TSE/STI



SUJETS DU BAC 2014 à .....

Ministère de l'Éducation Nationale **Centre National des Examens et Concours de l'Éducation** EXAMEN : Baccalauréat Général Série: Terminale Sciences Exactes (**TSE**) et Sciences et Technologie Industrielle (**STI**) Épreuve: Mathématiques	**République du Mali** **Un Peuple-Un But-Une Foi** BAC 2021 SESSION : Août 2021
Durée: 4 heures	Coefficient: 4

Exercice 1.....**(6 pts)**

Soit la fonction polynôme p de l'ensemble $\mathbb{C}$, des nombres complexes, dans $\mathbb{C}$ définie pour tout nombre complexe z par : $p(z)=z^3-(7+9i)z^2+(-14+39i)z+50$.

1. Démontre que la fonction polynôme p admet une racine imaginaire pure notée z_0.

2. Résous, dans $\mathbb{C}$, l'équation $p(z)=0$. On note z_1 et z_2 les solutions non imaginaires pures avec $\mathrm{Re}(z_1)\prec\mathrm{Re}(z_2)$.

3. Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2.

a. Détermine l'affixe z_G du point G barycentre du système $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$ puis écris z_G sous la forme exponentielle.

b. Détermine puis construis l'ensemble (E) des points M du plan tels que :
$MA^2-MB^2+MC^2=4$.

c. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCG$?

Exercice 2.....**(5 pts)**

A. On désigne par x un entier naturel supérieur ou égal à 5.

Soient les entiers naturels N et N' qui s'écrivent respectivement $\overline{100x}$ et $\overline{x001}$ dans le système de base $x+1$.

1. Ecris N et N' dans le système de base x.

2. Ecrie $N+N'$ dans le système de base $x+1$.

Déduis-en que $N+N'$ est un multiple de $x+1$.

3. Donne, dans le système de base x, le quotient q de la division euclidienne de $N+N'$ par $x+1$.

4. Montre qu'il existe deux entiers naturels a et b tels que : $\overline{ab}^x\times\overline{aaa}^x=q$.

B. Détermine tous les couples (α,β) d'entiers naturels non nuls vérifiant :

$PGCD(\alpha,\beta)+PPCM(\alpha,\beta)=\beta+9$.

Problème ..... **(9 pts)**

Partie A

Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g: x \mapsto g(x)=x-1-x\ln x$.

1. Détermine l'ensemble de définition D_g de g puis calcule les limites de g aux bornes de D_g.

2. g' désigne la fonction dérivée de la fonction g.

   a. Détermine g' puis étudie le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.

   b. Etudie les variations de g puis dresse son tableau de variations.

   c. Déduis-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;I,J)$ d'unité graphique : $2cm$. (C) désigne la représentation graphique de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f: x \mapsto f(x)=|x^2-1|+\ln|x-1|$, si $x \leq 0$ et $f: x \mapsto f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$, si $x \succ 0$.

1. D_f désigne l'ensemble de définition de la fonction f.

   a. Détermine D_f.

   b. Calcule les limites de f aux bornes de D_f.

2. Etude de f en -1 :

   a. étudie la continuité et la dérivabilité de f en -1.

   b. donne une interprétation graphique des résultats obtenus.

3. Détermination de la fonction dérivée, notée f', de la fonction f.

   a. Calcule $f'(x)$, pour $x \leq 0$

   b. Montre que : $\forall x \in D_f \cap \mathbb{R}_+^*, f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(x-1)^2}$.

   c. Donne le sens de variation de f puis dresse son tableau de variations.

4. Construction de la représentation graphique de f :

a. précise les branches infinies de (C).

b. trace (C).

Partie C

1. Montre que la fonction $H : x \mapsto -x+(x-1)\ln|x-1|$ est une primitive sur $]-\infty,1[$ de la fonction $h : x \mapsto \ln|x-1|$.

2. Calcule l'aire A , en cm^2 , de la partie du plan définie par : $\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$.

Ministère de l'Éducation Nationale
Centre National des Examens et Concours de l'Éducation
EXAMEN : Baccalauréat Général
SÉRIE : Terminale Sciences Exactes(T.S.E) et Sciences et Technologie Industrielle(S.T.I)
ÉPREUVE : Mathématiques — DURÉE : 4 heures

Republique du Mali
Un Peuple-Un But-Une Foi
BAC 2020
SESSION : Octobre 2020
COEFFICIENT : 4

Exercice 1 *[5 points]*

On désigne par A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - i$ et $z_B = -2i$, et pour tout nombre complexe plan complexe z différent de z_B, on pose $Z = \frac{z - z_A}{z - z_B}$.

1. Détermine, dans chaque cas, l'ensemble des points $M(z)$ tel que :
   a. Z soit un réel ;
   b. Z soit un imaginaire pur (éventuellement nul) ;
   c. Z soit de module 1.
2. Calcule $|Z-1|\times|z-z_B|$ et en déduis que, lorsque $M(z)$ parcourt le cercle de centre B et de rayon R, les points d'affixes Z sont tous situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 2: *[5 points]*

1. Démontre que pour tout entier naturel n, $2^{3n}-1$ est un multiple de 7. En déduis que $2^{3n+1}-2$ et $2^{3n+2}-4$ sont des multiples de 7.
2. Détermine les restes de la division par 7 des puissances de 2.
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on considère le nombre $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.
   a. Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7?
   b. Démontre que si $p = 3n+1$ alors A_p est divisible par 7.
   c. Étudie le cas où $p = 3n+2$.

Problème : *[10 points]*

Les parties A et B sont indépendantes.

A) Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f: x \mapsto f(x) = ln(e^{2x} + 2e^{-x})$.

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, unité graphique : 2 *cm*.

1. Montre que pour tout réel x positif : $f(x) = 2x + ln(1 + 2e^{-2x})$.
2. a. Étudie la limite de f en $+\infty$.

b. Montre que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à (C), quand x tend vers $+\infty$.

c. Étudie la position de (C) et (D).

3. Étudie les variations de f.

4. Trace (C) et (D).

5. Montre que pour tout réel α, $\alpha > 0$: $\int_0^{\alpha} e^{-3x}dx \leq \frac{1}{3}$.

6. Établis que, pour tout u, $u \geq 0$: $ln(1+u) \leq u$.

7. En déduis que, pour tout réel α, $\alpha > 0$: $\int_0^{\alpha} ln(1+2e^{-3x})dx \leq \frac{2}{3}$.

8. Soit $A(\alpha)$ l'aire, exprimée en cm^2, du domaine limité par les droites d'équations :

$x = 0$, $x = \alpha$, $y = 2x$ et la courbe (C).

En déduis des questions précédentes une majoration de $A(\alpha)$ par un nombre indépendant de α.

B) 1. Étudie les variations de la fonction h définie dans l'intervalle $[2; 4]$ par :

$h: x \mapsto h(x) = 2 - x + ln\, x$; en déduis que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique β.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2 + ln\, u_n$.

Montre que l'image de l'intervalle $[2; 4]$ par la fonction $g: x \mapsto 2 + ln\, x$ est incluse dans l'intervalle $[2; 4]$.

3. Montre en utilisant l'inégalité des accroissements finis que pour tout entier naturel n :

$|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{2}|u_n - \beta|$.

4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouve que pour tout entier naturel n :

$$|u_n - \beta| \leq 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

5. En déduis que (u_n) est convergente.

6. Détermine un entier naturel N tel que $|u_N - \beta| \leq 10^{-4}$.

BAC 2019

Série: TSE-STI **SESSION : Août 2019**

Exercice 1..... (6 pts)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique: 5cm), on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 1+i$ et $z_B = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Donne la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B.
2. Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de (C) d'affixe $e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0;2\pi[$. On considère l'application f qui à tout point M de (C), associe $f(M) = MA \times MB$.
   a. Montre, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha}\sin\alpha$.
   b. Montre l'égalité suivante: $f(M) = \left|e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$.
   c. En déduis l'égalité suivante: $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2}$.
3. a. En utilisant 2.c., montre qu'il existe deux points M de (C), dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donne cette valeur minimale.
   b. En utilisant 2.c., montre qu'il existe un seul point M de (C), dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donne cette valeur maximale.

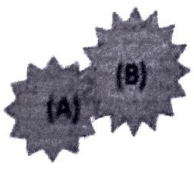
Exercice2..... (4 pts)

I. Une roue d'engrenage (A) a douze dents.

a. Elle est en contact avec une roue (B) de 18 dents. Au bout de combien de tours de chacune d'elles seront-elles de nouveau, et pour la première fois, dans la même position ?

b. (A) est maintenant en contact avec une roue dentée (C), ayant plus de 12 dents. Après 10 tours de (A), les deux roux sont, de nouveau pour la première fois, dans la même position.

Détermine le nombre de dents de la roue (C).



II. On considère un triangle ABC du plan.

1. a. Détermine et construis le point G, barycentre de $\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}$.

b. Détermine et construis le point G', barycentre de $\{(A;1);(B;5);(C;-2)\}$.

2. a. Soit J le milieu de $[AB]$.

Exprime $\overrightarrow{GG'}$ et $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduis l'intersection des droites (GG') et (AB).

b. Montre que le barycentre I de $\{(B;2);(C;-1)\}$ appartient à (GG').

3. Soit D un point quelconque du plan. Soient O le milieu de $[CD]$ et K le milieu de $[OA]$.

Détermine trois réels a, d et c tels que K soit barycentre de $\{(A;a);(D;d);(C;c)\}$.

Problème..... (10 pts)

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2+\cos x)e^{1-x}$.

On note C la courbe représentative de f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)>0$.

2. a. Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin x$.

b. En déduis que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $2+\cos x+\sin x>0$.

c. Montre que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. a. Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{1-x}\le f(x)\le 3e^{1-x}$.

b. En déduis les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c. Interprète géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.

4. a. Montre que, sur l'intervalle $[0;\pi]$, l'équation $f(x)=3$ admet une solution unique α.

b. Donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

5. Représente la courbe C sur $[0;4]$.

Partie B

On veut calculer l'aire A, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe C, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=1$.

1. Montre que $A = 2e-2+\int_0^1 \left(e^{1-t}\cos t\right)dt$.
2. On pose $I=\int_0^1 \left(e^{1-t}\cos t\right)dt$ et $J=\int_0^1 \left(e^{1-t}\sin t\right)dt$.
   a. À l'aide de deux intégrations par parties, montre que :
   $I = e-J-\cos 1$ et $J = 1-\sin 1$.
   b. En déduis la valeur de I.
3. Détermine la valeur exacte de A en unités d'aire, puis donne une valeur approchée de A à 10^{-2} près par défaut.

Partie C

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -1-\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$.

1. a. Montre que la fonction h admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

   b. Calcule la primitive H de la fonction h, qui prend en 0 la valeur $(1+\ln 3)$.

2. a. Détermine $\ln\left(f(x)\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

   b. Etudie le sens de variation de la fonction H.

   c. Détermine le tableau de variation de H.

3. On appelle Γ la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto 1-x+\ln(2+\cos x)$. On ne demande pas de représenter Γ. On appelle Δ la droite d'équation $y=-x+1$.

a. Etudie la position relative de Γ et de Δ.

   b. Détermine les abscisses des points communs à Γ et Δ.

4. a. Etablis une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0.

   b. Etudie la position relative de Γ et T.

5. Montre que la courbe Γ est contenue dans une bande du plan limité par deux droites parallèles dont on donnera des équations.

Ministère de l'Education Nationale
Centre National des examens et Concours de l'Education
EXAMEN : *Baccalauréat malien*
SÉRIE : *TSE – STI*
ÉPREUVE : *Mathématiques*

République du Mali
Un Peuple – Un But – Une Foi
BAC 2018
SESSION : *Juin 2018*
DURÉE: 4 *heures*
COEF: 4

Exercice 1 : ..... **(6 *Points*)**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité grahique 1 cm).

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :
$z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=0$.

Partie A:

1. Montre que $-i$ est solution de (E).
2. Détermine les nombres réels a, b, c tels que; $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(az^2+bz+c)$
3. Résous l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

Partie B:

On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4+i$; $4-i$; $-i$

1. Place les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.
2. Soit r l'application du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=iz-2i+2$.
   Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par r.
   Calcule l'affixe s de S.
3. Démontre que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ dont on déterminera le centre et le rayon. Trace $\mathcal{C}$.
4. Á tout point M d'affixe $z\neq 2$, on associe le point M' d'affixe : $z'=\dfrac{iz+10-2i}{z-2}$.
   a. Détermine les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B et C.
   b. Vérifier que A', B', C' appartiennent à un cercle $\mathcal{C}'$ de centre P, d'affixe i. Détermine son rayon et trace $\mathcal{C}'$.
   c. Pour tout nombre complexe $z\neq 2$, exprime $|z'-i|$ en fonction de z.
   d. Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle $\mathcal{C}$. Démontre que $|z'-1|=2\sqrt{5}$.
   e. En déduis à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points du cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 2 : ..... **(4 *points*)**

I. On considère l'équation (E) : $8x+5y=1$, où (x, y) est un couple de nombres entiers relatifs.

1. a. Donne une solution particulière de l'équation (E).
   b. Résous l'équation (E).
2. Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple (a, b) de nombres entiers vérifiant :
$$\begin{cases} N=8a+1 \\ N=5b+2 \end{cases}$$
   a. Montre que le couple $(a, -b)$ est solution de (E).
   b. Quel est le reste, dans la division de N par 40?
3. a. Résous l'équation $8x+5y=100$, où (x, y) est un couple de nombres entiers relatifs.
   b. Au VIIIe siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge.
   Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune.
   Combien pouvait il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe?

I. On se propose de résoudre l'équation différentielle : $y' - 2y = \dfrac{-2}{1+e^{-2x}}$ $(E.)$

1. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et f la fonction définie par : $f(x) = e^{2x}g(x)$.

   Montre que f est solution de (E) si, et seulement si $g'(x) = \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

2. En déduis toutes les solutions de (E).

Problème : ..... **(10 *points*)**

A 1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par : $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$.

   A. On admet le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$. En déduis la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 1.

   B. Calcule $g'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

   C. Résous l'inéquation : $1 - \ln(x-1) > 0$, d'inconnue x appartenant à l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

   D. Étudie le sens de variation de g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

   E. Montre que l'équation $g(x) = 0$ une solution unique notée α, dans l'intervalle $[e+1\,;e^3+1]$ puis étudie le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

A. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par $\varphi(x) = \dfrac{\ln(x^2-1)}{x}$.

   A. Détermine $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)$ et prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = 0$.

   B. Calcule $\varphi'(x)$ et montre que $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

   C. Montre que φ est croissante sur l'intervalle $]1\,;\sqrt{\alpha}]$ et décroissant sur l'intervalle $[\sqrt{\alpha}\,;+\infty[$.

B. On définit la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$.

1. Vérifie que, pour tout x appartenant à l''intervalle $]0\,;+\infty[$, on a $f(x) = \varphi(e^x)$.
2. En déduis :
   a. la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0;
   b. la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$;
   c. le sens de variation de f sur l'intervalle et le fait que f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$.
3. Montre que, pour tout x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ $f(x) \le \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.
4. Réproduis et complète le tableau suivant en donnant des valeurs approchées à 10^{-2} près.

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3
$f(x)$						

5. Représente graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unités 5cm en abscisse, 10 cm en ordonnée. On prendra 10 comme valeur approchée de α.

Ministère de l'Éducation Nationale — *République du Mali*
Centre National des examens et Concours de l'Éducation — *Un Peuple-Un But-Une Foi*

EXAMEN : Baccalauréat malien — **BAC 2017**

SÉRIE : TSE - STI — **SESSION: Juin 2017**

ÉPREUVE : Mathématiques — **DURÉE: 4 heures** — **COEF: 4**

Exercice 1 ..... [10*pts*]

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M_n d'affixes : $Z_n = (\frac{1}{2}i)^n (1+i\sqrt{3})$ où n est un entier naturel.

1) Exprime Z_{n+1} en fonction de Z_n, puis Z_n en fonction de Z_0 et n .

2) Donne Z_0, Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique .

3) Place les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 (unité : 4cm)

4) Détermine la distance OM_n en fonction de n .

5) a) Montre que $M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n} M_k M_{k+1}$ (c'est à dire $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \ldots\ldots + M_nM_{n+1}$) .

Détermine L_n en fonction de n , puis la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.

6) Détermine une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_n})$ en fonction de n .

7) Pour quelles valeurs de n les points O , M_0 et M_n sont ils alignés ? .

Exercice 2 ..... [5*pts*]

I) Dans le plan affine , on considère le triangle ABC rectangle en A , I le milieu du segment [AB] et J le centre de gravité de ABC .

Pour tout réel m , différent de $-\frac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés : $S_m = \{(A;1), (B;m), (C;2m)\}$.

Pour tout point M du plan on note $\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.

1) Montre que G_1 est le milieu du segment $[CI]$.

2) Montre que les points G_1, J et C sont alignés .

3) Montre que pour tout point M, $\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

4) Montre que pour tout réel m distinct de $-\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéeaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$.

5) Montre que le triangle I B $G_{-1/2}$ est un triangle rectangle.

II) Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé , on considère l'application affine f définie par : $\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x+4y+4) \\ y' = \frac{1}{5}(4x+3y-2) \end{cases}$

1) Démontre que f est une isométrie .
2) Trouve l'ensemble des points invariants par f .
3) Caractérise géométriquement l'application f .

Problème ..... [10*pts*]

A) Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$

On appelle (C) la courbe représentative de f .

1) a) Calcule la fonction derivée de f .

b) Dresse le tableau de variation de f ' sur $[0, +\infty[$ puis en déduis le signe de f ' sur $[0, +\infty[$.

c) Dresse le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$.

d) Montre que (C) admet une asymptôte (D) que l'on déterminera
e) Construis (C) et (D) sur un même graphique .

2) a) Etablis que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0, +\infty[$ une solution et une seule , notée α .
b) Justifie l'encadrement : $1 \leq \alpha \leq 2$.

B) Soit la fonction g définie sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$ par :

$g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1$.

1) Etudie les variations de g sur J puis en déduis que pour tout $x \in J$, $g(x) \in J$

2) Montre que pour tout $x \in J$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$

En déduis que pour tout $x \in J$, on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$.

3) Soit (U_n) la suite d'éléments de J définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = g(U_n)$ pour tout entier n positif ou nul.

a) Montre que pour tout entier n, positif ou nul on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|U_n - \alpha|$.

b) En déduis que pour tout entier n, positif ou nul on a : $|U_n - \alpha| \leq (\frac{3}{e^2})^n$.

c) Détermine la limite de la suite (U_n).

d) Détermine un entier p pour lequel on est sûr d'avoir $|U_p - \alpha| \leq 10^{-1}$.

Cacule U_p à 10^{-1} près.

Le sujet est composé de deux exercices et un problème tous obligatoires. Il comprend deux pages de 1/2 à 2/2. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies. Les propriétés ou résultats demandés dans le sujet pourront être utilisés même si le candidat ne réussit pas leur démonstration. Les calculatrices non programmables sont autorisées.

Exercice 1 : ..... **(6 points)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(A; \vec{u}; \vec{v})$, unité graphique 1cm. On considère les points B, D et C définis par : $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = 2\vec{v}$ tel que $ABCD$ soit un carré.

1. Faire une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice. **(0,5pt)**
2. Soit E l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$. Détermine l'affixe Z_E de E. Construis E. **(1pt)**
3. Détermine les nombres réels a et b tels que le point F d'affixe $Z_F = 6 - 4i$.
   Soit le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients a, b et 1. **(1pt)**
4. On considère la similitude directe $\mathcal{S}$ qui transforme A en E et B en F.
   a. Exprime Z' en fonction de Z où Z' est l'affixe du point M' image de M par $\mathcal{S}$. **(1pt)**
   b. Détermine le centre Ω, l'angle θ et le rapport k de la similitude $\mathcal{S}$. **(1pt)**
   c. Détermine les images de C et D par $\mathcal{S}$. **(0,5pt)**
   d. Calcule l'aire de l'image par $\mathcal{S}$ du rectangle ABCD. **(1pt)**

Exercice 2: ..... **(4 points)**

I. On veut entourer avec un minimum d'arbres un champ rectangulaire ayant pour dimensions 525m et 285m. Les arbres seront régulièrement espacés, de plus, il y aura un arbre à chaque sommet du rectangle. Calcule :

1. La distance comprise entre deux arbres. **(0,5pt)**
2. Le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ. **(1pt)**

II. On considère l'équation $(E) : 11x - 26y = 1$ où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1. Vérifie que le couple $(-7; -3)$ est une solution de (E). **(0,5pt)**
2. Résous alors l'équation (E). **(1pt)**
3. En déduis le couple d'entiers relatifs $(p; q)$ solution de (E) tel que : **(1pt)**

Problème : ..... **(10 points)**

A. A l'instant $t = 0$ (t est exprimé en heures), on injecte dans le sang par piqûre intraveineuse une dose de 2,5 unités d'une substance médicamenteuse. On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée.
On note $Q(t)$ la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t, exprimée en unités adaptées.
On admet que le processus d'élimination peut être représenté mathématiquement par l'équation différentielle : $Q'(t) = -\beta . Q(t)$, où β est un nombre qui sera déterminé expérimentalement.

1. Montre qu'on a $Q(t) = 2{,}5e^{-\beta t}$ **(1pt)**
2. Calcule la valeur de β, sachant qu'au bout d'une heure la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 30%. On donnera d'abord la valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 10^{-4} près. **(1,5pt)**
3. Etudie le sens de variation de Q pour $t \geq 0$, détermine sa limite en $+\infty$, et trace la courbe représentative (Γ) de Q dans le plan $\mathcal{P}$. **(1,5pt)**
4. Au bout de combien de temps la quantité de substance présente dans le sang a-t-elle été réduite de moitié ?

(1pt)

On donnera la valeur exacte et une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

B. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

1. Détermine l'ensemble de définition de f. (0,5pt)
2. Etudie les variations de f. (1 pt)
3. Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 2cm). Montre que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique dont précisera l'équation puis préciser la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à l'asymptote oblique. (1,5pt)
4. Montre que le point $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$ est centre de symétrie pour $(\mathcal{C})$ (0,75pt)
5. Donne une équation de la tangente en I à $(\mathcal{C})$. (0,5pt)
6. Construis $(\mathcal{C})$ (0,75pt)

EXAMEN : *Baccalauréat malien*

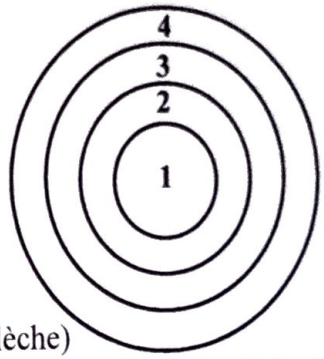
SÉRIE : *TSE* SESSION : ***Juin 2015***

ÉPREUVE : *Mathématiques* DURÉE : *4heures* COEF : 4

Exercice 1 : (5 *points*)

I. Une cible est constituée de cercles concentriques de rayons respectifs 1, 2, 3, 4 déterminant 4 zones numérotées (1), (2), (3), (4) (chaque zone est une couronne), on considère l'extérieur de la cible comme une 5ème zone.

1. Un joueur lance une flèche. La probabilité d'atteindre l'une des zones 1, 2, 3, 4 est proportionnelle à l'aire de cette zone. (**Rappel** : l'aire d'un disque de rayon **r** est $\mathbf{A}= \pi \mathbf{r}^2$). Montrez que les probabilités p_1, p_2, p_3, p_4 d'atteindre respectivement les zones (1), (2), (3), (4) sont égales à K, 3K, 5K, 7K où K est un nombre que l'on ne demande pas de calculer dans cette question. **(1,5pt)**



2.
- Si la flèche touche la zone (1), le joueur gagne 4 000 FCFA
- Si la flèche touche la zone (2), le joueur gagne 3 000 FCFA
- Si la flèche touche la zone (3), le joueur gagne 2000F CFA
- Si la flèche touche la zone (4), le joueur gagne 1 000 FCFA
- Si la flèche touche la zone (5), le joueur perd 30 000 FCFA.

On suppose que l'espérance mathématique de X est nulle.
On appelle X le gain obtenu à l'issue d'une partie (lancée d'une flèche)

a. Déterminez les probabilités p_1, p_2, p_3, p_4 et la probabilité p_5 de manquer la cible. **(1,5pt)**

b. Donnez sous forme de tableau la loi de probabilité de X. **(1pt)**

II. Trois villages désignés par les lettres A, B et C sont disposés en triangle comme suit : le village A est à 4 km de B, à 3 km de C et le village B est à 5 km de C.
Ces trois villages décident de creuser un forage situé à égale distance des villages, déterminez son emplacement en précisant la distance qui le sépare de chacun des villages. (1pt)

Exercice 2 : (5 *points*)

I. α et β sont deux entiers naturels et $N = 2^{\alpha} \times 3^{\beta}$ tels que le nombre de diviseurs de N^2 est le triple du nombre de diviseurs de N.

1. Prouvez que $(\boldsymbol{\alpha - 1})(\boldsymbol{\beta - 1}) = 3$. **(1pt)**

2. Déduisez en les valeurs de $\boldsymbol{N}$. **(0,5pt)**

II. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\boldsymbol{O}\,;\,\vec{\boldsymbol{u}}\,;\vec{\boldsymbol{v}})$ et **C** désigne l'ensemble des nombres complexes. Soient A, B et C trois points d'affixes respectives $\boldsymbol{a = -1 + 3i, b = -4 + 2i}$ et $\boldsymbol{c = 1 + 4i}$.
Soit f la transformation du plan dans lui-même qui à tout point $\boldsymbol{M}$ d'affixe $\boldsymbol{z}$ associe le point $\boldsymbol{M'}$ d'affixe $\boldsymbol{z'}$ définie par : $\boldsymbol{z' = (2 - 2i)z + 1}$.

1. Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de $\boldsymbol{f}$. **(1pt)**
2. Déterminez l'affixe du point $\boldsymbol{B'}$ image de $\boldsymbol{B}$ par la transformation $\boldsymbol{f}$. vérifiez que les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{CB'}}$ et orthogonaux. **(0,5pt)**
3. Soit $\boldsymbol{M(x\,;y)}$ où $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont des entiers relatifs et $\boldsymbol{M'}$ son image par $\boldsymbol{f}$. Montrez que les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{CM'}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{CA}}$ sont orthogonaux si et seulement si $\boldsymbol{x + 3y = 2}$. **(1pt)**

4. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $x + 3y = 2$ et en déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à $[-5\,;\,5]$ **(1pt)**

Problème : (10 *points*)

A. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\vec{j})$.

1. On désigne par $M(x\,;\,y)$ un point du plan, $M_1(x_1\,;\,y_1)$ son image par la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = x$ et $M'(x'\,;\,y')$ l'image de M_1 par la symétrie orthogonale d'axe $(O\,;\,\vec{i})$.
   - **a.** Exprimez x' et y' en fonction de x et y. **(1pt)**
   - **b.** Caractérisez l'application qui transforme M en M' **(1pt)**
   - **c.** On désigne par r l'application qui au point $M(x\,;\,y)$ associe le point $M''(x''\,;\,y'')$ définies par $\begin{cases} x'' = 1 + y \\ y'' = 1 - x \end{cases}$. Montrez que r est une rotation dont on précisera le centre Ω et l'angle θ. **(1pt)**
2. Lorsque le point M décrit la droite d'équation $y = x$, déterminez l'ensemble décrit par le point M'' ainsi que l'ensemble décrit par le milieu du segment $[M\,M'']$. **(1,5pt)**
3. Au point $M(x\,;\,y)$ on associe le point $M_2(x_2\,;\,y_2)$ définies par $\begin{cases} x_2 = 1 + 3y \\ y_2 = 1 - 2x \end{cases}$
   - **a.** Quelle est la nature de l'ensemble (E) des points M_2 lorsque M décrit le cercle unité de centre O ? **(1pt)**
   - **b.** Caractériser l'image de (E) par la rotation r définie en **1°/- c)** **(0,5pt)**

B. Soit la fonction numérique f à variable réelle x définie par : $f(x) = (2x - 1)\sqrt{\frac{x+1}{2}}$.

1. Etudiez les variations de f et tracez sa courbe (C_f) dans le plan muni du repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$. Précisez les tangentes à (C_f) aux points d'abscisses -1 et $-\frac{1}{2}$ **(1,5pt)**
2. Soit (C'_f) la courbe image de (C_f) par la symétrie orthogonale par rapport $(O\,;\,\vec{i})$. On pose $\Gamma = (C_f) \cup (C'_f)$. Tracez Γ dans le même repère que (C_f). **(0,5pt)**
3. On considère le point $A(-1\,;\,0)$ et la droite Δ d'équation $x = -2$. Soit m un paramètre non nul, D la droite d'équation $y = mx$ et D' la droite orthogonale à D en $O(0\,;\,0)$. Les droites D et D' coupent Δ en P et P' respectivement. Soit K le milieu du segment $[P\,P']$, la droite (AK) coupe D et D' en M et M' respectivement
   - **a.** Déterminez les coordonnées de M et M' en fonction de m. **(1,5pt)**
   - **b.** On appelle l'ensemble des points M lorsque $m \in \mathbb{R}$ et Γ'_1 celui des points M' lorsque $m \in \mathbb{R}$. Trouvez une relation entre Γ_1 et Γ'_1 **(0,5pt)**

EXAMEN : *Baccalauréat malien*
SÉRIE : *STI*
SESSION : *Juin 2015*
ÉPREUVE : *Mathématiques*
DURÉE : *4heures*
COEF : 4

Exercice 1 : (5 *points*)

I. **a.** Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé, donnez l'expression analytique de la symétrie orthogonale $\mathcal{S}$ d'axe la droite d'équation $y = -x + 1$. **(1pt)**

b. On considère la parabole $(\mathcal{H})$ d'équation $y = x^2 - 1$. Donnez l'équation de l'image de $(\mathcal{H})$ par la symétrie $\mathcal{S}$ **(1pt)**

c. Construire $(\mathcal{H})$ et son image dans le même repère. **(1pt)**

II. Soient A, B et C 3 points non alignés d'un plan $\mathcal{P}$ et α un nombre réel. A tout point M de $\mathcal{P}$ on associe par l'application f_α le point M' tel que :
$\overrightarrow{MM'} = (2-\alpha)\overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{MB} + (1+2\alpha)\overrightarrow{MC}$
Préciser, suivant les valeurs de α la nature et les éléments caractéristiques de l'application f_α. **(2pts)**

Exercice 2 : (5 *points*)

I. On considère le nombre complexe $z = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$

1. Calculez z^2 et z^4. **(1pt)**
2. Calculez le module et un argument de z^4En déduire le module et un argument de z **(1,5pt)**
3. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ Soit $M(x\,;\,y)$ un point du plan d'affixe le complexe $a = x + iy$. Déterminez l'ensemble des points M du plan tels que le module de az soit égal à 8 où z est le complexe défini précédemment. **(1,5pt)**

II. Trois villages désignés par les lettres A, B et C sont disposés en triangle comme suit : le village A est à $4\ km$ de B, à $3\ km$ de C et le village B est à $5\ km$ de C.
Ces trois villages décident de creuser un forage situé à égale distance des villages, déterminez son emplacement en précisant la distance qui le sépare de chacun des villages. **(1pt)**

Problème / [*10 points*]

A. 1. Résoudre l'équation différentielle$(E): y'' = (x+2)e^x$ **(1pt)**

2. Déterminez la solution de (E) vérifiant $y(0) = y'(0) = 1$ **(0,5pt)**

B. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x\,e^x$

1. **a.** Calculez les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. **(0,5pt)**

b. Calculez $f'(x)$ puis dressez le tableau de variation de f. **(1pt)**

c. En déduire le signe de $f(x)$ en fonction de x. **(0,5pt)**

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$. par : $g(x) = (1-x)(1+e^x)$ On appelle(C)la représentation graphique de g dans un repère orthonormé. (Unité graphique 1cm)

a. Déterminez les limites de g en $-\infty$et en $+\infty$. **(0,5pt)**

b. Démontrez que la droite (Δ) d'équation$y = -x + 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$ Etudiez la position relative de (C) par rapport à (Δ). **(0,5pt)**

c. Calculez g' et montrez que $g' = -f$ **(0,5pt)**

d. Dressez le tableau de variation de g **(0,5pt)**

3. On pose $\varphi(x) = g(x) - x$. **(0,5pt)**

a. Calculez φ' puis dressez le tableau de variation de φ. **(0,5pt)**

b. Démontrez que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0{,}7\,;\,0{,}8[$ **(0,5pt)**

c. Déterminez un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} **(0,5pt)**

d. Vérifiez que $g(\alpha) = \alpha$. **(0,5pt)**

4. Tracez (C) et son asymptote (Δ) dans le même repère. **(1pt)**

5. β étant un nombre réel inférieur à 1.

a. Calculez en fonction de β, l'aire $A(\beta)$ de la partie du plan comprise entre (C), (Δ) et les droites d'équations $x = \beta$. **(0,5pt)**

b. Calculez $\lim\limits_{\beta \to -\infty} A(\beta)$. **(0,5pt)**

Ministère de l'Éducation Nationales

République du Mali
Un Peuple – Un But – Une Foi

EXAMEN : *Baccalauréat malien* **SESSION : JUIN 2014**

ÉPREUVE DE : ***Mathématiques***

SÉRIES : ***TSE*** **DURÉE :** ***4 heures*** **COEF :** ***4***

Le sujet est composé de deux exercices et un problème tous obligatoires. Il comprend trois pages de 1/3 à 3/3 (*Vérifiez que les pages sont au complet*). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies. Les calculatrices non programmables sont autorisées.

Exercice 1 (6 points)

I-//

On se place dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\forall z \in \mathbb{C}$, $h_n(z) = z^n(1 - z)$.

1-/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre l'équation $h_n(z) = h_0(z)$. **(1pt)**

2-/ On se propose de résoudre le système suivant : (1) $\begin{cases} h_n(z)=1 \\ |z|=|1-z| \end{cases}$

a-/ Montrez que l'équation $|z| = |1 - z|$ a une infinité de solutions. **(0,5pt)**

b-/ Soit z_0 l'une de ces solutions, calculez, en fonction du module ρ et l'argument θ de z_0, l'argument de $1 - z_0$; le module et l'argument de $z_0^n(1 - z_0)$. **(1,5pt)**

c-/ En déduire que le système (1) n'admet de solution que si $n \equiv 1[6]$. **(0,5pt)**

Quel est l'ensemble des solutions du système ? **(0,5pt)**

II-//

1-/ On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $11x + 8y = 79$.

a-/ Montrez que si $(x ; y)$ est solution de (E) alors $y \equiv 3[11]$ **(0,5pt)**

b-/ Résoudre alors l'équation (E). **(0,5pt)**

2-/ Le prix total de 41 pièces détachées réparties en trois lots est de 48000F.

Le prix d'une pièce du 1er lot est 4800F ; le prix d'une pièce du 2ème lot est 3600F et le prix d'une pièce du 3ème lot est 400F.

Déterminez le nombre de pièces de chaque lot. **(1pt)**

NB*: *On pourra utiliser l'équation (E). Les parties I/ et II/ sont indépendantes

TSVP ☛ 🕮

Exercice 2 (4 points)

I./ Dans une classe de terminale, la taille moyenne des élèves est de 167 cm. La taille moyenne des filles est de 160 cm et la taille moyenne des garçons est de 173,5 cm.

Quelle est l'effectif de la classe sachant qu'il est compris entre 50 et 60. ***(2pts)***

II./ Le vieux Yara a laissé son héritage dans un coffre dont la combinaison comporte les cinq chiffres x, y, z, t et h dans cet ordre, du système décimal. Il a mentionné sur son testament que sa fortune reviendrait à celui de ses héritiers qui trouverait la combinaison à partir des données suivantes :

- Le 1er chiffre est pair ;
- La somme des deux premiers chiffres est 15 ;
- Le troisième est la différence des deux premiers (le 1er moins le 2ème) ;
- Le 1er chiffre est le produit du troisième par le quatrième ;
- Le nombre est divisible par 9.

Quelle est la combinaison cherchée ? ***(2pts)***

NB**: **Les parties I./ et II./ sont indépendantes.

Problème (10 points)

A// Soit φ la fonction définie sur IR par $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)\, e^{-x} - 1$

1-/ a-/ Déterminez les limites de φ en $-\infty$ puis en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat de $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$ **(1pt)**

b-/ Calculez $\varphi'(x)$ et étudiez son signe. Dressez le tableau de variation de φ. **(1,5pt)**

2-/ Démontrez que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans IR, dont l'une notée α est dans $[1 ; +\infty[$. Vérifiez que $1{,}79 < \alpha < 1{,}80$ **(1pt)**

3-/ En déduire le signe de φ sur IR. **(0,5pt)**

B-// On donne les fonctions f et g définies par $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ et $g(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

Leurs courbes sont respectivement notées $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$

1-/ Déterminez les domaines de définition de f et de g puis calculez leurs limites aux bornes de ces domaines de définition. **(1pt)**

2-/ Montrez que $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ admettent au point A(0 ; 1) une tangente commune (**T**). Donnez une équation cartésienne de (**T**). **(1,5pt)**

3-/ a-/ Vérifiez que pour tout $x \in$ IR, $f(x) - g(x) = \dfrac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$ où φ est la fonction définie dans la partie A **(0,5pt)**

b-/ Étudiez le signe de $f(x) - g(x)$ pour $x \in$ IR. **(0,5pt)**

c-/ En déduire la position relative des courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ **(0,5pt)**

Ministère de l'Éducation Nationales

République du Mali
Un Peuple – Un But – Une Foi

EXAMEN : *Baccalauréat malien* **SESSION : JUIN 2014**

ÉPREUVE DE : ***Mathématiques***

SÉRIES : ***STI*** **DURÉE :** ***4 heures*** **COEF :** ***4***

Le sujet est composé de deux exercices et un problème tous obligatoires. Il comprend deux pages de 1/2 à 2/2 (*Vérifiez que les pages sont au complet*). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies. Les calculatrices non programmables sont autorisées.

Exercice 1

(6 points)

1-/ Soit l'équation $(E) : z^2 - 6z + 12 = 0$ où z est l'inconnue complexe.

a-/ Montrez que (E) admet deux solutions complexes conjuguées u et $\bar{u}$, u étant celle dont la partie imaginaire est positive. **(1,5pt)**

b-/ Calculez le module et un argument de u. En déduire le module et un argument de $\bar{u}$ **(0,5pt)**

c-/ Écrire $u - 4$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique. **(1pt)**

d-/ Calculez le module et un argument de $\frac{u}{u-4}$. En déduire le module et un argument de $\frac{\bar{u}}{u-4}$. **(1pt)**

2-/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O ; I, J). On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -3$; $z_B = 2 + 2i$ et $z_C = 7i$.

a-/ Construire le triangle ABC. **(0,5pt)**

b-/ Calculez les distances AB et BC. **(0,5pt)**

c-/ Écrire le nombre complexe $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ sous forme trigonométrique. **(0,5pt)**

d-/ Déduire des questions **a-/** et **b-/** la nature du triangle ABC. **(0,5pt)**

Exercice 2

(4 points)

I./ Dans une classe de terminale, la taille moyenne des élèves est de 167 cm. La taille moyenne des filles est de 160 cm et la taille moyenne des garçons est de 173,5 cm.

Quelle est l'effectif de la classe sachant qu'il est compris entre 50 et 60. ***(2pts)***

II./ Le vieux Yara a laissé son héritage dans un coffre dont la combinaison comporte les cinq chiffres x, y, z, t et h dans cet ordre, du système décimal. Il a mentionné sur son testament que sa fortune reviendrait à celui de ses héritiers qui trouverait la combinaison à partir des données suivantes :

TSVP ☛ 🕮

- Le 1er chiffre est pair ;
- La somme des deux premiers chiffres est 15 ;
- Le troisième est la différence des deux premiers (le 1er moins le 2ème) ;
- Le 1er chiffre est le produit du troisième par le quatrième ;
- Le nombre est divisible par 9.

Quelle est la combinaison cherchée ? **(2pts)**

***NB**: Les parties I./ et II./ sont indépendantes*

Problème **(10 points)**

A// Soit φ la fonction définie sur IR par $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)\, e^{-x} - 1$

1-/ a-/ Déterminez les limites de φ en $-\infty$ puis en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat de $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$ **(1pt)**

b-/ Calculez $\varphi'(x)$ et étudiez son signe. Dressez le tableau de variation de φ. **(1,5pt)**

2-/ Démontrez que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans IR, dont l'une notée α est dans $[1 ; +\infty[$. Vérifiez que $1{,}79 < \alpha < 1{,}80$ **(1pt)**

3-/ En déduire le signe de φ sur IR. **(0,5pt)**

B-// On donne les fonctions f et g définies par $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ et $g(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

Leurs courbes sont respectivement notées $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$

1-/ Déterminez les domaines de définition de f et de g puis calculez leurs limites aux bornes de ces domaines de définition. **(1pt)**

2-/ Montrez que $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ admettent au point A(0 ; 1) une tangente commune **(T)**. Donnez une équation cartésienne de **(T)**. **(1,5pt)**

3-/ a-/ Vérifiez que pour tout $x \in$ IR, $f(x) - g(x) = \dfrac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$ où φ est la fonction définie dans la partie A **(0,5pt)**

b-/ Étudiez le signe de $f(x) - g(x)$ pour $x \in$ IR. **(0,5pt)**

c-/ En déduire la position relative des courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ **(0,5pt)**

4-/ a-/ Déterminez une primitive G de la fonction g sur IR. **(0,5pt)**

b-/ Déterminez les réels a et b tels que la fonction F définie par $F(x) = (ax + b)\, e^{-x}$ soit une primitive de f sur IR. **(0,5pt)**

c-/ Déduire une primitive H de $f - g$ sur IR. **(0,5pt)**

d-/ Calculez l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ et les droites d'équations : $x = -\dfrac{1}{2}$ et $x = 0$ **(0,5pt)**

NB : Les tracés de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ ne sont pas demandés

Ministère de l'Éducation Nationale

République du Mali
Un Peuple - Un But - Une Foi

EXAMEN : *Baccalauréat malien* **BAC 2014**

SÉRIES : *T.SE – S.TI* **SESSION :** *Juin 2014*

ÉPREUVE DE : *MATHÉMATIQUES* **DURÉE :** *4 heures* **COEF :** *4*

Le sujet est composé de deux exercices et un problème tous obligatoires. Il comprend trois pages de 1/2 à 2/2. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies. Les calculatrices non programmables sont autorisées.

Exercice 1 — (5 points)

On se propose de résoudre dans Z le système(S) : $\begin{cases} x \equiv 10\,[23] \\ x \equiv 4\,[7] \end{cases}$

1°/ Déterminez un couple $(\alpha ; \beta)$ d'entiers relatifs solution de l'équation $23\alpha + 7\beta = 1$

2°/En déduire un couple $(u_0 ; v_0)$ solution de l'équation (E): $23u - 7v = -6$. Résoudre complètement l'équation (E)

3°/ Démontrez que x est solution de l'équation (S) si et seulement si il existe un couple (u ; v) d'entiers relatifs vérifiant : $\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 10 + 23u \end{cases}$.

En déduire l'ensemble des solutions de (S).

4°/ Déterminez la plus petite solution (entier naturel) de (S) divisible par 16.

Exercice 2 — (5 points)

Les points A, B, M et M' du plan complexe ont pour affixes respectives: $2 - 4i$, $-i$, z et z' avec $z' = \dfrac{-iz - 2 + 4i}{z + i}$

1°/ Exprimez les coordonnées (x', y') de M' en fonction de celles $(x ; y)$ de M.

2°/ Déterminez et représentez l'ensemble des points M tels que :

a) z' soit réel.

b) z' soit imaginaire pur.

3°/ On pose $Z = z + i$ et $Z' = z' + i$. Vérifiez que $ZZ' = -3 + 4i$.

Puis calculez $|ZZ'|$.

4°/ a) Déterminez l'ensemble des ponts M' lorsque M décrit un cercle de centre B et de rayon $r > 0$.

b) Déterminez r pour que M et M' soient sur le même cercle.

Problème — (10 points)

A// Soit la fonction f de IR vers IR qui à x associe $f(x) = e^{2x} - 2e^x$

1°/ Vérifiez que le tableau de variation de f est bien le suivant :

TSVP ☛ 🕮

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$

2°/ Donnez une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $-\ln 2$.

3°/ Soit g la fonction de IR vers IR définie par $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}(x + \ln 2) + \frac{3}{4}$

a) Déterminez $g'(x)$ et $g''(x)$ pour tout réel x.

b) Du signe de $g''(x)$ déduire celui de $g'(x)$ puis celui de $g(x)$

c) Etudiez la position de (C) par rapport à (T).

4°/ Tracez (T) et (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé unité 1cm

B// Pour tout entier naturel n, on pose f_n la fonction de IR vers IR définie par :

$f_n(x) = \dfrac{e^x}{(x+1)^n}$ et (C_n) sa courbe représentative. Prouvez que toutes les courbes (C_n) passent par un même point A dont on déterminera les coordonnées.

C// On considère la fonction numérique h de la variable x définie par

$h(x) = \dfrac{1}{e-1}e^x - x - \dfrac{1}{e-1}$. On désigne par $(\mathcal{H})$ la représentation graphique de h dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité 2cm)

1°/ a) Calculez $h(0)$, $h(1)$, $h(2)$

b) Dresser le tableau de variation de h.

c) Prouvez que la courbe $(\mathcal{H})$ admet une asymptote dont on précisera l'équation d) Utilisez les variations de h pour déterminer le signe de $h(x)$ selon les valeurs de x

2°/ Tracez la courbe $(\mathcal{H})$.

3°/On considère la fonction numérique φ de la variable réelle x définie par :

$\varphi(x) = e^x - x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{e-1}$. On note (Γ) la courbe représentative de φ dans le repère précédent.

a) Etudiez le sens de variation de φ en précisant les limites aux bornes de l'intervalle de définition.

b) Prouvez que la courbe (Γ) admet une asymptote dont on précisera l'équation

c)Etudiez les positions relatives des courbes $(\mathcal{H})$ et (Γ).

d) Tracez la courbe (Γ) dans le même repère que $(\mathcal{H})$

4°/ a)Etablir que pour tout réel x $\varphi(x) = \int_x^{x+1} h(t)dt$

b) Donnez une interprétation géométrique de $\varphi(0)$.

Corrigé du Bac 2021/ T.S.E et S.T.I

Exercice 1 : ..... (6 points)

Soit la fonction polynôme p de l'ensemble$\mathbb{C}$ définie par : $p(z) = z^3 - (7+9i)z^2 + (-14+39i)z + 50$.

1. Démontrons que la fonction polynôme p admet une racine imaginaire pure notée z_0.

Soit $z_0 = ib \in \mathbb{C}$; $b \in \mathbb{R}^*$, cette solution imaginaire pure

On a : $p(ib) = 0$

$$\Leftrightarrow (ib)^3 - (7+9i)(ib)^2 + (-14+39i)(ib) + 50 = 0$$
$$\Leftrightarrow -ib^3 - (7+9i)(-b^2) - 14ib - 39b + 50 = 0$$
$$\Leftrightarrow -ib^3 + 7b^2 + 9ib^2 - 14ib - 39b + 50 = 0$$
$$\Leftrightarrow 7b^2 - 39b + 50 + i(-b^3 + 9b^2 - 14b) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7b^2 - 39b + 50 = 0 \quad (1) \\ -b^3 + 9b^2 - 14b = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Dans (1) on a : $7b^2 - 39b + 50 = 0$

$$\Delta = (-39)^2 - 4(7)(50) = 121 = (11)^2$$

$$b_1 = \frac{39-11}{14} = 2 \; ; \; b_2 = \frac{39+11}{14} = \frac{50}{14} = \frac{25}{7}$$

- Pour $b = 2$;dans (2) on a : $-(2)^3 + 9(2)^2 - 14(2) = 0$
- Pour $b = \frac{25}{7}$;dans (2) on a : $-\left(\frac{25}{7}\right)^3 + 9\left(\frac{25}{7}\right)^2 - 14\left(\frac{25}{7}\right) = \frac{6600}{343} \neq 0$

donc b = 2.

D'où $\boxed{z_0 = 2i}$ **(1.5pts)**

2. Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $p(z) = 0$.

Comme $p(2i) = 0$ donc on peut factoriser $p(z)$ par $z - 2i$ en utilisant la méthode d'**Hörner**

	1	$-7-9i$	$-14+39i$	50
$2i$	↓	$2i$	$14-14i$	-50
	1	$-7-7i$	$25i$	0

Donc $p(z) = (z-2i)[z^2 - (7+7i)z + 25i]$

on a: $p(z) = 0 \Leftrightarrow$

$(z - 2i)[z^2 - (7 + 7i)z + 25i] = 0$

$\Leftrightarrow z - 2i = 0$ ou $z^2 - (7 + 7i)z + 25i = 0$

$\Leftrightarrow z = 2i$ ou $z^2 - (7 + 7i)z + 25i = 0$

$z^2 - (7 + 7i)z + 25i = 0$

$$\Delta = (7 + 7i)^2 - 4 \times 1 \times 25i = 49 + 98i - 49 - 100i = -2i$$

$\boxed{\Delta = -2i}$.

Trouvons les nombres complexes $U = x + iy$ tel que $U^2 = \Delta$

$$\Leftrightarrow (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = -2i \text{ et } |u|^2 = |-2i| = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \ (1) \\ 2xy = -2 \ (2) \\ x^2 + y^2 = 2 \ (3) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \ (1) \\ x^2 + y^2 = 2 \ (3) \end{cases}}{\begin{matrix} 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \\ (2) \Leftrightarrow xy = -1 \end{matrix}} \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

$si\ x = 1\ alors\ y = -1 \Rightarrow U_1 = 1 - i$

$si\ x = -1\ alors\ y = 1 \Rightarrow U_2 = -1 + i$

$$z' = \frac{7 + 7i + 1 - i}{2} = \frac{8 + 6i}{2} = 4 + 3i \ ; \quad z'' = \frac{7 + 7i - 1 + i}{2} = \frac{6 + 8i}{2} = 3 + 4i$$

$\boxed{S = \{2i;\ 3 + 4i\ ;\ 4 + 3i\}}$ **(2.5pts)**

NB : L'élève pourra utiliser la méthode des coefficients indéterminés ou la division Euclidienne.

On note z_1 et z_2 les solutions non imaginaires pures avec $Re(z_1) < Re(z_2)$.

$$\boxed{z_1 = 3 + 4i \ ; \ z_2 = 4 + 3i}$$

3. Dans le plan complexe muni du repère ortho normal direct $(O\ ;\vec{u}\ ;\vec{v})$, on désigne par A ; B et C les points d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2.

a. Déterminons l'affixe z_G du point G barycentre du système $\{(A; 1); (B; -1); (C; 1)\}$

Méthode 1 :

$$z_G = \frac{z_A - z_B + z_1}{1 - 1 + 1} = \frac{2i - 3 - 4i + 4 + 3i}{1} = 1 + i$$

Méthode 2 : Soient les points $A(0;2); B(3;4)$ et $C(4;3)$

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{(1)(0)+(-1)(3)+(1)(4)}{1-1+1} = 1 \\ y_G = \dfrac{(1)(2)+(-1)(4)+(1)(3)}{1-1+1} = 1 \end{cases} \quad z_G = 1+i$$

$\boxed{z_G = 1+i}$ **(0.25pt)**

Écrivons z_G sous forme exponentielle.

Méthode 1 :

$$|z_G| = |1+i| = \sqrt{2}$$

Soit θ un argument de z_G ; $\begin{cases} cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{z_G = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$ **(0.25pt)**

Méthode 2 :

$$z_G = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

b. Déterminons puis construisons l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

Méthode 1

$MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4.$

On a: $MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4.$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \left(MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + GA^2\right) - \left(MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + GB^2\right) + \left(MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC} + GC^2\right) = 4$$

$$\Leftrightarrow MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\left(\underbrace{\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}_{\vec{0}}\right) + GA^2 - GB^2 + GC^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow MG^2 + GA^2 - GB^2 + GC^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = 4 - GA^2 + GB^2 - GC^2$$

$GA^2 = |z_G - z_A|^2 = |1 + i - 2i|^2 = |1 - i|^2 = 2$ $\boxed{GA^2 = 2}$

$GB^2 = |z_G - z_B|^2 = |1 + i - 3 - 4i|^2 = |-2 - 3i|^2 = 4 + 9 = 13$ $\boxed{GB^2 = 13}$

$GC^2 = |z_G - z_C|^2 = |1 + i - 4 - 3i|^2 = |-3 - 2i|^2 = 4 + 9 = 13$ $\boxed{GC^2 = 13}$

$\Leftrightarrow MG^2 = 4 - 2 + 13 - 13 = 2 \Leftrightarrow \boxed{MG = \sqrt{2}}$

Méthode 2:

$MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4.$

Posons : $\varphi(M) = MA^2 - MB^2 + MC^2$

$\varphi(M) = \varphi(G) + (1 - 1 + 1)MG^2$

$AB^2 = (3 - 0)^2 + (4 - 2)^2 = 9 + 4 = 13$

$AC^2 = (4 - 0)^2 + (3 - 2)^2 = 16 + 1 = 17$

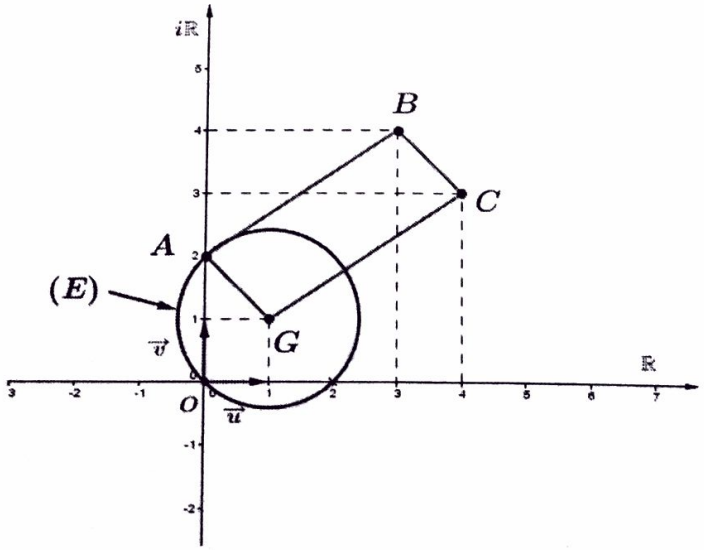
$BC^2 = (4 - 3)^2 + (3 - 4)^2 = 1 + 1 = 2$

$\varphi(G) = \dfrac{(1)(-1)(1)(3) + (1)(1)(1)(7) + (-1)(1)(2)}{1 - 1 + 1} = -13 + 17 - 2 = 2$

$\varphi(M) = 2 + MG^2$

$\varphi(M) = 4 \Rightarrow 2 + MG^2 = 4 \Rightarrow MG^2 = 4 - 2 = 2 \Rightarrow MG = \sqrt{2}$

Alors l'ensemble (E) des points M du plan est le cercle de centre G et de rayon $r = \sqrt{2}$.(1pt)



Méthode 3 :

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-2)^2 - (x-3)^2 - (y-4)^2 + (x-4)^2 + (y-3)^2 + (x-1)^2$$
$$+ (y-1)^2 = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

Donc l'ensemble (E) des points M du plan est le cercle de centre G(1 ;1) et de rayon $r = \sqrt{2}$.

c. Déterminons la nature du quadrilatère ABCG

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 3 + 4i - 2i = 3 + 2i$$

$$z_{\overrightarrow{GC}} = z_C - z_G = 4 + 3i - 1 - i = 3 + 2i$$

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{3+2i}{4+3i-2i} = \frac{3+2i}{4+i} = \frac{(3+2i)(4-i)}{16+1} = \frac{12-3i+8i+2}{17} = \frac{14+5i}{17}$$

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{GC}}$ *et le rapport* $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ *n'est réel ni imaginaire pur .*

Autre méthode :

$[AC]$*et* $[BG]$ *ont le même milieu* I ; $z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = 2 + \frac{5}{2}i$

Donc le quadrilatère ABCG est un parallélogramme. **(0.5pt)**

Exercice 2 : ..... (5 points)

A. On désigne par x un entier naturel supérieur ou égal à 5.

Soient les entiers naturels N et N' qui s'écrivent respectivement $\overline{100x}$ et $\overline{x001}$ dans le système de base $x+1$

1. Ecrivons N et N' dans le système de base x.

On a : $N = \overline{100x} = (x+1)^3 + x = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + x = x^3 + 3x^2 + 4x + 1$

Donc $\boxed{N = \overline{1341}}$ dans le système de base x **(0.5pt)**

On a : $N' = \overline{x001} = x(x+1)^3 + 1 = x(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + 1 = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

Donc $\boxed{N' = \overline{13311}}$ dans le système de base x **(0.5pt)**

2. Ecrivons $N + N'$ dans le système de base $x + 1$

$N + N' = (x+1)^3 + x + x(x+1)^3 + 1 = (x+1)^3(x+1) + x + 1$

$= (x+1)^4 + (x+1) = \overline{10010}$

$\boxed{N + N' = \overline{10010}}$ dans le système de base $x+1$ **(0.5pt)**

Déduisons-en que $N + N'$ est un multiple de $x+1$.

$N + N' = (x+1)^4 + (x+1) = (x+1)[(x+1)^3 + 1]$

$\boxed{N + N' = (x+1)[(x+1)^3 + 1]}$ **donc $N + N'$ est un multiple de $x+1$.** **(0.5pt)**

3. Donnons, dans le système de base x, le quotient q de la division euclidienne de $N + N'$ par $x+1$.

On a : $q = (x+1)^3 + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

$\boxed{q = \overline{1332}}$ dans le système de base x. **(0.5pt)**

4. Montrons qu'il existe deux entiers naturels a et b tels que : $\overline{ab}^x \times \overline{aaa}^x = q$.

On a : $q = \overline{ab}^x \times \overline{aaa}^x = (ax+b)(ax^2 + ax + a)$

$= a^2x^3 + a^2x^2 + a^2x + abx^2 + abx + ab$

$= a^2x^3 + (a^2 + ab)x^2 + (a^2 + ab)x + ab = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

Par identification : $\begin{cases} a^2 = 1 \\ a^2 + ab = 3 \\ ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 1 + b = 3 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}}$ **(1pt)**

$\boxed{q = \overline{12}^x \times \overline{111}^x}$

B. Déterminons tous les couples $(\alpha;\beta)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant :

$$PGCD(\alpha;\beta) + PPCM(\alpha;\beta) = \beta + 9$$

Posons $\begin{cases} \boldsymbol{d = PGCD(\alpha;\beta)} \\ \boldsymbol{m = PPCM(\alpha;\beta)} \end{cases}$; $\exists(\alpha';\beta') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *tels que* : $\begin{cases} \alpha = d\alpha' \\ \beta = d\beta' \\ \alpha' \wedge \beta' = 1 \end{cases}$

L'équation devient : $d + m = \beta + 9$ *avec* $\left(m = \dfrac{\alpha \times \beta}{d} = \dfrac{d \times \alpha' \times d \times \beta'}{d} = d \times \alpha' \times \beta'\right)$

$\Leftrightarrow d + d \times \alpha' \times \beta' = d \times \beta' + 9$

$\Leftrightarrow d(1 + \alpha' \times \beta' - \beta') = 9 \Leftrightarrow d[1 + (\alpha' - 1)\beta'] = 9$

Donc $d \in D_9 \cap \mathbb{N} = \{1;3;9\}$

- Pour $d = 1$; $1 + (\alpha' - 1)\beta' = 9 \Leftrightarrow (\alpha' - 1)\beta' = 8$

  $\Rightarrow \beta' \in D_8 \cap \mathbb{N} = \{1; 2; 4; 8\}$

β'	1	2	4	8
$(\alpha' - 1)$	8	4	2	1
α'	9	5	3	2
β	1	2	4	8
α	9	5	3	2

- Pour $d = 3$; $1 + (\alpha' - 1)\beta' = 3 \Leftrightarrow (\alpha' - 1)\beta' = 2$

  $\Rightarrow \beta' \in D_2 \cap \mathbb{N} = \{1; 2\}$

β'	1	2
$(\alpha' - 1)$	2	1
α'	3	2
β	3	6
α	9	9

- Pour $d = 9$; $1 + (\alpha' - 1)\beta' = 1 \Leftrightarrow (\alpha' - 1)\beta' = 0$

  $\Leftrightarrow \beta' \in \mathbb{N}^*$ *et* $\alpha' = 1$

β'	β'
α'	1
β	$9\beta' = \beta$
α	9

$\boxed{S = \{(9; 1); (5; 2); (3; 4); (9; 3); (9; 9\beta')/\beta' \in \mathbb{N}^*\}}$ **(1.5pts)**

Problème : ..... (9 points)

Partie A :

Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g: x \mapsto g(x) = x - 1 - x\ln x$.

1. Déterminons l'ensemble de définition D_g de g puis calculons les limites de g aux bornes de D_g.

$D_g = \{x/x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ $\boxed{D_g =]0; +\infty[}$ **(0.5pt)**

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} x - 1 - x\ln x = -1 \quad car \left(\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0\right)$$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -1}$ **(0.25pt)**

$$\lim_{x\to +\infty} x - 1 - x\ln x = \lim_{x\to +\infty} x\left(1 - \frac{1}{x} - \ln x\right) = -\infty$$

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty}$ **(0.25pt)**

2. g' désigne la fonction dérivée de la fonction g.

a. Déterminons g' puis étudions le signe de $g'(x)$ suivant les valeur de x.

g est dérivable sur $\boxed{]0;+\infty[}$

$$g'(x) = 1 - \left(\ln x + \frac{x}{x}\right) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$$

$\boxed{g'(x) = -\ln x}$ **(0.5pt)**

Signe de la dérivée :

x	0		1	$+\infty$
$-\ln x$	‖	+	0	−

b. Etudions les variations de g puis dressons son tableau de variation.

Sens de variations : (0.5pt)

- ***Pour*** $x \in]0;1]$ $g'(x) \geq 0$ ***donc f est croissante***
- ***Pour*** $x \in]1;+\infty[$ $g'(x) \leq 0$ ***donc f est décroissante***

Tableau de variation de g : (0,5pt)

x	0		1	$+\infty$
$g'(x)$	‖	+	0	−
$g(x)$	‖ -1	↗	0	↘ $-\infty$

c. Déduisons-en le signe de g suivant les valeurs de x. **(0.5pt)**

- ***Pour*** $x \in]0;+\infty[$ $g(x) \leq 0$.

Partie B :

Le plan complexe muni du repère ortho normal direct $(O\,;I\,;J)$ d'unité graphique : 2 cm (C) désigne la représentation graphique de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = |x^2 - 1| + \ln|x - 1| \text{ si } x \leq 0 \quad et \quad f(x) = \frac{\ln x}{x - 1} \quad si\ x > 0$$

1. D_f désigne l'ensemble de définition de la fonction f.

a. Déterminons D_f.

$D_f = \{x/x \in \mathbb{R}; x-1 \neq 0\}$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$ $\boxed{D_f =]-\infty;0] \cup]0;1[\cup]1;+\infty[}$ $= \boxed{]-\infty;1[\cup]1;+\infty[}$

$= \mathbb{R} - \{1\}$ **(0,25pt)**

b. Calculons les limites de f aux bornes de D_f.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} |x^2-1| + \ln|x-1| = +\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$ **(0.25pt)**

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ $\boxed{\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 1}$ **(0.25pt)**

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ $\boxed{\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 1}$ **(0.25pt)**

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$ **(0.25pt)**

2. Etude de f en -1.

a. Étudions la continuité et la dérivabilité de f en -1.

- Continuité en -1

$\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1} |x^2-1| + \ln|x-1| = |1-1| + \ln|-1-1| = \ln 2$

$\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \ln 2 = f(-1)$ *Donc f est continue en* -1. **(0.25pt)**

- Dérivabilité en -1

$\lim\limits_{x\to-1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1} \frac{|x^2-1| + \ln|x-1| - \ln 2}{x+1} = \frac{0}{0}$ *"Forme indéterminée"*

$\lim\limits_{x\to-1^+} \frac{|x^2-1| + \ln|x-1| - \ln 2}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1^+} \frac{|x^2-1| + \ln|x-1| - \ln 2}{|x+1|}$

$= \lim\limits_{x\to-1^+} |x-1| + \frac{\ln|x-1| - \ln 2}{|x+1|}$

En posant $q(x) = \ln|x-1|$ *alors* $\lim\limits_{x\to-1^+} \frac{\ln|x-1| - \ln 2}{|x+1|} = \lim\limits_{x\to-1^+} \frac{\ln|x-1| - \ln 2}{x+1} = q'(-1)$

$$q'(x) = \frac{-1}{-x+1} (car\ |x-1| = -x+1\ à\ gauche\ de\ 1)$$

$$\Rightarrow q'(-1) = -\frac{1}{2}\ et\ \lim_{x\to -1^+} |x-1| + \frac{\ln|x-1| - \ln 2}{|x+1|} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{f'_d(-1) = \frac{3}{2}}$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{|x^2-1| + \ln|x-1| - \ln 2}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{|x^2-1| + \ln|x-1| - \ln 2}{-|x+1|}$$

$$= \lim_{x\to -1^-} -|x-1| + \frac{\ln|x-1| - \ln 2}{-|x+1|} = \lim_{x\to -1^-} -|x-1| + \frac{\ln|x-1| - \ln 2}{x+1}$$

En posant $q(x) = \ln|x-1|$ alors $\lim_{x\to -1^-} \frac{\ln|x-1| - \ln 2}{x+1} = q'(-1)$

$$q'(t) = \frac{-1}{-x+1} (car\ |x-1| = -x+1\ à\ gauche\ de\ 1)$$

$$\Rightarrow q'(-1) = -\frac{1}{2}\ et\ \lim_{x\to -1^-} -|x-1| - \frac{\ln|x-1| - \ln 2}{x+1} = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$\boxed{f'_g(-1) = -\frac{5}{2}}$$

$\boxed{f'_g(-1) \neq f'_d(-1) =}$ **Donc f n'est pas dérivable en - 1 (0.5pt)**

b. Interprétation graphique des résultats obtenus.

Donc (C_f) admet au point d'abscisse -1deux demi-tangentes d'équations :

$$T_d : y = \frac{3}{2}(x+1) + ln2\ \ et\ \ T_g : y = -\frac{5}{2}(x+1) + ln\,2$$

On dit que le point d'abscisse -1 est un point anguleux. (0.25pt)

3. Détermination de la fonction dérivée, notée f' de la fonction f.

a. Calculons$f'(x)$ pour $x \leq 0$

$f(x) = |x^2-1| + \ln|x-1|$ si $x \leq 0$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1\ ou\ x = -1$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x^2-1	$+$	0 $-$	$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\lvert x^2-1\rvert$	x^2-1	0 $-x^2+1$	$-$	0	$+$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	$-x+1$ 0	$-$	0	$+$

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 1 + \ln(-x+1) \text{ si } x \leq -1 \\ f(x) = -x^2 + 1 + \ln(-x+1) \text{ si } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} f'(x) = 2x - \frac{1}{-x+1} = \frac{-2x^2+2x-1}{-x+1} \text{ si } x \leq -1 \\ f'(x) = -2x - \frac{1}{-x+1} = \frac{2x^2-2x-1}{-x+1} \text{ si } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}} \quad \textbf{(0.5pt)}$$

b. Montrons que : $\forall x \in D_f \cap \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{g(x)}{x(x-1)^2}$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x-1} \quad si\ x > 0$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x-1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{\frac{x-1-x\ln x}{x}}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2} = \frac{g(x)}{x(x-1)^2}$$

$$\boxed{Donc\ \forall x \in D_f \cap \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{g(x)}{x(x-1)^2}} \quad \textbf{(0.5pt)}$$

c. Donnons le sens de variations de f puis dressons son tableau de variations.

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{-2x^2+2x-1}{-x+1} \text{ si } x \leq -1 \\ f'(x) = \frac{2x^2-2x-1}{-x+1} \text{ si } -1 \leq x \leq 0 \\ f'(x) = \frac{g(x)}{x(x-1)^2} \quad \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$-2x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Delta = 4 - 4(-2)(-1) = -4$

Alors la fonction polynôme $-2x^2 - 2x + 1 < 0$ sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]-\infty; -1]$.

$2x^2 - 2x - 1 = 0$

$$\Delta = 4 - 4(2)(-1) = 12$$

$$x_1 = \frac{2-2\sqrt{3}}{4} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \; ; \; x_2 = \frac{2+2\sqrt{3}}{4} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

Pour $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

Signe de la dérivée :

x	$-\infty$	-1	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	1	$+\infty$
$-2x^2+2x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	
$2x^2-2x-1$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0 $+$	$+$
$-x+1$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$-$
$f'(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$

Sens de variation :(0.25pt)

- **Pour $x \in]-\infty;-1[\cup]0;1[\cup]1+\infty[f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante ;**
- **Pour $x \in]-1;\ 0[\ f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante.**

Tableau de variation :(0.25pt)

x	$-\infty$	-1	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\frac{-5}{2}$ $\frac{3}{2}$	$+$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$0,7$	$1,2$	1	$+\infty$ 1	0

4. Construction de la représentation graphique de f :

   a. Précisons les branche infinies de (C). **(0.25pt)**

La droite d'équation $\boldsymbol{y = 0}$ *est une asymptote horizontale à* (C_f) ***au voisinage de*** $+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x-1} = +\infty$$

La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à (C_f) $\left(car \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\right)$.

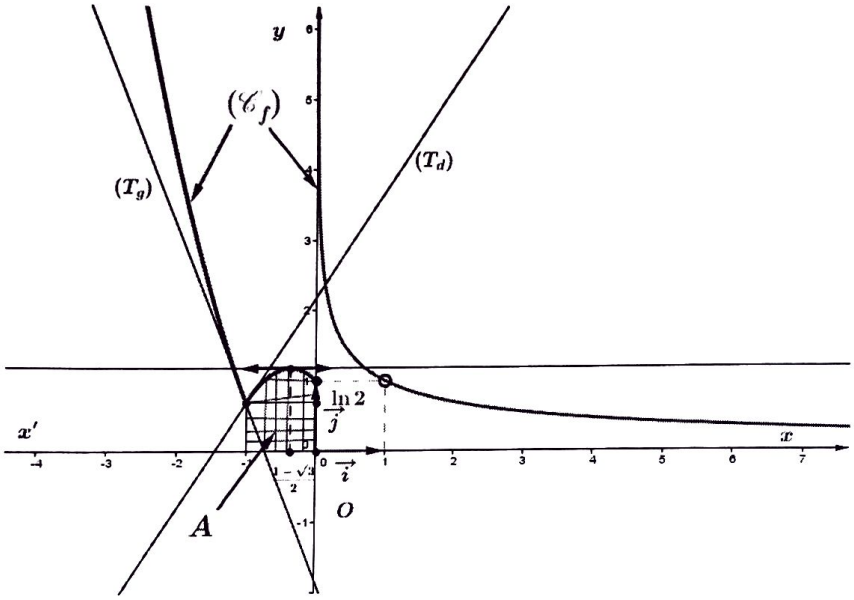
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x^2-1|+\ln|x-1|}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x^2-1|+\ln|x-1|}{-|x|}$$

$$\lim_{x\to-\infty} -\left(\left|\frac{x^2-1}{x}\right| + \frac{\ln|x-1|}{|x|}\right) = \lim_{x\to-\infty} -\left(\left|x-\frac{1}{x}\right| + \frac{\ln|x-1|}{|x|}\right) = -\infty$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln|x-1|}{|x|} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 \ avec\ t = |x|\right)$$

Donc $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ *Alors (C_f)admet une branche parabolique de directon (Oy)au voisinage de $-\infty$.*

Traçons(C). . **(0.25pt)**



Partie C :

1. Montrons que la fonction $H: x \mapsto -x + (x-1)\ln|x-1|$ est une primitive sur $]-\infty; 1[$ de la fonction $h: x \mapsto \ln|x-1|$.

$$H'(x) = -1 + \ln|x-1| + \frac{(x-1)}{x-1} = -1 + \ln|x-1| + 1$$

$\boxed{H'(x) = \ln|x-1| = h(x)}$ **Alors H est une primitive sur $]-\infty; 1[$ de la fonction h. (0.75pt)**

2. Calculons l'aire A en cm, de la partie du plan définie par : $\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

$$A = \left(\int_{-1}^{0} f(x)\,dx\right) u.a = \left(\int_{-1}^{0} |x^2 - 1| + \ln|x - 1|\,dx\right) 4cm^2$$

$$= \left(\int_{-1}^{0} -x^2 + 1 + \ln|x - 1|\,dx\right) 4cm^2 = \left(\left[-\frac{x^3}{3} + x - x + (x - 1)\ln|x - 1|\right]_{-1}^{0}\right) 4cm^2$$

$$= \left(\left[-\frac{x^3}{3} + (x - 1)\ln|x - 1|\right]_{-1}^{0}\right) 4cm^2 = \left(0 - \left(\frac{1}{3} - 2\ln|-2|\right)\right) 4cm^2$$

$\boxed{A = 4,212cm^2}$ **(0.5pt)**

Exercice 1 :

Les points A et B sont d'affixes $z_A = 2-i$ et $z_B = -2i$, et $z \neq z_B$, on pose $Z = \dfrac{z-z_A}{z-z_B}$.

3. Déterminons, dans chaque cas, l'ensemble des points $M(z)$ tel que :

d. Z est un réel lorsque $\text{Im}(Z) = 0$. Posons $z = x+iy$, où $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.

Alors, on a : $Z = \dfrac{z-z_A}{z-z_B} = \dfrac{x+iy-2+i}{x+iy+2i} = \dfrac{x-2+i(y+1)}{x+i(y+2)} = \dfrac{[x-2+i(y+1)][x-i(y+2)]}{x^2+(y+2)^2}$

$= \dfrac{x^2-i(xy+2x)-2x+i(2y+4)+i(xy+x)+(y+1)(y+2)}{x^2+(y+2)^2} = \dfrac{(x^2-2x+y^2+3y+2)+i(-x+2y+4)}{x^2+(y+2)^2}$

Donc $\text{Re}(Z) = \dfrac{x^2-2x+y^2+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$ et $\text{Im}(Z) = \dfrac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}$.

D'où $\text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow -x+2y+4 = 0 \Leftrightarrow x-2y-4 = 0$, donc l'ensemble cherché est la droite d'équation $x-2y-4=0$, privée du point B.

b. Z est un imaginaire pur (éventuellement nul) lorsque $\text{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow x^2-2x+y^2+3y+2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2-1+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow$

$\sqrt{(x-1)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Donc l'ensemble cherché est le cercle de centre le point $E\left(1;-\dfrac{3}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, privé du point B.

c. Z est de module 1, donc $|Z| = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \Leftrightarrow |x-2+i(y+1)| = |x+i(y+2)| \Leftrightarrow$

$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}^2 = \sqrt{x^2+(y+2)^2}^2 \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2+2y+1 = x^2+y^2+4y+4 \Leftrightarrow 4x+2y-1 = 0.$

Donc l'ensemble cherché est la droite d'équation $4x+2y-1=0$.

Autre méthode :

Z est de module 1, donc $|Z| = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \Leftrightarrow MA = MB$ alors l'ensemble des points cherchés est la médiatrice du segment $[AB]$.

4. Calculons $|Z-1| \times |z-z_B|$:

$On\ a : |Z-1| \times |z-z_B| = \left|\dfrac{z-z_A}{z-z_B}-1\right| \times |z-z_B| = \left|\dfrac{z-z_A-z+z_B}{z-z_B}\right| \times |z-z_B| = \left|\dfrac{-z_A+z_B}{z-z_B}\right| \times |z-z_B|$

$= \frac{|z_A - z_B|}{|z - z_B|} \times |z - z_B| = |z_A - z_B| = |2 - i + 2i| = |2 + i| = \sqrt{5}$, alors $\boxed{|Z-1| \times |z - z_B| = \sqrt{5}}$.

Déduisons que, lorsque $M(z)$ parcourt le cercle de centre B et de rayon R, les points d'affixes Z sont tous situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon :

$M(z) \in C(B;R) \Leftrightarrow MB = R \Leftrightarrow |z - z_B| = R$, alors $|Z-1| \times |z - z_B| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |Z-1| \times R = \sqrt{5} \Leftrightarrow |Z-1| = \frac{\sqrt{5}}{R}$.

Donc les points d'affixes Z sont tous situés sur le cercle de centre le point d'affixe 1 et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{R}$.

Exercice 2 :

7. Démontrons que pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 :

On a : $2^3 = 8 \equiv 1[7] \Rightarrow 2^{3n} \equiv 1[7] \Rightarrow 2^{3n} - 1 \equiv 0[7]$, alors $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.

Déduisons que $2^{3n+1} - 2$ et $2^{3n+2} - 4$ sont des multiples de 7 :

- On a : $2^{3n+1} - 2 = 2^{3n} \times 2 - 2 = 2(2^{3n} - 1)$, or $2^{3n} - 1 \equiv 0[7] \Rightarrow 2(2^{3n} - 1) \equiv 0[7] \Rightarrow 2^{3n+1} - 2 \equiv 0[7]$.

  Par suite, $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7.
- On a : $2^{3n+2} - 4 = 2^{3n} \times 4 - 4 = 4(2^{3n} - 1)$, or $2^{3n} - 1 \equiv 0[7] \Rightarrow 4(2^{3n} - 1) \equiv 0[7] \Rightarrow 2^{3n+2} - 4 \equiv 0[7]$.

  Par suite, $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7.

8. Déterminons les restes de la division par 7 des puissances de 2 :

$2^0 \equiv 1[7]$; $2^1 \equiv 2[7]$; $2^2 \equiv 4[7]$; $2^3 \equiv 1[7]$; alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $2^{3k} \equiv 1[7]$; $2^{3k+1} \equiv 2[7]$; $2^{3k+2} \equiv 4[7]$.

Alors les restes de la division par 7 des puissances de 2 sont : **1, 2 et 4**.

9. $\forall p \in \mathbb{N}$, on considère le nombre $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.

d. Pour $p = 3n$, on a : $A_{3n} = 2^{3n} + 2^{6n} + 2^{9n} = 2^{3n} + (2^{3n})^2 + (2^{3n})^3$, or $2^{3n} \equiv 1[7]$ alors $A_{3n} \equiv 3[7]$,

d'où le reste de la division de A_{3n} par 7 est 3.

e. Démontrons que si $p = 3n+1$ alors A_p est divisible par 7 :

Pour $p = 3n+1$, on a : $A_{3n+1} = 2^{3n+1} + 2^{6n+2} + 2^{9n+3} = 2^{3n} \times 2 + (2^{3n})^2 \times 4 + (2^{3n})^3 \times 8$, et

$$\left.\begin{array}{l} 2^{3n} \times 2 \equiv 2[7] \\ (2^{3n})^2 \times 4 \equiv 4[7] \\ (2^{3n})^3 \times 8 \equiv 1[7] \end{array}\right\} \Rightarrow 2^{3n} \times 2 + (2^{3n})^2 \times 4 + (2^{3n})^3 \times 8 \equiv 7[7] \Rightarrow 2^{3n} \times 2 + (2^{3n})^2 \times 4 + (2^{3n})^3 \times 8 \equiv 0[7] \Rightarrow$$

$A_{3n+1} \equiv 0[7]$. Alors pour $p = 3n+1$, A_p est divisible par 7.

f. Étudions le cas où $p = 3n+2$:

On a : $A_{3n+2} = 2^{3n+2} + 2^{6n+4} + 2^{9n+6} = 2^{3n} \times 4 + (2^{3n})^2 \times 16 + (2^{3n})^3 \times 64$, et

$$\left.\begin{array}{l} 2^{3n}\times 4\equiv 4[7] \\ \left(2^{3n}\right)^2\times 16\equiv 2[7] \\ \left(2^{3n}\right)^3\times 64\equiv 1[7] \end{array}\right\} \Rightarrow 2^{3n}\times 4+\left(2^{3n}\right)^2\times 16+\left(2^{3n}\right)^3\times 64\equiv 7[7]\Rightarrow 2^{3n}\times 4+\left(2^{3n}\right)^2\times 16+\left(2^{3n}\right)^3\times 64\equiv 0[7]\Rightarrow$$

$A_{3n+1}\equiv 0[7]$. Alors pour $p=3n+1$, A_p est divisible par 7.

Problème :

B) Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f:x\mapsto f(x)=\ln\left(e^{2x}+2e^{-x}\right)$.

9. Montrons que pour tout réel x positif : $f(x)=2x+\ln\left(1+2e^{-3x}\right)$:

$$On\ a: f(x)=\ln\left(e^{2x}+2e^{-x}\right)=\ln\left(e^{2x}\left(1+2\frac{e^{-x}}{e^{2x}}\right)\right)=\ln\left(e^{2x}\left(1+2e^{-3x}\right)\right)=\ln e^{2x}+\ln\left(1+2e^{-3x}\right)=2x+\ln(1+2e^{-3x})$$

Alors $f(x)=2x+\ln\left(1+2e^{-3x}\right)$.

10.a. Étudions la limite de f en $+\infty$: $\lim\limits_{+\infty} f(x)=\lim\limits_{+\infty}\left[2x+\ln\left(1+2e^{-3x}\right)\right]=+\infty+\ln(1+0)=+\infty$.

e. Montrons que la droite (D) d'équation $y=2x$ est asymptote à (C) en $+\infty$:

$\lim\limits_{+\infty}(f(x)-y)=\lim\limits_{+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{+\infty}\ln\left(1+2e^{-3x}\right)=\ln(1+0)=\ln 1=0$. Alors la droite (D) d'équation $y=2x$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$:

f. Étudions la position de (C) et (D) :

On a : $\left[f(x)-y\right]=\ln(1+2e^{-3x})>0$ (car $1+2e^{-3x}>1$), alors (C) est au-dessus de (D).

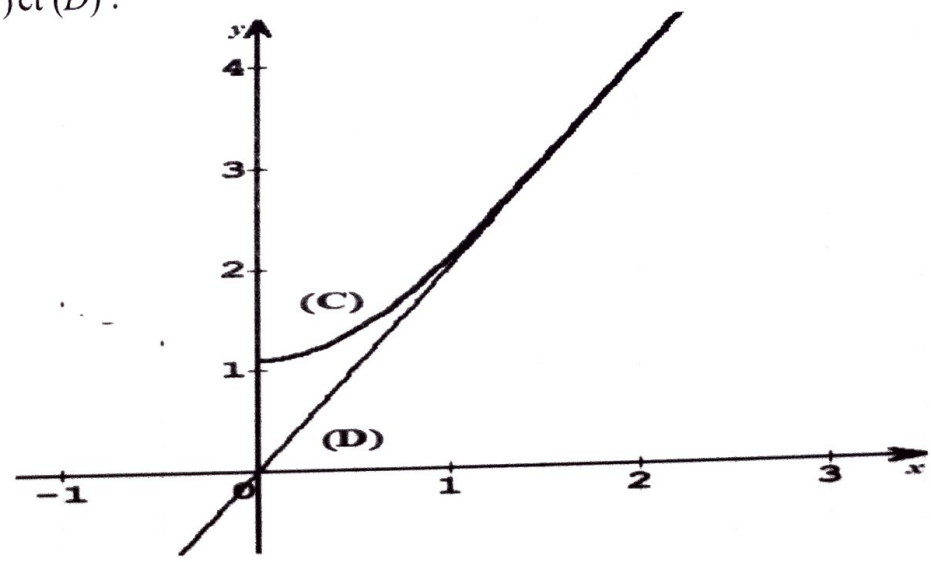
11. Étudions les variations de f :

- Dérivée et sens de variations de f : $f'(x)=2-\dfrac{4e^{-2x}}{1+2e^{-2x}}=\dfrac{2+4e^{-2x}-4e^{-2x}}{1+2e^{-2x}}=\dfrac{2}{1+2e^{-2x}}>0$,

  alors f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
- Tableau de variations de f sur $[0;+\infty[$:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$\ln 3$	$+\infty$

12. Traçons (C) et (D) :



13.Montrons que pour tout réel $\alpha, \alpha > 0 : \int_0^\alpha e^{-3x}dx \leq \frac{1}{3}$.

On a : $\int_0^\alpha e^{-3x}dx = \left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^\alpha = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3\alpha} = \frac{1}{3}\left(1-e^{-3\alpha}\right)$, or

$1-e^{-3\alpha} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{3}\left(1-e^{-3\alpha}\right) \leq \frac{1}{3} car \left(1-e^{-3\alpha}\right) \leq 1 \Leftrightarrow \int_0^\alpha e^{-3x}dx \leq \frac{1}{3}$.

14.Établissons que, pour tout $u, u \geq 0 : \ln(1+u) \leq u$.

Posons $t(u) = \ln(1+u) - u; t'(u) = \frac{1}{1+u} - 1 = \frac{-u}{1+u} \leq 0$, alors t est décroissante sur $[0;+\infty[$ et de plus

$t(0) = \ln(1+0) - 0 = \ln 1 = 0$, alors pour $u \geq 0$, $t(u) \leq 0 \Rightarrow \ln(1+u) - u \leq 0 \Rightarrow \ln(1+u) \leq u$.

15.Déduisons que, pour tout réel $\alpha, \alpha > 0 : \int_0^\alpha \ln(1+2e^{-3x})dx \leq \frac{2}{3}$:

Selon 6., $\ln(1+u) \leq u \Rightarrow \ln(1+2e^{-3x}) \leq 2e^{-3x} \Rightarrow \int_0^\alpha \ln(1+2e^{-3x})dx \leq \int_0^\alpha 2e^{-3x}dx \Rightarrow$

$\int_0^\alpha \ln(1+2e^{-3x})dx \leq \left[-\frac{2}{3}e^{-3x}\right]_0^\alpha = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}e^{-3\alpha} = \frac{2}{3}\left(1-e^{-3\alpha}\right) \leq \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$, alors $\int_0^\alpha \ln(1+2e^{-3x})dx \leq \frac{2}{3}$.

16.Soit $A(\alpha)$ l'aire, exprimée en cm^2, du domaine limité par les droites d'équations $x = 0, x = \alpha, y = 2x$ et la courbe (C).

Déduisons une majoration de $A(\alpha)$ par un nombre indépendant de α :

$A(\alpha) = \int_0^\alpha (f(x) - y)dx = \int_0^\alpha \ln(1+2e^{-3x})dx \leq \frac{2}{3} \Rightarrow A(\alpha) \leq \frac{2}{3}$.

B) 1. Étudions les variations de la fonction h définie dans $[2; 4]$ par : $h(x) = 2 - x + \ln x$.

On a : $h'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{-x+1}{x} < 0$, alors h est strictement décroissante sur $[2; 4]$.

Déduisons que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique β.

h est continue et strictement décroissante sur $[2; 4]$, de plus $h(2) \times h(4) = \ln 2(\ln 4 - 2) = -0{,}42 < 0$, alors l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in [2; 4]$

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2 + \ln u_n$.

Montrons que l'image de $[2; 4]$ par $g : x \mapsto 2 + \ln x$ est incluse dans l'intervalle $[2; 4]$:

On a : $g'(x) = \frac{1}{x} > 0$, alors g est strictement croissante sur $[2; 4]$, donc

$g([2; 4]) = [g(2); g(4)] = [2 + \ln 2; 2 + \ln 4] = [2{,}69; 3{,}38] \subset [2; 4]$, alors $g([2; 4]) \subset [2; 4]$.

3. Montrons en utilisant l'inégalité des accroissements finis que : $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{2}|u_n - \beta|$:

g est dérivable sur $[2;4]$ et $\forall x \in [2;4], |g'(x)| - \frac{1}{2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{2-x}{2x} \leq 0 \Rightarrow |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$, alors pour tous éléments u_n et β de $[2;4]$, on a : $|g(u_n) - g(\beta)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \beta| \Rightarrow |u_{n+1} - g(\beta)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \beta|$ comme $h(\beta) = 0 \Rightarrow 2 - \beta + \ln\beta = 0 \Rightarrow \beta = 2 + \ln\beta$, donc $|u_{n+1} - g(\beta)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \beta| \Rightarrow |u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{2}|u_n - \beta|$.

10. Par raisonnement par récurrence, prouvons que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \beta| \leq 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- Pour n=0, on a : $|u_0 - \beta| = |2 - \beta| \leq |2 - 4| = 2 = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0$, donc vraie.
- Supposons que pour tout entier naturel $k \geq 0$, $|u_k - \beta| \leq 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^k$ et démontrons que $|u_{k+1} - \beta| \leq 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \Leftrightarrow |u_{k+1} - \beta| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

Selon la question 3., $|u_{k+1} - \beta| \leq \frac{1}{2}|u_k - \beta| \Rightarrow |u_{k+1} - \beta| \leq \frac{1}{2} \times 2\left(\frac{1}{2}\right)^k \Rightarrow |u_{k+1} - \beta| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \beta| \leq 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$. (CQFD)

11. Déduisons que (u_n) est convergente :

$$\lim_{+\infty}|u_n - \beta| \leq \lim_{+\infty} 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \lim_{+\infty}|u_n - \beta| \leq \lim_{+\infty} 2 \times (0{,}5)^n \Rightarrow \lim_{+\infty}|u_n - \beta| \leq 2 \times 0 \Rightarrow \lim_{+\infty}|u_n - \beta| \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{+\infty}|u_n - \beta| = 0 \Rightarrow \lim_{+\infty} u_n = \beta$$, alors (u_n) est convergente.

12. Déterminons un entier naturel N tel que $|u_N - \beta| \leq 10^{-4}$:

Alors $2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^N \leq 10^{-4} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^N \leq \frac{10^{-4}}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^N \leq \frac{1}{20000} \Rightarrow N \ln\frac{1}{2} \leq \ln\frac{1}{20000} \Rightarrow -N\ln 2 \leq -\ln 20000$

$$\Rightarrow N \geq \frac{\ln 20000}{\ln 2} \Rightarrow N \geq 14{,}2877 \Rightarrow N \geq 15.$$ Alors $\boxed{N = 15}$.

Exercice 1 :

Le plan P est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}\ ; \vec{v})$. Unité graphique 5 cm.

$A \mapsto Z_A = 1 + i$ et $B \mapsto Z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

On considère le cercle de centre O et de rayon $r = 1$.

1. Donnons la forme trigonométrique de Z_A et Z_B.

1ère méthode :

$$Z_A = 1 + i = \frac{\sqrt{2}^2}{2}(1+i) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \text{ d'où}$$

$$Z_A = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

$$Z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(-1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

$$Z_B = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

2ème méthode :

Module et argument de Z_A :

$$|Z_A| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Soit $\theta_A = Arg(Z_A)$, on a : $\begin{cases} \cos\theta_A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_A = \frac{\pi}{4}$

La forme trigonométrique de Z_A : $Z_A = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Module et argument de Z_B :

$$|Z_B| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Soit $\theta_B = Arg(Z_B)$, on a : $\begin{cases} \cos\theta_B = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_B = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_B = \frac{3\pi}{4}.$

La forme trigonométrique de Z_B : $Z_B = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

2. Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de (C), d'affixe $e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0;2\pi[$. On considère l'application f qui à tout point de (C), associe $f(M) = MA \times MB$.

a. Montrons, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha}\sin\alpha$.

1ère Méthode :

$e^{i2\alpha} - 1 = e^{i2\alpha} - e^{0} = e^{i\alpha+i\alpha} - e^{i\alpha-i\alpha} = e^{i\alpha}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right) = e^{i\alpha}(2i\sin\alpha) = 2i\sin\alpha.e^{i\alpha}$.

2ème méthode :

$e^{i2\alpha} - 1 = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha - 1 + 2i\sin\alpha\cos\alpha =$

$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha = -2\sin^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha =$

$= 2i^2\sin^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha = 2i\sin\alpha(i\sin\alpha + \cos\alpha)$

$= 2i\sin\alpha\,(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 2i\sin\alpha\, e^{i\alpha}$.

3ème méthode :

On sait que $\sin\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$.

$2ie^{i\alpha}\sin\alpha = 2i \times e^{i\alpha} \times \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} = e^{i\alpha}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right) = e^{i2\alpha} - 1$

b. Montrons l'égalité suivante : $f(M) = \left|e^{i2\alpha} - 1 - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$

$f(M) = \left|Z_A - Z_M\right| \times \left|Z_B - Z_M\right| = \left|(Z_A - Z_M)(Z_B - Z_M)\right|$

$= \left|Z_A Z_B - Z_M(Z_A + Z_M) + Z^2{}_M\right| = \left|-\dfrac{1}{2}(1+i)(1-i) - e^{i\alpha}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i\right) + e^{2i\alpha}\right|$

$= \left|-1 - e^{i\alpha}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i\right) + e^{i2\alpha}\right| = \left|e^{i2\alpha} - 1 - e^{i2\alpha}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i\right)\right|$

d'où $f(M) = \left|e^{i2\alpha} - 1 - e^{i2\alpha}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i\right)\right|$.

c. Déduisons que : $f(M) = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \left(-\dfrac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$

$f(M) = \left|e^{i2\alpha} - 1 - e^{i2\alpha}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i\right)\right| = \left|2i\sin\alpha\, e^{i\alpha} - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$

$= \left|e^{i\alpha}\right| \times \left|2i\sin\alpha - \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}i\right| = 1 \times \left|-\dfrac{1}{2} + i\left(-\dfrac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)\right|$

$= \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \left(-\dfrac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$

3. a. Montrons qu'il existe 2 points M de (C) dont on donnera les coordonnées pour lesquels $f(M)$ est minimale.

Soit g la fonction à variable réelle α associée à f définie par $g(\alpha) = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \left(-\dfrac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$

Étudions la fonction g :

Dérivée de la fonction g.

$$g'(\alpha) = \frac{2(2\cos\alpha)\left(-\dfrac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)}{2\sqrt{\dfrac{1}{4} + \left(-\dfrac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}} = \frac{\cos\alpha(-3 + 4\sin\alpha)}{\sqrt{\dfrac{1}{4} + \left(-\dfrac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}}.$$

Signe de $g'(\alpha)$

$\forall \alpha \in [0;2\pi[$, $\sqrt{\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2} > 0$ d'où $g'(\alpha)$ a le même signe que $\cos\alpha(-3+4\sin\alpha)$.

Posons $\cos\alpha(-3+4\sin\alpha)=0 \Leftrightarrow \cos\alpha=0$ ou $-3+4\sin\alpha=0$

$\cos\alpha=0 \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

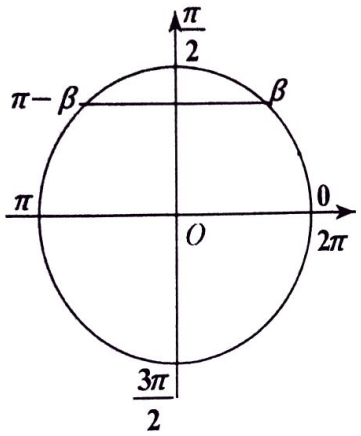
$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \Leftrightarrow 0^2+\sin^2\alpha=1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha=1 \Rightarrow \sin\alpha=-1$ ou $\sin\alpha=1$

$-3+4\sin\alpha=0 \Leftrightarrow 4\sin\alpha=3 \Rightarrow \sin\alpha=\frac{3}{4}\in[-1;1]$ donc il existe un angle $\beta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ telque $\sin\beta=\frac{3}{4}$.

$$\sin\alpha=\sin\beta \Rightarrow \begin{cases}\alpha=\beta+2k\pi \\ ou \\ \alpha=\pi-\beta+2k\pi\end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}.$$

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha+\left(\frac{3}{4}\right)^2=1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha=1-\frac{9}{16} \Rightarrow \cos\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{4}$ ou $\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$

Tableau de signe :



Pour tout $\alpha\in[0;\beta]\cup[\pi-\beta;2\pi]$, $\sin\alpha\le\frac{3}{4}\Leftrightarrow -3+4\sin\alpha\le 0$

Pour tout $\alpha\in[\beta;\pi-\beta]$, $\sin\alpha\ge\frac{3}{4}\Leftrightarrow -3+4\sin\alpha\ge 0$

Pour tout $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$, $\cos\alpha\ge 0$

pour tout $\alpha\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ $\cos\alpha\le 0$

D'après le cercle trigonométrique on a :

α	0		β		$\frac{\pi}{2}$		$\pi-\beta$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos\alpha$	+		+	0	−		−	0	+		
$-3+4\sin\alpha$	−	0	+		+	0	−		−		
$g'(\alpha)$	−	0	+	0	−	0	+	0	−		

Les extremums

$$g(\beta)=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{(-3+4\sin\beta)^2}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{(-3+3)^2}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$g(\pi-\beta)=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{(-3+4\sin(\pi-\beta))^2}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{(-3+4\sin\beta)^2}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\left(-3+4\sin\frac{\pi}{2}\right)^2}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{(-3+4)^2}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{2}+2\sin\frac{3\pi}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{(-3-4)^2}{4}}=\sqrt{\frac{50}{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Tableau de variation de g :

α	0		β		$\frac{\pi}{2}$		$\pi-\beta$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$g'(\alpha)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(\alpha)$	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{5\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{10}}{2}$

D'aprés le tableau de variation de g, $f(M)$ admet deux points de (C) de coordonnées respectives $\left(-\frac{\sqrt{7}}{4};\frac{3}{4}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{7}}{4};\frac{3}{4}\right)$ où $f(M)$ est minimal. Cette valeur minimale est 1/2.

2ème *méthode* :

$f(M)$ est minimale si et seulement si $\left(-\frac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2=0$

$\left(-\frac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2=0\Leftrightarrow 2\sin\alpha=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\sin\alpha=\frac{3}{4}$.

Soit $\beta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ $\sin\beta=\frac{3}{4}$

$\sin\alpha=\sin\beta\Leftrightarrow\alpha=\beta$ ou $\alpha=\pi-\beta$.

La valeur minimale de $f(M)$ est $\frac{1}{2}$.

b. D'après le tableau de variation de g :

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)<g\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ dont il existe un seul point M de (C) de coordonnées $(0;-1)$. Cette valeur maximale est $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 2 :

I. a. Le nombre de tours de chaque roue pour la première fois dans leur position initiale :

1ère *méthode* :

Soient x le nombre de tours de la roue (A) et y le nombre de tours de la roue (B) :

On l'équation : $12x=18y$.

Résolution par la congruence :

$12x=18y\Leftrightarrow 2x=3y\Leftrightarrow 2x\equiv 0[3]\Leftrightarrow x\equiv 0[3]\Rightarrow x=3k$.

Remplaçons x par sa valeur dans l'équation :

$2(3k)=3y\Rightarrow 2k=y$

Pour $k=1\Rightarrow x=3$ et $y=2$

Résolution par la méthode de Gauss :

$12x=18y\Leftrightarrow 2x=3y$

On sait que $2\nmid 3$ d'après Gauss $3|x$ et $2|y\Rightarrow x=3k$ et $y=2k$.

Pour $k=1\Rightarrow x=3$ et $y=2$.

2ème *méthode* :

Roue A a 12 dents et Roue B a 18 dents.

le nombre de tours des roues :

$PPCM(A;B) = PPCM(12;18)$

$12 = 2^2 \times 3$ et $18 = 2^2 \times 3^2$

$PPCM(12,36) = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36.$

Soient x et y le nombre de tours respectif de A et B

$12x = 36 \Rightarrow x = \dfrac{36}{12} = 3$

$18y = 36 \Rightarrow y = \dfrac{36}{18} = 2$

3ème *méthode* : par la table de valeurs

Nombre de tours	1	2	3	
Roue A	12	24	36	
Roue B	18	36		

Donc 3 tours de la roue A et 2 tours de la roue B, les deux roues sont dans leur position initiale pour la première fois

c. Le nombre de dents de la roue (C)

1ère *méthode* :

Soit z le nombre de tours de la roue (C) et α le nombre de dents de la roue (C) $(\alpha > 12)$.

$z\alpha = 10 \times 12$

$z \times \alpha = 120$

Par décomposition on a :

$120 = 1 \times 120 = 2 \times 60 = 3 \times 40 = 4 \times 30 = 5 \times 24 = 6 \times 20 = 8 \times 15$

Donc $(z = 1$ et $\alpha = 120)$ ou $(z = 2$ et $\alpha = 60)$ ou $(z = 3$ et $\alpha = 40)$ ou $(z = 4$ et $\alpha = 30)$ ou $(z = 5$ et $\alpha = 24)$ ou $(z = 6$ et $z = 20)$ ou $(z = 8$ et $\alpha = 15)$.

2ème *méthode* :

Soit x le nombre de dents de la roue A et y le nombre de tours de la roue C :

$$\begin{cases} \dfrac{PPCM(A,C)}{12} = 10 \\ \dfrac{PPCM(A,C)}{x} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} PPCM(A,C) = 120 \\ PPCM(A,C) = xy \end{cases} \Leftrightarrow xy = 120.$$ Par décomposition on a :

$120 = 1 \times 120 = 2 \times 60 = 3 \times 40 = 4 \times 30 = 5 \times 24 = 6 \times 20 = 8 \times 15$

Donc $(y = 1$ et $x = 120)$ ou $(y = 2$ et $x = 60)$ ou $(y = 3$ et $x = 40)$ ou $(y = 4$ et $x = 30)$ ou $(y = 5$ et $x = 24)$ ou $(y = 6$ et $x = 20)$ ou $(y = 8$ et $x = 15)$

I. On considère un triangle ABC du plan.

1. a. Déterminons et construisons le point $G = bary\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}$. On a :

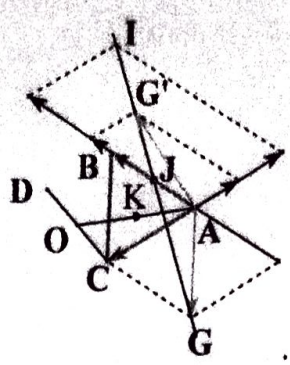
$G = bary\{(A;1);(B;-1);(C;1)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{O}$

$\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{O} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ (*Voir figure ci − dessous*).

b. Déterminons et construisons le point $G' = bary\{(A;1);(B;5);(C;-2)\}$. On a :

$G' = bary\{(A;1);(B;5);(C;-2)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{G'A} + 5\overrightarrow{G'B} - 2\overrightarrow{G'C} = \vec{O}$

$\overrightarrow{G'A} + 5\overrightarrow{G'B} - 2\overrightarrow{G'C} = \vec{O} \Rightarrow \overrightarrow{AG'} = \dfrac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. (*Voir figure ci − dessous*)



2. a. Soit J le milieu de $[AB]$.

J milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JA} = \vec{O}$ ou $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Exprimons :

- $\overrightarrow{GG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AG'} = -\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AG} = -\left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) + \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ d'où

$\overrightarrow{GG'} = \frac{9}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

- $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{JG'} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AG'} = -\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AG'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ d'où

$\overrightarrow{JG'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

- Déduisons l'intersection des droites (GG') et (AB).

1ère ***méthode :***

Considérons le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$.

L'équation de la droite (GG').

$\overrightarrow{GG'} = \frac{9}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{GG'}\begin{pmatrix}9/4\\3/2\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$.

$\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$.

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (GG')$ tel que $\det\left(\overrightarrow{GM}; \overrightarrow{GG'}\right) = 0$

$\det\left(\overrightarrow{GM}; \overrightarrow{GG'}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 9/4 \\ y-1 & -3/2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}(x+1) - \frac{9}{4}(y-1) = 0$

$\Leftrightarrow 2(x+1) + 3(y-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 1 = 0$

d'où $(GG') : 2x + 3y = 1$.

Dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$, (AB) a pour équation la droite $y = 0$.

On a, le système :

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1/2 \\ y=0 \end{cases} \text{ donc } (GG') \cap (AB) = \left\{\begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

2ème ***méthode :***

$\overrightarrow{GG'} = \frac{9}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = 3\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = 3\overrightarrow{JG'}$ donc $J \in (GG')$ et $J \in (AB)$ d'où $(GG') \cap (AB) = \{J\}$

b. Montrons que le barycentre $I = bary\{(B;2),(C;-1)\} \in (GG')$.

Coordonnées du point I.

1ère méthode :

$2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ d'où $I\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

Vérifions que : $I \in (GG')$.

$I \in (GG') \Rightarrow 2x_I + 3y_I = 1$

$2x_I + 3y_I = 2(2) + 3(-1) = 4 - 3 = 1$ vraie donc $I \in (GG')$

2ème méthode :

$I = bary\{(B;2),(C;-1)\} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{JG'} \Leftrightarrow \overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{JI} + 3\overrightarrow{IG'}$

$\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AG'} + \overrightarrow{G'G} \Rightarrow \overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{IB} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BI}$

$\overrightarrow{GG'} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BI} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BI}$

$= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BI} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}\right) = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BI}\right) = \frac{3}{2}\overrightarrow{JI}$

$= \frac{1}{2}\left(3\overrightarrow{JG'} + 3\overrightarrow{G'I}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GG'} + 3\overrightarrow{G'I}\right) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GG'} + 3\overrightarrow{G'I} \Leftrightarrow \overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{G'I}$ d'où

$I \in (GG')$

3ème méthode :

$I = bary\{(B;2),(C;-1)\} \Leftrightarrow I = bary\{(B;6),(C;-3)\}$

$G = bary\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}$

$G' = bary\{(A;1);(B;5);(C;-2)\} \Leftrightarrow G' = bary\left\{\underbrace{(A;1),(B;-1);(C;1)}_{G}\ \underbrace{(B;6),(C;-3)}_{I}\right\}$

$\Leftrightarrow G' = bary\{(G;1),(I;3)\}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{G'G} = 3\overrightarrow{G'I}$, d'où $I \in (GG')$

3. Soit D un point quelconque du plan.

O milieu du segment $[CD] \Leftrightarrow \overrightarrow{CO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ ou $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{O}$

K milieu du segment $[OA] \Leftrightarrow \overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ ou $\overrightarrow{KO} + \overrightarrow{KA} = \overrightarrow{O}$.

Déterminons trois réels a, d et c telsque K soit barycentre de $\{(A;a),(C;d),(C;c)\}$

1ère méthode :

$K = bary\{(A;a),(C;d),(C;c)\} \Leftrightarrow a\overrightarrow{KA} + d\overrightarrow{KD} + c\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{O}$.

$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA}\right)$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA}\right)$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KD}\right)+\overrightarrow{CK}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KD}\right)+\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KA}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}\right)-\overrightarrow{KC}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{KC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{KD}-\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KA}\right)$$

$$\Leftrightarrow -2\left(-\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}\right)-4\overrightarrow{KC}=2\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{KC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KA}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{KC}-2\overrightarrow{KD}-4\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{KC}-\overrightarrow{KD}+2\overrightarrow{KA}$$

$$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KD}-\overrightarrow{KC}=\vec{O}$$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KC}=\vec{O}$ par identification : $a=2$; $d=c=1$.

2ème méthode :

$K=bary\{(A;a),(C;d),(C;c)\} \Leftrightarrow a\overrightarrow{KA}+d\overrightarrow{KD}+c\overrightarrow{KC}=\vec{O}.$

K milieu de $[OA] \Leftrightarrow \overrightarrow{KO}+\overrightarrow{KA}=\vec{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA}=\overrightarrow{OK}$ ①

O milieu de $[CD] \Leftrightarrow \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{O}$ ②

$$① + ② \Rightarrow \overrightarrow{KO}+\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{OD}=\vec{O}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KD}=\vec{O}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}=\vec{O}.$$

Par identification on a : $a=2$; $d=c=1$

Problème :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et $\left\|\vec{i}\right\|=4$ cm et $\left\|\vec{j}\right\|=2$ cm..

Partie A :

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$x\longmapsto f(x)=(2+\cos x)e^{1-x}$.

(C) la courbe représentative de f dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. Montrons que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)>0$.

On sait que :

$\forall x\in\mathbb{R}, -1\le\cos x\le 1 \Leftrightarrow 1\le 2+\cos x\le 3 \Rightarrow 2+\cos x>0$ et $e^{1-x}>0$ d'où $f(x)>0$.

2. a. Montrons que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin x$.

$$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$$

$$=\cos x+\sin x.$$

D'où $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin x$

b. Déduisons - en que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $2+\cos x+\sin x>0$.

1ère méthode :

On a : pour tout $x\in\mathbb{R}$, $-1\le\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2}\le\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}\le\cos x+\sin x\le\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2-\sqrt{2}\le 2+\cos x+\sin x\le 2+\sqrt{2}$$

d'où $2+\cos x+\sin x>0$

2ème Méthode :

$$2+\cos x+\sin x=2+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}^2+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)>0 \text{ pour tout } x\in\mathbb{R}.$$

d'où $2+\cos x+\sin x>0$

c. Montrons que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Calculons f' :

$f'(x)=-\sin x\times e^{1-x}-(2+\cos x)e^{1-x}=-(2+\cos x+\sin x)e^{1-x}$.

Signe de $f'(x)$

D'après la question précédente , pour tout $x\in\mathbb{R}$, $2+\cos x+\sin x>0$ et $-e^{1-x}<0$ donc $f'(x)<0$ par suite f est strictement décroissante.

3. a. Montrons que, tout pour $x\in\mathbb{R}$, $e^{1-x}\leq f(x)\leq 3e^{1-x}$.

On sait que : $-1\leq\cos x\leq 1\Leftrightarrow 1\leq 2+\cos x\leq 3\Leftrightarrow e^{1-x}\leq(2+\cos x)e^{1-x}\leq 3e^{1-x}$

d'où $e^{1-x}\leq f(x)\leq 3e^{1-x}$.

b. Déduisons - en les limites :

- en $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}e^{1-x}\leq\lim_{x\to-\infty}f(x)\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$$

- en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}e^{1-x}\leq\lim_{x\to+\infty}f(x)\leq\lim_{x\to+\infty}3e^{1-x}\Leftrightarrow 0\leq\lim_{x\to+\infty}f(x)\leq 0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

c. Interprétons géomériquement le resultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$:

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ donc la droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à la courbe (C) en $+\infty$.

4. a. Montrons que, sur l'intervalle $[0;\pi]$, l'équation $f(x)=3$ admet une solution unique

1ère ***méthode*** :

Posons $g(x)=f(x)-3$

Étudions la fonction g :

- Dérivée : $g'(x)=f'(x)<0$
- Les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-3)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-3)=-3$$

- Tableau de variation de g :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-3

D'après le tableau de variation de g, sur $\mathbb{R}$, g est définie, continue et strictement décroissante, donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-3;+\infty[$. $0\in]-3;+\infty[$ alors il existe une solution unique $\alpha\in\mathbb{R}$, par suite léquation $f(x)=3$ admet une unique solution $\alpha\in\mathbb{R}$.

2ème ***méthode*** :

f est une fonction continue et strictement décroissante sur $[0;\pi]$ alors elle réalise une bijection de $[0;\pi]$ vers $[f(M);f(0)]=[e^{1-\pi},3e]$. Or $3\in[e^{1-\pi},3e]$, il existe donc une et une seule solution $\alpha\in[0;\pi]$ telle que $f(x)=3$.

b. Donnons un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

$g(0) = 3e - 3 > 0$ et $g(\pi) = e^{1-\pi} - 3 < 0 \Rightarrow g(0) \times g(\pi) \leq 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaire $\alpha \in [0;\pi]$.

Encadrement d'ordre zéro :

x	0	1	2	3	4
$g(x)$	0,15	− 0,46	− 2,43		

Encadrement d'ordre un :

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$g(x)$	0,37	3,63	2,32	1,92	1,74	1,21	0,73	0,29	- 0,10

Encadrement d'ordre 2 :

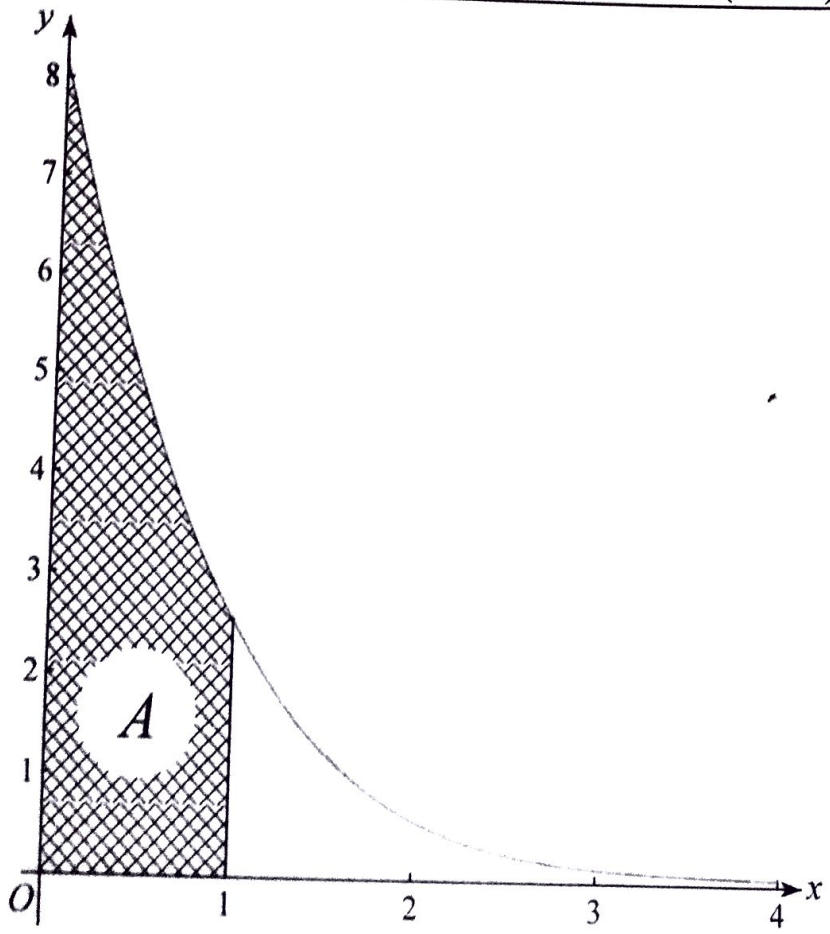
x	0,80	0,81	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	0,88
$g(x)$	0,25	0,21	0,17	0,13	0,09	0,05	0,01	0,01	- 0,03

D'où $0,87 \leq \alpha \leq 0,88$.

5. Représentons la courbe (C) sur $[0;4]$.

Tableau de variation de f :

x	0	4
$f'(x)$	−	
$f(x)$	$3e$ ↘	$(2+\cos 4)e^{-3}$



Partie B :

On veut Calculer l'aire A, exprimée en unité d'aire, du domaine limité par la courbe (C), l'axe des

abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$:

$A = \int_0^1 |f(x)|dx \times Ua = \int_0^1 f(x)dx \times Ua.$

1. Montrons que $A = \left(2e - 2 + \int_0^1 e^{1-x}\cos x\, dx\right) \times Ua.$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (2+\cos x)e^{1-x}dx = 2\int_0^1 e^{1-x}dx + \int_0^1 \cos x\, e^{1-x}dx$$

$$= -2\int_0^1 -e^{1-x}dx + \int_0^1 \cos x\, e^{1-x}dx$$

$$= -2[e^{1-x}]_0^1 + \int_0^1 \cos x\, e^{1-x}dx = -2 + 2e + \int_0^1 \cos x\, e^{1-x}dx$$

d'où $A = \left(2e - 2 + \int_0^1 e^{1-x}\cos x\, dx\right) \times Ua.$

2. On pose $I = \int_0^1 e^{1-t}\cos t\, dt$ et $J = \int_0^1 e^{1-t}\sin t\, dt$.

a. À l'aide d'intégration par parties, montrons que : $I = e - j - \cos 1$ et $J = I - \sin 1$.

- $I = \int_0^1 e^{1-t}\cos t\, dt = ?$

  Posons :
  $u = \cos t \Rightarrow u' = -\sin t$
  $v' = e^{1-t} \Rightarrow v = -e^{1-t}$

  $I = [-\cos t\, e^{1-t}]_0^1 - \int_0^1 e^{1-t}\sin t\, dt = -\cos 1 + e - J$ d'où $I = e - j - \cos 1$

- $J = \int_0^1 e^{1-t}\sin t\, dt = ?$

  Posons :
  $u_1 = \sin t \Rightarrow u_1' = \cos t$
  $v_1' = e^{1-t} \Rightarrow v = -e^{1-t}$

  $J = [-\sin t\, e^{1-t}]_0^1 - \int_0^1 -e^{1-t}\cos t\, dt = -\sin 1 + I = I - \sin 1.$

b. Déduisons - en la valeur de I.

$I = e - J - \cos 1 = e - (I - \sin 1) - \cos 1$

$I = -I + \sin 1 - \cos 1 + e$

$2I = e + \sin 1 - \cos 1 \Rightarrow I = \frac{1}{2}(e + \sin 1 - \cos 1).$

3. Déterminons la valeur exacte de A en unités d'aire, puis donnons une valeur approché de A à 10^{-2} par défaut.

$$A = \int_0^1 f(x)dx \times Ua = \left[2e - 2 + \frac{1}{2}(e + \sin 1 - \cos 1)\right] \times 8\text{cm}^2$$

$$= (16e - 16 + 4 + e + 4\sin 1 - 4\cos 1)\text{cm}^2$$

$$= (20e + 4\sin 1 - 4\cos 1 - 16)\text{ cm}^2$$

$$= 39{,}57\text{ cm}^2.$$

Partie C :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -1 - \frac{\sin x}{2 + \cos x}$.

1. a. Montrons que la fonction h admet des primitive sur $\mathbb{R}$.

Ensemble de définition de h : $D_h = \mathbb{R}$

On sait que $\sin x$ et $2+\cos x$ sont continues $\mathbb{R}$ donc $h(x)=-1-\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$ est continue sur $\mathbb{R}$. h est définie et continue sur$\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives.

b. Calculons la primitive H de la fonction h, qui prend en zéro la valeur $(1+\ln 3)$.

$H(x)=\int_0^1 h(x)dx=\int_0^1\left(-1-\dfrac{\sin x}{2+\cos x}\right)dx=-x+\ln\left|2+\cos x\right|+c$ donc

$H(x)=-x+\ln(2+\cos x)+c$

$H(0)=1+\ln 3 \Leftrightarrow -0+\ln(2+\cos 0)+c=1+\ln 3 \Leftrightarrow \ln 3+c=1+\ln 3 \Rightarrow c=1.$

$H(x)=-x+1+\ln(2+\cos x).$

2. a. Déterminons $\ln(f(x))$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

$\ln(f(x))=\ln((2+\cos x))=\ln(2+\cos x)+\ln e^{1-x}=\ln(2+\cos x)+1-x$ donc :

$\ln(f(x))=-x+1+\ln(2+\cos x).$

b. Étudions le sens de variation de la fonction H.

Dérivée de H :

$$H'(x)=h(x)=-1-\frac{\sin x}{2+\cos x}=\frac{-2-\cos x-\sin x}{2+\cos x}=\frac{-(2+\cos x+\sin x)}{2+\cos x}$$

D'après la partie A, 2°) c) on a : $-(2+\cos x+\sin x)<0$ donc $H'(x)<0$ d'où H est strictement décroissante.

c. Tableau de variation de H.

Les limites aux bornes de H.

On constate que : $H(x)=\ln(f(x))$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}H(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(f(x))=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}H(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(f(x))=-\infty$

Tableau de variation de H :

x	$-\infty$		$+\infty$
$H'(x)$		$-$	
$H(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

3. La fonction définie par : $x\longmapsto 1-x+\ln(2+\cos x)$, (Δ) la droite d'équation $y=1-x$.

a. Étudions la position relative de (Γ) et de (Δ)

Signe de $(H(x)-y)$.

$H(x)-y=1-x+\ln(2+\cos x)-(-x+1)=\ln(2+\cos x)$

$\forall x\in\mathbb{R}, \ln(2+\cos x)\geq 0\Rightarrow H(x)-y\geq 0$ d'où (Γ) est au dessus de (Δ).

b. Déterminons les abscisses des points communs de Γ et Δ.

$H(x)=y\Leftrightarrow\ln(2+\cos x)=0\Leftrightarrow 2+\cos x=1\Leftrightarrow\cos x=-1\Rightarrow x=(2k+1)\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

4. a. Établissons une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse 0.

$x_0=0,\ H(0)=1+\ln 3,\ H'(0)=-1$

$(T): y=-1(x)+1+\ln 3\Leftrightarrow (T): y=-x+1+\ln 3.$

b. Étudions la postion relative de (Γ) et (T) :

$H(x)-y=1-x+\ln(2+\cos x)-(-x+1+\ln 3)=\ln(2+\cos x)-\ln 3=\ln\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)$

On sait que , pour tout $x\in\mathbb{R}\ 1\leq 2+\cos x\leq 3\Rightarrow\dfrac{1}{3}\leq\dfrac{2+\cos x}{3}\leq 1$ donc $\ln\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)\leq 0$ d'où

(Γ) est en dessous de (T).

5. .La courbe (Γ) est continue dans la bande du plan limitée par les droites (Δ) et (T) car $(\Delta)//(T)$.

EXERCICE 1 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}\ ; \vec{v})$. (Unité graphique 1 cm).

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$

Partie *A* :

1. Montrons que $-i$ est solution de (E).

$-i$ solution de $(E) \Leftrightarrow (-i)^3 + (-8+i)(-i)^2 + (17-8i)(-i) + 17i = 0$

$(-i)^3 + (-8+i)(-i)^2 + (17-8i)(-i) + 17i = i - (-8+i) - 17i - 8 + 17i = i + 8 - i - 8 = 0.$

donc $(-i)$ est une solution de (E).

2. Déterminons les nombres réels a,b,c tels que $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(az^2+bz+c)$.

Première méthode : Division euclidienne

$-i$ solution de $(E) \Leftrightarrow (z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i)$ est divisible par $(z+i)$

$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i$	$z+i$
$-z^3 - iz^2$	$= z^2 - 8z + 17$
$-8z^2 + (17+i)z$	
$8z^2 + 8iz$	
$17z + 17i$	
$-17z - 17i$	
$0 + 0$	

donc $a=1, b=-8, c=17$ et $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(z^2-8z+17)$

Deuxième méthode : Coefficients indéterminés

$(z+i)(az^2+bz+c) = az^2(z+i) + bz(z+i) + c(z+i) = az^3 + (ia+b)z^2 + (ib+c)z + ic$

Par identification on a :

$$\begin{cases} a=1 \\ ia+b=-8+i \\ ib+c=17-8i \\ ic=17i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-8 \\ c=17 \\ c=17 \end{cases}$$

d'où $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(z^2-8z+17)$

Troisième méthode : Tableau d'Hörner.

	1	$-8+i$	$17-8i$	$17i$
$-i$		$-i$	$8i$	$-17i$
	1	-8	17	0

donc $a=1, b=-8, c=17$ et $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(z^2-8z+17)$

3. Résolvons l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

Posons : $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0 \Leftrightarrow (z+i)(z^2-8z+17) = 0$

$\Leftrightarrow z+i=0$ ou $z^2-8z+17=0$

Résolution de : $z^2 - 8z + 17 = 0$

$\Delta' = 16 - 17 = -1 = i^2$

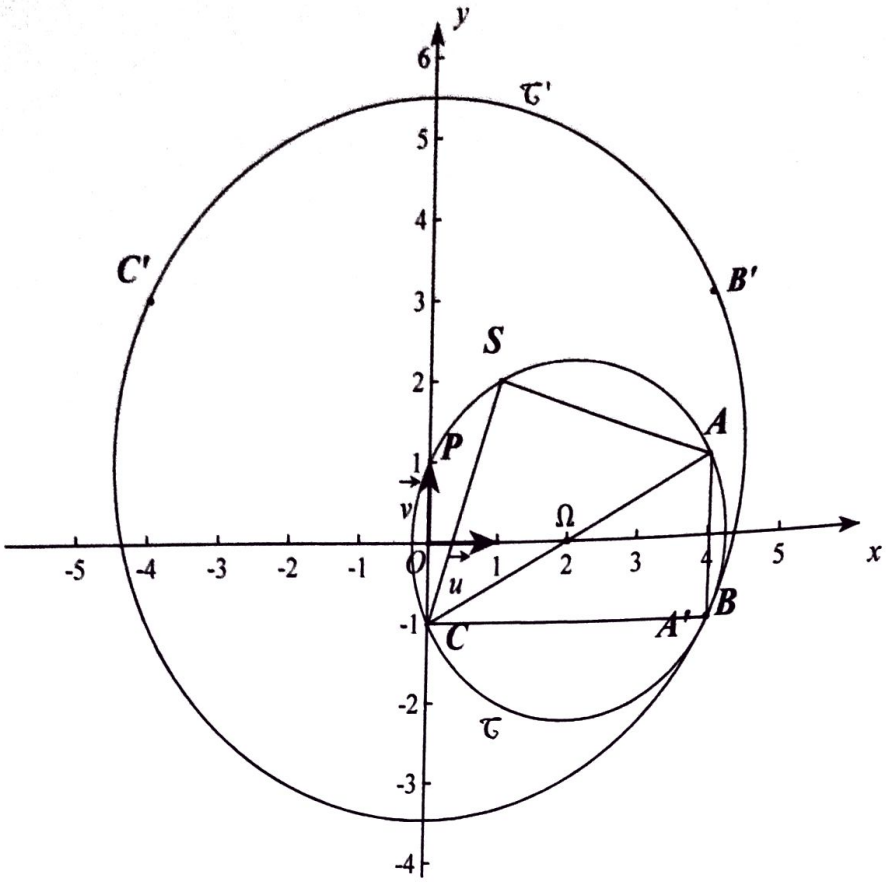
$z_1 = 4 - i$ et $z_2 = 4 + i$

$$S=\{-i;4-i;4+i\}$$

Partie B :

Soient les points : $A\mapsto z_A=4+i$, $B\mapsto z_B=4-i$; $C\mapsto z_C=-i$.

1. Plaçons les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice :



2. $r:\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{P}$

$M\mapsto M'$ tel que $z'=iz-2i+2$ où $M\mapsto z$ et $M'\mapsto z'$ le point $\Omega\mapsto z_\Omega=2$.

$S=r(A)$.

Calculons l'affixe s de S.

$s=iz_A-2i+2=i(4+i)-2i+2=2i+1$

$s=1+2i$

3. Démontrons que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle τ dont on déterminera le centre et rayon.

Première méthode :

par conjecture à partir de la représentation graphique, Ω semble être le centre de ce cercle. On cherche une preuve en comparant (par calcul) les distances ΩB; ΩA, ΩS et ΩC :

$\Omega B=\left|z_B-z_\Omega\right|=\left|4-i-2\right|=\left|2-i\right|=\sqrt{5}$

$\Omega A=\left|z_A-z_\Omega\right|=\left|4+i-2\right|=\left|2+i\right|=\sqrt{5}$

$\Omega S=\left|z_S-z_\Omega\right|=\left|1+2i-2\right|=\left|-1+2i\right|=\sqrt{5}$

$\Omega C=\left|z_C-z_\Omega\right|=\left|-i-2\right|=\sqrt{5}$

Donc B, A, S, C appartiennent au cercle τ de centre Ω et de rayon $\sqrt{5}$

Deuxième méthode :

D'après la formule des points cocycliques, on vérifie : $\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\div\dfrac{z_A-z_S}{z_C-z_S}\in\mathbb{R}^*$.

$$\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}+\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)=\left(\frac{-i-4+i}{4+i-4+i}\right)\left(\frac{-i-1-2i}{4+i-i-2i}\right)=\frac{-2}{i}\times\frac{-1-3i}{3-i}$$

$$=2i\times\frac{-i(3-i)}{3-i}=2\in\mathbb{R}^*.$$ Donc B, A, S, C appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$.

Déterminons le centre et rayon de $\mathcal{C}$

Première méthode :

Soit I le centre d'affixe $z=x+iy$ $(x;y)\in\mathbb{R}^2$.

$IA=IB=IC=IS=$ rayon.

$$IA^2=\left|z_A-z_I\right|^2=\left|4+i-x-iy\right|^2=\left|(4-x)+i(1-y)\right|^2=(4-x)^2+(1-y)^2$$

$$IB^2=\left|z_B-z_I\right|^2=\left|4-i-x-iy\right|^2=(4-x)^2+(1+y)^2$$

$$IC^2=\left|z_C-z_I\right|^2=\left|-i-x-iy\right|^2=x^2+(1+y)^2$$

$$IS^2=\left|z_S-z_I\right|^2=\left|1+2i-x-iy\right|^2=(1-x)^2+(2-y)^2$$

Par égalités : on a

$$IC^2=IB^2\Leftrightarrow x^2+(1+y)^2=(4-x)^2+(1+y)^2\Leftrightarrow x^2=(4-x)^2\Leftrightarrow x^2-(4-x)^2=0$$

$$\Leftrightarrow(x-4+x)(x+4-x)=0$$

$$\Leftrightarrow 4(2x-4)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x-4=0$$

$$\Rightarrow x=2$$

$$IS^2=IB^2\Leftrightarrow(4-x)^2+(1+y)^2=(1-x)^2+(2-y)^2\Leftrightarrow(4-2)^2+(1+y)^2=(1-2)^2+(2-y)^2$$

$$\Leftrightarrow 2^2+(1+y)^2=(-1)^2+(2-y)^2$$

$$\Leftrightarrow 4+1+2y+y^2=1+4-4y+y^2$$

$$\Leftrightarrow 6y=0\Rightarrow y=0$$

d'où $z_I=2$.

Le rayon de ce cercle est :

$IC=\left|z_C-z_I\right|=\left|-i-2\right|=\sqrt{5}$ donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $I=\Omega$ de rayon $\sqrt{5}$.

Deuxième méthode :

On vérifie que l'angle $\widehat{CBA}$ est droit et on en déduit que [AC] est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC. Puis on détermine l'affixe du milieu I (coincide avec Ω) [AC] et le rayon IA.

$$mes\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)=Arg\left(\widehat{CBA}\right)=Arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)=Arg\left(\frac{-i-4+i}{4+i-4+i}\right)=Arg\left(\frac{-4}{2i}\right)=Arg(2i)=\frac{\pi}{2},$$

CBA est un triangle rectangle en B et I d'affixe $Z_I=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{4+i-i}{2}=2=z_\Omega$ donc $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC par suite $\mathcal{C}$ est le cercle de centre Ω et de rayon $\Omega A=\sqrt{5}$

4. Á tout point $M\mapsto z$ on associe le point M' d'affixe $z'=\frac{iz+10-2i}{z-2}$

a. Déterminons l'affixe des points A', B', C' associe respectivement aux points. A, B, C.

$$z_{A'}=\frac{iz_A+10-2i}{z_A-2}=\frac{i(4+i)+10-2i}{4+i-2}=\frac{2i+9}{2+i}=\frac{1}{5}(9+2i)(2-i)=\frac{1}{5}(18+2+(4-9)i)=4-i$$

$$z_{B'}=\frac{iz_B+10-2i}{z_B-2}=\frac{i(4-i)+10-2i}{4-i-2}=\frac{11-2i}{2-i}=\frac{1}{5}(11-21)(2+1)=\frac{1}{5}(22-2-(11+4)i)=$$

$$=4+3i$$

$$z_{C'}=\frac{iz_C+10-2i}{z_C-2}=\frac{i(-i)+10-2i}{-i-2}=\frac{11-2i}{-2-i}=\frac{1}{5}(11-2i)(-2+i)=\frac{1}{5}(-22+2+(11+4)i)$$

$= -4 + 3i$

b. Vérifions que A', B', C' appartiennent à un cercle $\mathcal{C}$ de centre P d'affixe i.

$A', B', C' \in \mathcal{C}$ signifie que $PA' = PB' = PC' = Rayon$

$PA' = |z_{A'} - z_P| = |4 - i - i| = |4 - 2i| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$.

$PB' = |z_{B'} - z_P| = |4 + 3i - i| = |4 + 2i| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$.

$PC' = |z_{C'} - z_P| = |-4 + 3i - i| = |-4 + 2i| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre P et de rayon $r = 2\sqrt{5}$.

c. Pour tout nombre $z \neq 2$ exprimons $|z' - i|$ en fonctionde z.

$$|z' - i| = \left|\frac{iz + 10 - 2i}{z-2} - i\right| = \left|\frac{iz + 10 - 2i - iz + 2i}{z-2}\right| = \left|\frac{10}{z-2}\right| = \frac{10}{|z-2|}.$$

d. Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle $\mathcal{C}$.

Démontrons que $|z' - i| = 2\sqrt{5}$

$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow |z-2| = \sqrt{5}$ donc $|z' - i| = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$ $(CQFD)$

e. Déduisons à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points M du cercle $\mathcal{C}$.

$|z' - i| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow M'$ appartiennent au cercle de centre P et de rayon $2\sqrt{5}$.

Exercixe 2 :

I. On considère l'équation $(E) : 8x + 5y = 1$ où $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$.

1. *a.* Donnons une solution particulière de l'équation (E)

Première méthode : par essai

On constate que : $8(2) + 5(-3) = 16 - 15 = 1$ le couple $(2\,;-3) \in \mathbb{Z}^2$ est une solution particulière de l'équation de l'équation (E).

Deuxième méthode : Algorithme d'Euclide.

q	1	1	1	1
8	5	3	2	1
r	3	2	1	0

$1 = 3 - 2 \times 1$

$2 = 5 - 3 \times 1$

$3 = 8 - 5 \times 1$

$3 - 2 = 1 \Leftrightarrow 3 - (5-3) = 1 \Leftrightarrow 2(3) - 5 = 1 \Leftrightarrow 2(8-5) - 5 = 1 \Leftrightarrow 8(2) + 5(-3) = 1$ donc $(2\,;-3)$ est une solution particulière.

Troisième méthode : Par congruence.

$8x + 5y = 1 \Leftrightarrow 8x = -5y + 1 \Leftrightarrow 8x \equiv 1[5]$

$\Leftrightarrow 3x \equiv 1[5]$

$\Leftrightarrow 6x \equiv 2[5]$

$\Leftrightarrow x \equiv 2[5]$

$\Rightarrow x = 5k + 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$

pour $k = 0$ on a : $x = 2$ et $-5y = 8(2) - 1 \Leftrightarrow -5y = 15 \Rightarrow y = -3$ donc $(2\,;-3)$ est une solution particulière.

b. Résolvons l'équation (E)

Première méthode :

Comme $(2\,;-3)$ est une solution particulière, on a le système.

$$\begin{cases} 8x+5y=1 \\ 8(2)+5(-3)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+5y=1 \\ 8(-2)+5(3)=-1 \end{cases}$$
$$\overline{8(x-2)+5(y+3)=0}$$
$$\Leftrightarrow 8(x-2)=5(-y-3)$$

$8 \wedge 5 = 1$ alors $5/(x-2)$ et $8/(-y-3)$ par suite

$$x = 5k+2 \text{ et } y = -8k-3 \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

vérification: $8(5k+2)+5(-8k-3) = 40k+16-40k-15 = 1$

donc l'ensemble des solutions est $S = \{(5k+2;\ -8k-3), k \in \mathbb{Z}\}$

Deuxième méthode :

$8x+5y=1 \Leftrightarrow 8x=-5y+1 \Leftrightarrow 8x \equiv 1[5]$

$$\Leftrightarrow 3x \equiv 1[5]$$
$$\Leftrightarrow 6x \equiv 2[5]$$
$$\Leftrightarrow x \equiv 2[5]$$
$$\Rightarrow x = 5k+2, k \in \mathbb{Z}$$

Remplaçons x par sa valeur dans l'équation :

$8(5k+2)+5y=1 \Leftrightarrow 40k+16+5y=1 \Leftrightarrow 5y=-40k-15 \Rightarrow y=-8k-3$

On endeduit que l'ensemble des solutions est $S = \{(5k+2;\ -8k-3),\ k \in \mathbb{Z}\}$

2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il existe un couple $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant $\begin{cases} N=8a+1 \\ N=5b+2 \end{cases}$.

a. Montrons que le couple $(a;\ -b)$ est solution de (E).

Premiière méthode :

On sait que :

$N=N \Leftrightarrow 8a+1=5b+2 \Leftrightarrow 8a-5b=2-1 \Leftrightarrow 8a+5(-b)=1 \Rightarrow (a;\ -b)$ est une solution de (E).

Deuxième méthode :

$\begin{cases} N=8a+1 \\ N=5b+2 \end{cases}$.

$N=8a+1 \Rightarrow a=\dfrac{N-1}{8}$

$N=5b+2 \Rightarrow b=\dfrac{N-2}{5} \Rightarrow -b=-\dfrac{N-2}{5}$

Vérifions si $(a;\ -b)$ est solution de (E).

$8\left(\dfrac{N-1}{8}\right)+5\left(-\dfrac{N-2}{5}\right)=N-1-N+2=1$ d'où $(a;-b)$ est solution de (E).

b. Le reste de la division euclidienne de N par 40.

D'après la relation qui vérifie N, on a : $\begin{cases} N=8a+1 \\ N=5b+2 \end{cases}$.

D'après 2) a), $(a;\ -b)$ solution de (E), par suite $\begin{cases} a=5k+2 \\ -b=-8k-3 \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5k+2 \\ b=8k+3 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

En remplaçant a ou b par leur valeur, on a :

$N=8(5k+2)+1=40k+17, k \in \mathbb{Z}$

ou $N=5(8k+3)+2=40k+17$ d'où $N=40k+17,\ k\in\mathbb{Z}$

$N=40k+17,\ k\in\mathbb{Z}$ d'où le reste de la division euclidienne de N par 40 est 17.

3. a. Résolvons l'équation $8x+5y=100$ où $(x\,;y)\in\mathbb{Z}^2$.

$8\wedge 5=1$ et $1/100$, donc l'équation admet au moins une solution.

Premier méthode : Par congruence :

$8x+5y=100\Leftrightarrow 5y=100-8x\Leftrightarrow 5y\equiv 100[8]\Leftrightarrow y\equiv 20[8]\Leftrightarrow y\equiv 4[8]\Rightarrow y=8k+4,\ k\in\mathbb{Z}$

Remplaçons y par sa valeur dans l'équation :

$8x+5(8k+4)=100\Leftrightarrow 8x=-40k+80\Rightarrow x=-5k+10.$

$S=\{(-5k+10\,;8k+4),\ k\in\mathbb{Z}\}$

Deuxième méthode : Par application du théorème de Bézout.

D'après 1°) on a :

$8(2)+5(-3)=1\ \Leftrightarrow\ 8(200)+5(-300)=100$ donc le couple $(200\,;-300)$ est une solution particulière de l'équation $8x+5y=100$.

$$\begin{cases}8x+5y=100\\ 8(200)+5(-300)=100\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8x+5y=100\\ \underline{8(-200)+5(300)=-100}\end{cases}$$

$$8(x-200)+5(y+300)=0$$

$$\Leftrightarrow 8(x-200)=5(-y-300)$$

$8\wedge 5=1$ alors on a $5/(x-200)$ et $8/(-y-300)$ par suite :

$5/(x-200)$ et $8/(-y-300)\Rightarrow x=5k+200$ et $y=-8k-300$

Vérification : $8(5k+200)+5(-8k-300)=40k+1600-40k+1500=100$ donc :

$S=\{(5k+200\,;-8k-300)\ k\in\mathbb{Z}\}$.

b. Soient α le nombre d'hommes et β le nombre de femmes :

D'après l'énoncé, on a : $8\alpha+5\beta=100$

Avec la question précédente :

Avec la première méthode on a: $\alpha=-5k+10$ et $\beta=8k+4$

pour $k=0$ ou $k=1$: $(\alpha=10$ et $\beta=4)$ *ou* $(\alpha=5$ et $\beta=12)$.

Avec la deuxième méthode : $\alpha=5k+200$ et $\beta=-8k-300$

$5k+200>0$ et $-8k-300>0$

$5k+200>0\Rightarrow k>-40$

$-8k-300>0\Rightarrow k<-\dfrac{300}{8}$ d'où $-40<k<-\dfrac{300}{8}\Rightarrow k\in\{-39\,;-38\}$.

Pour $k=-39$ on a : $\alpha=5$ *et* $\beta=12$

Pour $k=-38$ on a : $\alpha=10$ et $\beta=4$

II. On se propose de résoudre l'équation différentielle : $y'-2y=\dfrac{-2}{1+e^{-2x}}\ (E)$.

1. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et f la fonction définie par : $f(x)=e^{2x}g(x)$.

Montrons que la fonction f est solution (E) si et seulement si $g'(x)=\dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

Supposons que f est solution de (E) et montrons que $g'(x)=\dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

f solution de $(E)\Leftrightarrow f'-2f=\dfrac{-2}{1+e^{-2x}}\Leftrightarrow 2e^{2x}g(x)+g'(x)e^{2x}-2e^{2x}g(x)=\dfrac{-2}{1+e^{-2x}}$

$$\Leftrightarrow g'(x)e^{2x}=\frac{-2}{1+e^{-2x}}\Rightarrow g'(x)=\frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}.$$

2. Déduisons toutes les solutions de (E).

Déterminons la fonction g

$g'(x)=\dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \Rightarrow g(x)=\int \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\,dx=\ln\left(1+e^{-2x}\right)+c$ avec $c\in\mathbb{R}$.

La solution $f(x)=e^{2x}\left(\ln\left(1+e^{-2x}\right)+c\right)=e^{2x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)+ce^{2x}$.

Problème

A. **1.** On définit la fonction g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par : $g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1)$.

a. On admet le resultat suivant : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$.

Déduisons la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 1.

- Ensemble de définition de g : $D_g=\{x\in\mathbb{R}, x-1>0\}\cap]1\,;+\infty[=]1\,;+\infty[$
- Posons $t=x-1\Rightarrow x=t+1$

  quand $x\longrightarrow 1^+\Rightarrow t\longrightarrow 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{t\to 0^+}[2(t+1)-t\ln t]=2$ d'où $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=2$.

b. Calculons $g'(x)$ pour tout $x\in]1\,;+\infty[$.

$g'(x)=2-\ln(x-1)-1=1-\ln(x-1)$.

c. Résolvons l'inéquation : $1-\ln(x-1)>0$ d'inconnue $x\in]1\,;+\infty[$.

Prémière méthode : *Par étude.*

Posons : $h(x)=1-\ln(x-1)$ pour tout $x\in]1\,;;+\infty[$

- Dérivée h' :

$$h(x)=-\frac{1}{x-1}<0 \text{ pour tout } x\in]1\,;+\infty[$$

- Les limites aux bornes de $]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 1} h(x)=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$

- Tableau de variation

x	1		$e+1$		$+\infty$
$h'(x)$	‖		$+$		
$h(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

- Les points remarquables :

$\mathcal{C}_h\cap(Ox)\Rightarrow h(x)=0\Leftrightarrow 1-\ln(x-1)=0\Leftrightarrow x-1=e\Rightarrow x=e+1$.

D'après le tableau de variation de h, pour tout $x\in]1\,;e+1[$ $h(x)>0$ d'où $S=]1\,;e+1[$.

Deuxième méthode : Utilisation de la bijection de la fonction exponentielle.

$1-\ln(x-1)>0 \Leftrightarrow -\ln(x-1)>-1 \Leftrightarrow \ln(x-1)<1 \Rightarrow x-1<e \Rightarrow x<e+1$ donc $x\in]1\,;e+1[\cap]1\,;+\infty[=]1\,;e+1[$ Par suite : $S=]1\,;e+1[$

Troisième méthode : Par changement d'inconnue.

Posons $t=x-1$, l'inéquation devient $1-\ln t>0$.

Signe de $(1-\ln t)$

Posons $1-\ln t=0\Leftrightarrow \ln t=1\Rightarrow t=e$.

t	0		e		$+\infty$
$1-\ln t$	‖	$+$	0	$-$	

Dans le tableau ci - dessus pour tout $t \in]0;e[$, $1-\ln t > 0 \Leftrightarrow (x-1) \in]0;e[$, $1-\ln(x-1) > 0$

$(x-1) \in]0;e[\Leftrightarrow 0 < x-1 < e \Leftrightarrow 1 < x < e+1 \Rightarrow x \in]1;e+1[$ d'où $S =]1;e+1[$.

d. Étudions le sens de variation de g sur l'intervalle $]1;+\infty[$

Signe de $g'(x)$:

x	1		$e+1$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

$\forall x \in]1;e+1]$, $g'(x) \geq 0$ donc g est croissante.

$\forall x \in [e+1;+\infty[$, $g'(x) \leq 0$ donc g est décroissante.

e. Montrons que l'équation $g(x)=0$ a une solution unique notée α, dans l'intervalle $[e+1;e^3+1]$.

La limite en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x-(x-1)\ln(x-))$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(2-\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(x-1)\right)$$

$$= +\infty(2-\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

L'extremum :

$g(e+1) = 2(e+1)-(e+1-1)\ln(e+1-1) = 2e+2-e = e+2$; $g(e+1) = e+2$

Tableau de variations

x	1		$e+1$		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$			
$g(x)$	‖	↗	$e+2$	↘	0	↘	$-\infty$
	2						

D'après le tableau de variation de g, sur l'intervalle $[e+1;+\infty[$ g est définie, continue et strictement décroissante donc g réalise une bijection de $[e+1;+\infty[$ sur $]-\infty;e+2]$. Or $0(zéro) \in]-\infty;e+2]$ donc il existe un nombre réel $\alpha \in [e+1;+\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$.

On sait que: $[e+1;e^3+1] \subset [e+1;+\infty[$, calculons :

$g(e+1) = e+2 > 0$,

$g(e^3+1) = 2(e^3+1)-(e^3+1-1)\ln(e^3+1-1) = 2e^3+2-3e^3 = -e^3+2 < 0$

$g(e+1) \times g(e^3+1) < 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires $e+1 < \alpha < e^3+1$.

- Étudions le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

Première méthode : Par lecture du tableau de variation de g.

D'après le tableau de variation de g :

Pour tout $x \in]1;\alpha[$ $g(x) > 0$

Pour tout $x \in [\alpha\ ;\ +\infty[\ g(x) \leq 0$

Deuxième méthode : Avec le tableau de variation de g :

x	1		$e+1$		α		$+\infty$
$g'(x)$		+	0		−		
$g(x)$	2	↗	$e+2$	↘	0	↘	$-\infty$
signe de $g(x)$		+			0	−	

2. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par $\varphi(x) = \dfrac{\ln(x^2-1)}{x}$

a. Déterminons $\lim\limits_{x\to 1^+} \varphi(x)$ et prouvons que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\ln(x^2-1)}{x} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^2-1)}{x} = ?$

Posons $t = \dfrac{1}{x} \Longrightarrow x = \dfrac{1}{t}$

quand $x \longrightarrow +\infty\ ;\ t \longrightarrow 0^+$

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{t\to 0^+} t\ln\left(\frac{1}{t^2}-1\right) = \lim_{t\to 0^+} t\ln\left(\frac{1-t^2}{t^2}\right) = \lim_{t\to 0^+} t(\ln(1-t^2) - 2\ln t)$$

$$= \lim_{t\to 0^+} (t\ln(1-t^2) - 2t\ln t) = 0$$

b. Calculons $\varphi'(x)$.

$$\varphi'(x) = \frac{\dfrac{2x}{x^2-1}\times x - \ln(x^2-1)}{x^2} = \frac{2x^2-(x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)} = \frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}.$$

Montrons que $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur $]1\ ;\ +\infty[$

Pour tout $x \in]1\ ;\ +\infty[\ ,\ x^2(x^2-1) > 0$ donc $\varphi'(x) = \dfrac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$ a le même signe que $g(x^2)$

c. Montrons que φ est croissante sur l'intervalle $]1\ ;\ \sqrt{\alpha}\,]$ et décroissante sur l'intervalle $[\sqrt{\alpha}\ ;+\infty[$.

Posons $t = x^2$ $(t>0)$, d'après la question 1°/c) on a :

Pour $t \in]1\ ;\ \alpha[\ g(t) \geq 0$ donc $1 \leq x^2 \leq \alpha$ et $x \in]1\ ;\ +\infty[\Leftrightarrow 1 \leq x \leq \sqrt{\alpha}$, $g(x^2) \geq 0 \Leftrightarrow \varphi'(x) \geq 0$ d'où φ est croissante.

Pour $t \in [\alpha\ ;\ +\infty[\ g(t) \leq 0$ donc $x^2 \geq \alpha \Leftrightarrow x \geq \sqrt{\alpha}$ et $x \in]1\ ;\ +\infty[\Leftrightarrow x \in [\sqrt{\alpha}\ ;\ +\infty[$

$g(x^2) \leq 0 \Longrightarrow \varphi'(x) \leq 0$ d'où φ est décroissante.

B. On définit la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$

1. Vérifions que pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$ on a $f(x) = \varphi(e^x)$.

$$\varphi(e^x) = \frac{\ln\left((e^x)^2 - 1\right)}{e^x} = \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x} = f(x).$$

2. déduisons – en ;

a. la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x} = -\infty.$$

b. La limte $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

Posons $t = \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{t}$

quand $x \longrightarrow +\infty$; $t \longrightarrow 0^+$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to 0^+} t \ln\left(\frac{1}{t^2} - 1\right) = \lim_{x \to 0^+} t\left(\ln(1 - t^2) - 2\ln t\right) = \lim_{x \to 0^+} \left(t \ln(1 - t^2) - t\ln t\right) = 0$$

c. le sens de variation de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$

$\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = (\varphi(e^x))' = \varphi'(e^x) \times e^x$

$\forall x \in]0 ; +\infty[$, $e^x > 0$ donc $f'(x)$ a le signe que $\varphi'(e^x)$

Posons $e^x = t \Longrightarrow \in]0 ; +\infty[$

$\forall t \in]1 ; \sqrt{\alpha}]$, $\varphi'(t) \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in]0, \ln(\sqrt{\alpha})]$, $\varphi'(e^x) \geq 0$ donc f est croissante sur $]0, \ln(\sqrt{\alpha})]$

$\forall t \in [\sqrt{\alpha} ; +\infty[$ $\varphi'(t) \leq 0 \Leftrightarrow \forall x \in [\ln(\sqrt{\alpha}) ; +\infty[$, $\varphi'(e^x) \leq 0$ donc f est décroissante sur $[\ln(\sqrt{\alpha}) ; +\infty[$.

Tableau de variation de f :

x	0		$\ln(\sqrt{\alpha})$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(\ln(\sqrt{\alpha}))$	↘	0

3. Montrons que, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$; $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$.

$\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) \leq f(\ln\sqrt{\alpha})$

$$f(\ln\sqrt{\alpha}) = \frac{\ln\left(e^{2\ln\sqrt{\alpha}} - 1\right)}{e^{\ln\sqrt{\alpha}}} = \frac{\ln(e^{\ln\alpha} - 1)}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\ln(\alpha - 1)}{\sqrt{\alpha}}.$$

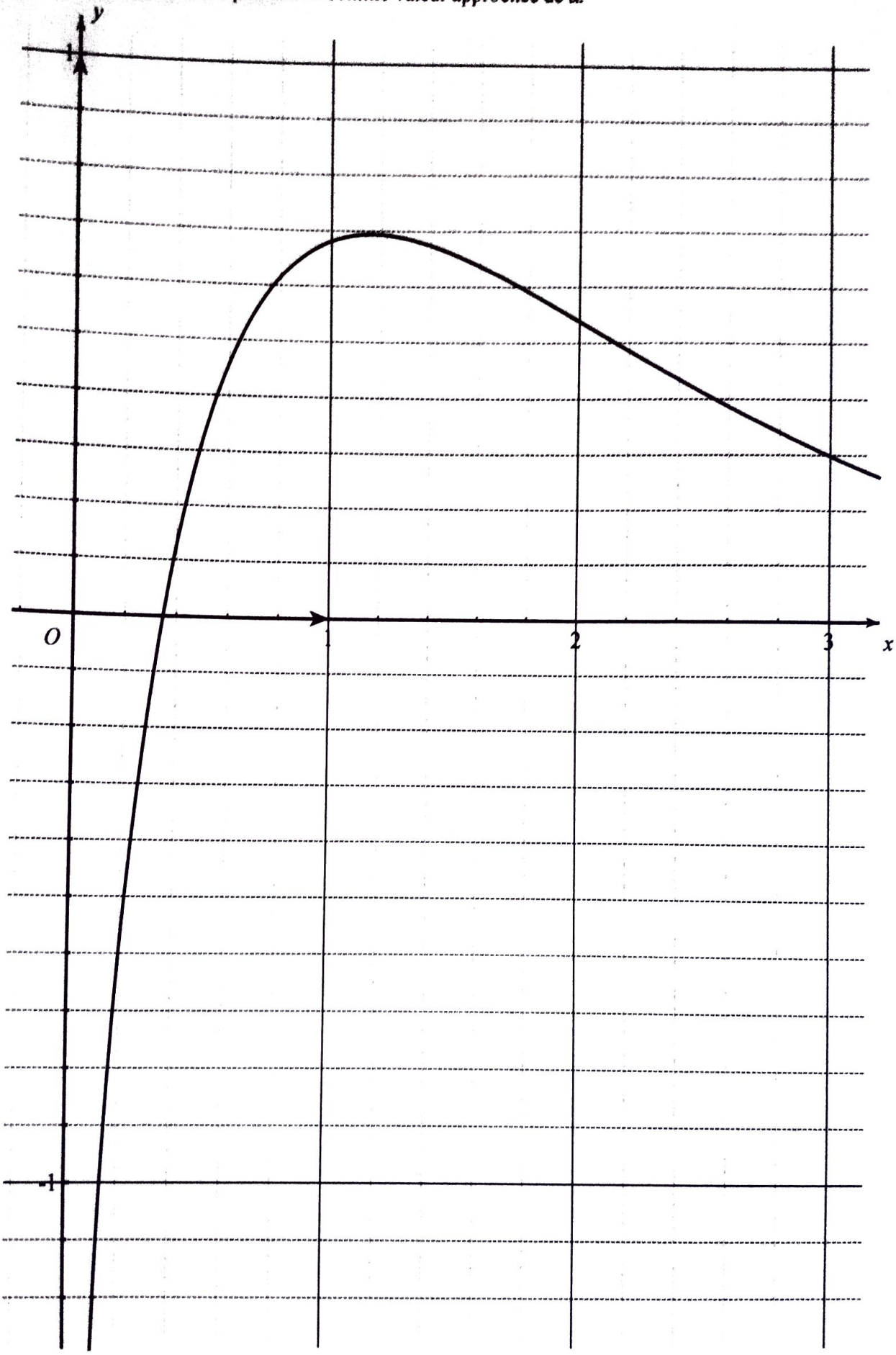
$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - (\alpha - 1)\ln(\alpha - 1) = 0 \Longrightarrow \ln(\alpha - 1) = \frac{2\alpha}{\alpha - 1}.$$

$$f(\ln\sqrt{\alpha}) = \frac{\frac{2\alpha}{\alpha - 1}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha}(\alpha - 1)} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}. \text{donc } f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$$

4. Réproduisons et complétons le tableau suivant en donnant des valeurs approchées à 10^{-2} près.

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3
$f(x)$	−1,36	0,33	0,68	0,66	0,54	0,30

5. Représentons graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unité 5 cm en abscisse, 10 cm en ordonnée. On prendra 10 commc valeur approchée de α.



Exercice 1 :

D'après l'énonce on a :

$\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est un repère orthonormal direct. M_n les points affixes $Z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n \left(1+i\sqrt{3}\right)$ où n est un entier naturel.

1. Exprimons Z_{n+1} en fonction de Z_n puis en fonction de Z_0 et n.

   $Z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1}\left(1+i\sqrt{3}\right) = \left(\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}i\right)^n\left(1+i\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}iZ_n$ d'où $Z_{n+1}=\frac{1}{2}i\,Z_n$.

   Z_n en fonction de Z_0 et n.

   $Z_{n+1} = \frac{1}{2}i\,Z_n$ signifie que Z_n est une suite géométrique de premier terme Z_0 et de raison $\frac{1}{2}i$.

   $Z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n Z_0$.

2. Donnons Z_0, Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

   Première méthode :

   - Pour Z_0 :

     Forme algébrique :

     $Z_0 = 1 + i\sqrt{3}$

     Forme trigonométrique :

     Module de Z_0 : $\left|Z_0\right| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = 2$.

     Soit $\theta_0 = Arg\left(Z_0\right)$: $\begin{cases}\cos\theta_0 = \frac{1}{2}\\ \sin\theta_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{3}$ d'où $Z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

   - Pour Z_1 :

     Forme algébrique : $Z_1 = \frac{1}{2}i\,Z_0 = \frac{1}{2}i\left(1+i\sqrt{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ d'où $Z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

     Forme trigonométrique :

     Module : $\left|Z_1\right| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$

     Soit $\theta_1 = Arg\left(Z_1\right)$: $\begin{cases}\cos\theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_1 = \frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ d'où $Z_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i.\sin\frac{5\pi}{6}$

   - Pour Z_2 :

     Forme algébrique : $Z_2 = \left(\frac{1}{2}i\right)^2\left(1+i\sqrt{3}\right) = -\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$ d'où $Z_2 = -\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$

     Forme trigonométrique :

Module : $|Z_2| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}$

Soit $\theta_2 = Arg(Z_2)$: $\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

d'où $Z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

- Pour Z_3 :

Forme algébrique : $Z_3 = \left(\frac{1}{2}i\right)^3\left(1+i\sqrt{3}\right) = -\frac{1}{8}i\left(1+i\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i$ d'où $Z_3 = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i$

Forme trigonométrique :

Module : $|Z_3| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \left(-\frac{1}{8}\right)^3} = \frac{1}{4}$

Soit $\theta_3 = Arg(Z_3)$: $\begin{cases} \cos\theta_3 = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_3 = \dfrac{-\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_3 = -\frac{\pi}{6}$ d'où $Z_3 = \frac{1}{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

- Pour Z_4 :

Forme algébrique : $Z_4 = \left(\frac{1}{2}i\right)^4\left(1+i\sqrt{3}\right) = \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{16}i$ d'où $Z_4 = \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{16}i$

Forme trigonométrique :

Module : $|Z_4| = \sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{16}\right)^2} = \frac{1}{8}$

Soit $\theta_4 = Arg(Z_4)$: $\begin{cases} \cos\theta_4 = \dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_4 = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{16}}{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_4 = \frac{\pi}{3}$ d'où $Z_4 = \frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Deuxième méthode :

Forme algébrique de Z_n :

$$Z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n Z_0 = \frac{1}{2^n} i^n \left(1 + i\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2^n} i^n + \frac{\sqrt{3}}{2^n} i^{n+1}.$$

Forme trigonométrique de Z_n :

$$Z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n Z_0 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n ; \frac{n\pi}{2}\right] \times \left[2; \frac{\pi}{3}\right] = \left[2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n ; \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2^{n-1}} ; \frac{(3n+2)\pi}{6}\right]$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}\left[\cos\left(\frac{3n+2}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3n+2}{6}\pi\right)\right]$$

- Pour $n = 0$:

  La forme algébrique de $Z_0 = 1 + i\sqrt{3}$

  Sa forme trigonométrique est : $Z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

- Pour $n = 1$:

  La forme algébrique de $Z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

  Sa forme trigonométrique est : $Z_1 = \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

- Pour $n = 2$:

  La forme algébrique de $Z_2 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$

  Sa forme trigonométrique est : $Z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

- Pour $n = 3$:

  La forme algébrique de $Z_3 = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i$

  Sa forme trigonométrique est : $Z_3 = \frac{1}{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

- Pour $n = 4$:

  La forme algébrique de $Z_4 = \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{16}i$

  Sa forme trigonométrique est : $Z_4 = \frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Troisième méthode

Formes algébriques :

$Z_0 = 1 + i\sqrt{3}$

$Z_1 = \frac{1}{2}i\left(1 + i\sqrt{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$Z_2 = \frac{1}{2}i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$

$Z_3 = \frac{1}{2}i\left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i$

$$Z_4 = \frac{1}{2}i\left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i\right) = \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{16}i$$

Formes trigonométriques :

$$Z_0 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

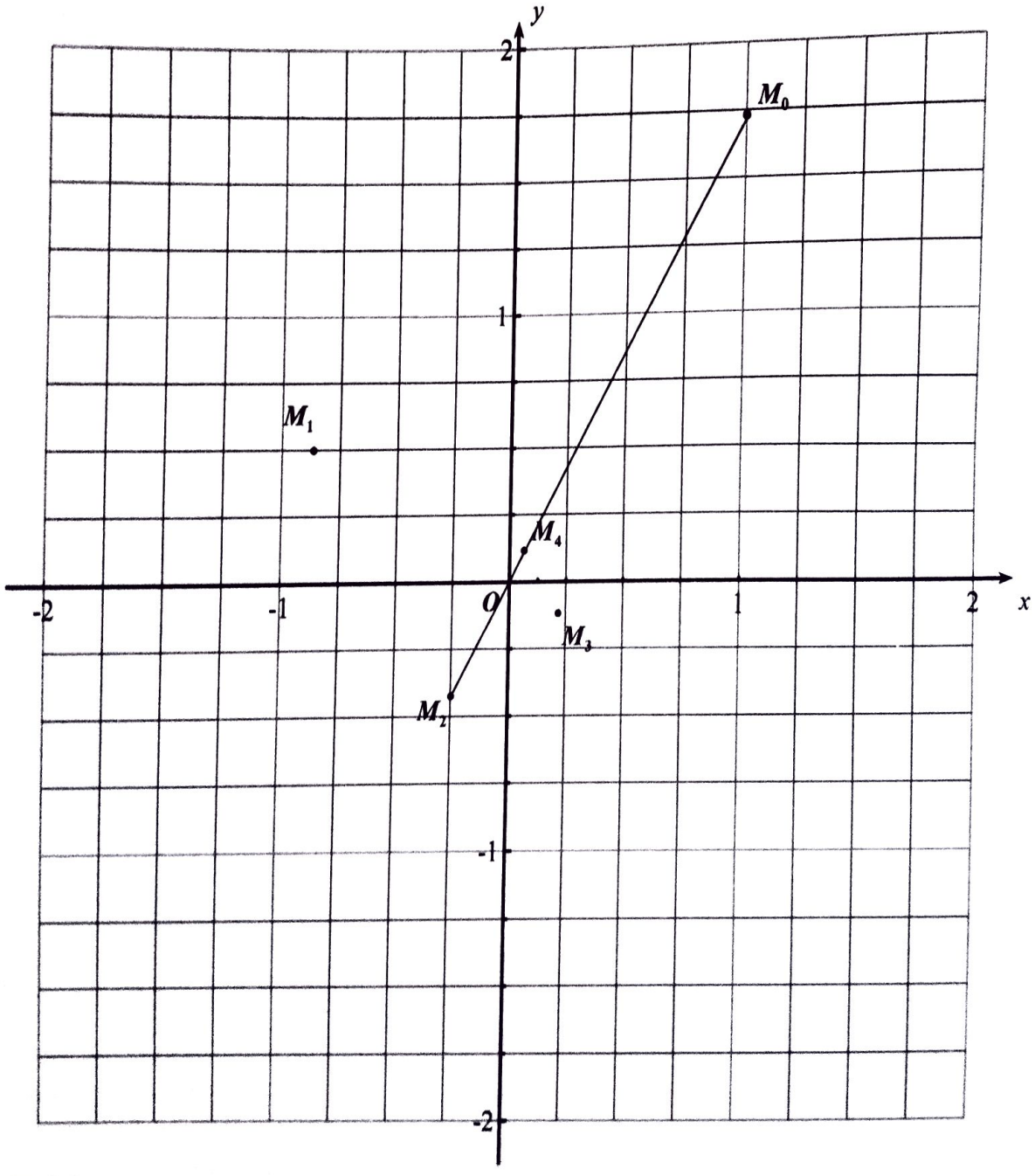
$$Z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$Z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

$$Z_3 = \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)$$

$$Z_4 = \frac{1}{8}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{8}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right)$$

3. Plaçons les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4



4. Déterminons la distance OM_n en fonction de n :

$$OM_n = \left|\left(\frac{1}{2}i\right)^n\left(1+i\sqrt{3}\right)\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2 = \frac{1}{2^{n-1}} \qquad (0,5)$$

5. *a.* Montrons que $M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$M_nM_{n+1} = |Z_{n+1} - Z_n| = \left|\frac{1}{2}iZ_n - Z_n\right| = |Z_n|.\ \left|-1+\frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2^{n-1}}\left|\frac{-2+i}{2}\right| = \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{\sqrt{4+1}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2^{n-1}\times 2} = \frac{\sqrt{5}}{2^n} \text{ (CQFD).}$$

b. On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1}$.

- L_n en fonction de n.

$$L_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1} = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots M_nM_{n+1}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2^0} + \frac{\sqrt{5}}{2^1} + \frac{\sqrt{5}}{2^2} + \cdots + \frac{\sqrt{5}}{2^n}$$

$$= \sqrt{5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \sqrt{5} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$L_n = 2\sqrt{5}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

- La limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} L_n = \lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{5}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 2\sqrt{5}.$$

6. Déterminons une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{OM_n}\right)$ en fonction de n.

$$Mes\left(\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{OM_n}\right) = arg\left(\frac{Z_{M_n}-Z_O}{Z_{M_0}-Z_O}\right) = arg\left(\frac{Z_n}{Z_0}\right) = arg\left(\left(\frac{1}{2}i\right)^n\right) = \frac{n\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

$$Mes\left(\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{OM_n}\right) = \frac{n\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

7. Les valeurs de n pour que O, M_0 et M_n soient alignés :

Première méthode :

O, M_0 et M_n sont alignés signifie que : $\left(\frac{Z_{M_n}-Z_O}{Z_{M_0}-Z_O}\right) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z},\ arg\left(\frac{Z_{M_n}-Z_O}{Z_{M_0}-Z_O}\right) = k'\pi$

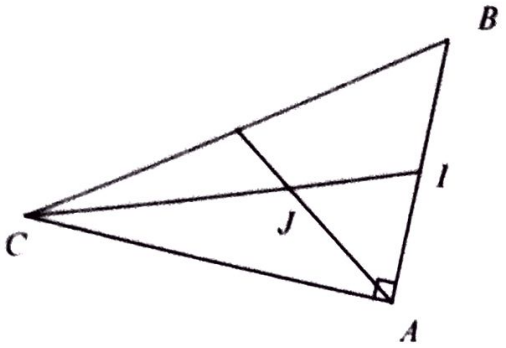
$arg\left(\frac{Z_{M_n}-Z_O}{Z_{M_0}-Z_O}\right) = k'\pi \Leftrightarrow \frac{n\pi}{2} + 2k\pi = k'\pi \Rightarrow n = 2(k'-2k) = 2p$ avec $p = k'-2k$ ou encore si n est pair.

Deuxière méthode :

O, M_n et $M_{n'}$ sont alignés $\Leftrightarrow \frac{n\pi}{2} \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \frac{n\pi}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 2k$

Exercice 2 :

1. Dans le plan affine, on considère le triangle ABC rectangle en A, I le milieu du segment $[AB]$ et J le centre de gravité de ABC.
Pour $m \in \mathbb{R} - \{-1/3\}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés :
$S_m = \{(A,1);(B,m);(C,2m)\}$.
Pour tout point M plan on note $\vec{V_M} = 3\vec{MA} - \vec{MB} - 2\vec{MC}$.



1. Montrons que G_1 est le milieu du segment $[CI]$.
Première méthode :
$G_m = bar\{(A,1);(B,m);(C,2m)\} \Leftrightarrow \vec{G_mA} + m\vec{G_mB} + 2m\vec{G_mC} = \vec{0}$.
Pour $m = 1$; $\vec{G_1A} + \vec{G_1B} + 2\vec{G_1C} = \vec{0}$
I milieu du segment $[AB] \Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$
$\vec{G_1A} + \vec{G_1B} + 2\vec{G_1C} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{G_1I} + \vec{IA} + \vec{G_1I} + \vec{IB} + 2\vec{G_1C} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 2\vec{G_1I} + 2\vec{G_1C} + \underbrace{\vec{IA} + \vec{IB}}_{\vec{0}} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 2\vec{G_1I} + 2\vec{G_1C} = \vec{0} \Rightarrow \vec{G_1I} + \vec{G_1C} = \vec{0}$ d'où G_1 est le milieu de $[CI]$.
Deuxième méthode :
$G_1 = bar\{(A,1);(B,1);(C,2)\}$ or $I = bar\{(A,1);(B,1)\}$ donc $G_1 = bar\{(I,2);(C,2)\}$ donc G_1 est isobarycentre des points I et C donc G_1 est le milieu de $[AB]$
2. Montrons que les points G_1, J et C sont alignés :
Première méthode :
J est le centre de gravité du triangle $ABC \Leftrightarrow \vec{JA} + \vec{JB} + \vec{JC} = \vec{0}$
$\vec{JA} + \vec{JB} + \vec{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\vec{JA} = -\vec{AB} - \vec{AC} \Rightarrow \vec{AJ} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$ d'où $J\begin{pmatrix}1/3\\1/3\end{pmatrix}$ dans le repère $(A, \vec{AB}; \vec{AC})$
$\vec{G_1A} + \vec{G_1B} + 2\vec{G_1C} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AG_1} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ donc $G_1\begin{pmatrix}1/4\\1/2\end{pmatrix}$ dans le repère $(A, \vec{AB}; \vec{AC})$
$C\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ dans le repère $(A, \vec{AB}; \vec{AC})$

$$det\left(\overrightarrow{G_1J};\overrightarrow{G_1C}\right)=\begin{vmatrix}\frac{1}{3}-\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{3}-\frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{12} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{24}-\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{24}-\frac{1}{24}=0$$

d'où G_1, J et C sont alignés.

Deuxiéme méthode :

G_1, J et C sont alignés , s'il existe un nombre réel k tel que : $\overrightarrow{G_1J}=k\overrightarrow{JC}$; $\overrightarrow{G_1J}=k\overrightarrow{G_1C}$ *etc.*

J est le centre de gravité du triangle $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

G_1 milieu du segment $[CI] \Leftrightarrow \overrightarrow{CG_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CI} \Leftrightarrow \overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{CG_1}$.

I milieu du segment $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

$\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JI}-\overrightarrow{CI}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JC}+3\overrightarrow{CI}-\overrightarrow{CI}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JC}+2\overrightarrow{CI}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JC}+2\left(2\overrightarrow{CG_1}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{CG_1}=3\overrightarrow{CJ} \Rightarrow \overrightarrow{CG_1}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CJ}.$ par suite G_1, J et C sont alignés.

Troisième méthode :

J étant le centre de gravité de ABC alors J appartient à la médiane $[CJ]$ de plus $G_1 \in [CI]$ donc les points G_1, J et C sont alignés.

3. Montrons que pour tout point M, $\overrightarrow{V_M}=-\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}.\right)$

$\overrightarrow{V_M}=3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}.$

$=3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{AC}$

$=-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}.$

4. Montrons que pour tout réel m distinct de $-\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$.

Première méthode :

Coordonnés des points G_m dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$:

$\overrightarrow{G_mA}+m\overrightarrow{G_mB}+2m\overrightarrow{G_mC}=\vec{0}$

$(1+3m)\overrightarrow{AG_m}=m\overrightarrow{AB}+2m\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AG_m}=\frac{m}{1+3m}\overrightarrow{AB}+\frac{2m}{1+3m}\overrightarrow{AC}$ d'où $G_m\left(\frac{m}{1+3m};\frac{2m}{1+3m}\right)$

Pour $m=-1$, $G_{-1}\left(\frac{1}{2};1\right)$

$$dét\left(\overrightarrow{AG_m};\overrightarrow{AG_{-1}}\right)=\begin{vmatrix}\frac{m}{1+3m} & \frac{1}{2}\\ \frac{2m}{1+3m} & 1\end{vmatrix}=\frac{m}{1+3m}\times 1-\frac{2m}{1+3m}\times\frac{1}{2}=\frac{m}{1+3m}-\frac{m}{1+3m}=0$$

par suite $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$.

Deuxième méthode :

$G_m = bar\{(A,1);(B,m);(C,2m)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_mA} + m\overrightarrow{G_mB} + 2m\overrightarrow{G_mC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG_m} = \frac{m}{1+3m}\overrightarrow{AB} + \frac{2m}{1+3m}\overrightarrow{AC} = \frac{m}{1+3m}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)$$

Pour $m = -1$ on a : $\overrightarrow{AG_{-1}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AG_{-1}}$

d'où $\overrightarrow{AG_m} = \frac{2m}{1+3m}\overrightarrow{AG_{-1}}$ donc $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$.

5. Montrons le triangle IBG_{-12} est un triangle rectangle

Première méthode :

Calculons les distances IB, IG_{-12}, BG_{-12} dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$:

$B(1;0)$ et I le milieu du segment $[AB] \Leftrightarrow I\left(\frac{1}{2};0\right)$; $G_{-12}(1;2)$:

$$IB = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$IG_{-12} = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 + (2)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$BG_{-12} = \sqrt{2^2} = 2$$

D'après le théorème de Pythagore on a : $IB^2 + BG_{-12}^2 = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4} = IG_{-12}^2$ donc IBG_{-12} est un triangle rectangle en B.

Deuxièmé méthode :

$$G_{\frac{-1}{2}} = bar\left\{(A,1);\left(B,-\frac{1}{2}\right);(C,-1)\right\} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_{-12}A} - \frac{1}{2}\overrightarrow{G_{-12}B} - \overrightarrow{G_{-12}C} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{G_{-12}A} - \frac{1}{2}\overrightarrow{G_{-12}B} + \overrightarrow{CG_{-12}} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{G_{-12}B} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{G_{-12}B}$$

Les droites (AC) et $\left(BG_{-\frac{1}{2}}\right)$ sont paralléles.

Puisque les droites (AB) *et* (AC) sont perpendiculaires alors les droites (AB) et (AG_{-12}) sont perpendiculaires donc le triangle IBG_{-12} est un triangle rectangle en B.

II. le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé, on considère l'application affine f définie par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x+4y+4) \\ y' = \frac{1}{5}(4x+3y-2) \end{cases}$$

1. Démontrons que f est une isométrie.

Pemière méthode :

Soit $M(x;y)$, $M'(x';y')$deux points ce plan tel que $f(M) = M'$; $f(O) = O' \Rightarrow O'\left(\frac{4}{5};-\frac{2}{5}\right)$.

$$OM = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$O'M' = \sqrt{\left(x' - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(y' + \frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-3x}{5} + \frac{4}{5}y\right)^2 + \left(\frac{4x}{5} + \frac{3}{5}y\right)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow O'M' = OM$$

d'où f est une isométrie.

Deuxième méthode :

f étant une application affine, la matrice de l'endomorphisme associée à f est M_φ définie par :

$M_\varphi = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$. M_φ est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Vérifions si $détM_\varphi = -1$.

$détM_\varphi = \begin{vmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = -\frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{25}{25} = -1$ d'où f est une isométrie.

2. Trouvons l'ensemble des points invariants par f.

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}(-3x + 4y + 4) \\ y = \frac{1}{5}(4x + 3y - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 4y - 4 = 0 \\ -4x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ -2x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - y - 1 = 0$$

l'ensemble des points invariants est la droite d'equation $2x - y - 1 = 0$

3. Caractérisons géométriquement l'application f.

Première méthode :

f étant une isométrie admetant une droite comme ensemble des points invariants alors f est une symétrie orthogonale d'axe (D).

Deuxième méthode :

$f \circ f(M) = M'' \Leftrightarrow f(M') = M''$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{1}{5}(-3x' + 4y' + 4) \\ y'' = \frac{1}{5}(4x' + 3y' - 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{1}{5}\left(-\frac{3}{5}(-3x + 4y + 4) + \frac{4}{5}(4x + 3y - 2) + 4\right) \\ y'' = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}(-3x + 4y + 4) + \frac{3}{5}(4x + 3y - 2) - 2\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = x \\ y'' = y \end{cases} \Rightarrow f \circ f = Id \Rightarrow f \text{ est une symétrie orthogonale ou une involution.}$$

Problème :

A. *Première Correction* :

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$.

(C) sa courbe représentative.

1. a. Calculons la fonction dérivée de f.

Ensemble de définition $D_f = [0; +\infty[$.

$f'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x} - 2e^{-2x} - 1 = -[1 + (2x + 1)e^{-2x}]$

b. Dressons le tableau de variation de f' sur $[0; +\infty[$

- La limite au borne de $D_f = [0; +\infty[$

$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = -1$

- Calculons $f'(0)$: $f'(0) = -(1+(2\times 0+1)e^{0}) = -2$
- Dérivée $f''(x)$: $f''(x) = -(2-4x-2)e^{-2x} = 4xe^{-2x}$
- Signe de $f''(x)$:
  $\forall x \in [0; +\infty[$, $f''(x) \geq 0$ d'où f' est croissante.
  Tableau de variation de f'.

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	
$f'(x)$	-2 ↗	-1

Signe de $f'(x)$.

D'après le tableau de variation de f', pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f'(x) < 0$.

c. Dressons le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$

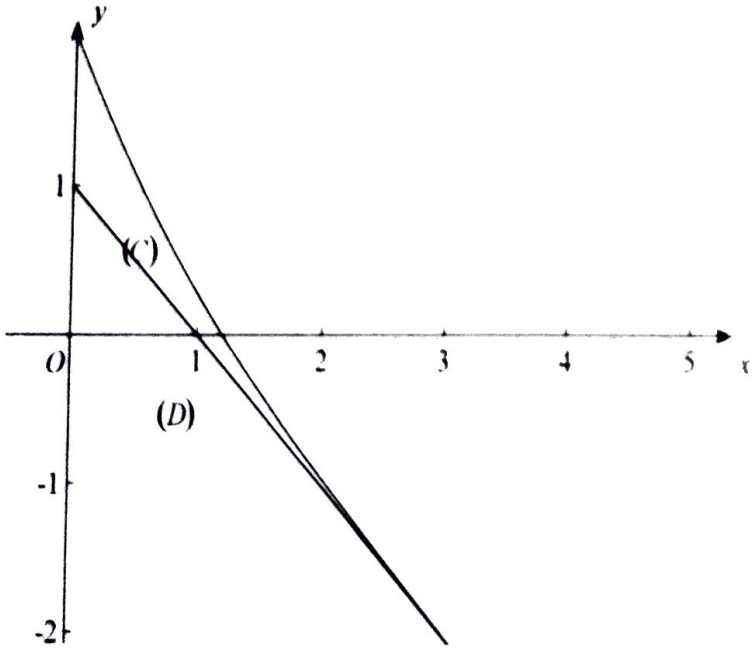
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	−	
$f(x)$	2 ↘	$-\infty$

d. Montons que (C) admet une asymptote (D) que l'on déterminera

$f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x \Leftrightarrow f(x) - (1-x) = xe^{-2x} + e^{-2x}$ on a

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (1-x)) = \lim_{x \to +\infty} (xe^{-2x} + e^{-2x}) = 0$ donc la droite d'équation (D) : $y = 1 - x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$

e. Construisons (C) et (D)



2. a. Etablissons que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0; +\infty[$ une solution et une seule, notée α.

D'après le tableau de variation de f, pour tout $x \in [0; +\infty[$, f est continue et strictement décroissante donc f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $]-\infty; 2]$. Or $0 \in]-\infty; 2]$ donc il

existe une unique solution $\alpha \in [0; +\infty[$ telle que $f(\alpha) = 0$.

b. Justifions l'encadrement $1 \leq \alpha \leq 2$:

$f(1) = 2e^{-2} > 0$ et $f(2) = \dfrac{3-e^4}{e^4} < 0$

$f(1) \times f(2) < 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires $1 \leq \alpha \leq 2$.

B. Soit la fonction g définie sur l'intervalle $J = [1; +\infty[$ par $g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1$.

1. • Etudions les variations de g sur J.

Dérivée g' de g : $g'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x} - 2e^{-2x} = -(2x+1)e^{-2x}$.

Signe de $g'(x)$.

$\forall x \in J$, $-(2x+1)e^{-2x} < 0$ donc g est strictement décroissante.

La limite de g en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (xe^{-2x} + e^{-2x} + 1) = 1$

Calculons $g(1)$:

$g(1) = 1 + 2e^{-2}$

Tableau de variation de g :

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$1+2e^{-2}$ ↘	1

D'aprés le tableau de variation de g pour tout $x \in J$, $g(x) \in [1; 1+2e^{-2}[\subset J$ d'où $g(x) \in J$.

2. Montrons que pour tout $x \in J$ on a : $|g'(x)| \leq \dfrac{3}{e^2}$.

Première méthode :

Déterminons le sens de variation de g'.

Dérivée seconde de g et son signe :

$g''(x) = 4xe^{-2x} > 0$ donc pour tout $x \in J$ donc g' est strictement croissante

$x \in J \Leftrightarrow x \geq 1 \Rightarrow g'(x) \geq g'(1)$

$g'(x) \geq -3e^{-2}$

$g'(x) < 0$ donc $|g'(x)| \leq |-3e^{-2}| \Leftrightarrow |g'(x)| \leq \dfrac{3}{e^2}$.

Deuxième méthode :

Dressons le tableau de variation de g' :

Dérivée seconde de g et son signe :

$g''(x) = 4xe^{-2x} > 0$ donc pour tout $x \in J$

La limite de g' : $\lim\limits_{x \to +\infty} g'(x) = 0$ et $g'(1) = -3e^{-2}$

Tableau de variation de g' :

x	1	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	
$g'(x)$	$-3e^{-2}$ ↗	0

d'après ce tableau de variation, pour tout $x \in J$ on a :

$-\frac{3}{e^2} \le g'(x) \le 0 \le \frac{3}{e^2} \Rightarrow -\frac{3}{e^2} \le g'(x) \le \frac{3}{e^2}$ donc $|g'(x)| \le \frac{3}{e^2}$.

Déduisons - en que $\forall x \in J$ on a : $|g(x)-\alpha| \le \frac{3}{e^2}|x-\alpha|$.

On sait que $\alpha \in [1;2] \subset J$ et $x \in J \Rightarrow x \in [\alpha;x]$ et de plus pour tout $x \in J$, $|g'(x)| \le \frac{3}{e^2}$

En appliquant le théorème des inégalités des accroissement finis à la fonction g sur l'interval

$[\alpha;x]$ on a : $|g(x)-g(\alpha)| \le \frac{3}{e^2}|x-\alpha|$

D'autre part $f(x) = g(x) - x$ et $f(\alpha) = 0 \Rightarrow g(\alpha) = \alpha$ par suite $|g(x)-\alpha| \le \frac{3}{e^2}|x-\alpha|$.

3. Soit $(U_n) \in J$ définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = g(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

   a. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $|U_{n+1}-\alpha| \le \frac{3}{e^2}|U_n-\alpha|$.

   $U_n \in J$ et $|g(x)-\alpha| \le \frac{3}{e^2}|x-\alpha|$ pour tout $x \in J$ donc pour $x = U_n$ on obtient :

   $|g(U_n)-\alpha| \le \frac{3}{e^2}|U_n-\alpha| \Rightarrow |U_{n+1}-\alpha| \le \frac{3}{e^2}|U_n-\alpha|$

   b. Déduisons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $|U_n-\alpha| \le \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$

   D'après la question précédante, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|U_{k+1}-\alpha| \le \frac{3}{e^2}|U_k-\alpha|$

   Varions la valeur de k :

   $$|U_{k+1}-\alpha| \le \frac{3}{e^2}|U_k-\alpha|$$

   pour $k=0$ $\quad |U_1-\alpha| \le \frac{3}{e^2}|U_0-\alpha|$

   $k=1$ $\quad |U_2-\alpha| \le \frac{3}{e^2}|U_1-\alpha|$

   $k=2$ $\quad |U_3-\alpha| \le \frac{3}{e^2}|U_2-\alpha|$

   $\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

   $k=n-2$ $\quad |U_{n-1}-\alpha| \le \frac{3}{e^2}|U_{n-2}-\alpha|$

   $k=n-1$ $\quad |U_n-\alpha| \le \frac{3}{e^2}|U_{n-1}-\alpha|$ (*En multipliant membre à membre et en simplifiant on a:*)

   $$|U_n-\alpha| \le \left(\frac{3}{e^2}\right)^n |U_0-\alpha|$$

   On $1 \le \alpha \le 2 \Rightarrow -2 \le -\alpha \le -1 \Rightarrow -1 \le U_0 - \alpha \le 0 \Rightarrow |U_0-\alpha| \le 1$ donc :

   $|U_n-\alpha| \le \left(\frac{3}{e^2}\right)^n |U_0-\alpha| \le \left(\frac{3}{e^2}\right)^n \Rightarrow |U_n-\alpha| \le \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$

   c. Déterminons la limite de U_n.

   $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{e^2}\right)^n = 0$ *donc* $\lim_{x \to +\infty} U_n = \alpha$.

d. Déterminons un entier p pour lequel on est sûr d'avoir $|U_p - \alpha| \leq 10^{-3}$:

Il suffit que $\left(\frac{3}{e^2}\right)^p \leq 10^{-3} \Rightarrow p \geq \frac{-3\ln 10}{\ln\frac{3}{e^2}} \Rightarrow p \geq 7{,}66$ donc $p = 8$

Calculons U_8 à 10^{-3} prés : $U_8 = 1.200$.

Deuxiéme correction :

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 + x$.
(C) sa courbe représentative.

1. a. Calculons la fonction dérivée de f.

Ensemble de définition de f : $D_f = \mathbb{R} \cap [0\,;+\infty[= [0\,;+\infty[$

$f'(x) = 1 - (2x+1)e^{-2x}$.

b. • Dressons le tableau de variation de f' sur $[0\,;+\infty[$

La limite en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - (2x+1)e^{-2x} = 1$.

Calcul de $f'(0)$: $f'(0) = 1 - (2\times 0+1)e^0 = 0$.

Dérivée f''

$f''(x) = 4xe^{-2x}$

Signe de $f''(x)$:

$\forall x \in [0\,;+\infty[,\ 4xe^{-2x} \geq 0$ donc $f''(x) \geq 0$.

Tableau de variation de f'.

x	0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$	0	↗	1

• Signe de $f'(x)$

D'après le tableau de variation de f', pour tout $x \in [0\,;+\infty[$ $f'(x) \geq 0$.

c. Dressons le tableau de variation de f.

• La limite de f en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

• Calculons $f(0)$: $f(0) = 2$

• Tableau de variation de f

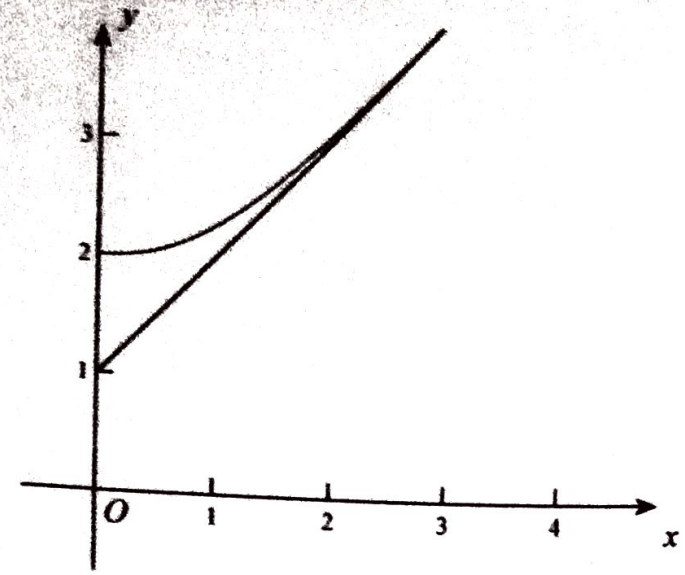
x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	2	↗	$+\infty$

d. Montons que (C) admet une asymptote (D) que l'on déterminera.

$f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 + x \Leftrightarrow f(x) - (1+x) = xe^{-2x} + e^{-2x}$ on a :

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (1+x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} (xe^{-2x} + e^{-2x}) = 0$ donc la droite d'équation (D) : $y = 1 + x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

c. Construisons (C) et (D).



2. a. Impossible d'établir que $f(x)=0$

Troisième correction :

On a : $f(x)=xe^{-2x}+e^{-2x}-1+x$

1. a. Calculons la fonction dérivée de f.

Ensemble de définition de f : $D_f=\mathbb{R}\cap[0;+\infty[=[0;+\infty[$

$f'(x)=1-(2x+1)e^{-2x}$.

b. • Dressons le tableau de variation de f' sur $[0;+\infty[$

La limite en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1-(2x+1)e^{-2x}=1$.

Calcul de $f'(0)$: $f'(0)=1-(2\times0+1)e^{0}=0$.

Dérivée f''

$f''(x)=4xe^{-2x}$

Signe de $f''(x)$:

$\forall x\in[0;+\infty[$, $4xe^{-2x}\geq 0$ donc $f''(x)\geq 0$. alors f est croissante.

Tableau de variation de f'.

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	
$f'(x)$	0	1

• Signe de $f'(x)$

D'après le tableau de variation de f', pour tout $x\in[0;+\infty[$ $f'(x)\geq 0$.

c. Dressons le tableau de variation de f.

• La limite de f en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

• Calculons $f(0)$: $f(0)=0$

• Tableau de variation de f :

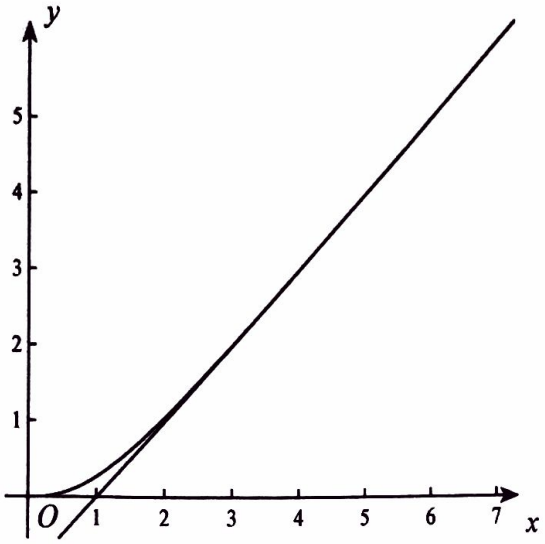
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$+\infty$

d. Montons que (C) admet une asymptote (D) que l'on déterminera.

$f(x)=xe^{-2x}+e^{-2x}-1+x \Leftrightarrow f(x)-(-1+x)=xe^{-2x}+e^{-2x}$ on a :

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(-1+x))=\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^{-2x}+e^{-2x})=0$ donc la droite d'équation (D) : $y=x-1$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

e. Construisons (C) et (D).



2. a. L'équation $f(x)=0$ admet 0 comme unique solution sur $[0;+\infty[$.

b. $0 \notin [1;2]$.

Ministère de l'Education Nationale — **République du Mali**

Un Peuple – Un But – Une Foi

EXAMEN : *Baccalauréat malien* — [redacted]C 201[redacted]

SÉRIE : *TSE - STI* — **SESSION : Juin 2016**

CORRECTION DE : *Mathématiques* — **DURÉE :** *4 heures* — **COEF : 4**

Exercice 1 :

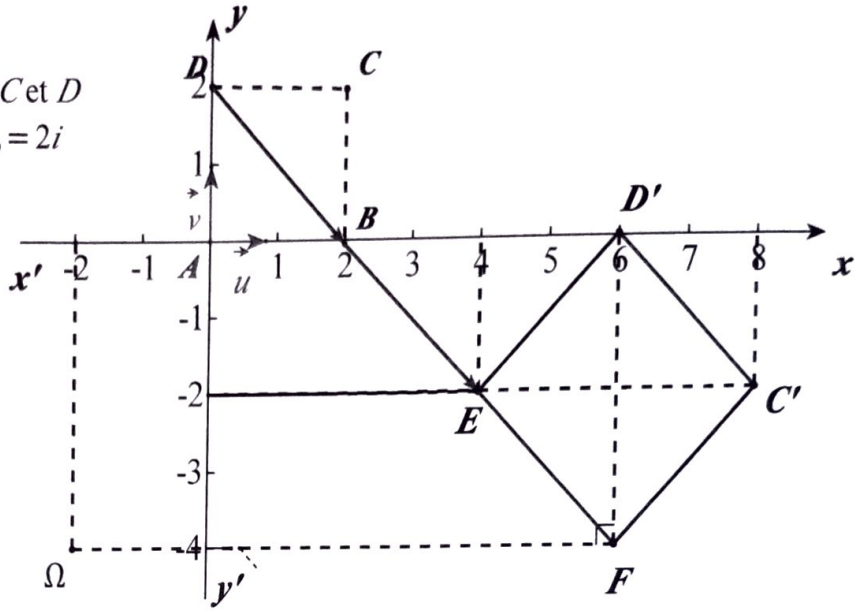
Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$, unité graphique 1 cm.

On considère les points B, C et D.

$\overrightarrow{AB}=2\vec{u}$; $\overrightarrow{AD}=2\vec{v}$

1. Plaçons les points A, B, C et D

$Z_B=2$, $Z_C=2+2i$, $Z_D=2i$



2. Déterminons l'affixe Z_E de E puis construisons E.

T translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$

Première méthode :

$T(B)=E\Leftrightarrow\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{DB}\Leftrightarrow Z_E-Z_B=Z_B-Z_D\Leftrightarrow Z_E=2Z_B-Z_D\Rightarrow Z_E=4-2i$

Deuxième méthode :

On sait que T: $Z+b$

$b=Z_{\overrightarrow{DB}}=Z_B-Z_D=2-2i$

$T(B)=E\Leftrightarrow Z_E=Z_B+2-2i\Leftrightarrow Z_E=2+2-2i\Leftrightarrow Z_E=4-2i.$

3. Déterminons les nombres réels a et b tel que $F=bar\{(A,a);(B,b);(C,1)\}$ avec $Z_F=6-4i$

$F=bar\{(A,a);(B,b);(C,1)\}\Leftrightarrow a\overrightarrow{FA}+b\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\vec{0}$ et $a+b+1\neq 0$

Première méthode:

$$Z_F=\frac{aZ_A+bZ_B+Z_C}{a+b+1}\Leftrightarrow 6-4i=\frac{2b+2+2i}{a+b+1}\Leftrightarrow 6-4i=\frac{2b+2}{a+b+1}+\frac{2}{a+b+1}i$$

Par identification :

$$\begin{cases}\dfrac{2b+2}{a+b+1}=6\ (1)\\ \dfrac{2}{a+b+1}=-2\ (2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a+2b=-2\\ -2a-2b=3\\ a=1\end{cases}$$

Dans (1) on a : $3+2b=-3 \Rightarrow b=-\frac{5}{2}$

Deuxième méthode : (*coordonnées du barycentre*)

$$\begin{cases} x_F=\dfrac{ax_A+bx_B+x_C}{a+b+1} \\ y_F=\dfrac{ay_A+by_B+y_C}{a+b+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6=\dfrac{2b+2}{a+b+1} \\ -4=\dfrac{2}{a+b+1} \end{cases} \Rightarrow a=1 \text{ et } b=-\frac{5}{2}$$

4. S la similitude directe telle que : $S(A)=E$ et $S(B)=F$

   a. Exprimons Z' en fonction de Z.

   $S : P \to P$

   $M(Z) \mapsto M(Z')$

   $S(A)=E \Leftrightarrow Z_E=\alpha Z_A+\beta$

   $S(B)=F \Leftrightarrow Z_F=\alpha Z_B+\beta$

   Par suite on a :

   $$\begin{cases} \alpha\times 0+\beta=4-2i \\ 2\alpha+\beta=6-4i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=4-2i \\ \alpha=\dfrac{6-4i-\beta}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=4-2i \\ \alpha=\dfrac{6-4i-4+2i}{2}=1-i \end{cases}$$

   d'où $Z'=(1-i)Z+4-2i$

   b. déterminons le centre Ω, l'angle θ et le apport k de S.

   ✓ $\alpha=1-i=\left[\sqrt{2}\,;-\frac{\pi}{4}\right]$

   $\theta=-\frac{\pi}{4}(2\pi)$ et $k=\sqrt{2}$

   ✓ Le centre Ω

   première méthode :

   $Z_\Omega=\dfrac{\beta}{1-\alpha}=\dfrac{4-2i}{1-1+i}=-2-4i$

   Deuxième méthode : (Ω *point invariant*) :

   $Z'=Z \Leftrightarrow Z=(1-i)Z+4-2i \Leftrightarrow iZ=4-2i \Rightarrow Z=-2-4i$

   c. Déterminons les images de C et D par S.

   Posons $C'=S(C)$ et $D'=S(D)$

   $C'=S(C) \Leftrightarrow Z_{C'}=(1-i)Z_C+4-2i=(1-i)(2+2i)+4-2i=8-2i$

   $D'=S(D) \Leftrightarrow Z_{D'}=(1-i)Z_D+4-2i=(1-i)(2i)+4-2i=6$

   d. Calculons l'aire de l'image du rectangle $ABCD$ par S.

   Soit $\mathcal{A}$ l'aire du rectangle $ABCD$ et $\mathcal{A}'$ l'aire de son image par S

   $\mathcal{A}=AB\times AD=4\text{ cm}^2$

   $\mathcal{A}'=S(\mathcal{A})=k^2\mathcal{A}=2\times 4\text{ cm}^2=8\text{ cm}^2$.

Exercice 2 :

I. $L=525\ m$; $l=285\ m$.

1. Calculons la distance comprise entre deux arbres:

   La distance comprise entre deux arbres est le $PGCD(525\,;285)=15$.

   L'espace entre deux arbres est $15m$.

2. Calculons le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ.

Le périmètre du champ :

$P=2(L+l)=2(525+285)=1620$; $P=1620$

Le nombre d'arbres est : $n=\dfrac{P}{PGCD(525;285)}=\dfrac{1620}{15}=108$

Nous avons 108 arbres.

II. On considère l'équation $(E):11x-26y=1$ où $x,y\in\mathbb{Z}$.

1. Vérifions que le couple $(-7;-3)$ est une solution de (E) :

$11(-7)-26(-3)=-77+78=1$ donc le couple $(-7;-3)$ est une solution de (E).

2. Résolvons l'équation (E) :

Première méthode : *(Gauss)*

D'après 1°) on a:

$$\begin{cases} 11x-29y=1 \\ \underline{11(-7)-26(-3)=1} \end{cases}$$

$11(x+7)-26(y+3)=0\Leftrightarrow 11(x+7)=26(y+3)$

$11\wedge 26=1$ et $11/26(y+3)$ d'après Gauss il existe un entier relatif k tel que :

$y+3=11k\Rightarrow y=11k-3$

$11\wedge 26=1$ et $26/11(x+7)$ d'après Gauss il existe un entier relatif k tel que :

$x+7=26k\Rightarrow x=26k-7$.

$S=\{(26k-7;11k-3)\ avec\ k\in\mathbb{Z}\}$

Deuxième méthode : (*congruence*)

$11x-26y=1\Leftrightarrow 26y=1-11k\Leftrightarrow 26y\equiv -1[11]\Leftrightarrow 4y\equiv -1[11]\Leftrightarrow y\equiv -3[11]$ ou $y\equiv 8[11]$ donc $y=11k-3$ ou $y=11k+8$

Pour $y=11k-3$ on a :$11x-26(11k-3)=1\Leftrightarrow 11x=26\times 11k-3\times 26+1$

$\Leftrightarrow x=26k-7$

Pour $y=11k+8$ on a : $11x=26\times 11k+209\Leftrightarrow x=26k+19$

$S=\{(26k-7;11k-3)\ avec\ k\in\mathbb{Z}\}$ ou $S=\{(26k+16;11k+8)\ avec\ k\in\mathbb{Z}\}$

3. Déduisons - en le couple $(p;q)$ solution de (E) tel que $0\le p\le 25$

D'après 2°) on a : $p=26k-7$ et $q=11k-3$

$0\le p\le 25\Leftrightarrow 0\le 26k-7\le 25\Leftrightarrow 7\le 26k\le 32\Leftrightarrow \dfrac{7}{26}\le k\le\dfrac{32}{26}\Leftrightarrow 0{,}26\le k\le 1{,}25$ donc

$k=1$ et les valeurs de p et q sont : $q=26-7=19$ et $q=8$ d'où le couple $(p;q)=(19;8)$

Problème :

A. On note $Q(t)$ la quantite de substance présente dans le sang à l'instant t.

$t=0$; $Q(0)=2{,}5$; $Q'(t)=-\beta\times Q(t)$

1. Montrons qu'ona $Q(t)=2{,}5e^{-\beta t}$

$Q'(t)=-\beta Q(t)\Rightarrow Q(t)=Ce^{-\beta t}$

$Q(0)=2{,}5\Rightarrow C=2{,}5$ d'où $Q(t)=2{,}5\ e^{-\beta t}$

2. Calculons la valeur de β:

Première méthode :

$Q(t+1)=Q(t)-\dfrac{30}{100}Q(t)\Leftrightarrow Q(t+1)=0{,}7\times Q(t)$

Pour $t=0$ on a :

$Q(1) = 0{,}7 \times Q(0) \Leftrightarrow 2{,}5e^{-\beta 1} = 0{,}7 \times 2{,}5 \Leftrightarrow e^{-\beta 1} = 0{,}7 \Leftrightarrow -\beta = \ln 0{,}7 \Rightarrow \beta = -\ln 0{,}7$

Sa valeur approche est : $\beta = 0{,}3567$

Deuxième méthode :

$Q(t) = 2{,}5e^{-\beta t}$

Pour $t = 1$ on a: $Q(1) = Q(0) - \frac{30}{100} \times Q(0) \Leftrightarrow Q(1) = 0{,}7 \times Q(0) \Leftrightarrow 2{,}5e^{-\beta} = 0{,}7 \times 2{,}5$

donc $\beta = -\ln 0{,}7$ et sa valeur approche est : $\beta = 0{,}3567$

3. Etudions le sens de variation de Q pour $t \geq 0$

$D_Q = [0 ; +\infty[$; $Q(t) = 2{,}5e^{-\beta t}$

Q est continue et dérivable pour tout $t \geq 0$

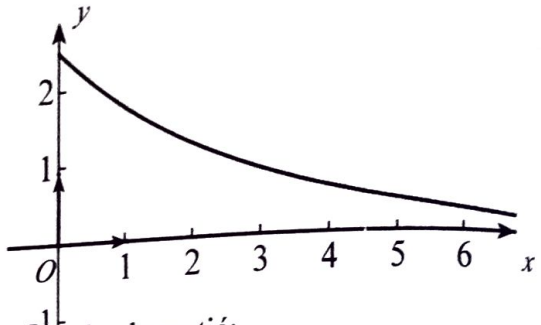
$Q'(t) = -2{,}5\beta e^{-\beta t}$.

$\forall t \geq 0$ $Q'(t) < 0$ alors Q est strictement décroissante.

$\lim\limits_{x \to +\infty} Q(t) = 0$

Tableau de variation et trace de la courbe (Γ)

x	0	$+\infty$
$Q'(t)$	$-$	
$Q(t)$	$2{,}5$ ↘	0



4. Le temps au bout duquel la quantité du sang est réduite de motié:

$Q(t) = \frac{1}{2} Q(0)$

$2{,}5e^{-\beta t} = \frac{1}{2} \times 2{,}5 \Leftrightarrow e^{-\beta t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\beta \times t = -\ln 2 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{\beta} \Leftrightarrow t = -\frac{\ln 2}{\ln 0{,}7} = 1{,}94$

Le temps $t \approx 2$ *heures.*

B. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x défine par : $f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

1. Déterminons l'ensemble de définition de f.

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \text{ et } \left|\frac{x-1}{x}\right| \neq 0\right\} = \mathbb{R} - \{0;1\} =]-\infty ; 0[\cup]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

2. Etudions les variation de f:

f est continue et dérivable sur chacun des intervalles de son ensemble de définition :

$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{-x^2 + x + 2x - 2x + 2}{2x(x-1)} = \frac{-x^2 + x + 2}{2x(x-1)}$.

Signe de $f'(x)$. Posons $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0$

$x_1 = -1$; $x_2 = 2$

Tableau de signe de $f'(x)$

x	$-\infty$	-1		0		1		2	$+\infty$
$-x^2 + x + 2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$2x(x-1)$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$

Pour tout $x \in]-\infty ; -1] \cup]0 ; 1[\cup [2 ; +\infty[$ f est décroisante.

Pour tout $x \in [-1 ; 0[\cup]1 ; 2]$ f est croissante.

3. Montrons que la courbe (C) admet une asymptote oblique:

Posons $y = -\frac{x}{2}$

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \to -\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = 0$$

donc $(D) : y = -\frac{x}{2}$ est l'asymptote à (C)

Position de (C) par rapport à (D).

Posons $f(x) - y = g(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

Etudions g

Ensemble de définition de g : $D_g = D_f$.

Dérivée de g : $g'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x-1)}$

Les limites aux bornes de D_g:

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$; $\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 1} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

Tableau de variation de g :

x	$-\infty$		0		$1/2$		1		$+\infty$
$g'(x)$	$+$		‖		0		‖	$+$	
$g(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

Le point remarquable : $(C_g) \cap (Ox) \Rightarrow \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = 0$

$$\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{x-1}{x}\right| = 1 \Leftrightarrow |x-1| = |x| \Leftrightarrow (x-1)^2 = x^2 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Tableau de signe de $g(x)$:

x	$-\infty$		0		$1/2$		1		$+\infty$
$g(x)$	$+$		‖	$+$		$-$	‖	$-$	

Position de (C) par rapport à (D) :

Pour tout $x \in]-\infty ; 0[\cup]1 ; 1/2]$ (C) est au - dessus de (D).

Pour tout $x \in [1/2 , 1[\cup]1 , +\infty[$ (C) est en - dessous de (D).

$$(C) \cap (D) = \left\{\left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{4}\right)\right\}$$

4. Montrons que le point $I\left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{4}\right)$ est centre de symétrie:

$$2a - x = 1 - x$$

$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq 1 \Leftrightarrow -x \neq 0$ et $-x \neq -1 \Leftrightarrow 1-x \neq 1$ et $1-x \neq 0$ donc $(1-x \in) D_f$.

$$f(1-x)+f(x)=\frac{x-1}{2}+\ln\left|\frac{1-x-1}{1-x}\right|+\frac{x}{2}-\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|=-\frac{1}{2}$$

$f(1-x)+f(x)=-\frac{1}{2}$ donc I est centre de symétrie.

5. Donnons une équation de la tangente en I à (C) :

$y=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4} \Leftrightarrow y=-\frac{9}{2}x+2$ d'où $(T_I): y=-\frac{9}{2}x+2$

6. Construisons la courbe (C) :

Les limites aux bornes de D_f :

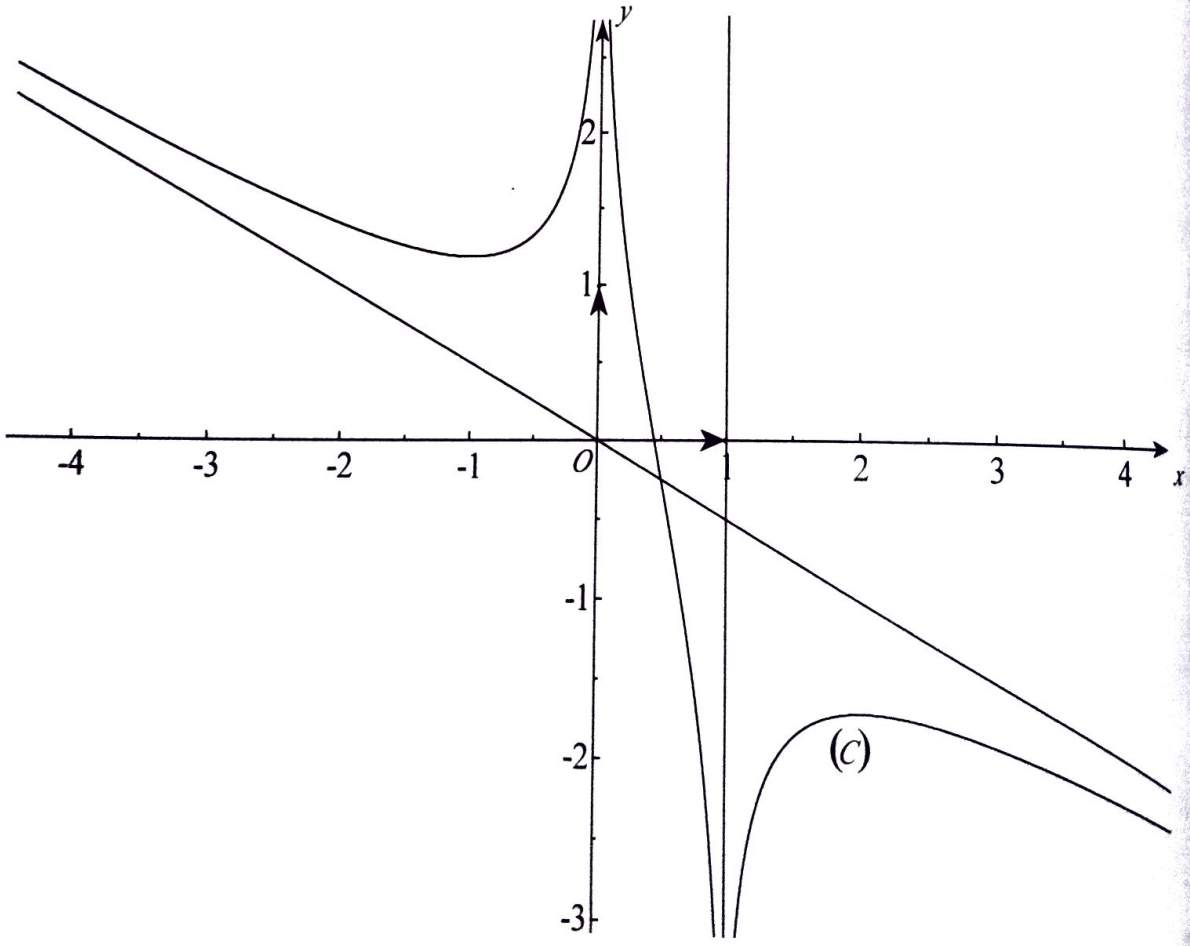
$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=-\infty$.

Les extremums :

$f(-1)=\frac{1}{2}+\ln 2=1{,}19\approx 1{,}2$; $f(2)=-1-\ln 2=-1{,}69\approx -1{,}7$.

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$1{,}2$	↗	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↗	$-1{,}7$	↘	$-\infty$



CORRECTIONBAC SESSION JUIN 2015TSE

EXERCICE1

I. A. Montrons que les probabilités P_1, P_2, P_3, P_4 sont égales à $k, 3k, 5k, 7k$

L'aire d'un disque de rayon r est $A = \pi r^2$

L'aire de la zone (1) $A_1 = \pi(1)^2 = \pi$

L'aire de la zone (2) $A_2 = \pi(2)^2 - \pi = 3\pi$ **(0,5pt)**

L'aire de la zone (3) $A_3 = \pi(3)^2 - \pi(2)^2 = 5\pi$

L'aire de la zone (4) $A_1 = \pi(4)^2 - \pi(3)^2 = 7\pi$

La probabilité d'atteindre l'une des zones 1 ;2 ;3 ;4 est proportionnelle à l'aire de cette zone

$\Leftrightarrow \frac{P_1}{\pi} = \frac{P_2}{3\pi} = \frac{P_3}{5\pi} = \frac{P_4}{7\pi}$ **(0,5pt)**

En posant $P_1 = k$ avec $k \in]0; 1[$

$\frac{P_1}{\pi} = \frac{P_2}{3\pi} \Rightarrow P_2 = 3P_1 = 3k$ $\frac{P_1}{\pi} = \frac{P_3}{5\pi} \Rightarrow P_3 = 5k$ $\frac{P_1}{\pi} = \frac{P_4}{7\pi} \Rightarrow P_4 = 7k$ **(0,5pt)**

Autre méthode :

$\frac{P_1}{\pi} = \frac{P_2}{3\pi} = \frac{P_3}{5\pi} = \frac{P_4}{7\pi} = c \Leftrightarrow P_1 = \frac{P_2}{3} = \frac{P_3}{5} = \frac{P_4}{7} = c\pi = k \Rightarrow P_1 = k\,; P_2 = 3k\,;$

$P_3 = 5k\,; P_4 = 7k$

D'où les probabilités P_1; P_2; P_3; P_4 d'atteindre respectivement les zones (1) ; (2) ; (3) ; (4) sont égales à k; $3k$; $5k$; $7k$.

1. a. Déterminons les probabilités P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5

Soit X la variable aléatoire ; les valeurs prisent par X sont :

4000 ; 3000 ; 2000 ; 1000 ; −30 000

$P(X = 4000) = P_1 P(X = 3000) = P_2 P(X = 2000) = P_3 P(X = 1000)$

$= P_4 P(X = -30000) = P_5$

$P_1 = k\,; P_2 = 3k\,; P_3 = 5k\,;\ P_4 = 7k$

$P_5 = 1 - (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) = 1 - 16k$ **(0,5pt)**

$E(X) = 0 \Leftrightarrow 4000P_1 + 3000P_2 + 2000P_3 + 1000P_4 - 30000P_5 = 0$

$4k + 9k + 10k + 7k - 30(1 - 16k) = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{17}$

D'où $P_1 = \frac{1}{17}$ $P_2 = \frac{3}{17}$ $P_3 = \frac{5}{17}$ $P_4 = \frac{7}{17}$ $P_5 = \frac{1}{17}$ **(0,5pt)**

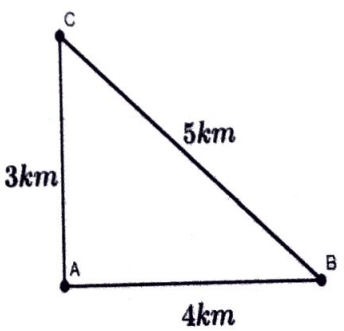
b. Tableau de la Loi de probabilité de X **(1pt)**

x_i	−30000	1000	2000	3000	4000
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{17}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{5}{17}$	$\frac{7}{17}$	$\frac{1}{17}$

II. 1cm ⟶ 1km

Soit G le point représentant l'emplacement du forage. G est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

ABC étant un triangle rectangle en A ($BC^2 = AB^2 + AC^2$) donc le segment $[BC]$ est le diamètre du cercle et G est le milieu de $[BC]$. **(0,5pt)**



Par suite le forage est situé à égale distance des villages B et C **(c'est – à –dire le milieu du segment [BC])** et la distance qui le sépare de chacun des villages est 2,5km (**c'est – à – dire** $\frac{BC}{2}$) **(0,5pt)**

EXERCICE2

I. α et β deux entiers naturels $N = 2^{\alpha} \times 3^{\beta}$ tels que $N^2 = 2^{2\alpha} \times 3^{2\beta}$

1. Prouvons que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$ **(1pt)**

Le nombre de diviseurs de N^2 est le triple du nombre de diviseurs de N signifie que :

$(2\alpha + 1)(2\beta + 1) = 3(\alpha + 1)(\beta + 1) \Leftrightarrow \alpha\beta - \beta - \alpha + 1 = 3 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$

2. Les valeurs de N

$(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3 \times 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 1 = 1 \\ \beta - 1 = 3 \end{cases} ou \begin{cases} \alpha - 1 = 3 \\ \beta - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 4 \end{cases} ou \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 2 \end{cases}$

$N = 2^2 \times 3^4 = 324$ ou $N = 2^4 \times 3^2 = 144$ **(0,5pt)**

II. $a = -1 + 3i\,;\, b = -4 + 2i\,;\, c = 1 + 4if : z' = (2 - 2i)z + 1$

1. La nature et les éléments caractéristiques de f :

L'expression complexe associée à f est de la forme $z' = az + 1$ avec $a = 2 - 2i$ et $b = 1$ d'où f est une similitude directe. **(0,5pt)**

Eléments caractéristiques :

✓ Centre Ω : $z_{\Omega} = \frac{b}{1-a} \Rightarrow z_{\Omega} = \frac{1}{-1+2i} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ $\Omega\left(-\frac{2}{5}\,;\,-\frac{2}{5}\right)$

✓ Rapport : $k = |a| = |2 - 2i| = 2\sqrt{2}$ **(0,5pt)**

✓ Angle : $\theta = arg(a) = -\frac{\pi}{4}$

2. L'affixe du point B' image de B par f

$z_{B'} = (2 - 2i)z_B + 1$

$z_{B'} = (2 - 2i)(-4 + 2i) + 1 = -3 + 12i$ $z_{B'} = -3 + 12i$ **(0,25pt)**

Vérifions que $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB'}$ sont orthogonaux

$\overrightarrow{CA}\binom{-2}{-1}$; $\overrightarrow{CB'}\binom{-4}{8}$ $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB'} = 8 - 8 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB'} = 0$ D'où $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB'}$ sont orthogonaux. **(0,25pt)**

Autre méthode :

$\frac{z_{\overrightarrow{CA}}}{z_{\overrightarrow{CB'}}} = bi \quad (b \neq 0) \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB'}$ sont orthogonaux

3. $M(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$, M' son image. Montrons que $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$; $z_{M'} = (2 - 2i)z_M + 1$

$z_{M'} = (2 - 2i)(x + iy) + 1 = 2x + 2y + 1 + i(2y - 2x)$

$M'(2x + 2y + 1\,;\,2y - 2x)$ **(0,5pt)**

$\overrightarrow{CM'}\binom{2x+2y}{2y-2x-4}$; $\overrightarrow{CA}\binom{-2}{-1}$

$\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \overrightarrow{CM'}.\overrightarrow{CA} = 0$

$\Leftrightarrow 4x - 4y - 2y + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x + 3y = 2$

D'où $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow x + 3y = 2$ **(0,5pt)**

Autre méthode :

$\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow R_e\left(\frac{z_{\overrightarrow{CM'}}}{z_{\overrightarrow{CA}}}\right) = 0 \Leftrightarrow x + 3y = 2$

4. Résolution

Comme $1 \wedge 3 = 1 \Rightarrow x + 3y = 2 \Leftrightarrow x = 2 - 3y \Rightarrow x \equiv 2[3]$

$\Rightarrow x = 3k + 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$3y = 2 - x$

$3y = 2 - (3k + 2) \Rightarrow y = -k$

$S = \{(3k + 2;\ -k);\ k \in \mathbb{Z}\}$ **(0,5pt)**

Autre méthode :

$x + 3y = 2$ On remarque, Le couple $(-1\ ;1)$ est une solution particulière et $1 \wedge 3 = 1$

$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ \underline{-1 + 3(1) = 2} \end{cases}$

$x + 1 + 3(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 3(-y + 1) \Leftrightarrow x + 1 = 3k \Rightarrow x = 3k - 1$

$-y + 1 = k \Rightarrow y = -k + 1$ D'où $S = \{(3k - 1;\ -k + 1);\ k \in \mathbb{Z}\}$.

L'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à $[-5\ ;5]$

$-5 \leq x \leq 5$

$-5 \leq 3k + 2 \leq 5$

$-\frac{7}{3} \leq k \leq 1$ d'où $k \in \{-2; -1; 0; 1\}$

$-5 \leq y \leq 5$

$-5 \leq -k \leq 5$

$-5 \leq k \leq 5$

Pour $k = -2$ on a : $x = -4$ et $y = 2$ donc $M_1\binom{-4}{2}$

Pour $k = -1$ on a : $x = -1; y = -1$ donc $M_2\binom{-1}{1}$ **(0,5pt)**

Pour $k = 0$ on a : $x = 2\ ; y = 0$ donc $M_3\binom{2}{0}$

Pour $k = 1$ on a : $x = 5\ ; y = -1$ donc $M_4\binom{5}{-1}$

Problème :

A. 1. a. Exprimons x' et y' en fonction de x et y

$M_1\binom{x_1}{y_1}$ image de $M\binom{x}{y}$ par la symétrie orthogonale d'axe $y = x$ signifie que

$\begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = x \end{cases}$ **(0,25pt)**

$M'\binom{x'}{y'}$ image de $M_1\binom{x_1}{y_1}$ par la symétrie orthogonale d'axe $(O, \vec{\imath})$ signifie que

$\begin{cases} x' = x_1 \\ y' = -y_1 \end{cases}$ **(0,25pt)** D'où $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$ **(0,5pt)**

b. Caractérisons l'application qui transforme M en M'

Soit f : $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y + x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0\ ;\ y = 0$

L'ensemble des points invariants par f est $O(0\ ;0)$

La matrice de l'application linéaire φ associée à f est $M_\varphi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ d'où f est une

rotation $\begin{cases} cos\theta = 0 \\ sin\theta = -1 \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$

L'application qui transforme M en M' est la rotation de centre $O(0\ ;0)$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Autre méthode (1) : $z' = x' + iy' = y - ix = i(x + iy) = -iz = e^{-i\frac{\pi}{2}}z$ **(0,5pt)**

L'application qui transforme M en M'est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. **(0,5pt)**

Autre méthode (2)

La composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants est une rotation de centre le point d'intersection des deux axes et d'angle 2θ (θ est l'angle formé par les deux axes)

c. Montrons que r est une rotation dont on précisera le centre r : $\begin{cases} x'' = 1 + y \\ y'' = 1 - x \end{cases}$

$z'' = x'' + iy'' = 1 + y + i(1 - x) = -i(x + iy) + 1 + i$

$z'' - 1 = -iz + i = -i(z - 1) = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - 1) \Rightarrow z'' - z_\Omega = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - z_\Omega)$

avec $z_\Omega = 1$ **(0,5pt)**

D'où r est une rotation de centre $\Omega\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ d'angle $-\frac{\pi}{2}$. **(0,5pt)**

Autre méthode

La matrice de l'application linéaire φ associée à r est : $M_\varphi\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ d'où r est une rotation de centre Ω **(l'ensemble des points invariants par r)** et d'angle θ tel que

$\begin{cases} cos\theta = 0 \\ sin\theta = -1 \end{cases} \theta = -\frac{\pi}{2}$

$r(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + y \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ y + x = 1 \end{cases} x = 1\,;\, y = 0$

L'ensemble des points invariants par r est $\Omega\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

2. M décrit la droite d'équation $y = x$, déterminons l'ensemble décrit par le point M'' ainsi que l'ensemble décrit par le milieu du segment $[MM'']$

M décrit la droite d'équation $y = x \Leftrightarrow M(x, x)$

$M''\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} x'' = 1 + x \\ y'' = 1 - x \end{cases}$

$x'' + y'' = 2 \Leftrightarrow x'' + y'' - 2 = 0$ donc l'ensemble décrit par le point M'' est la droite d'équation $x + y - 2 = 0$ **(0,75pt)**

Soit I milieu du segment $[MM'']$

$I\left(\frac{x''+x}{2}; \frac{y''+y}{2}\right) \Leftrightarrow I\left(\frac{1+x+x}{2}; \frac{1-x+x}{2}\right) \Leftrightarrow I\left(\frac{1+2x}{2}; \frac{1}{2}\right)$ d'où l'ensemble décrit par le milieu du segment $[MM'']$ est la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$. **(0,75pt)**

3. Au point $M(x, y)$ on associe le point $M_2(x_2, y_2)$ définies par : $\begin{cases} x_2 = 1 + 3y \\ y_2 = 1 - 2x \end{cases}$

a. La nature de l'ensemble (E) des points M_2 lorsque M décrit le cercle unité de centre O.

L'ensemble décrit par M est le cercle d'équation : $x^2 + y^2 = 1$

$\begin{cases} x_2 = 1 + 3y \\ y_2 = 1 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x_2 - 1}{3} \\ x = \frac{1 - y_2}{2} \end{cases}$ **(0,25pt)**

Dans $x^2 + y^2 = 1$ on a : $\left(\frac{1-y_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2-1}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{(x_2-1)^2}{9} + \frac{(y_2-1)^2}{4} = 1$ **(0,5pt)**

L'ensemble décrit par M_2 est l'ellipse d'équation : $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ **(0,25pt)**

b. Caractérisons l'image de (E) par la rotation r définie en **1) c)**

$(E) : \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1\,;\; r : \begin{cases} x'' = 1 + y \\ y'' = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x'' - 1 \\ x = 1 - y'' \end{cases}$

Dans (E) : $\frac{(1-y''-1)^2}{9}+\frac{(x''-1-1)^2}{4}=1 \Leftrightarrow \frac{y''^2}{9}+\frac{(x''-2)^2}{4}=1$

D'où l'image de (E) par r est l'ellipse d'équation : $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ **(0,5pt)**

- ✓ Le point $\Omega(2;0)$ est le centre de l'ellipse
  $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{5}(a<b) a=2\,;\, b=3$
- ✓ Excentricité : $e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{5}}{3}$
- ✓ Sommets : $A\binom{2}{0}$; $A'\binom{-2}{0}$; $B\binom{0}{3}$ et $B\binom{0}{-2}$ dans le repère $(\Omega,\vec{\imath},\vec{\jmath})$
- ✓ Foyers : $F\binom{0}{\sqrt{5}}$ et $F'\binom{0}{-\sqrt{5}}$ dans le repère $(\Omega,\vec{\imath},\vec{\jmath})$
- ✓ Directrice : $D: y=\frac{9}{\sqrt{5}}$ et $D': y=-\frac{9}{\sqrt{5}}$ dans le repère $(\Omega,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

$f(x)=(2x-1)\times\sqrt{\frac{x+1}{2}}$

1. Etudions et traçons la courbe sa courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le plan muni du repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

$\mathcal{D}f=[-1;+\infty[f(-1)=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\frac{-\frac{3}{2}}{0^+}=-\infty$ **(0,5pt)**

f n'est pas dérivable en -1 ; $(\mathcal{C}_f)$ admet en ce point une demi tangente verticale

$\forall x\in]-1;+\infty[\quad f'(x)=2\sqrt{\frac{x+1}{2}}+\frac{(2x-1)}{4\sqrt{\frac{x+1}{2}}}=\frac{8\left(\frac{x+1}{2}\right)+2x-1}{4\sqrt{\frac{x+1}{2}}}=\frac{6x+3}{4\sqrt{\frac{x+1}{2}}}$ **(0,5pt)**

$\forall x\in]-1;+\infty[$, $4\sqrt{\frac{x+1}{2}}>0$, $f'(x)$ a même signe que $6x+3$

Posons $6x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

L'extremum.

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

Tableau de variation :

x	-1		$-1/2$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0 ‖	↘	-1	↗	$+\infty$

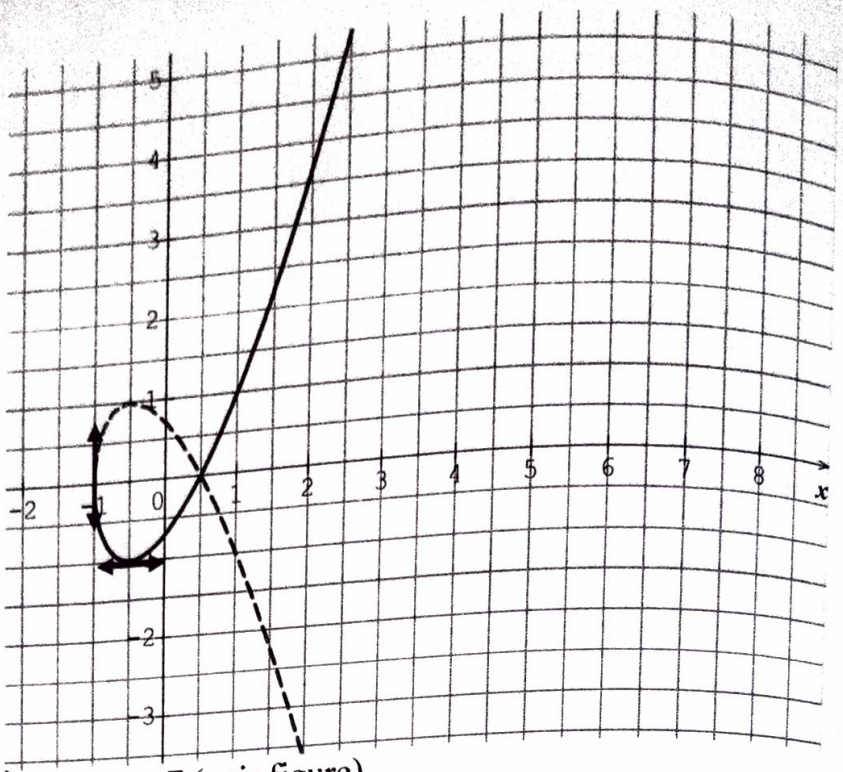
x	0	$1/2$
$f(x)$	$-1/2$	0

(0,25pt)

$lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-1)\sqrt{\frac{x+1}{2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)\sqrt{\frac{x+1}{2}}=+\infty$ d'où $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe (Oy) au voisinage de $+\infty$

Les tangentes à (Cf) ont pour équation : $x=-1$ au point d'abscisse -1 et $y=-1$ au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$

Figure



Soit $\Gamma = (\mathcal{C}_f) \cup (\mathcal{C}'_f)$. Traçons Γ (voir figure)

2. $A\binom{-1}{0}\Delta : x = -2 \; ; m \in \mathbb{R}^*$

(D): y $= mx$ et D' la droite orthogonale à D en $O(0\,;0)$

$(D') : y = -\dfrac{1}{m}x$ **(0,25pt)**

(D)et(D') coupent (Δ)en P et P' respectivement

$(\Delta) \cap (D)$: $\begin{cases} x = -2 \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -2m \end{cases} P(-2\,;\,-2m)$ **(0,25pt)**

$(\Delta) \cap (D')\begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{1}{m}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{2}{m} \end{cases} P'\left(-2\,;\,\frac{2}{m}\right)$ **(0,25pt)**

Soit K milieu du segment $[PP']$ donc $K\left(-2;\,\frac{1-m^2}{m}\right)$ **(0,25pt)**

La droite (AK) coupe (D) et (D') en M et M' en fonction de m

a. Déterminons les coordonnées de M et M' en fonction de m

$\overrightarrow{AK}\left(-1;\,\frac{1-m^2}{m}\right)$. Soit $T(x,y) \in (AK)\overrightarrow{AT}(x+1\,;\,y)$

$\overrightarrow{AT}$et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires alors $\det(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AK}) = 0$

$$\begin{vmatrix} x+1 & -1 \\ y & \frac{1-m^2}{m} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{1-m^2}{m}x + \frac{1-m^2}{m} + y = 0 \Leftrightarrow (1-m^2)x + my + 1 - m^2 = 0$$

(AK): $(1-m^2)x + my + 1 - m^2 = 0$ **(0,25pt)**

$(AK) \cap (D)$: $\begin{cases} (1-m^2)x + my + 1 - m^2 = 0 & (1) \\ y = mx & (2) \end{cases}$

$(1) : (1-m^2)x + my + 1 - m^2 = 0 \Rightarrow x = m^2 - 1$

$(2) : \; y = m(m^2-1)M\left(m^2-1\,;\,m(m^2-1)\right)$ **(0,25pt)**

$(AK) \cap (D')$: $\begin{cases} (1-m^2)x + my + 1 - m^2 = 0 & (1) \\ y = -\frac{1}{m}x & (2) \end{cases}$

$(1) : (1-m^2)x - x + 1 - m^2 = 0 \Rightarrow -m^2x = m^2 - 1 \Rightarrow x = \frac{1-m^2}{m^2}$

$(2) : \; y = -\frac{1}{m}\left(\frac{1-m^2}{m^2}\right) M'\left(\frac{1-m^2}{m^2}\,;-\frac{1}{m}\left(\frac{1-m^2}{m^2}\right)\right)$ **(0,25pt)**

b. Γ_1 l'ensemble des points M lorsque $m \in \mathbb{R}^*$

$\begin{cases} x = m^2 - 1 \\ y = m(m^2 - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 = x + 1 \\ y = x\sqrt{x+1} \end{cases} \Rightarrow \Gamma_1$ a pour équation $y = x\sqrt{x+1}$

Γ'_1 L'ensemble des points M' lorsque $m \in \mathbb{R}^*$

$\begin{cases} x = \frac{1-m^2}{m^2} \\ y = -\frac{1}{m}\left(\frac{1-m^2}{m^2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 = \frac{1}{x+1} \\ y = -x\sqrt{x+1} \end{cases} \Rightarrow \Gamma'_1$ a pour équation $y = -x\sqrt{x+1}$

Γ_1 et Γ'_1 sont symétriques par rapport à l'axe $(O, \vec{\imath})$ **(0,25pt)**

CORRECTION BAC STI SESSION JUIN 2015

Exercice1 :

I. a. L'expression analytique de la symétrie orthogonale S d'axe la droite d'équation $y = -x + 1$

$M(x,y)$d'image $M'(x',y')$ par S. Soit I milieu du segment $[MM']$; $D : y = -x + 1$

$I\left(\frac{x+x'}{2};\frac{y+y'}{2}\right) \in D \Leftrightarrow \frac{y+y'}{2} = -\frac{x+x'}{2} + 1$

$\Leftrightarrow y + y' = -x - x' + 2 \Leftrightarrow x' + y' = -x - y + 2$ **(1pt)**

Soit $\vec{u}(1\,;\,-1)$ un vecteur directeur de D

$\overrightarrow{MM'}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x' - x - y' + y = 0 \Leftrightarrow x' - y' = x - y$ **(2pts)**

$$\begin{cases} x' + y' = -x - y + 2 \\ x' - y' = x - y \end{cases}$$

$$2x' = -2y + 2$$

$$x' = -y + 1$$

$$\begin{cases} x' + y' = -x - y + 2 \\ -x' + y' = -x + y \end{cases}$$

$$2y' = -2x + 2$$

$$y' = -x + 1$$

S: $\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = -x + 1 \end{cases}$ **(1pt)**

b. $\mathcal{H}: y = x^2 - 1$donnons l'équation de l'image de $\mathcal{H}$ par S

$\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = -x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - x' \\ x = 1 - y' \end{cases}$

$y = x^2 - 1 \Rightarrow 1 - x' = (1 - y')^2 - 1 \Leftrightarrow y' - 2y' + x' - 1 = 0$

L'image de $\mathcal{H}$ a pour équation $x + y^2 - 2y - 1 = 0$ **(1pt)**

c. Construisons $\mathcal{H}$ et son image$\mathcal{H}'$dans le même repère

$y = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 = y + 1$

Soit $\Omega(0\,;\,-1)$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

La forme réduite de $\mathcal{H}$ est $X^2 = Y$ dans le repère $(\Omega,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

$a = \frac{1}{2}$ Foyer $F\left(0\,;\,\frac{1}{4}\right)$ dans le repère $(\Omega,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Directrice $D : y = -\frac{1}{4}$ dans le repère $(\Omega,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

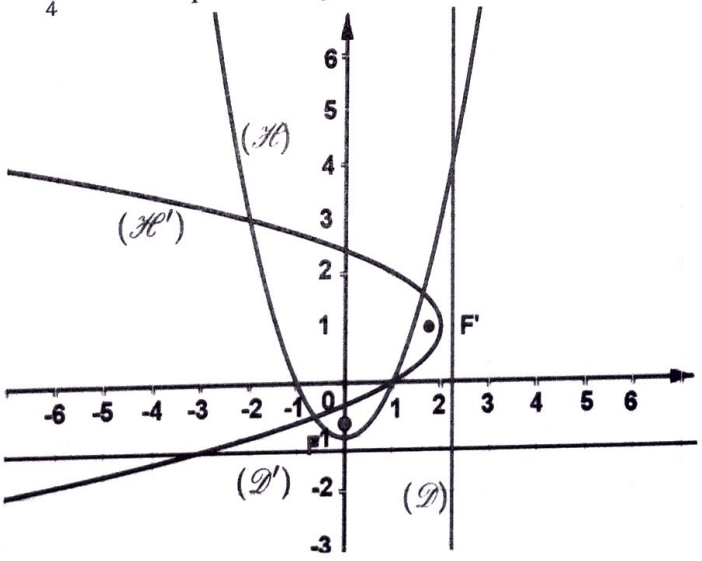
$\mathcal{H}': x + y^2 - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 = -(x-2)$

Soit $\Omega_1(2\,;\,1)$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

La forme réduite de $\mathcal{H}'$ est $Y^2 = -X$ dans le repère $(\Omega_1,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

$a = -\frac{1}{2}$ Foyer $F'\left(-\frac{1}{4}\,;\,0\right)$ dans le repère $(\Omega_1,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Directrice $D: x = \frac{1}{4}$ dans le repère $(\Omega,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ **(1pt)**



II. L'application f_α : $\overrightarrow{MM'} = (2-\alpha)\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + (1+2\alpha)\overrightarrow{MC}$

$\sum \alpha_i = 2 - \alpha - 4 + 1 + 2\alpha = \alpha - 1$

- Si $\alpha = 1$ alors $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MM'} = -4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

f_1 est une translation de vecteur $\vec{u} = -4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

- Si $\alpha \neq 1$ alors $\overrightarrow{MM'} = (2-\alpha)\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + (1+2\alpha)\overrightarrow{MC}$

Soit G_α le barycentre du système $\{(A, 2-\alpha) ; (B, -4) ; (C, 1+2\alpha)\}$

$\overrightarrow{MM'} = (2-\alpha)\overrightarrow{MG_\alpha} + (2-\alpha)\overrightarrow{G_\alpha A} - 4\overrightarrow{MG_\alpha} - 4\overrightarrow{G_\alpha B} + (1+2\alpha)\overrightarrow{MG_\alpha} + (1+2\alpha)\overrightarrow{G_\alpha C}$

$\overrightarrow{MM'} = (\alpha-1)\overrightarrow{MG_\alpha} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG_\alpha} + \overrightarrow{G_\alpha M'} = (\alpha-1)\overrightarrow{MG_\alpha}$

$\overrightarrow{G_\alpha M'} = (2-\alpha)\overrightarrow{G_\alpha M}$

- Si $\alpha = 2$ alors f_2 est une application constante **(2pts)**
- Si $\alpha \neq 2$ alors f_α est une homothétie de centre G_α et de rapport $k = 2 - \alpha$

Exercice 2 :

I. $z = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$

1. $z^2 = \left(\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 = 2 - \sqrt{2} - 2i\sqrt{2} - 2 - \sqrt{2}$

$z^2 = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2} = -2\sqrt{2}(1+i)$ **(0,5 pt)**

$z^4 = (z^2)^2 = \left(2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}\right)^2 = 16i$ **(0,5 pt)**

2. $|z^4| = \sqrt{16^2} = 16$ **(0,25 pt)** $\arg(z^4) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ **(0,25pt)**

Déduction

$|z^4| = 16 \Leftrightarrow |z^4| = 2^4 \Leftrightarrow |z| = 2$**(0,5 pt)**

$Arg(z^4) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 4Arg(z) = \frac{\pi}{2}$ d'où $arg(z) = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ pour $k = 3$on a

$arg(z) = \frac{13\pi}{8} = -\frac{3\pi}{8}\,[2\pi]$ **(0,5 pt)**

3. $M(x, y)$ d'affixe $a = x + iy$

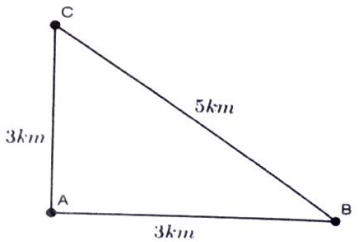
$|az| = 8 \Leftrightarrow a|z| = 8 \Leftrightarrow |z| = 4$ **(1,5 pts)**

L'ensemble des points M est le cercle de centre O et de rayon $r = 4$

II. 1cm ⟶ 1km

Soit I le point représentant l'emplacement du forage. I est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

ABC étant un triangle rectangle en A ($BC^2 = AB^2 + AC^2$) donc le segment $[BC]$ est le diamètre du cercle d'où I est le milieu de $[BC]$.



Par suite le forage est situé à égale distance des villages B et C **(c'est –à –dire le milieu du segm [BC])** et la distance qui le sépare de chacun des villages est 2,5km **(c'est – à – dire $\frac{BC}{2}$)** **(1pt)**

Problème

A. 1. Résolution **(1 pt)**

$(E) : y'' = (x+2)e^x$

$u = x + 2 \Rightarrow u' = 1$ $\quad v' = e^x \Rightarrow v = e^x$

$y' = (x+2)e^x - \int e^x\,dx \Rightarrow y' = (x+2)e^x - e^x + k_1 k_1 \in \mathbb{R}$

$y = (x+2)e^x - e^x - e^x + k_1 x + k_2$ où $k_1 ; k_2 \in \mathbb{R}$

$y = xe^x + k_1 x + k_2$ où $k_1 ; k_2 \in \mathbb{R}$

Autre méthode

Posons $F(x) = (ax+b)e^x$ une primitive de $(x+2)e^x \Rightarrow F'(x) = (ax + a + b)e^x$

$F'(x) = (x+2)e^x \Leftrightarrow (ax+a+b)e^x = (x+2)e^x \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$ donc $F(x) = (x+1)e^x$

$y'' = (x+2)e^x \Rightarrow y' = (x+1)e^x + k_1 k_1 \in \mathbb{R}$

Soit $G(x) = (ax+b)e^x$ alors $G'(x) = (ax+a+b)e^x$

$G'(x) = (x+2)e^x \Leftrightarrow (ax+a+b)e^x = (x+1)e^x \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$ donc $G(x) = xe^x$

$y' = (x+2)e^x + k_1 \Rightarrow y = xe^x + k_1 x + k_2$ avec $(k_1 ; k_2) \in \mathbb{R}^2$

2. La solution de (E) vérifiant $y(0) = y'(0) = 1$

$y(0) = 1 \Leftrightarrow k_2 = 1$

$y'(0) = 1 \Leftrightarrow 1 + k_1 = 1 \Rightarrow k_1 = 0$

$y = xe^x + 1$ **(0,5pt)**

B. $Df = \mathbb{R}$ $f(x) = 1 + xe^x$

1. a. $lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ **(0,25 pt)** $lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **(0,25 pt)**

b. $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$ **(0,5pt)** $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$, $f'(x)$ a même signe que $1+x$. Posons $1+x=0 \Leftrightarrow x=-1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$1-e^{-1}$	↗	$+\infty$

(0,5pt)

$f(-1) = 1 - e^{-1}$

c. Signe de $f(x)$

D'après le tableau de variation de f : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$

(Le minimum étant positif sur IR alors f est positive) **(0,5pt)**

2. $Dg = \mathbb{R}$ car $g(x) = (1-x)(1+e^x)$

a. $lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ **(0,25pt)** $lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ **(0,25pt)**

b. Démontrons que la droite $\Delta: y = -x+1$ est asymptote a (C) en $-\infty$.

$lim_{x\to-\infty} g(x) - y = lim_{x\to-\infty}(1-x)(1+e^x) - (-x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x - xe^x = 0$

D'où $\Delta: y = -x+1$ est une asymptote oblique à(C) en $-\infty$. **(0,25 pt)**

Position de C par rapport à (Δ) : signe de $(g(x) - y = (1-x)e^x)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)-y$		$+$	0	$-$	

$\forall x \in]-\infty; 1[$ $g(x) - y > 0$; (C) est au-dessus de Δ

$\forall x \in]1; +\infty[$ $g(x) - y < 0$; (C) est en-dessous de Δ

Pour $x = 1$; $g(x) - y = 0$ (C) et Δ se coupent **(0,5 pt)**

c. Calculons g' et montrons que g' = −f

$g'(x) = -e^x + e^x(1-x) = -(1+xe^x) = -f(x)$ **(0,25pt)**

d. Dressons le tableau de variation

$g'(x)$a même signe que $-f(x)$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

(0,5pt)

3. On pose $\varphi(x) = g(x) - x$

a. Calculons $\varphi'(x)$ puis dressons le tableau de variation

$\varphi'(x) = g'(x) - 1$

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) < 0 \Rightarrow \varphi'(x) < 0$ d'où φ est strictement décroissante

$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) - x = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) - x = -\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

(0,5pt)

b. Démontrons que l'équation $\varphi(x) = 0$ une solution unique $\alpha \in]0,7\ ;\ 0,8[$

φ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$ alors l'équation $\varphi(x) = 0$ une solution unique $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\varphi(0,7) = (1 - 0,7)(1 + e^{0,7}) - 0,7 = 0,2$

$\varphi(0,8) = (1 - 0,8)(1 + e^{0,8}) - 0,8 = -0,15$

$\varphi(0,7) \times \varphi(0,8) < 0$ d'où $\alpha \in]0,7\ ;\ 0,8[$ **(0,5pt)**

c. Déterminons un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

x	0,70	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76
$\varphi(x)$	0,2	0,16	0,13	0,10	0,06	0,02	−0,006

$0,75 < \alpha < 0,76$ **(0,5pt)**

d. Vérifions que $g(\alpha) = \alpha$

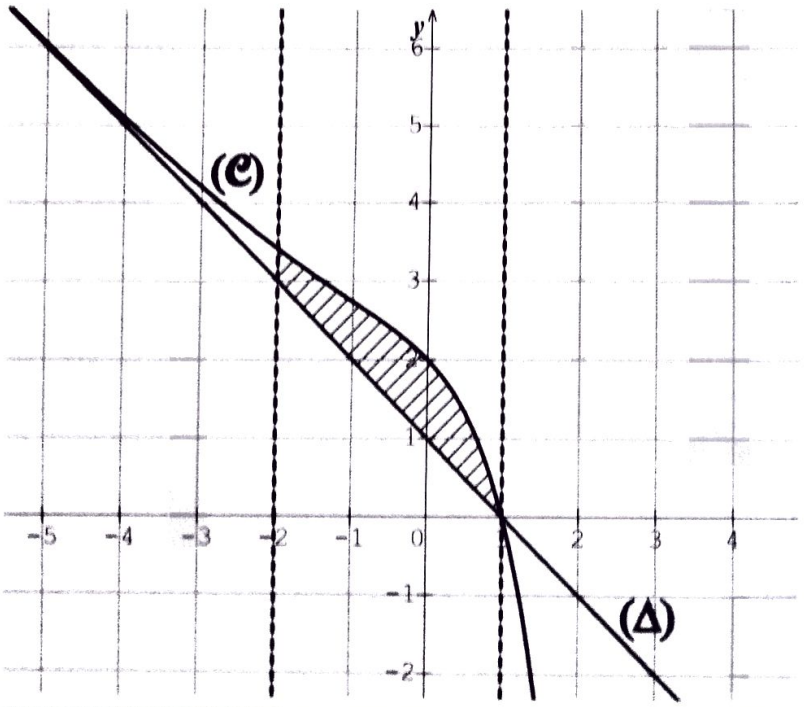
$\varphi(\alpha) = 0 \Leftrightarrow g(\alpha) - \alpha = 0 \Leftrightarrow g(\alpha) = \alpha$ **(0,5pt)**

4. Traçons C et Δ

$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1-x)(1+e^x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - 1\right)(1 + e^x) = -\infty$ d'où C admet une branche parabolique de direction l'axe (Oy) au voisinage de $+\infty$.

Δ: $y = -x + 1$

X	0	1
Y	1	0



(1pt)

2. β étant un nombre réel inférieur à 1 ($\beta < 1$)

a. Calculons en fonction de β, l'aire $\mathcal{A}(\beta)$

$\mathcal{A}(\beta) = \int_{\beta}^{1}(g(x) - y)\,dx = \int_{\beta}^{1} e^x(1-x)dx$

$u = 1 - x \Longrightarrow u' = -1$

$v' = e^x \Longrightarrow v = e^x$

$\mathcal{A}(\beta) = [e^x(1-x)]_{\beta}^{1} + \int_{\beta}^{1} e^x dx = [e^x(1-x) + e^x]_{\beta}^{1} = \left(e - (2-\beta)e^{\beta}\right)$ .u a

(0,5pt)

b. Calculons

$\lim\limits_{x \to -\infty} \mathcal{A}(\beta) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(e - (2-\beta)e^{\beta}\right) = e$ **(0,5pt)**

BAC 2014

CORRECTION DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES DE LA T.S.E (régions) :

Exercice 1 :

I.

1-/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, resolvons l'équation $h_n(z) = h_0(z)$

$h_0(z) = 1 - z$

Donc $h_n(z) = h_0(z) \Leftrightarrow z^n(1-z) = 1 - z \Leftrightarrow (z^n - 1)(1-z) = 0$

$\Leftrightarrow z^n = 1 \; ou \; 1 - z = 0$, alors on a :

$z = 1 \; ou \; z^n = 1$, ce qui revient à chercher les racines n-ieme de l'unité.

Ainsi les solutions sont : $z_k = \left[1; \frac{2k\pi}{n}\right] \; avec \; k \in \{0,1,2,3, \dots, n-1\}$, on pourra ecrire aussi

$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ .L'ensemble solution est :

$$\boxed{S = \left\{\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, avec k \in \{0,1,2,3, \dots, n-1\}\right\}}$$

2-/ a) Montrons que l'équation $|z| = |1 - z|$ a une infinité de solutions :

Soit $z = x + iy$, $|z| = |1 - z| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (1-x)^2 + y^2$

$$\Leftrightarrow x^2 = (1-x)^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \; et \; y \in \mathbb{R}$$

$\boxed{z = \frac{1}{2} + iy \; avec \; y \in \mathbb{R}}$ L'équation admet donc une infinité de solutions.

AUTRE METHODE :

Soient les points $M(z) et \; A(1), on \; a$:

$|z| = |1 - z| \Leftrightarrow OM = AM$, les solutions sont les points appartenant à la médiatrice du segment $[OA]$ d'où l'equation admet une infinite de solutions.

b) soit z_0 l'une des solutions telle que $z_0 = [\rho, \theta]$

$$|z_0| = |1 - z_0| \Rightarrow \boxed{|1 - z_0| = \rho}$$

$z_0 = \frac{1}{2} + iy_0 \Rightarrow 1 - z_0 = \frac{1}{2} - iy_0$ *donc* $1 - z_0 = \overline{z_0}$, par conséquent $\boxed{\arg(1 - z_0) = -\theta}$

$\boxed{|{z_0}^n(1 - z_0)| = \rho^{n+1}}$ et $\boxed{\arg({z_0}^n(1 - z_0)) = n\theta - \theta = (n-1)\theta}$

c) En déduisons que le système (1) n'admet de solution que si $n \equiv 1[6]$

(1) $\begin{cases} h_n(z) = 1 \\ |z| = |1 - z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^n(1 - z) = 1 \\ |z| = |1 - z| \end{cases}$

Comme z_0 est solution alors, on a : ${z_0}^n(1 - z_0) = 1$ donc $\begin{cases} \rho^{n+1} = 1 \\ (n-1)\theta = 2k\pi \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$z_0 = \frac{1}{2} + iy_0 \ alors\ |z_0| = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + {y_0}^2 = 1\ donc\ y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ou\ y_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pour $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on a $z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{3}$; $(n-1)\theta = 2k\pi \Rightarrow (n-1)\frac{\pi}{3} = 2k\pi$
c'est-à-dire $n - 1 = 6k\ ou\ encore\ n \equiv 1[6]$

De même si $y_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors $z_0 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $et\ \theta = -\frac{\pi}{3}$; on demontre alors que $n - 1 = 6k'$
c'est-à-dire $n \equiv 1[6]$.

En conclusion le système n'admet de solution que si $n \equiv 1[6]$

L'ensemble solution est $\boxed{\left\{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}}$

II-/

1) (E): $11x + 8y = 79$

a) Montrons que si $(x; y)$ *est solution de* (E) *alors* $y \equiv 3[11]$
$11x + 8y = 79 \Leftrightarrow 8y \equiv 79[11] \Leftrightarrow 56y \equiv 14[11]$, alors $y \equiv 3[11]$

b) Résolvons (E):
$\begin{cases} 11x + 8y = 79 \\ y \equiv 3[11] \end{cases}$,
on a : $y = 11k + 3\ avec\ k \in \mathbb{Z}$, donc
$11x + 8y = 79 \Leftrightarrow 11x + 8(11k + 3) = 79$
$\Leftrightarrow 11x = -88k + 55 \Leftrightarrow x = -8k + 5, k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{S = \{(-8k + 5; 11k + 3), k \in \mathbb{Z}\}\ .}$$

2) Soient x, y, z respectivement le nombre de pièce du $1^{er}, 2^{e}\ et\ du\ 3^{e}$ lot

Le problème peut être traduit par le système suivant :
$\begin{cases} x + y + z = 41 \\ 4800x + 3600y + 400z = 48000 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x + y + z = 41 & (1) \\ 12x + 9y + z = 120 & (2) \end{cases}$

En effectuant l'opération $(2)-(1)$, on obtient $11x+8y=79$, donc $x=-8k+5$ et $y=11k+3$ or $z=41-x-y$ *donc* $z=-3k+33$

$(x,y,z)\in\mathbb{N}^3$, ona $k=0$ *ce qui implique que* $\boldsymbol{x=5}$; $\boldsymbol{y=3}$; $\boldsymbol{z=33}$

Le 1er lot comprend 5 pièces

Le 2e lot comprend 3 pièces

Le 3e lot copmrend 33 pieces.

Exercise 2:

I- Soit x le nombre de filles et soit y le nombre de garçons

Soit (x_i) *les tailles des filles et* (y_i) *celles des garçons* on a :

$\frac{\sum x_i}{x}=160$ *et* $\frac{\sum y_i}{y}=173{,}5$ Alors

$\sum x_i=160x$ *et* $\sum y_i=173{,}5y$ *donc* $\frac{\sum x_i+\sum y_i}{x+y}=167$

il s'ensuit que $7x-6{,}5y=0$ *ou* $14x-13y=0$

Donc $\begin{cases}x=13k\\y=14k\end{cases},k\in\mathbb{N}^*$

$50<x+y<60$*alors* $50<27k<60$ *donc* $1{,}85<k<2{,}22$ *d'ou*`$k=2$ Par conséquent $\boldsymbol{x=26}$ ***et*** $\boldsymbol{y=28}$

L'effectif de la classe est donc 54

II.

$$x\in\{2,4,6,8\}\ et\ x+y=15\ et\ z=x-y\ et\ x=zt$$

$$x+y+z+t+h\equiv 0[9]\Rightarrow 6+z+t+h\equiv 0[9]$$

Les valeurs 2 et 4 pour x sont écartées car $x+y=15$ *et* $0\le y\le 9$

Pour $x=6$, *on a:* $x+y=15\Leftrightarrow y=9$ *or* $x-y=z$ *donc* $6-9=z$ *(absurde)*

On montre que $\boldsymbol{x=8}$; $\boldsymbol{y=7}$; $\boldsymbol{z=1}$; $\boldsymbol{t=8}$; $\boldsymbol{h=3}$. La combinaison cherchée est $\mathbf{87183}$

PROBLEME :

A// $\boldsymbol{\varphi(x)=(x^2+x+1)e^{-x}-1}$

1-/ a) $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=+\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=-1$; $y=-1$ est asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$

b) Calcul de $\boldsymbol{\varphi'(x)}$

$$\varphi'(x)=(2x+1)e^{-x}-e^{-x}(x^2+x+1)$$

$$\boxed{\varphi'(x) = e^{-x}(-x^2 + x)}$$

Signe de $\varphi'(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}\ e^{-x} > 0$, *le signe de* $\varphi'(x)$*est celui de* $(-x^2 + x)$

Le tableau de signe

x	$-\infty$ $+\infty$	0		1	
$\varphi'(x)$	-	0	+	0	-

$si\ x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[,\ \varphi'(x) < 0$

$si\ x \in [0; 1],\ \varphi'(x) \geq 0$

Le tableau de variation

x	$-\infty$	0		1	
$\varphi'(x)$	-	0	+	0	-
$\varphi(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗	$\frac{3}{e} - 1$	↘ -1

2 -/ $\varphi(0) = 0$ *d'ou`* 0 est solution

φ est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ d'où φ est bijective de $[1; +\infty[$ vers $\left]-1; -1 + \frac{3}{e}\right]$ d'où il existe $\alpha \in [1; +\infty[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$

$\varphi(1{,}79) = 9{,}610^{-4} > 0$ *et* $\varphi(1{,}80) = -0{,}001 < 0$ D'apres le theoreme des valeurs intermediaires $1{,}79 < \alpha < 1{,}80$

3/ le signe de φ sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $+\infty$		0		α	
$\varphi(x)$		+	0	+	0	-

B-// $f(x) = (2x+1)e^{-x}$; $g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

1-/ $Df = \mathbb{R}$ *et* $Dg = \mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

2-/ Montrons que C_f *et* C_g admettent au point $A(0;1)$ une tangente commune (T)

$f(0) = 1$ *et* $g(0) = 1; A \in C_f \cap C_g$

$f'(x) = 2e^{-x} - e^{-x}(2x+1)$

$f'(x) = e^{-x}(-2x+1)$

$g'(x) = \frac{2(x^2+x+1)-(2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

$f'(0) = 1$ *et* $g'(0) = 1$ soit $\begin{cases} f(0) = g(0) = 1 \\ f'(0) = g'(0) = 1 \end{cases}$ donc C_f *et* C_g admettent une tangente commune en A *et* $(T): y = x+1$ *est* l'equation de cette tangente.

3/ a) $f(x) - g(x) = (2x+1)e^{-x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

$$= \frac{(2x+1)[e^{-x}(x^2+x+1)-1]}{x^2+x+1} = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$$

b) le signe de $f(x) - g(x)$

x	$-\infty$ $+\infty$		$\frac{-1}{2}$		0		α	
$2x+1$		-	0	+		+		+
$\varphi(x)$		+	|	+	0	+	0	-
$f(x) - g(x)$		-	0	+	0	+	0	-

$\forall x \in \left]-\infty; \frac{-1}{2}\right[\cup]\alpha; +\infty[,\ f(x) - g(x) < 0$

$\forall x \in \left[\frac{-1}{2}; \alpha\right], f(x) - g(x) \geq 0$

C) Position relative des courbes C_f et C_g

Pour tout $x \in \left]-\infty; \frac{-1}{2}\right[\cup]\alpha; +\infty[$, (C_f) est en dessous de (C_g)

Pour tout $x \in \left]\frac{-1}{2}; 0\right[\cup]0; \alpha[$, (C_f) est au dessus de (C_g)

(C_f) et (C_g) se coupent en $\left\{\left(\frac{-1}{2}; 0\right), (0; 1), \left(\alpha; \frac{2\alpha+1}{\alpha^2+\alpha+1}\right)\right\}$

4-/ a) $\boxed{G(x) = ln(x^2 + x + 1)}$

b) $F'(x) = ae^{-x} - e^{-x}(ax + b) = e^{-x}(-ax + a + b)$

$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 2 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}$

$\boxed{F(x) = (-2x - 3)e^{-x}}$

C) Une primitive H de $f - g$ sur $\mathbb{R}$ est $H(x) = F(x) - G(x)$

$\boxed{H(x) = (-2x - 3)e^{-x} - ln(x^2 + x + 1)}$

d) $\int_{\frac{-1}{2}}^{0} [f(x) - g(x)]\, dx = [H(x)]_{\frac{-1}{2}}^{0}$

$= H(0) - H\left(\frac{-1}{2}\right) = -3 - ln1 - (-2e^{\frac{1}{2}} - ln\frac{3}{4}) = 0{,}0096$

L'aire est $0{,}0096\ Ua$

CORRIGE DU BAC 2014 TSE - STI

Exercice 1

Résolution du système(S) dans Z : $\begin{cases} x \equiv 10[23] \\ x \equiv 4[7] \end{cases}$

1°/ Détermination d'un couple d'entiers relatifs $(\alpha; \beta)$ solution de $23\alpha + 7\beta = 1$

- **Méthode de l'algorithme d'Euclide**

$1 = 7 + 2(-3)$

$1 = 7 + [23 + 7(-3)](-3)$

$1 = 23(-3) + 7(10)$

23	7	2
7	2	1
2	1	0

D'où le couple $(-3; 10)$ est une solution particulière de l'équation.

-Autre méthode

$23\alpha + 7\beta = 1 \iff 23\alpha \equiv 1[7]$

$\iff 2\alpha \equiv 1[7]$

$\iff \alpha \equiv 4[7] \iff \alpha = 7k + 4 \quad k \in Z$

Si $k = 0$ alors $\alpha = 4$ et $\beta = -13$ d'où $(4; -13)$ est aussi solution. ***1 point***

***NB** : toute autre solution proposée par l'élève devra vérifier l'équation proposée.*

2° / En déduisons un couple $(u_0; v_0)$ solution de l'équation (E) : $23u - 7v = -6$

1ère Méthode : $23(-3) + 7(10) = 1$

$\iff 23(18) - 7(60) = -6 \implies (u_0; v_0) = (18; 60)$ ***0,50 point***

2ème Méthode : $23\alpha + 7\beta = 1$

$\implies 23(-6\alpha) - 7(6\beta) = -6$

$\implies 23u - 7v = -6$ avec $u = -6\alpha$ et $v = -6\beta$

Pour $\alpha = -3$ et $\beta = 10$ on a $u_0 = 18$ et $v_0 = 60$

Résolvons complètement (E) : $\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ 23u_0 - 7v_0 = -6 \end{cases}$ faisons la différence membre à membre on obtient $23(u - u_0) - 7(v - v_0) = 0$

$$23(u - u_0) = 7(v - v_0)$$

Comme 23 et 7 sont premiers entre eux, alors d'après le théorème de Gauss

$23/v - v_0$ et $7/u - u_0$, $\exists k \in Z$ / $v - v_0 = 23k$ et $u - u_0 = 7k$

$v = 23k + v_0$ $u = 7k + u_0$

1 point

D'où $S_{(E)} = \{(7k + u_0; 23k + v_0)\}$ $k \in Z\}$

3°/ Démontrons que :

x est solution de (E) <=> $\exists(u; v) \in Z^2$ vérifiant $\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 10 + 23u \end{cases}$

x solution de (S) <=> $\begin{cases} x = 10 + 23p & p \in Z \\ x = 4 + 7q & q \in Z \end{cases}$

$x = x$ <=> $10 + 23p = 4 + 7q$

<=> $23p - 7q = -6$ $x = 10 + 23q$

En prenant $p = u$ et $q = v$ on obtient $\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 10 + 23u \end{cases}$ Cqfd **1 point**

En déduisons l'ensemble solution de (S)

Comme $u = 7k + 18$, $k \in Z$, on a $x = 10 + 23(7k + 18)$

$x = 161k + 424$

$S = \{161k + 424;\ k \in Z\}$ **1 point**

4°/ Détermination de la plus petite solution (entier naturel) de (S) divisible par 16

$\begin{cases} x = 161k + 424 \\ x \equiv 0[16] \end{cases}$ <=> $161k + 424 \equiv 0[16]$ <=> $k + 8 \equiv 0[16]$

<=> $k \equiv 8[16]$

La valeur de k à prendre est 8. Donc $x = 1712$.

Le plus petit entier naturel vérifiant la condition est **1712.** **0,50 point**

Exercice 2

$A(2-4i)$; $B(-i)$; $M(z)$ et $M'(z')$ avec $z' = \frac{-iz-2+4i}{z+i}$, $z \neq i$

1) Exprimons les coordonnées $(x';y')$ de M' en fonction de celles $(x;y)$ de M.

$$z' = \frac{-iz-2+4i}{z+i} \quad <=> \quad x'+y'i = \frac{-i(x+yi)-2+4i}{(x+yi)+i}$$

$$<=> \quad x'+y'i = \frac{-3x+4y+4}{x^2+(y+1)^2} + i\frac{-x^2-y^2+4x+y+2}{x^2+(y+1)^2}$$

D'où $x' = \frac{-3x+4y+4}{x^2+(y+1)^2}$ et $y' = \frac{-x^2-y^2+4x+y+2}{x^2+(y+1)^2}$ ***1 point***

2) Déterminons et représentons l'ensemble des points M tels que :

a) z' soit un réel :

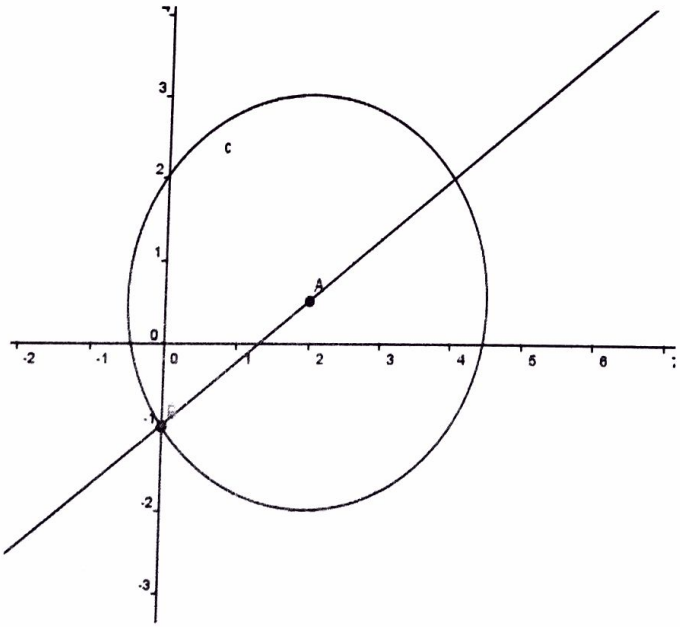
z' est un réel $<=> \begin{cases} -x^2-y^2+4x+y+2=0 \\ x^2+(y+1)^2 \neq 0 \end{cases}$

$<=> \begin{cases} (x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \\ (x;\ y) \neq (0;\ -1) \end{cases}$

L'ensemble des points M est le cercle de centre $I(2;\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{5}{2}$ privé du point $B(0;-1)$. ***1 point***

b) z' soit un imaginaire pur :

z' est un imaginaire pur $<=> \begin{cases} -3x+4y+4=0 \\ x^2+(y+1)^2 \neq 0 \end{cases}$ d'où **l'ensemble des points M est la droite d'équation $-3x+4y+4=0$ privée du point $B(0;-1)$** ***1 point***



3) On pose $Z = z + i$ et $Z' = z' + i$

$ZZ' = (z+i)(z'+i) = (z+i)\left(\frac{-iz-2+4i}{z+i} + i\right) = -iz - 2 + 4i + iz - 1$

On obtient bien $ZZ' = -3 + 4i$ d'où $|ZZ'| = \sqrt{9+16}$ => $|ZZ'| = 5$ **1 point**

4) a) Détermination de l'ensemble des points M' lorsque M décrit un cercle de centre B et de rayon $r > 0$.

$M \in C_{(B,r)}$ <=> $|z + i| = r$ On sait que $(z+i)(z'+i) = ZZ'$

Donc $|z+i||z'+i| = |ZZ'|$ D'où $|z'+1| = \frac{5}{r}$

M' décrit le cercle de centre B et de rayon $\frac{5}{r}$. ***0,50 point***

c) Déterminons r pour que M et M' soient sur le même cercle. ***0,50 point***

M et M' sont sur le même cercle <=> $r = \frac{5}{r}$ <=> $r^2 = 5$ <=> $r = \sqrt{5}$

Problème

A// $f(x) = e^{2x} - 2e^x$

1°/ $D_f = IR =]-\infty; +\infty[$; $\lim_{-\infty} f(x) = 0$; $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x = 2(e^x - 1)e^x$; $\forall x \in IR,\ 2e^x > 0$ $f'(x) \geq 0$ <=> $e^x - 1 \geq 0$

<=> $x \geq 0$ d'où $\begin{cases} f'(x) > 0 & si\ x > 0 \\ f'(x) < 0 & si\ x < 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$; $f(0) = -1$; $f(ln2) = e^{2ln2} - 2e^{ln2} = 0$

On a alors le tableau de variation **1 point**

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+		+	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$

2°/ Equation de la tangente T à (C) au point d'abscisse –ln2

$f(-ln2) = f\left(ln\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$; $f'(-ln2) = 2\left(\frac{1}{4}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

$y = f'(-ln2)(x + ln2) + f(-ln2)$. D'où **(T) : $y = -\frac{1}{2}(x + ln2) - \frac{3}{4}$** ***0,50pt***

3°/ $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}(x + ln2) + \frac{3}{4}$

a) Détermination de $g'(x)$ et $g''(x)$ pour tout réel x :

$D_g = IR$; $g'(x) = f'(x) + \frac{1}{2}$ => $g'(x) = 2e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}$

$D_{g'} = IR$; $g''(x) = f''(x)$ => $g''(x) = 4e^{2x} - 2e^x$ **0,50 point**

b) Signe de $g''(x)$ $g''(x) = 2(2e^x - 1)e^x$

$\forall x \in IR$, $2e^x > 0$ donc $g''(x) \geq 0$ <=> $2e^x - 1 \geq 0$ <=> $x \geq -ln2$

On a alors le tableau de variation de $g'(x)$

Tableau de variation :

x	$-\infty$		$-ln2$		$+\infty$
$g''(x)$		-	0	+	
$g'(x)$	1/2	↘	0	↗	$+\infty$

D'après les variations de g', pour tout réel x, $g'(x) \geq g'(-ln2)$ donc $g'(x) \geq 0$; la fonction g est alors strictement croissante sur IR.

On a $g(-ln2) = f(-ln2) + \frac{1}{2}(-ln2 + ln2) + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0$ **1 point**

Puisque $g(-ln2) = 0$ et g est continue et strictement croissante sur IR, alors pour tout réel $x < -ln2$, $g(x) < 0$ et pour tout réel $x > -ln2$, $g(x) > 0$.

x	$-\infty$		$-ln2$		$+\infty$
$g(x)$		−	0	+	

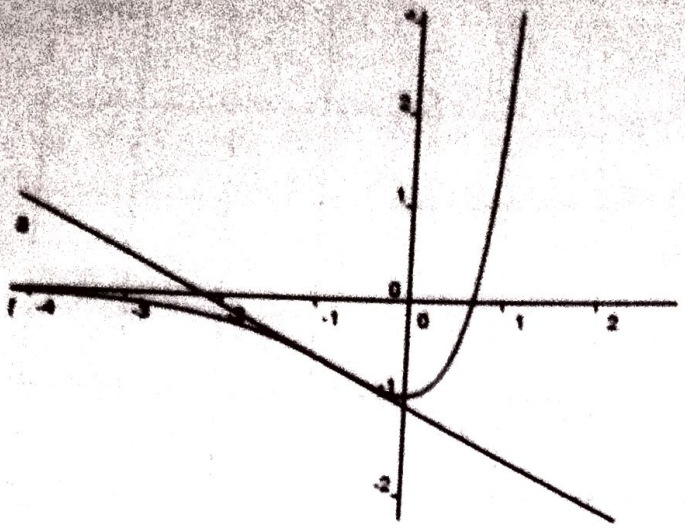
c) Position de (C) par rapport à (T)

(T) : $y = -\frac{1}{2}(x + ln2) - \frac{3}{4}$; $f(x) - y = f(x) + \frac{1}{2}(x + ln2) + \frac{3}{4} = g(x)$

On a alors le tableau de position **0,50 point**

x	$-\infty$		$-ln2$		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	
Position	T/C				C/T

4°/ Traçons (C) et (T)



0,75 point

B// $f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$, $n \in IR$; $D_{f_n} = IR - \{-1\}$

Pour tout $n \in IN$, posons $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ $<=> \frac{e^x}{(x+1)^{n+1}} = \frac{e^x}{(x+1)^n}$

$<=> (x+1)^{n+1} = (x+1)^n$ $<=> (x+1)^n(x+1-1) = 0$

$<=> x(x+1)^n = 0$ $<=>$ $x = 0$ (car $x + 1 \neq 0$, $\forall x \in D_{f_n}$)

$f_n(0) = 1$ d'où $\forall n \in IN$, $f_n(0) = 1$ => toutes les courbes (C_n) passent par le point $A\binom{0}{1}$

0,50 point

C// $h(x) = \frac{1}{e-1}e^x - x - \frac{1}{e-1}$; $D_h = IR$

1°/ a) $h(0) = 0$; $h(1) = 0$ $h(2) = e - 1$ **0,50 point**

b) $h'(x) = \frac{e^x}{e-1} - 1 = \frac{e^x - e + 1}{e-1}$; $h'(x) \geq 0$ => $e^x - e + 1 \geq 0$

=> $e^x \geq e - 1$ => $x \geq \ln(e-1)$

$h[\ln(e-1)] = 1 - \ln(e-1) - \frac{1}{e-1} \approx -0{,}12$

$\lim_{-\infty} h(x) = +\infty$ $\lim_{+\infty} h(x) = +\infty$

D'où le tableau de variation: **0,75 point**

x	$-\infty$	0	$\ln(e-1)$	1	$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$	$+\infty$	0	-0,12	0	$+\infty$

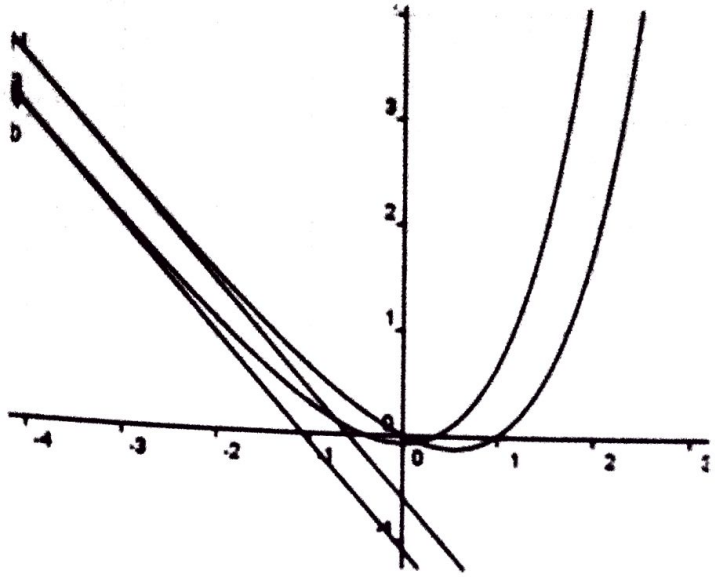
C) $h(x) = -x - \frac{1}{e-1} + \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) = \frac{e^x}{e-1}$ et $\lim_{-\infty} \varepsilon(x) = 0$

La courbe (H) de h admet une asymptote oblique à $-\infty$ d'équation :

$y = -x - \frac{1}{e-1}$ **0,25 pt**

d) D'après les variations de h, pour tout réel x, $h(0) = 0$ et $h(1) = 0$ d'où $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$, $h(x) > 0$ et $\forall x \in [0; 1]$, $h(x) \leq 0$ **0,5 pt**

2°/ Traçons la courbe (H)



0,50 point

3°/ $\varphi(x) = e^x - x - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1}$; $D_\varphi = IR$

a) $\varphi'(x) = e^x - 1$ $\varphi'(x) \geq 0$ $<=>$ $x \geq 0$

Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\varphi(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

φ est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et est croissante sur $[0; +\infty[$

$\lim_{-\infty} \varphi(x) = +\infty$ $\lim_{+\infty} \varphi(x) = +\infty$

0,50point

b) $\varphi(x) = -x - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1} + \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) = e^x$ avec $\lim_{-\infty} \varepsilon(x) = 0$

D'où la droite d'équation $y = -x - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1}$ est asymptote oblique à (τ) en $-\infty$ **0,50 point**

c) $h(x) - \varphi(x) = \frac{(2-e)e^x}{e-1} + \frac{1}{2}$; $\quad h(x) - \varphi(x) \geq 0 \quad <=> \quad \frac{(2-e)e^x}{e-1} + \frac{1}{2} \geq 0$

$<=> \quad e^x \leq \frac{1-e}{2(2-e)} \quad <=> \quad x \leq \ln(\frac{1-e}{4-2e}) \approx 0{,}18$

donc (H) est au dessus de (τ) si $x \leq 0,18$

(H) est en dessous de (τ) si $x \leq 0,18$ **0,50 point**

d) Représentation de (τ) *(voir figure)*

$$\varphi(0) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1} = -0{,}08$$ **0,50 point**

4°/ a) $\int_x^{x+1} h(t)dt = \int_x^{x+1} (\frac{e^t}{e-1} - t - \frac{1}{e-1})dt = [\frac{e^t}{e-1} - \frac{t2}{2} - \frac{t}{e-1}]_x^{x+1} = e^x - x - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1}$

D'où $\int_x^{x+1} h(t)dt = \varphi(x)$ **0,50 point**

b) $\varphi(x)$ est en unité d'aire l'aire du domaine compris entre (H), l'axe des abscisses et les droites parallèles à l'axe $(O;\ \vec{\imath})$ passant par les points de coordonnées $(x;\ 0)$ et $(x+1;\ 0)$. **0,25 point**