

Exercice 1

On considère l'équation : (E) : $z^3 - 9z^2 + (22 + 12i)z - 12 - 36i = 0$

- 1) Démontrer que l'équation (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2 .
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
- 3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 3$, $z_B = 2i$ et $z_C = 6 - 2i$
 - a) Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
 - b) Montrer que : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel. Que peut-on en déduire ?
 - c) Soit S la similitude directe plane d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$ transformant A en B. Donner l'écriture complexe de S et préciser son centre Ω .

Exercice 2

On considère la suite numérique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$U_0 = 1, U_1 = 2 \text{ et } U_{n+2} = \sqrt{U_{n+1} \times U_n}$$

- 1) Calculer U_2 , U_3 et U_4 .
- 2) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \ln U_n$.

Montrer que la suite (v_n) vérifie pour tout entier naturel n : $v_{n+2} = \frac{1}{2}(v_{n+1} + v_n)$

- 3) On définit les suites (x_n) et (y_n) par $x_n = v_{n+1} - v_n$ et $y_n = v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n$
 - a) Montrer que, (x_n) est suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$
 - b) Montrer que, (y_n) est suite constante.
 - c) Vérifier que $v_n = \frac{2}{3}(y_n - x_n)$ puis en déduire l'expression de v_n en fonction de n.
- 4) a) Montrer que $U_n = \left[e^{\frac{2}{3} \ln 2} \right]^{1 - (-\frac{1}{2})^n}$
 - b) En déduire que (U_n) converge et calculer sa limite.

Problème

Partie A

Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 2x^2 + \ln x$

- 1) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
- 2) a) Montrer que $g(x) = 0$ admet une et une seule solution α sur $]0, +\infty[$
b) Montrer que $0.548 < \alpha < 0.549$
- 3) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 - x + \frac{1+\ln x}{2x}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ayant comme unité graphique 4 cm.

- 1) a) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 1 - x$ est asymptote à (C). Etudier la position de (C) par rapport à l'asymptote (D).
- 2) a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{-g(x)}{2x^2}$
b) Dresser le tableau de variation de f
- 3) a) Montrer que $f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{1}{2\alpha}$
b) Donner alors un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.
- 4) a) Calculer les coordonnées du point de (C) où la tangente est parallèle à (D). Donner une équation de cette tangente T.
b) Tracer (C), (D) et (T) dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
c) Soit λ un réel supérieur à $\frac{1}{e}$. Déterminer l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre (C), (D) et les droites d'équation $x = \frac{1}{e}$ et $x = \lambda$

Calculer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.