



Evaluation sommative N°4

Situation 1

1. Calcule les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 + \sqrt{x^2 + 3} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{-2 + x^2} - \sqrt{x^2 + 3} ; \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x + 2} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{x+1}} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{4x - \pi}.$$

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + d$. Détermine les réels a, b et c sachant f est représenté dans le tableau suivant.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	$\nearrow \frac{59}{27}$	$\searrow 1$	$\nearrow +\infty$	

Situation 2

Une fonction polynôme est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x^2 + ax + b| - |1 - x|$ où a et b sont des réels.

- Détermine les réels a et b pour que f coïncide avec $g(x) = x^2$ sur $] -\infty; 1]$ et coïncide avec $h(x) = x^2 - 2x + 2$ sur $[1; +\infty[$.
- Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 1.
- Etudie les variations de f sur $\mathbb{R}$.
- Etudie la concavité de f .
- Trace la représentation graphique de f .

Situation 3

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -2 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$.

1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{3}{(x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 3}}$.

b) En déduis le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.

3) Déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

PARTIE B : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x + 1 + \sqrt{x^2 + 3}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) (Unité graphique : 2cm)

- 1) a) Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Détermine l'équation de l'asymptotes (D) à la courbe de f en $+\infty$
c) Montre que la droite $(\Delta): y = -3x + 1$ est asymptote en $-\infty$
- 2) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$.
b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
- 3) Trace (C) , (D) et (Δ) .

PARTIE C : Etude d'une bijection

- 1) Montre la restriction h de f est une bijection de $[0; +\infty[$ vers un intervalle K que l'on précisera.
- 2) Dresse le tableau de variation de h^{-1} .
- 3) Montre que h^{-1} est dérivable en 1.
- 4) Détermine le nombre dérivé de h^{-1} en 1.
- 5) Représente dans le même repère, la courbe représentative de h^{-1} .