

S	Série : SCIENTIFIQUE Options : S Code matière : 009	Epreuve : MATHÉMATIQUES Durée : 04 heures Coefficient : 6
------------	---	---

-----◇◇≈m◇◇×□◆m-----

NB : - Le candidat doit traiter les deux (02) exercices et les deux (02) problèmes.

- Machine à calculer scientifique non programmable autorisée.

Exercice 1 : (03 points)

Partie A :

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre 3 définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) a) Calculer $A \times B$ et $B \times A$ (0,25pt x 2)

b) Que peut-on en conclure pour les deux matrices A et B ? (0,25pt)

2) On considère le système (S) :

$$\begin{cases} y - z = -3 \\ x + 3z = 17 \\ x + y + z = 11 \end{cases}$$

a- Ecrire ce système sous forme matricielle : $AX = Y$ (0,25pt)

b- Déterminer la matrice X . (0,5pt)

Partie B :

1°/- Déterminer le reste de la division de 7×3^{359} par 11. (0,5pt)

2°/a)- Donner une solution particulière de l'équation : $23x - 17y = 1$. (0,25pt)

b)- En déduire la résolution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation : $23x - 17y = 2$ (0,75pt)

Exercice 2 : (02 points)

Dans l'espace muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1°/- Ecrire une équation paramétrique de la droite (D) passant par le point $A(2; -1; 3)$ et

de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (0,25pt)

2°/- Soit (D') la droite l'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = 5t - 8 \\ z = -2t + 6 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a/- Montrer que (D) et (D') sont orthogonaux. (0,75pt)

b/- Déterminer les coordonnées du point I intersection de (D) et (D') . (0,25pt)

3°/- Ecrire une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ contenant les deux droites (D) et (D') . (0,75pt)

Problème 1 (07 points)

Le plan $(\mathcal{P})$ étant orienté. On considère un carré direct $ABCD$ de centre O tel que $AB = 4\text{cm}$.

I étant le point définie par $\vec{AI} = \frac{2}{3}\vec{AB}$. Soit J un point tel que AJO est un triangle

rectangle en A avec $(\vec{AJ}; \vec{AO}) = \frac{\pi}{2}$ et $AJ = 4\sqrt{2}\text{cm}$

On note par r : la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

h : l'homothétie de centre I et de rapport -2

On pose $S = h \circ r$

Partie A :

1°/- Faire une figure et construire les points I et J (0,25pt x 2)

2°/-a. Déterminer et construire le point $G = \text{bar} \{(J; 1); (O; -4)\}$ (0,25pt x 2)

b. Déterminer et construire l'ensemble $(\Gamma) = \{M \in (\mathcal{P}) / MJ^2 - 4MO^2 = 0\}$ (0,25pt x 2)

3°/- Déterminer et construire l'ensemble $(C) = \{M \in (\mathcal{P}) / \vec{MO} \cdot \vec{MJ} = 0\}$ (0,25pt x 2)

4°/-a. Déterminer le rapport et un angle de S (0,25pt x 2)

b. Calculer $S(A)$. Conclure (0,25pt+0,25pt)

c. Montrer que le point A est un point d'intersection de (C) et (Γ) (0,75pt)

Partie B :

Le plan $(\mathcal{P})$ est maintenant muni d'un repère orthonormé direct $(A; \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

1°/-Déterminer l'affixe des points O, I, J et G (0,25pt x 4)

2°/a. Déterminer l'expression complexe de r et h (0,25pt x 2)

b. En déduire l'expression complexe, la nature et les éléments caractéristiques de S (0,25pt x 4)

3°/- Montrer que le point A est un point d'intersection de (Γ) et (C) (0,75pt)

Problème 2 : (08 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-x} - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x(1 - \ln x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Notons par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm.

Partie I :

1°/ Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$ (0,25pt+0,75pt)

2°/a. Etudier les variations de f sur $]-\infty; 0]$ et sur $]0; +\infty[$. (0,5pt x 2)

b. Dresser le tableau de variation de f sur $]-\infty; +\infty[$ (1pt)

3°/ Etudier les branches infinies de (C) (0,25pt x 2)

4°/ Construire la courbe (C) en précisant la tangente ou les demi-tangentes au point d'abscisse $x_0 = 0$ (1,25pt)

Partie II :

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* : U_n = \frac{1}{n!} \int_{-1}^0 (x+1)^n e^{-x} dx$

1°/a- Calculer U_1 (0,25pt)

b- Interpréter géométriquement ce résultat. (0,25pt)

2°/a- En utilisant un encadrement de e^{-x} sur l'intervalle $[-1; 0]$, donner un encadrement de U_n (0,75pt)

b- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ (0,25pt)

3°/- En utilisant une intégration par parties, vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^* : U_{n+1} = U_n - \frac{1}{(n+1)!}$ (0,25pt)

4°/- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$ (1,5pt)