

Le sujet comporte deux exercices et un problème tous obligatoires. La clarté et la précision seront prises en compte lors de la correction.

Exercice-1 :(6points)

I. Pour tout entier $n \geq 2$, on considère l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} \times e^{\frac{1}{x}} dx$

1. Calcule I_2 .

(1point)

2. Démontre à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n) \times I_n. \quad (1,5point)$$

II. On considère les intégrales définies par :

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx, \text{ où } n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx.$$

1. Calcule l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x dx$. En déduis $J_{n+2} - J_n$ en fonction de n . (1point)

2. Calcule J_1 . En déduis J_3 et J_5 .

3. a. Soit f l'application qui à $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ associe : $f(x) = \ln \left[\tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$.

Montre que f est une primitive de la fonction g définie sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ par : $g(x) = \frac{1}{\cos x}$. (1point)

b. En déduis J_0 , puis J_2 et J_4 .

(1,5point)

Exercice 2 :

.....(6Points)

I. On considère l'équation différentielle (E): $y'' - y = 4xe^x$.

1) Détermine les réels a et b pour que la fonction

$g(x) = (ax^2 + bx)e^x$ définie sur $\mathbb{R}$ soit solution de (E). (0,75point)

2) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Démontre que f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E'): $y'' - y = 0$. (0,5point)

3) Résous (E') et en déduis la solution générale de (E). (0,75point)

4) Détermine la fonction f solution de (E) telle que

$$f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 0.$$

(0,5point)

II. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r ($r \neq 0$). On définit la suite

$$v_n = \frac{1}{4} e^{-2u_n}$$

1) Montre que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. (0,75point)

2) Etudie suivant les valeurs de r la convergence de la suite (v_n) .

(0,5point)

3) Soit (w_n) la suite définie par $w_n = \int_0^n \frac{1}{4} e^{-2x} dx$.

a) Calcule w_n en fonction de n .

(0,5point)

b) Montre que w_n converge vers un nombre réel que l'on précisera.

(0,75point)

On pose $S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n = \frac{n}{8}$.

c) Calcule S_n en fonction de n puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

(1point)

Problème : (8 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

A) Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(e^{2x} + 2e^{-x})$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o; i; j)$. Unité graphique 2cm.

1) Montre que, pour tout réel positif x , $f(x) = 2x + \ln(1 + 2e^{-3x})$. (0,5point)

Etudie la limite de f en $+\infty$. (0,5point)

2) Montre que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à (C). (0,5point)

Etudie la position de (C) et (D). (0,5point)

3) Etudie les variations de f , puis trace la courbe (C) et la droite (D). (1,5point)

4) Montre que pour tout réel α , $\alpha > 0$; $\int_0^\alpha e^{-3x} dx \leq \frac{1}{3}$. (0,5point)

5) Etablis que pour tout réel u , $u \geq 0$; $\ln(1 + u) \leq u$. (0,5point)

6) En-déduit que pour tout réel α , $\alpha > 0$ $\int_0^\alpha \ln(1 + 2e^{-3x}) dx \leq \frac{2}{3}$. (0,5point)

7) Soit $A(\alpha)$ l'aire exprimée, en cm^2 , du domaine limité par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$; $y = 2x$ et la courbe (C). (0,5point)

B) Soit h la fonction définie sur $[2; 4]$ par $h(x) = 2 - x + \ln x$.

1) Etudie les variations de h , puis en déduit que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution β . (1point)

2) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2 + \ln(u_n)$.

Montre que l'image de $[2; 4]$ par la fonction $g(x) = 2 + \ln x$ est incluse dans $[2; 4]$. (0,75pt)

3) Montre en utilisant l'inégalité des accroissements finis que pour tout entier naturel n : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \beta|$ (1point)

4) En utilisant un raisonnement par récurrence, prouve que pour tout entier naturel n : $|u_n - \beta| \leq 2(\frac{1}{2})^n$. (0,75point)

En déduit que (u_n) est convergente. (0,5point)

5) Détermine un entier naturel N tel que $|u_N - \beta| \leq 10^{-4}$. (0,5point)