

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE	BACCALAUREAT 2011 MATHÉMATIQUES	DURÉE : 4 H Coef. : 3
OFFICE DU BACCALAUREAT	SÉRIE D	

Exercice 1 (3,5 points)

SESSION NORMALE

Une entreprise fabrique des appareils électroniques. La probabilité pour qu'un appareil fabriqué fonctionne parfaitement est $9/10$.

1. On note F l'événement « l'appareil fonctionne parfaitement » et $\bar{F}$ l'événement contraire de F . Calculer la probabilité de l'événement $\bar{F}$. (0,5 pt)

2. On fait subir à chaque appareil un test avant sa livraison ; on constate que :

- quand un appareil est en parfait état de fonctionnement, il est toujours accepté à l'issue du test.
- quand un appareil n'est pas en parfait état de fonctionnement, il peut être néanmoins accepté avec une probabilité de $1/11$.

On note T l'événement : « l'appareil est accepté à l'issue du test ».

- Montrer que la probabilité de l'événement T et F noté $T \cap F$ est égale à $9/10$. (0,75 pt)
- Calculer la probabilité de $T \cap \bar{F}$. (0,75 pt)
- En déduire la probabilité de l'événement T . (0,75 pt)
- Calculer la probabilité de $\bar{F}$ sachant T (probabilité conditionnelle de $\bar{F}$ par rapport à T). (0,75 pt)

Exercice 2 (4,5 points)

EPREUVES - TG. COM

Soit $P(Z) = Z^3 - \alpha Z^2 + \beta Z - \gamma$ un polynôme complexe de degré 3 où α , β et γ sont des nombres complexes donnés.

1. a. Démontrer que si le polynôme $P(Z)$ admet trois racines a , b et c alors on a simultanément.
 $a + b + c = \alpha$, $ab + bc + ac = \beta$ et $abc = -\gamma$. (0,75 pt)

b. Former alors le polynôme $P(Z)$ lorsque ses racines sont :

$$a = 1 + 3i\sqrt{3}, \quad b = -2 - i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad c = 4 - 2i\sqrt{3}. \quad (0,75 \text{ pt})$$

2. On désigne par A , B et C les points d'abscisses respectives a , b et c dans le plan complexe muni d'un repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

a. Montrer que le triangle ABC est rectangle en B . (0,5 pt)

b. Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $\frac{c-a}{b-a}$. (0,75 pt)

c. En déduire la valeur de $\frac{AC}{AB}$ et la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{AB, AC})$. (0,5 pt)

3. a. Donner l'écriture complexe de la similitude directe s de centre A qui transforme B en C . (0,75 pt)

b. Déterminer l'abscisse z_I du point B_I qui a pour image B par s . (0,5 pt)

Problème (12 points)

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = -x^2 + 6 - 4\ln x$.

- Etudier le sens de variation de g . (0,75 pt)
- Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$ puis dresser le tableau de variation de g . (0,75 pt)

Partie A (5 pts)

1-a/ Etudier la limite de f_k en $+\infty$.

(0,25 pt)

b/ Etudier, suivant la parité de k , la limite de f_k en $-\infty$.

(0,5 pt)

2- Calculer la fonction dérivée de f_k , puis montrer que pour tout x réel, $f'_k(x) = x^{k-1}g_k(x)$ où

$$g_k(x) = (k-x)e^{-x} - \frac{k}{2}.$$

(0,5 pt)

3- a/ Etudier les variations de g_k .

(1,25 pts)

b/ En déduire que l'équation $g_k(x) = 0$, admet une unique solution α_k dans $\mathbb{R}$ et que α_k est strictement positif.

(0,75 pt)

c/ Déterminer le signe de g_k sur $\mathbb{R}$.

(0,25 pt)

En déduire le signe de f'_k sur $\mathbb{R}$ (distinguer k pair et k impair).

(0,5 pt)

d/ Dresser le tableau de variation de f_k .

(1 pt)

Partie B (7 pts)

Dans cette partie, on prend $k = 1$. Donc $f_1(x) = xe^{-x} - \frac{x}{2}$ et $g_1(x) = (1-x)e^{-x} - \frac{1}{2}$.

1-a/ Montrer que $0 < \alpha_1 < \frac{1}{2}$.

(0,25 pt)

b/ En utilisant g_1 , montrer que $e^{-\alpha_1} = \frac{1}{2(1-\alpha_1)}$.

(0,25 pt)

En déduire l'expression de $f_1(\alpha_1)$ ne contenant pas $e^{-\alpha_1}$.

(0,25 pt)

c/ Déduire de A-3d/ le tableau de variation de f_1 .

(0,25 pt)

2- Montrer que la courbe (C_1) possède une asymptote (D) en $+\infty$ dont on précisera une équation.

(0,25 pt)

3- Soit la fonction φ définie sur $[0; \frac{1}{2}]$ par $\varphi(x) = 1 - \frac{e^x}{2}$.

a/ Démontrer que α_1 est l'unique solution de l'équation : $\varphi(x) = x$.

(0,25 pt)

✓ b/ Démontrer que pour tout x élément de $[0; \frac{1}{2}]$, $\varphi(x)$ est aussi élément de $[0; \frac{1}{2}]$.

(0,5 pt)

c/ Démontrer que pour tout x élément de $[0; \frac{1}{2}]$, on a : $|\varphi'(x)| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}$.

(0,25 pt)

4- On définit la suite numérique (U_n) par :

$$U_0 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n, U_{n+1} = \varphi(U_n).$$

a/ Démontrer que (U_n) est une suite d'éléments de $[0; \frac{1}{2}]$.

(0,5 pt)

b/ Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$|U_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{\sqrt{e}}{2} |U_n - \alpha_1|.$$

(0,5 pt)

c/ Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $|U_n - \alpha_1| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^n$.

(0,75 pt)

En déduire que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.

(0,5 pt)

5-a/ Etudier le signe de f_1 sur $\mathbb{R}$.

(0,25 pt)

b/ On donne $\alpha_1 \approx 0,315$. Construire (C_1) et (D) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1,25 pts)

6-a/ Déterminer les nombres réels a et b tels que, la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par

$$H(x) = (ax + b)e^{-x} \text{ soit une primitive de la fonction : } x \mapsto xe^{-x}.$$

(0,5 pt)

b/ Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_1) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

(0,5 pt)