text{HO}^-]_f = \frac{K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+]_f} = 10^{\text{pH} - \text{p}K_e} \Leftrightarrow x_f = C_B \cdot V_B - 10^{\text{pH} - \text{p}K_e} (V_A + V_B)$

- En fin $\tau = \frac{C_B \cdot V_B - 10^{\text{pH} - \text{p}K_e} (V_A + V_B)}{C_B \cdot V_B}$ A.N : $\tau = 1$ donc la réaction de dosage acido-basique est totale



Evolution spontanée d'un système chimique

i. Evolution spontanée d'un système chimique

1) Quotient de réaction Q_r

Soit l'équation de la réaction : $a.A_{(aq)} + b.B_{(aq)} \rightleftharpoons c.C_{(aq)} + d.D_{(aq)}$

Le quotient de la réaction est une grandeur qui nous renseigne sur l'évolution du système étudié :

Le quotient de la réaction Q_r est donné par : $Q_r = \frac{[C]^c \cdot [D]^d}{[A]^a \cdot [B]^b}$

2) Constante d'équilibre

$$K = Q_{réq} = \frac{[C]_{éq}^c \cdot [D]_{éq}^d}{[A]_{éq}^a \cdot [B]_{éq}^b}$$

Exemple d'une réaction acidobasique	Exemple d'une réaction d'oxydoréduction
$CH_3COOH_{(aq)} + HO^-_{(aq)} \rightleftharpoons CH_3COO^-_{(aq)} + H_2O_{(l)}$ $Q_r = \frac{[CH_3COO^-]}{[CH_3COOH] \cdot [HO^-]}$	$Cu^{2+}_{(aq)} + 2 Br^-_{(aq)} \rightleftharpoons Cu_{(s)} + Br_{2(aq)}$ $Q_r = \frac{[Br_2]}{[Cu^{2+}] \cdot [Br^-]^2}$

3) Critère d'évolution d'un système

Pour prévoir le sens d'évolution d'un système chimique on calcule $Q_{r,i}$ le quotient initial de la réaction et on le compare avec la constante d'équilibre de la réaction

Soit l'équation de la réaction : $a.A_{(aq)} + b.B_{(aq)} \rightleftharpoons c.C_{(aq)} + d.D_{(aq)}$

Le quotient de la réaction : $Q_{r,i} = \frac{[C]_i^c \cdot [D]_i^d}{[A]_i^a \cdot [B]_i^b}$

- ✚ Si $Q_r < K$ la réaction s'effectue dans le sens direct (sens 1)
- ✚ Si $Q_r > K$ la réaction s'effectue dans le sens inverse (sens 2)
- ✚ Si $Q_r = K$ la réaction est en équilibre

Transformation spontanée dans les piles

i. Transformations spontanées dans les piles

1) Transfert spontané d'électrons entre des espèces chimiques

Lorsque on mélange deux espèces chimique appartenant à deux couples (**Ox/Red**), il y a transfert spontanée d'électron entre l'oxydant d'un couple vers le réducteur de l'autre

2) Constitution d'une pile

✚ La pile : est un dipôle qui transforme l'énergie chimique en énergie électrique

✚ La pile est composée de deux compartiments liés par un pont salin :

➤ **1^{er} compartiment** est composé d'un métal M_1 plongé dans une solution contient les ions M_1^{n+}

➤ **2^{ème} compartiment** est composé d'un métal M_2 plongé dans une solution contient les ions M_2^{m+}

➤ **Le pont salin** constitue d'une solution électrolytique,

Remarque

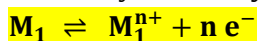
Le rôle du pont salin est d'assuré la neutralité électrique et de garantir le passage du courant électrique

ii. Fonctionnement d'une pile

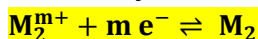
1) Principe de fonctionnement

✚ Les deux couples qui interviennent au cours de fonctionnement de la pile sont : M_1^{n+}/M_1 et M_2^{m+}/M_2

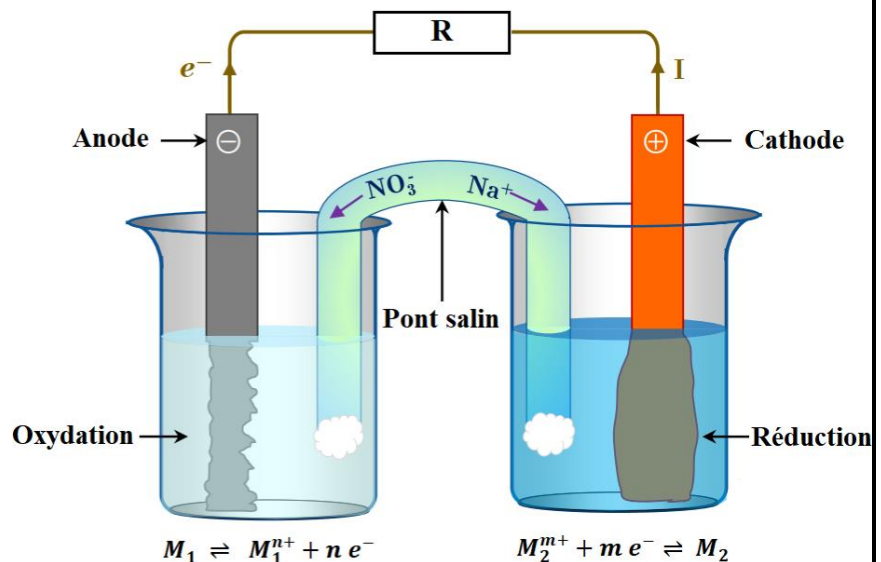
M_1 : est l'électrode **négative** de la pile appelé **anode**, où il y a une **oxydation** :



M_2 : est l'électrode **positive** de la pile appelé **cathode** où il y a une **réduction** :



✚ Au cours de fonctionnement d'une pile, il se produit une réaction d'oxydoréduction d'équation :



2) Le schéma conventionnel de la pile

Le schéma conventionnel de la pile est : $\ominus M_1/M_1^{n+} \parallel M_2^{m+}/M_2 \oplus$

iii. Caractéristiques d'une pile

1) Force électromotrice d'une pile

Une pile est un dipôle actif caractérisé par sa force électromotrice E (se mesure à l'aide d'un voltmètre)

2) Evolution spontané d'une pile

✚ Le système évolue dans le sens direct, lorsque $Q_r < K$

✚ Lorsque le système est en équilibre, $Q_{ri} = K$ la pile est usée (déchargée) $I = 0$ A

3) Quantité d'électricité débitée par une pile

La quantité d'électricité débitée par une pile débitant un courant d'intensité constante I pendant une durée Δt

est donnée par : $Q = I \cdot \Delta t = n(e^-) \cdot F$ avec $\begin{cases} n(e^-): \text{la quantité de matière d'électrons} \\ F = 9,65 \cdot 10^4 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}: \text{La constante de faraday} \end{cases}$

4) Quantité d'électricité maximale débitée par une pile

La quantité d'électricité maximale $Q_{\max}$ débitée par une pile est : $Q_{\max} = I \cdot \Delta t_{\max} = n(e^-)_{\max} \cdot F$

$\Delta t_{\max}$: La durée maximale du fonctionnement de la pile (durée de vie de la pile)

Exemples de transformations forcées

i. Transformation forcées

1) Définition

Une transformation forcée est une transformation qui se déroule dans le sens opposée à l'évolution spontanée (grâce à un générateur qui impose un courant électrique dans le sens inverse)

ii. L'électrolyse

1) Principe

- L'électrolyse est une transformation forcée dû au courant électrique imposé par un générateur
- Le générateur impose un sens inverse au sens d'évolution spontanée du système

2) Fonctionnement de l'électrolyseur

Dans une électrolyse :

- L'électrode reliée au pôle - du générateur électrique est le siège d'une **réduction** ; il s'agit de la **cathode**
- L'électrode reliée au pôle + du générateur électrique est le siège d'une **oxydation** ; il s'agit de l'**anode**

3) Quantité d'électricité-bilan de matière

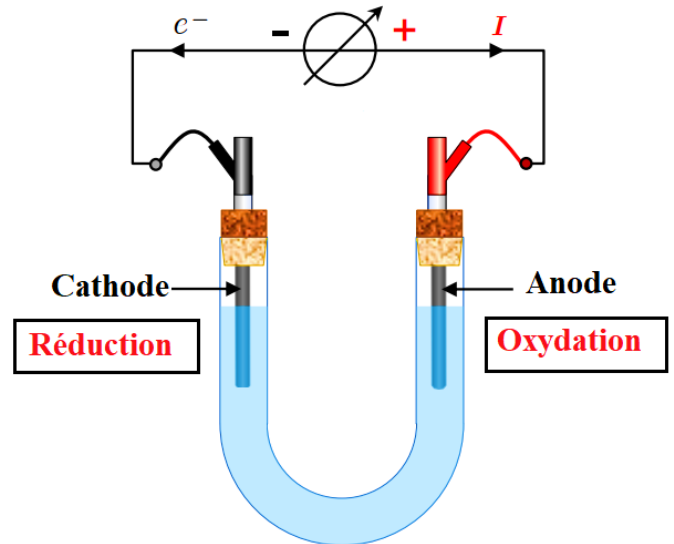
Lorsque le générateur débite un courant d'intensité **I**

pendant la durée Δt , le système est traversé par la quantité d'électricité **Q** donnée par :

$$Q = I \cdot \Delta t = n(e^-) \cdot F \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n(e^-): \text{La quantité de matière d'électrons} \\ F = 9,65 \cdot 10^4 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}: \text{La constante de faraday} \end{cases}$$

4) Quelques applications de l'électrolyse

- Préparation de métaux (le zinc, l'aluminium, le cuivre)
- Protection des objets
- Les accumulateurs



iii. Exemple d'électrolyse

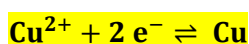
Dans un tube en U on introduit une solution de bromure de cuivre ($\text{Cu}^{2+}, 2 \text{Br}^-$)

Deux électrodes en graphite plongées dans la solution et reliées chacune à l'une des bornes d'un générateur (figure ci-contre)

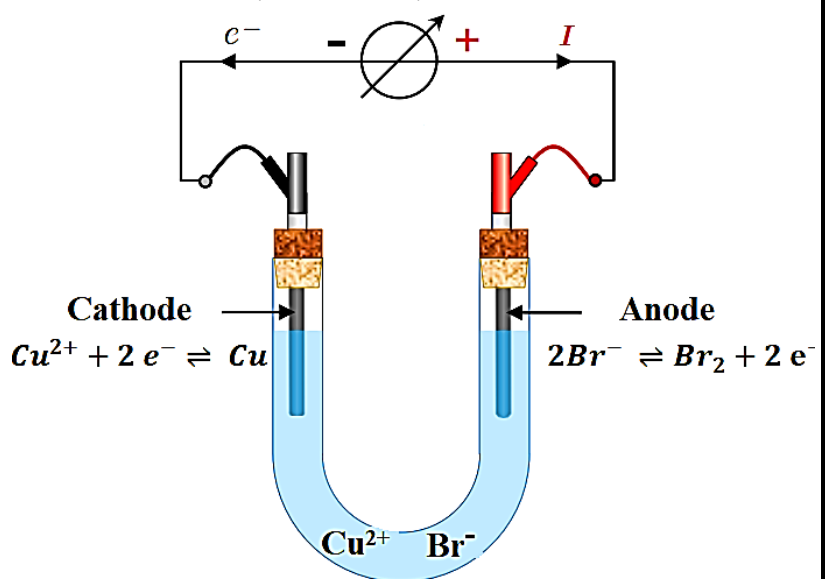
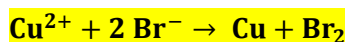
- Au niveau de l'**anode** (électrode relié au pôle (+) du générateur) se produit une réaction d'**oxydation** :



- Au niveau de la **cathode** (électrode relié au pôle (-) du générateur) se produit une réaction de **réduction** :



- L'équation bilan de l'électrolyse :



Les réactions d'estérification et d'hydrolyse

i. Nomenclature et groupes fonctionnels

1) Les alcools

Un alcool $R-OH$ contient le groupe caractéristique hydroxyle $-OH$ lié à un groupe alkyle $R-$

Nomenclature	Exemple
On nomme les alcools en ajoutant au nom de l'alcane correspondant le suffixe "ol" précédée de son indice de la position du carbone fonctionnel dans la chaîne principale et qui porte le numéro le plus petit	CH_3-CH_2-OH éthanol

2) Les acides carboxyliques

Les acides carboxyliques $R-COOH$ contiennent le groupe carboxylique $(-COOH)$.

Nomenclature	Exemple
On nomme les acides carboxyliques en ajoutant au nom de l'alcane correspondant le suffixe "oïque" précédée par le terme "acide"	$CH_3-CH_2-C \begin{smallmatrix} \nearrow OH \\ \searrow O \end{smallmatrix}$ Acide éthanoïque

3) Les esters

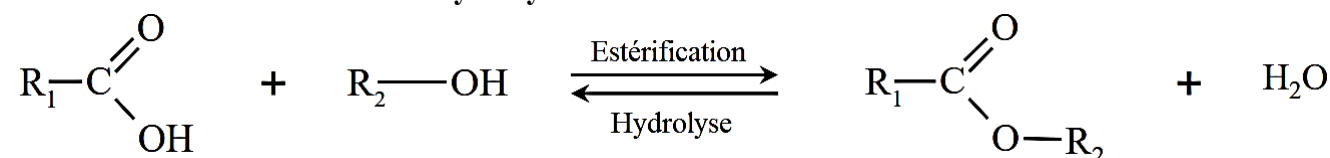
Les esters possèdent un groupe caractéristique ester : $R-COOR'$

Nomenclature	Exemple
La chaîne carbonée $R-C$ dérive d'un nom de l'acide carboxylique correspondant, la terminaison "oïque" est remplacée par "oate" La chaîne carbonée R' liée à l'atome (O), prend la terminaison "yle"	$CH_3-CH_2-C \begin{smallmatrix} \nearrow OH \\ \searrow O-CH_3 \end{smallmatrix}$ éthanoate de méthyle

ii. Réactions d'estérification et d'hydrolyse d'un ester

1) Equation de la réaction

La réaction d'estérification et d'hydrolyse sont inverse l'une de l'autre et ont lieu simultanément



Remarque : L'estérification et l'hydrolyse sont des réactions **lentes** et **limitées**

2) Etat d'équilibre estérification-hydrolyse

À d'équilibre chimique la vitesse d'estérification est égale à la vitesse d'hydrolyse.

L'équilibre est caractérisé par la constante d'équilibre K : $K = Q_{\text{req}} = \frac{[\text{ester}]_{\text{eq}} \cdot [\text{eau}]_{\text{eq}}}{[\text{acide}]_{\text{eq}} \cdot [\text{alcool}]_{\text{eq}}}$

Si $Q_r < K$, le système évolue dans le sens direct, sens d'estérification.

Si $Q_r > K$; le système évolue dans le sens inverse, sens d'hydrolyse de l'ester.

3) Rendement d'une transformation chimique

Le rendement r d'une transformation est égal au quotient de n_{exp} la quantité de matière

expérimentalement obtenu, par n_{max} la quantité de matière maximale attendu : $r = \frac{n_{\text{exp}}}{n_{\text{max}}}$

4) Facteurs influencent sur la vitesse de la réaction

L'élévation de la **température** permet d'atteindre plus rapidement l'équilibre d'estérification -hydrolyse.

Un **catalyseur** permet d'augmenter la vitesse de réaction sans modifier l'état final

5) Facteur influencent sur le rendement de la réaction

Le rendement de l'estérification est d'autant plus important que l'un des réactifs soit en excès

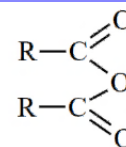
L'élimination de l'ester et/ou de l'eau lors de leur formation permet d'améliorer le rendement

Contrôle de l'évolution de systèmes chimiques

i. Estérification par un anhydride d'acide

1) Anhydrides d'acides

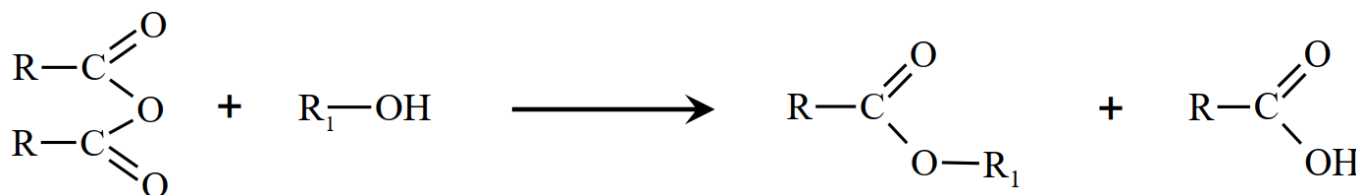
Un anhydride d'acide est un composé organique qui possède le groupe caractéristique :



Nomenclature	Exemple
Un anhydride se nomme en remplaçant le mot " acide " par le mot " anhydride " dans le nom de l'acide carboxylique correspondant	anhydride éthanoïque $\begin{array}{c} \text{H}_3\text{C}-\text{C}=\text{O} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{O} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{H}_3\text{C}-\text{C}=\text{O} \end{array}$

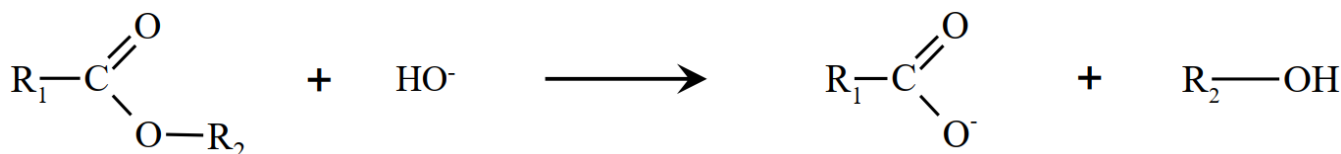
2) Estérification par un anhydride d'acide

L'estérification par un anhydride d'acide est une transformation entre un anhydride d'acide et l'alcool, il se forme l'ester et l'acide carboxylique, l'hydrolyse de l'ester n'est pas possible car le milieu est anhydre



3) Hydrolyse basique d'un ester (saponification)

L'hydrolyse basique d'un ester R_1COOR_2 (ou la saponification d'un ester) est une réaction de cet ester avec l'ion hydroxyde HO^- en solution concentrée qui donne un ion carboxylate R_1COO^- et un alcool R_2-OH



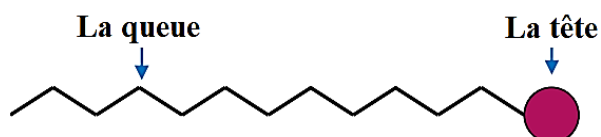
✚ L'hydrolyse basique d'un ester est une transformation **totale** et **rapide**

✚ L'estérification ne peut pas se produire

4) Propriétés des savons

Le savon est un mélange d'ion RCOO^- et d'ion Na^+ (ou K^+)

L'ion carboxylate d'un savon est composé d'une longue chaîne carbonée **R** appelée « **queue** » de l'ion, et d'un groupe $-\text{COO}^-$ polarisé appelé « **tête** »



✚ « **La tête** » est soluble dans l'eau $-\text{COO}^-$ est appelée la partie **hydrophile**

✚ « **la queue** » La longue chaîne **R** insoluble dans l'eau **R** est appelée la partie **hydrophobe**

ii. Contrôle de l'évolution d'un système chimique par catalyse

1) Définition

Un catalyseur est une substance qui accélère une réaction chimique sans modifier l'état final

2) Types de catalyses

Catalyse homogène	Catalyse hétérogène	Catalyse enzymatique
Le catalyseur et les réactifs sont dans la même phase	Les réactifs et le catalyseur ne sont pas dans la même phase	Lorsque le catalyseur est une enzyme

- Le montage expérimental utilisé lors d'une réaction d'estérification, hydrolyse et de saponification est le chauffage à reflux
- L'intérêt du chauffage à reflux est d'accélérer la réaction et éviter les pertes de la matière
- On ajoute au mélange réactionnel des **pierres ponce** pour stabiliser la température du milieu réactionnel



	1 IA 11A	Periodic Table of the Elements																								2 VIII 8A									
	1 H Hydrogen 1.008	2 IIA 2A																		13 IIIA 3A	14 IVA 4A	15 VA 5A	16 VIA 6A	17 VIIA 7A	18 VIII 8A										
3	Li Lithium 6.941	4	Be Beryllium 9.012																	5	B Boron 10.811	6	C Carbon 12.011	7	N Nitrogen 14.007	8	O Oxygen 15.999	9	F Fluorine 18.998	10	Ne Neon 20.180				
11	Na Sodium 22.990	12	Mg Magnesium 24.305	3	IIIB 3B	4	IVB 4B	5	VB 5B	6	VIB 6B	7	VII B 7B	8 VIII 8		9	VIII 9	10	VIII 10	11	IB 1B	12	IIB 2B	13	Al Aluminum 26.982	14	Si Silicon 28.086	15	P Phosphorus 30.974	16	S Sulfur 32.066	17	Cl Chlorine 35.453	18	Ar Argon 39.948
19	K Potassium 39.098	20	Ca Calcium 40.078	21	Sc Scandium 44.956	22	Ti Titanium 47.88	23	V Vanadium 50.942	24	Cr Chromium 51.996	25	Mn Manganese 54.938	26	Fe Iron 55.933	27	Co Cobalt 58.933	28	Ni Nickel 58.693	29	Cu Copper 63.546	30	Zn Zinc 65.39	31	Ga Gallium 69.732	32	Ge Germanium 72.61	33	As Arsenic 74.922	34	Se Selenium 78.09	35	Br Bromine 79.904	36	Kr Krypton 84.80
37	Rb Rubidium 84.468	38	Sr Strontium 87.62	39	Y Yttrium 88.906	40	Zr Zirconium 91.224	41	Nb Niobium 92.906	42	Mo Molybdenum 95.94	43	Tc Technetium 98.907	44	Ru Ruthenium 101.07	45	Rh Rhodium 102.906	46	Pd Palladium 106.42	47	Ag Silver 107.868	48	Cd Cadmium 112.411	49	In Indium 114.818	50	Sn Tin 118.71	51	Sb Antimony 121.760	52	Te Tellurium 127.6	53	I Iodine 126.904	54	Xe Xenon 131.29
55	Cs Cesium 132.905	56	Ba Barium 137.327	57-71		72	Hf Hafnium 178.49	73	Ta Tantalum 180.948	74	W Tungsten 183.85	75	Re Rhenium 186.207	76	Os Osmium 190.23	77	Ir Iridium 192.22	78	Pt Platinum 195.08	79	Au Gold 196.967	80	Hg Mercury 200.59	81	Tl Thallium 204.383	82	Pb Lead 207.2	83	Bi Bismuth 208.980	84	Po Polonium [208.982]	85	At Astatine 209.987	86	Rn Radon 222.01
87	Fr Francium 223.020	88	Ra Radium 226.025	89-103		104	Rf Rutherfordium [261]	105	Db Dubnium [262]	106	Sg Seaborgium [266]	107	Bh Bohrium [264]	108	Hs Hassium [269]	109	Mt Meitnerium [268]	110	Ds Darmstadtium [269]	111	Rg Roentgenium [272]	112	Cn Copernicium [277]	113	Uut Ununtrium unknown	114	Fl Flerovium [289]	115	Uup Ununpentium unknown	116	Lv Livermorium [298]	117	Uus Ununseptium unknown	118	Uuo Ununoctium unknown
Lanthanide Series				57	La Lanthanum 138.906	58	Ce Cerium 140.115	59	Pr Praseodymium 140.908	60	Nd Neodymium 144.24	61	Pm Promethium 144.913	62	Sm Samarium 150.36	63	Eu Europium 151.966	64	Gd Gadolinium 157.25	65	Tb Terbium 158.925	66	Dy Dysprosium 162.50	67	Ho Holmium 164.930	68	Er Erbium 167.26	69	Tm Thulium 168.934	70	Yb Ytterbium 173.04	71	Lu Lutetium 174.967		
Actinide Series				89	Ac Actinium 227.028	90	Th Thorium 232.038	91	Pa Protactinium 231.036	92	U Uranium 238.029	93	Np Neptunium 237.048	94	Pu Plutonium 244.064	95	Am Americium 243.061	96	Cm Curium 247.070	97	Bk Berkelium 247.070	98	Cf Californium 251.080	99	Es Einsteinium [254]	100	Fm Fermium 257.095	101	Md Mendelevium 258.1	102	No Nobelium 259.101	103	Lr Lawrencium [262]		

Gmail: babaelhoussine1@gmail.com

