

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	BACCALAUREAT 2017 MATHÉMATIQUES	DURÉE : 4 H Coef. : 3
OFFICE DU BACCALAUREAT	SÉRIE D	

SESSION NORMALE

Exercice 1 (3,5 points)

1- On considère un plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A tout couple (x, y) de réels, on associe le point M de P de coordonnées x et y , en convenant que 2 cm représentent 5 sur chaque axe.

Représenter dans P l'ensemble G des points $M(x, y)$ satisfaisant aux inéquations (Σ) :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \geq 90 \\ x + 3y \geq 60 \\ 4x + 3y \geq 120 \end{cases}$$

EPREUVES - TG. COM

On hachurera la partie du plan formée des points pour lesquels les contraintes ne sont pas vérifiées. (1 pt)

2- Le gérant d'un hôtel souhaite renouveler le linge de toilette de son établissement. Il a besoin de 90 draps de bain, 240 serviettes et 240 gants de toilette.

Une première entreprise de vente lui propose un lot A comprenant 2 draps de bain, 4 serviettes et 8 gants de toilette pour 200 F.

Une deuxième entreprise vend pour 400 F un lot B de 3 draps de bain, 12 serviettes et 6 gants de toilette.

a/ Pour répondre à ses besoins, le gérant achète x lots de A et y lots de B.

Exprimer en fonction de x et y la dépense en francs occasionnée par l'achat de x lots de A et y lots de B. (0,25 pt)

b/ Justifier que (Σ) est le système de contraintes lié au renouvellement du linge. (0,75 pt)

c/ Est-il possible de procéder aux achats nécessaires avec 5.000 F ? On justifiera la réponse. (0,5 pt)

d/ Déterminer graphiquement, en précisant la démarche choisie, le nombre de lots A et B à acheter pour avoir une dépense minimale ? Quelle est cette dépense minimale ? (1 pt)

Exercice 2 (5,5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points A, B, et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 3 + i\sqrt{3}$ et $c = 2i\sqrt{3}$.

1- a/ Calculer $\frac{a-b}{c-b}$ et en déduire que le triangle ABC est rectangle. (0,5 pt)

b/ Déterminer l'affixe du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC. (0,75 pt)

2- On note $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite de nombres complexes, de premier terme $z_0 = 0$ et A_n , le point d'affixe z_n telle que :

$$z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 2.$$

a/ Déterminer les affixes des points A_3 et A_4 , sachant que $A_1 = A$ et $A_2 = B$. (0,5 pt)

b/ Comparer les longueurs des segments $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$. (0,75 pt)

c/ Etablir que pour tout entier naturel n , on a :

$$z_{n+1} - \omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} (z_n - \omega) \text{ où } \omega = 1 + i\sqrt{3}. \quad (0,5 \text{ pt})$$

d/ En déduire que le point A_{n+1} est l'image du point A_n par une transformation dont on précisera les éléments caractéristiques. (0,75 pt)

e/ Justifier que pour tout entier naturel n , on a : $A_{n+6} = A_n$.
Déterminer l'affixe du point A_{2017} . (0,75 pt)

3- a/ Démontrer que, pour tout entier naturel n , $z_{n+1} - z_n = 2\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$. (0,5 pt)

b/ Déterminer, pour tout entier naturel n , la longueur du segment $[A_n A_{n+1}]$. (0,5 pt)

Problème (11 points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln x$.

1- Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation. (1,25 pts)

2-a/ Montrer qu'il existe un nombre réel unique α tel que $g(\alpha) = 0$.

Vérifier que $0,65 < \alpha < 0,66$. (0,75 pt)

b/ En déduire selon les valeurs de x , le signe de $g(x)$. (0,5 pt)

3- A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_{e^{-1}}^1 g(x) dx$. (0,75 pt)

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 - x + \frac{1 + \ln x}{x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ayant comme unité graphique 2 cm.

1-a/ Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, puis en donner une interprétation graphique. (0,5 pt)

b/ Calculer la limite de f en $+\infty$. (0,25 pt)

c/ Montrer que la droite $(D) : y = -x + 1$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à (D) . (0,75 pt)

2- Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation ; (on pourra utiliser la fonction g définie dans la partie A). (0,75 pt)

3-a/ Montrer que $f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$. (0,25 pt)

b/ Montrer que la fonction h définie par $h(x) = 1 - 2x + \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$. (0,5 pt)

c/ En déduire que $f(\alpha) < h(0,65)$. (0,25 pt)

d/ Montrer que $f(\alpha) > f(0,65)$. (0,25 pt)

e/ En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à $2 \cdot 10^{-2}$ près. (0,5 pt)

4- Calculer les coordonnées du point A de (C) où la tangente est parallèle à (D) .

Donner une équation de cette tangente (T) . (0,75 pt)

5- Tracer (D) , (T) et (C) . (1,25 pts)

6- Soit k la restriction de f sur $[\alpha, +\infty[$.

a/ Montrer que k définit une bijection de $[\alpha, +\infty[$ sur un intervalle à préciser. (0,25 pt)

b/ Préciser l'ensemble de dérivabilité de la bijection k^{-1} . Justifier. (0,25 pt)

c/ Donner le sens de variation de k^{-1} puis dresser son tableau de variation. (0,5 pt)

d/ Calculer le nombre dérivé $(k^{-1})'(1)$. (0,25 pt)

e/ Tracer la courbe $C_{k^{-1}}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (0,5 pt)