

COMPOSITION DE SYNTHESE			
SERIE : TSE	2022/2023	DUREE : 3 heures	COEF : 4
EPREUVE DE : Mathématiques			

Exercice : 1 (5 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1-On pose : $P(z) = z^3 - (5 + 7i)z^2 + (-6 + 26i)z + 24 - 24i$ ou z est un nombre complexe .

a)Montre que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure (0,5 pt)

b)Résous dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$, (0,75 pt)

2-Soient les points A ;B et C images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ avec

$$|z_A| < |z_B| < |z_C|$$

a)Place les points A ;B et C. Montre que les points O,A ;B et C sont cocycliques. (0,5 pt)

b)Calcule l'affixe du point G barycentre du système $\{(O;5);(A;-3);(C;4)\}$.

Vérifie que G est le milieu de $[AB]$. (0,5 pt)

c)Détermine et représente l'ensemble (E) des points M d'affixe z tel que le nombre $\frac{z-2}{z-4i}$ soit imaginaire pur . (0,5 pt)

3-Pour tout point M du plan on pose : $f(M) = 5MO^2 - 3MA^2 + 4MC^2$ et (F_k)

l'ensemble des points M tels que $f(M) = k$ ou k est un réel.

a)Discute, suivant les valeurs de k ,la nature de (F_k) (0,5 pt)

b)Reconnais et construis (F_{60}) (0,25 pt)

4-Détermine les trois premiers termes d'une suite géométrique de premier terme z_C et de raison z_A . (0,5 pt)

Exercice : 2 (5pts) les parties A et B sont indépendantes

Partie :A On donne $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,8$; $P(\bar{A} \cap B) = 0,2$; $P(A \cap \bar{B}) = 0,3$.

Calcule $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ (1 pts)

Partie B : Dans une urne on place 4 jetons portant le nombre 100 et 3 jetons portant le nombre 200. On extrait simultanément au hasard 3 jetons de l'urne et on note la somme des nombres inscrits sur ces 3 jetons.

1-Montre que la probabilité d'obtenir une somme égale à 400 vaut $\frac{18}{35}$.(1pt)

2-Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage de 3 jetons la somme obtenue.

a) Détermine les valeurs prises par X. (1pt)

b) Détermine la loi de probabilité de X. (1pt)

c) Détermine l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.(1pt)

Problème (10 pts)

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f_n(x) = x^n(e^{-x} - \frac{1}{2})$. On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni de repère orthonormé direct $(O; i; j)$ (unité graphique : 4 cm).

Partie A :

1-a) Etudie la limite de f_n en $+\infty$. (0,5 pt)

b) Etudie , suivant la parité de n , la limite de f_n en $-\infty$.(0,5 pt)

2- Calcule la fonction dérivée de f_n , puis prouve que pour tout x réel ,

$f'_n(x) = x^{n-1}g_n(x)$ avec $g_n(x) = (n-x)e^{-x} - \frac{n}{2}$ (0,5 pt)

3-a) Etudie les variations de g_n (0,5 pt)

b) Déduis –en que l'équation $g_n(x)=0$,admet une unique solution α_n dans $\mathbb{R}$ et que α_n est strictement positif , (0,5 pt)

c) Détermine le signe de g_n sur $\mathbb{R}$, Déduis-en le signe de f_n' sur $\mathbb{R}$ (on distingue le cas n pair et n impair) (0,75 pt)

d) Dresse le tableau de variation de f_n . (0,75 pt)

Partie :B

Dans cette partie ,on prend $n=1$.Donc $f_1(x) = xe^{-x} - \frac{x}{2}$ et $g_1(x) = (1-x)e^{-x} - \frac{1}{2}$

4-a) Démontre que : $0 < \alpha_1 < \frac{1}{2}$ (0,25 pt)

b) En utilisant g_1 ,prouve que : $e^{-\alpha_1} = \frac{1}{2(1-\alpha_1)}$. Déduis –en l'expression de $f_1(\alpha_1)$ ne contenant pas $e^{-\alpha_1}$. (0,5 pt)

c) Déduis de la partie A) , 3) et d), le tableau de variation de f_1 .(0,5 pt)

5- Démontre que la courbe (C_1) possède une asymptote (D) en $+\infty$ dont on précisera une équation. (0,25 pt)

6- Soit la fonction φ définie sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ par $\varphi(x) = 1 - \frac{e^x}{2}$.

a) Démontre que α_1 est l'unique solution de l'équation : $\varphi(x) = x$ (0,25 pt)

b) Démontre que pour tout x élément de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, $\varphi(x)$ est aussi élément de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ (0,25 pt)

c) Démontre que pour tout x élément de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, on a $|\varphi'(x)| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}$ (0,25 pt)

7- On considère la suite numérique (U_n) par : $U_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = \varphi(U_n)$

a) Démontre que pour tout entier naturel n , U_n appartient à $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ (0,25 pt)

b) Démontre que pour tout entier naturel n , on a : $|U_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{\sqrt{e}}{2} |U_n - \alpha_1|$ (0,25 pt)

c) Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$|U_n - \alpha_1| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{e}}{2} \right)^n$. Déduis-en que la suite (U_n) est convergente et précise sa limite. (0,5 pt)

8-a) Étudie le signe de f_1 sur $\mathbb{R}$ (0,5 pt)

b) On donne $\alpha_1 \approx 0,315$. Construis (C_1) et (D) dans le repère $(O; i; j)$. (0, 5 pt)

9-a) Détermine les nombres réels a et b tels que, la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit une primitive de la fonction : $x \mapsto xe^{-x}$ (0,5 pt)

b) Calcule l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_1) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$ (0,5 pt)