

GROUPE SCOLAIRE CLAIRE FONTAINE ANNEE SCOLAIRE : 2025-2026	BACCALAUREAT BLANC EPREUVE DE MATHÉMATIQUE	SERIE : TSE DUREE : 4 Heures COEF : 4
---	---	--

Le sujet est composé de deux exercices et un problème tous obligatoires. (Vérifier que vous avez toutes les parties du sujet). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies. Les calculatrices non programmables sont autorisées.

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. on considère le polynôme complexe z défini par : $P(z) = z^3 - (7 + 3i)z^2 + (12 + 15i)z - 4 - 18i$.

1)a) Calculer $P(2)$ et déterminer les nombres complexes a et b tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C} : P(z) = (z - 2)(z^2 + az + b). \quad (0,75 \text{ pt})$$

b) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$. (0,5 pt)

2) On considère les points A , B et D images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ tels que $\text{Im}(z_A) \leq \text{Im}(z_B) \leq \text{Im}(z_D)$.

Déterminer la nature du triangle ABD . (0,5 pt)

3)a) Déterminer le barycentre du système $\{(A; 9), (B; -6), (C; 2)\}$, où C est le symétrique de A par rapport à (BD) . (0,5 pt)

b) Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que :

$$9MA^2 - 6MB^2 + 2MC^2 = -10. \quad (0,5 \text{ pt})$$

c) Déterminer et construire l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que ;

$$4MA^2 - 6MB^2 + 2MC^2 = -10. \quad (0,5 \text{ pt})$$

d) Déterminer et construire l'ensemble (E_3) des points M du plan tels que :

$$(9\vec{MA} - 6\vec{MB} + 2\vec{MC})(\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}) = 10. \quad (0,5 \text{ pt})$$

4) Soit S la similitude directe qui transforme A en B et B en D .

a) Déterminer l'écriture complexe de S et préciser ses éléments caractéristiques. (0,5 pt)

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S^{2018} . (0,25 pt)

c) Montrer que $S^{2020^{2020}}$ est une homothétie de rapport positif que l'on précisera. (0,5 pt)

Exercice 2 : (4 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

A- le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère l'application affine f qui à tout point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan P associe le point $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{4}{5} \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{2}{5} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout point M , le vecteur $\vec{MM'}$ a une direction fixe. (0,5 pt)

- 2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f . (0,5 pt)
- 3) Montrer que f est un antidéplacement. En déduire la nature de f et ses éléments caractéristiques. (0,5 pt)
- 4) Déterminer l'image du cercle de centre O et de rayon 1 par f . (0,5 pt)

B- Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 3x - 8y = 5$.

- 1) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) . (0,5 pt)

- 2) On considère le système (S) , où n est un entier : $(S) \begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$

- a) Déterminer le reste de la division euclidienne de n par 24. (0,5 pt)
- b) Soit k un entier naturel. Déterminer le reste de 2^{2k} modulo 3 et le reste de 7^{2k} modulo 8. (0,5 pt)
- c) Vérifier que 1991 est une solution de (S) et montrer que $(1991)^{2008} - 1$ est divisible par 24. (0,5 pt)

Problème : (11 points)

Le but du problème est de déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n non nul, le nombre de solution de l'équation : $\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) = 0$

Partie A : Etude de la fonction f

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{1-x}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique 3cm.

- 1)a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les asymptotes éventuelles à (C) parallèles aux axes. (0,75 pt)
- b) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation. (0,5 pt)
- c) Tracer la courbe (C) de f . (0,5 pt)
- 2) Soit α un nombre réel strictement positif.
 - a) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan délimitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$. (0,5 pt)
 - b) Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$. (0,25 pt)

Dans la suite du problème, n désigne un entier naturel non nul.

Partie B : Etude d'une famille de fonctions

On considère les fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{1-x}$.

- 1)a) Déterminer les limites de f_2 en $-\infty$ et en $+\infty$. (0,5 pt)
- c) Etudier le sens de variation de f_2 et dresser son tableau de variation. (0,5 pt)
- d) Construire la courbe (C_2) de f_2 dans le même repère que (C) . (0,5 pt)

2)a) Déterminer les limites de f_3 en $-\infty$ et en $+\infty$. (0,5 pt)

b) Etudier le sens de variation de f_3 et dresser son tableau de variation. (0,5 pt)

c) Construire la courbe (C_3) de f_3 dans le même repère que (C) . (0,5 pt)

3)a) Etudier suivant la parité de n , le sens de variation de la fonction f_n . On précisera les limites aux bornes de son ensemble de définition. (0,75 pt)

b) Dresser suivant la parité de n le tableau de variation de f_n . (0,5 pt)

c) Démontrer que pour tout entier naturel n , $f'_n(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x)$. (0,25 pt)

Partie C : Etude d'une intégrale indéfinie

On considère les fonctions F_n définies sur $\mathbb{R}$ par : $F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$.

1) En utilisant la relation obtenue en B)3)c), montrer que : $F_n(x) - F_{n-1}(x) = -f_n(x)$, pour tout réel x . (0,25 pt)

2) Démontrer que pour tout réel x , on a : $F_n(x) = F_1(x) - \sum_{k=2}^n f_k(x)$. (0,25 pt)

3) En déduire que $F_n(x) = e - e^{1-x} \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right)$. (0,5 pt)

4) Dans cette question on suppose que $x \in [0; 1]$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n , $0 \leq f_n(x) \leq f_n(1)$. (0,25 pt)

b) En déduire que pour tout $x \in [0; 1]$, $F_n(x) \leq \frac{1}{n!}$. (0,25 pt)

c) Calculer la limite de F_n lorsque n tend vers $+\infty$. (0,25 pt)

d) Démontrer que pour tout $x \in [0; 1]$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) = e^x$.

(0,25 pt)

Partie D : Résolution de l'équation : $\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) = 0$

1) On suppose que n est pair.

a) Etudier le sens de variation de F_n sur $\mathbb{R}$. Préciser les limites de F_n lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$. (0,5 pt)

b) Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $F_n(x) = e$. (0,25 pt)

2) On suppose que n est impair.

a) Etudier le sens de variation de F_n et préciser les limites de F_n lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$. (0,5 pt)

b) Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $F_n(x) = e$. (0,25 pt)

3) Déduire suivant la parité de n le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) = 0$. (on ne calculera pas les solutions). (0,5 pt)