

TSE

Exercice 1 : 5pts

Partie A

On considère l'équation $(E): z^3 + (-4 + 2i)z^2 + (4 - 14i)z + 20i = 0$.

- 1) Démontre que (E) admet une solution réelle α .
- 2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .
- 3) Dans le plan complexe munie d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$; $z_B = -1 - 3i$ et $z_C = 3 + i$.
 - a. Montre que les points A, B et C sont alignés.
 - b. Soit S la similitude directe plane d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2 transformant A en B.

Donne l'écriture complexe de S et précise son centre ω .

Partie B

Après la mise-bas groupé d'une centaine de chèvre dans ma bergerie, je décide de compter de compter mes nouveaux chevreaux. En effet il y a des chèvres qui donnent naissance à 1 bébé, 2 bébés voir 3 bébés. Je les range en groupe de 19 ; il reste 8. Je les range en groupe de 11 ; il reste 6. Sachant que les chevreaux sont constitués de moins de 200 têtes, il restera combien normalement si je les range en groupe de 15 ?

Exercice 2 : 5pts

On considère l'équation différentielle $(E): y' - y = \sin x$.

1. Détermine deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie par : $f_0(x) = a \cos x + b \sin x$ soit une solution de (E) .
2. Résous l'équation différentielle $(E_0): y' - y = 0$.
3. Démontre que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0) .
4. En déduis les solutions de (E) .
5. Détermine la solution k de (E) vérifiant $k(0) = 0$.
6. Étudie la parité et la périodicité de la fonction f_0 .
7. Montre que f_0 est continue sur $[0; \pi]$ et détermine l'intégrale $\int_0^\pi f_0(x) dx$.
8. Montre que f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis détermine $f_0'(x)$.

Problème : 10pts

Soit la courbe (C_n) d'une fonction f_n définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne $f_n(x) = \frac{(1+\ln x)^n}{x}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Partie A

1. Etudie puis dresse le tableau de variation de la fonction f_n pour n paire et pour n impaire.
2. Pour tout entier $n \geq 1$, Montre que les courbes (C_n) passent par deux points d'abscisses α et β a déterminé. ($\alpha < \beta$)

On donne la suite (I_n) définie par $I_n = \int_{\alpha}^{\beta} [f_n(x) - f_{n+1}(x)] dx$.

3. Calcule I_1 et I_2 . Donne une interprétation graphique des résultats.
4. Exprime I_n en fonction de n .
5. Etudie le sens de variation de (I_n) .
6. Etudie la convergence de la suite (I_n) .
7. Montre que cette suite est bornée.

Partie B

On considère dans cette partie la fonction $f_1(x) = \frac{1+\ln x}{x}$.

1. Etudie le sens de variation et dresse le tableau de variation de f_1 .
2. Trace la courbe (C_1) de la fonction f_1 .
3. Calcule $f_1(e^{-1})$ puis étudie le signe de f_1 .
4. On donne la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{2}(1 + \ln x)^2$.
 - a. Calcule les limites de g en 0 en $+\infty$. Interprète graphiquement les résultats obtenus.
 - b. Montre que le signe de $g'(x)$ dépend de $f_1(x)$.
 - c. Dresse le tableau de variation de g .
 - d. Trace la courbe de g dans un repère orthonormé.
 - e. Montre que la restriction h de g est bijective de $]e^{-1}; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on déterminera.
 - f. Dresse le tableau de variation de h^{-1} .
5. Montre que pour tout $x \in [1; +\infty[$, $|g'(x)| \leq 1$.
6. En déduis que tout $x \in [1; +\infty[$, $|g(x) - 2| \leq |x - e|$.

Proposition de solution

Exercice 1

Partie A

On considère l'équation (E): $z^3 + (-4 + 2i)z^2 + (4 - 14i)z + 20i = 0$.

1) Démontrons que (E) admet une solution réelle α .

On a : $\alpha^3 + (-4 + 2i)\alpha^2 + (4 - 14i)\alpha + 20i = 0$

$$\alpha^3 - 4\alpha^2 + 4\alpha + i(2\alpha^2 - 14\alpha + 20) = 0$$

$$\begin{cases} \alpha^3 - 4\alpha^2 + 4\alpha = 0 \\ 2\alpha^2 - 14\alpha + 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2$$

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

	1	$-4 + 2i$	$4 - 14i$	$20i$
2	$\downarrow$	2	$-4 + 4i$	$-20i$
	1	$-2 + 2i$	$-10i$	0

$$(E): (z - 2)[z^2 + (-2 + 2i)z - 10i] = 0$$

$$z = 2 \text{ ou } z^2 + (-2 + 2i)z - 10i = 0$$

$$\Delta = 32i$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 32 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 32 \end{cases} ; 2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$$

Si $x = -4$, $y = -4$ donc $\delta = -4 - 4i$

Si $x = 4$, $y = 4$ donc $z = 4 + 4i$

$$z_1 = \frac{2-2i-4-4i}{2} = -1 - 3i \text{ et } z_2 = \frac{2-2i+4+4i}{2} = 3 + i$$

$$S = \{2; -1 - 3i; 3 + i\}$$

3) Dans le plan complexe munie d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points

A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$; $z_B = -1 - 3i$ et $z_C = 3 + i$.

a. Montrons que les points A, B et C ne sont pas alignés :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3+i-2}{-1-3i-2} = \frac{1+i}{-3-3i} = -\frac{1}{3} \in \mathbb{R}, \text{ on peut conclure que les points A, B et C sont alignés.}$$

b. Soit S la similitude directe plane d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2 transformant A en B.

Donnons l'écriture complexe de S et précisons son centre ω .

$$S: z' = az + b$$

$$\text{On a : } a = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + i\sqrt{3}$$

$$\text{Donc } z' = (1 + i\sqrt{3})z + b$$

$$\text{Or } S(A) = B, \text{ donc } z_B = (1 + i\sqrt{3})z_A + b \Rightarrow -1 - 3i = 2(1 + i\sqrt{3}) + b$$

$$\Rightarrow b = -3 - i(3 + 2\sqrt{3})$$

$$S: z' = (1 + i\sqrt{3})z - 3 - i(3 + 2\sqrt{3})$$

$$\text{Centre } \omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-3-i(3+2\sqrt{3})}{1-1-i\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$$

Partie B

Soit x le nombre de chevreau.

$$\text{On a : } \begin{cases} x \equiv 8[19] \\ x \equiv 6[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 19P + 8 \\ x = 11Q + 6 \end{cases}, P, Q \in \mathbb{Z}$$

$$x = x \Rightarrow 19P + 8 = 11Q + 6 \Rightarrow 19P \equiv -2[11] \Rightarrow 8P \equiv 9[11]$$

$$\Rightarrow P = 11k + 8; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } x = 19(11k + 8) + 8 = 209k + 160.$$

$$100 < x < 200$$

$$100 < 209k + 160 < 200$$

$$-0,2 < k < 0,1$$

$$k = 0$$

$$x = 209(0) + 160 = 160 \text{ têtes}$$

$$160 \equiv 10[15]$$

Donc le reste est 10 s'il les range par 15.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle (E): $y' - y = \sin x$.

1. Déterminons deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie par :

$$f_0(x) = a \cos x + b \sin x \text{ soit une solution de (E).}$$

$$f_0 \text{ est dérivable et } f_0'(x) = -a \sin x + b \cos x$$

$$\text{On a : } (E): y' - y = \sin x \Rightarrow f_0'(x) - f_0(x) = \sin x \Rightarrow -a \sin x + b \cos x - a \cos x - b \sin x = \sin x \Rightarrow (b - a) \cos x - (a + b) \sin x = \sin x$$

$$\text{Par identification : } \begin{cases} -a + b = 0 \\ -a - b = 1 \end{cases}$$

$$-2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \text{ et } b = -\frac{1}{2}.$$

$$f_0(x) = -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x$$

2. Résolvons l'équation différentielle (E₀): $y' - y = 0$.

$$y' - y = 0 \Rightarrow r - 1 = 0 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow y = Ae^x \text{ avec } A \text{ un réel.}$$

$$S = \{Ae^x\}; A \in \mathbb{R}.$$

3. Démontrons que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E₀).

$$\text{Supposons que } f \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = \sin x$$

Or f_0 est solution de (E)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) - f(x) = \sin x \\ f_0'(x) - f_0(x) = \sin x \end{cases}$$

$\Leftrightarrow f'(x) - f_0'(x) - (f(x) - f_0(x)) = 0 \Leftrightarrow (f - f_0)'(x) - (f - f_0)(x) = 0 \Leftrightarrow f - f_0$ est solution de (E_0) .

4. En déduisons les solutions de (E).

$$S = \left\{ Ae^x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x \right\}; A \in \mathbb{R}.$$

5. Déterminons la solution k de (E) vérifiant $k(0) = 0$.

$$k(x) = Ae^x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$$

$$k(0) = 0 \Rightarrow Ae^0 - \frac{1}{2}\cos 0 + \frac{1}{2}\sin 0 = 0 \Rightarrow Ae^0 = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc } k(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$$

6. Étudions la parité et la périodicité de la fonction f_0 . $f_0(x) = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$

$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}; f_0(-x) = -\frac{1}{2}\cos(-x) + \frac{1}{2}\sin(-x) = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$ alors f_0 n'est ni pair ni impair.

$$f_0(x + 2\pi) = -\frac{1}{2}\cos(x + 2\pi) + \frac{1}{2}\sin(x + 2\pi) = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = f_0(x)$$

Donc f_0 est périodique de période 2π .

7. Montrons que f_0 est continue sur $[0; \pi]$ et déterminons l'intégrale $\int_0^\pi f_0(x)dx$.

f_0 est continue sur $[0; \pi]$ car elle la somme de deux fonctions continue sur $[0; \pi]$.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f_0(x)dx &= \int_0^\pi \left(-\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x \right) dx = \left[-\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x \right]_0^\pi \\ &= -\frac{1}{2}\sin \pi + \frac{1}{2}\cos \pi + \frac{1}{2}\sin 0 - \frac{1}{2}\cos 0 = -1 \end{aligned}$$

8. f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est la somme de deux fonctions dérivables.

Déterminons $f_0'(x)$.

$$f_0'(x) = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x.$$

Problème

Partie A

1. Etudions puis dressons le tableau de variation de la fonction f_n pour n paire et pour n impaire.

Pour n paire

$$f_n'(x) = \frac{(1+\ln x)^{n-1}(n-1-\ln x)}{x^2}$$

Posons $(1 + \ln x)^{n-1} > 0$

$$1 + \ln x > 0$$

$$\ln x > -1$$

$$x > e^{-1}$$

$$\text{Posons } n - 1 - \ln x > 0$$

$$-\ln x > 1 - n$$

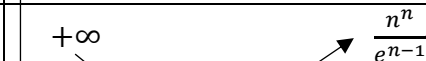
$$\ln x < n - 1$$

$$x < e^{n-1}$$

x	0	e^{-1}		e^{n-1}	$+\infty$
$(1 + \ln x)^{n-1}$	—	0	+	+	
$n - 1 - \ln x$	+		+	0	—
$f'_n(x)$	—	0	+	0	—

Pour $x \in]0; e^{-1}] \cup [e^{n-1}; +\infty[$, $f'_n(x) \leq 0$ alors f'_n est décroissante.

Pour $x \in [e^{-1}; e^{n-1}]$, $f'_n(x) \geq 0$ alors f'_n est croissante.

x	0	e^{-1}	e^{n-1}	$+\infty$	
$f'_n(x)$	—	0	+	0	—
f'_n					

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \ln x)^n}{x} = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)^n}{x} = 0; f_n(e^{-1}) = 0 \text{ et } f_n(e^{n-1}) = \frac{n^n}{e^{n-1}}.$$

Pour n impaire

$$f'_n(x) = \frac{(1 + \ln x)^{n-1}(n-1-\ln x)}{x^2}$$

$$\text{Posons } n - 1 - \ln x > 0$$

$$-\ln x > 1 - n$$

$$\ln x < n - 1$$

$$x < e^{n-1}$$

x	0	e^{n-1}	$+\infty$
$n - 1 - \ln x$	+	0	-
$f'_n(x)$	+	0	-

Pour $x \in]0; e^{n-1}]$, $f'_n(x) \geq 0$ alors f'_n est croissante.

Pour $x \in [e^{n-1}; +\infty[$, $f'_n(x) \leq 0$ alors f'_n est décroissante.

x	0	e^{n-1}	$+\infty$
$f'_n(x)$		+	0 -
f'_n			

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\ln x)^n}{x} = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+\ln x)^n}{x} = 0 \text{ et } f_n(e^{n-1}) = \frac{n^n}{e^{n-1}}.$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$, Montrons que les courbes (C_n) passent par deux points d'abscisses α et β a déterminé. ($\alpha < \beta$)

$$f_1(1) = f_2(x) \Rightarrow \frac{(1+\ln x)^1}{x} = \frac{(1+\ln x)^2}{x} \Rightarrow (1 + \ln x) \ln x = 0$$

$$\Rightarrow 1 + \ln x = 0 \text{ ou } \ln x = 0$$

$$\ln x = -1 \quad x = e^0$$

$$\alpha = e^{-1} \quad \beta = 1$$

On donne la suite (I_n) définie par $I_n = \int_{\alpha}^{\beta} [f_n(x) - f_{n+1}(x)] dx$.

3. Calculons I_1 et I_2 . Donnons une interprétation graphique des résultats.

$$I_1 = \int_{e^{-1}}^1 [f_1(x) - f_2(x)] dx = \int_{e^{-1}}^1 \left[\frac{(1+\ln x)^1}{x} - \frac{(1+\ln x)^2}{x} \right] dx = \left[\frac{(1+\ln x)^2}{2} - \frac{(1+\ln x)^3}{3} \right]_{e^{-1}}^1$$

$$I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

I_1 est l'aire du domaine délimité par les courbes (C_1) , (C_2) et les droites d'équations $x = e^{-1}$ et $x = 1$.

$$I_2 = \int_{e^{-1}}^1 [f_2(x) - f_3(x)] dx = \int_{e^{-1}}^1 \left[\frac{(1+\ln x)^2}{x} - \frac{(1+\ln x)^3}{x} \right] dx = \left[\frac{(1+\ln x)^3}{3} - \frac{(1+\ln x)^4}{4} \right]_{e^{-1}}^1$$

$$I_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

I_2 est l'aire du domaine délimité par les courbes (C_2) , (C_3) et les droites d'équations $x = e^{-1}$ et $x = 1$.

4. Exprimons I_n en fonction de n .

$$I_n = \int_{e^{-1}}^1 [f_n(x) - f_{n+1}(x)] dx = \int_{e^{-1}}^1 \left[\frac{(1+\ln x)^n}{x} - \frac{(1+\ln x)^{n+1}}{x} \right] dx$$

$$= \left[\frac{(1+\ln x)^{n+1}}{n+1} - \frac{(1+\ln x)^{n+2}}{n+2} \right]_{e^{-1}}^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

5. Etudions le sens de variation de (I_n) .

$$I_{n+1} - I_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = -\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)} < 0$$

Alors (I_n) est décroissante.

6. Etudions la convergence de la suite (I_n) .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 0$$

Alors (I_n) est convergente et converge vers 0.

7. Montrons que cette suite est bornée.

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{6}$$

Partie B

On considère dans cette partie la fonction $f_1(x) = \frac{1+\ln x}{x}$.

1. Etudions le sens de variation et dressons le tableau de variation de f_1 .

Pour $n = 1$

$$f'_1(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$$

Posons $-\ln x > 0$

$$\ln x < 0$$

$$x < 1$$

x	0	1	$+\infty$
$-\ln x$	+	0	-
$f'_1(x)$	+	0	-

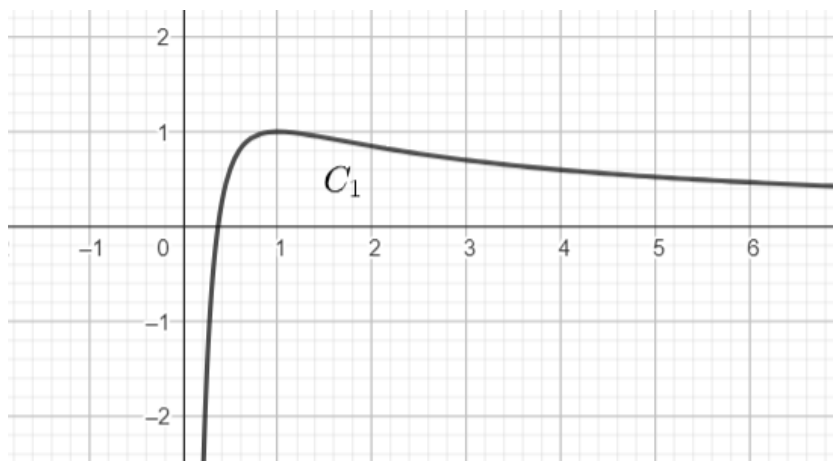
Pour $x \in]0; 1]$, $f'_n(x) \geq 0$ alors f'_n est croissante.

Pour $x \in [1; +\infty[$, $f'_n(x) \leq 0$ alors f'_n est décroissante.

x	0	1	$+\infty$
$f'_1(x)$	+	0	-
f'_1	$-\infty$	1	0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\ln x)^1}{x} = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+\ln x)^1}{x} = 0 \text{ et } f_1(1) = 1.$$

2. Traçons la courbe (C_1) de la fonction f_1 .



3. Calculons $f_1(e^{-1})$ puis étudions le signe de f_1 .

$$f_1(e^{-1}) = \frac{(1+\ln e^{-1})^1}{e^{-1}} = 0$$

Pour $x \in]0; e^{-1}]$, $f_1(x) \leq 0$

Pour $x \in [e^{-1}; +\infty[$, $f_1(x) \geq 0$

4. On donne la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{2}(1 + \ln x)^2$.

a. Calculons les limites de g en 0 et $+\infty$. Interprétons graphiquement les résultats obtenus.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\ln x)^2}{2} = +\infty ; x = 0 \text{ AV}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+\ln x)^2}{2} = +\infty. \text{ PAO}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+\ln x)^2}{2x} = 0. \text{ Branche parabolique de direction } (ox).$$

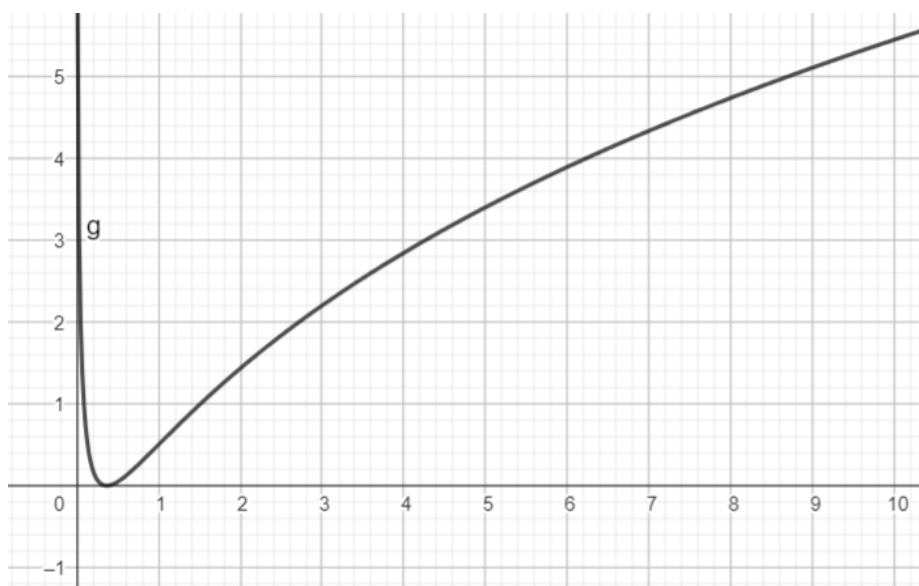
b. Montrons que le signe de $g'(x)$ dépend de $f_1(x)$.

$$g'(x) = \frac{2}{2} \times \frac{1}{x} (1 + \ln x)^1 = f_1(x)$$

c. Dressons le tableau de variation de g .

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$g'(x)$	—	0	+
g	$+\infty$	0	$+\infty$

d. Traçons la courbe de g dans un repère orthonormé.



e. Montrons que la restriction h de g est bijective de $]e^{-1}; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

Sur $]e^{-1}; +\infty[$, h est continue et strictement croissante, donc elle réalise une bijection de $]e^{-1}; +\infty[$ vers $J =]0; +\infty[$.

f. Dressons le tableau de variation de h^{-1} .

x	0	$+\infty$
$(h^{-1})'(x)$	+	
h^{-1}	e^{-1}	$+\infty$

5. Montrons que pour tout $x \in [1; +\infty[$, $|g'(x)| \leq 1$.

On a : $g'(x) = \frac{1+\ln x}{x}$ et $g''(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$

x	0	1	$+\infty$
$g''(x)$	+	0	-
g'	$-\infty$	1	0

Pour tout $x \in [1; +\infty[$, on a : $0 \leq g'(x) \leq 1$

$$-1 \leq 0 \leq g'(x) \leq 1$$

$$-1 \leq g'(x) \leq 1$$

$$|g'(x)| \leq 1$$

6. En déduis que tout $x \in [1; +\infty[$, $|g(x) - 2| \leq |x - e|$.

$$|g'(x)| \leq 1 \Rightarrow |g(x) - g(e)| \leq |x - e| \Rightarrow |g(x) - 2| \leq |x - e|$$