

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE	BACCALAUREAT 2018	DURÉE : 4 H
OFFICE DU BACCALAUREAT	MATHÉMATIQUES	Coef. : 3
	SÉRIE D	

SESSION NORMALE

Exercice 1 (4,5 points)

1-a/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^2 + 2Z + 2 = 0$.

On désigne par z_1 la solution de (E) dont la partie imaginaire est négative et par z_2 l'autre solution. (0,5 pt)

b/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique

2 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et $z_3 = \sqrt{3} - 1$.

Placer les points A, B, C. (0,5 pt)

c/ Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $z = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$. (0,75 pt)

d/ En déduire la nature du triangle ABC. (0,25 pt)

2- Trouver les fonctions numériques f , deux fois dérivables telles que :

$f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$, où f' et f'' sont les dérivées première et seconde de f . (0,5 pt)

3- On considère l'équation différentielle :

(1) : $ay'' + by' + cy = 0$ où a, b et c sont des entiers naturels appartenant à l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

On dispose de trois urnes contenant chacune 6 boules identiques numérotées de 1 à 6. On tire au hasard une boule de chaque urne et on note le numéro de la boule tirée. La première urne donne la valeur de a , la deuxième celle de b et la troisième urne la valeur de c .

a/ On suppose que $b = c = 2a$. Soient les fonctions $F : x \mapsto (A \cos x + B \sin x) e^{-x}$ où A et B sont des nombres réels. Justifier que les fonctions F sont solutions de l'équation (1). (0,25 pt)

b/ Déterminer l'ensemble des triplets (a, b, c) pour que F soient solutions de (1). (1 pt)

c/ Montrer que la probabilité pour qu'on ait le triplet $(1, 2, 2)$ est égale à $\frac{1}{216}$. (0,25 pt)

4- Déterminer la probabilité pour que F soient solutions de (1). (0,5 pt)

Exercice 2 (4,5 points)

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \int_0^1 (1-u)^n \sqrt{u} du$.

1-a/ Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$. (0,25 pt)

b/ Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n = \int_1^0 (1-u)^n u^{3/2} du$ et en déduire le sens de variation de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$. (1 pt)

2- Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. (0,25 pt)

3-a/ Vérifier que la dérivée de la fonction : $u \mapsto u^{3/2}$ sur $[0; 1]$ est la fonction $u \mapsto \frac{3}{2} \sqrt{u}$. (0,5 pt)

b/ Calculer I_0 et I_1 . (0,75 pt)

c/ En utilisant la question 1-b/, démontrer à l'aide d'une intégration par parties, que

$$I_n = \frac{2n+5}{2n+2} I_{n+1}. \quad (0,75 \text{ pt})$$

4-a/ En déduire l'expression de I_n en fonction de I_0 et de n . (0,5 pt)

b/ Calculer I_4 . (0,5 pt)

Problème (11 points)

Partie A (2,25 points)

On considère une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-1)e^{x-1} - 1$.

- 1-a/ Justifier que la limite de g en $-\infty$ est -1 . (0,25 pt)
- b/ Déterminer la limite de g en $+\infty$. (0,25 pt)
- 2-a/ Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g'(x) = xe^{x-1}$. (0,25 pt)
- b/ Etudier le sens de variations de g et dresser son tableau de variation. (0,75 pt)
- 3-a/ Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $\left] \frac{3}{2}; 2 \right[$. (0,5 pt)
- b/ Vérifier que $\alpha \in]1,56; 1,57[$. (0,25 pt)

Partie B (6,75 points)

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)e^{x-1} - x + 1$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique 2 cm.

- 1- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (0,5 pt)
- 2-a/ Démontrer que f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$. (0,25 pt)
- b/ Etudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variation. (0,75 pt)
- 3-a/ Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$. (0,25 pt)
- b/ Etudier les positions relatives de (C) et (D) . (0,5 pt)
- 4- Démontrer que (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction. (0,5 pt)
- 5- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse -1 . (0,5 pt)
- 6- Démontrer que $f(\alpha) = 2 - \alpha - \frac{1}{\alpha-1}$. (0,5 pt)
- 7- Montrer que $f(\alpha)$ est négatif. (0,25 pt)
- 8- En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions strictement positives. (0,5 pt)
- 9- Tracer (D) , (T) et (C) . (1,25 pts)
- 10- Soit λ un élément de $] -\infty, 2[$ et $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C) , la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 2$.
 - a/ A l'aide d'une intégration par parties, calculer $A(\lambda)$. (0,75 pt)
 - b/ Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $-\infty$. (0,25 pt)

Partie C (2 points)

Soit h la restriction de f à l'intervalle $] -\infty, \alpha]$.

- 1- Démontrer que h est une bijection sur un intervalle J à préciser. (0,75 pt)
- 2- Soit h^{-1} la bijection réciproque de h .
 - a/ Préciser l'ensemble de dérivabilité de h^{-1} , puis dresser son tableau de variation. (0,75 pt)
 - b/ Construire la courbe (C') de h^{-1} dans le même repère que (C) . (0,5 pt)