

AE de SIKASSO	LFOUROU	Evaluation du Deuxième trimestre	2025-2026
Epreuve de :Mathématiques	Classe TSE	Durée : 4H	Coeff :5

Situation 1 : (05 points)

I-) On considère les suites $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par : $I_n = \int_1^e x^{2n+1} \ln x dx$ et

$$K_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^{2n+1}}{x^2} dx.$$

a) A l'aide d'une intégration par parties, calcule I_0 et K_0 .

b) Etudie le sens de variation de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

c) Montre que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{e^{2n+2}-1}{2n+2}$. (0,5 pt)

A l'aide d'une intégration par parties, exprime I_n en fonction de n . En déduis les valeurs exactes de I_1 et I_2 .

d) A l'aide d'une intégration par parties, montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}; K_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+2)K_n. \text{ En déduis les valeurs de } K_1 \text{ et } K_2.$$

II-Dans la perspective d'éradiquer l'épidémie d'une maladie. Initialement 200 personnes sont affectées par le virus chaque semaine ,5% récupèrent du virus et 20 personnes sont contaminées à nouveau. Le cout du test médical pour chaque personne malade est 300 000 FCFA. Chaque hôpital possède 25 salles de quarantaines.

Consigne :

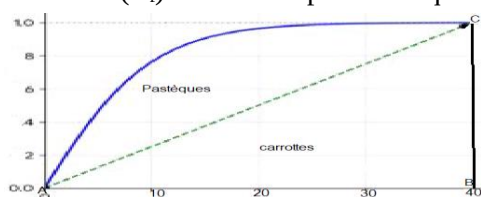
Etant un élève de la TSE les autorités sanitaires sollicitent ton aide pour déterminer :

- Le nombre maximum des malades.
- Le cout total de la prise en charge des malades
- le nombre maximum des hôpitaux pour prendre en charge les personnes contaminées.

Situation 2 : (06 points)

La figure ci-dessous représente le domaine d'un villageois nommé Sissoko. Depuis quelques années, il y cultive des carottes et des pastèques. Mr Sissoko cultive sur une partie les pastèques et sur l'autre les carottes. Il envisage de vendre la parcelle réservée pour la culture des pastèques afin de financer la formation de sa fille Bintou qui s'élève à 450 000FCFA. Dans cette zone, le m^2 coûte 1500 FCFA.

Il a confié ce projet à Mr Koné pour l'estimation de la valeur de ce terrain. Celui-ci crée un repère indiqué sur la figure ci-dessous où l'unité sur l'axe des ordonnées est 2m et 10 m sur l'axe des abscisses. Les contours du terrain sont constitués de la droite (AB), la droite (BC) et la courbe (C_f) Mr Koné a pu établir que la courbe (C_f) a pour équation : $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.



La droite (AC) : $y = \frac{1}{50}x$, représente la séparation de la portion exploitée pour cultiver les pastèques de celle exploitée pour cultiver les carottes.

Le bénéfice à réaliser (en centaines de francs CFA) en fonction de la quantité x carottes (en tonnes par an) est donné par la fonction h vérifiant

: $h''(x) - 3h'(x) + 2h(x) = 0$ et dont la courbe intégrale passe par le point $D(0; 15000)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 10000.

Le voisin de Mr Sissoko dispose d'un espace délimité par l'ensemble des points M du plan tels que : $||2\vec{MO} + 3\vec{ME} + \vec{MF}|| = ||6\vec{OE}||$; où O, E et F sont les points dont les affixes respectives sont les solutions de l'équation : $z^3 - (2 + 4i)z^2 + (8i - 6)z = 0$; avec

$z_0 \in \mathbb{R}$ et $\text{Re}(z_E) > 0$. Il souhaite cultiver du piment sur cette aire à raison de 14 pistés sur $3m^2$.

Il décide également de réaliser un forage d'adduction d'eau pour arroser ses arbres fructueux plantés aux points O, E et F au moyen d'un moteur à pompe d'eau. Il arrose 2 fois par jour les arbres au point O ; 3 fois par jour les arbres au point E et 1 fois par jour les arbres au point F. Le cout d'entretien annuel des arbres en milliers de franc en position d'un point M est donné par : $Ct(M) = 2MO^2 + 3ME^2 + MF^2$

Consigne :

- a)-Monsieur Sissoko pourrait-il payer la pension de sa fille ?
- b)-Quel est le seuil (maximum) du bénéfice que pourra réaliser par an Monsieur Sissoko ?
- c)-Combien de pistés le voisin de Mr Sissoko devra prévoir pour couvrir tout son espace ?
- d)-En quel point du champ pourrait-il réaliser le forage pour minimiser le cout d'entretien ? Quel est ce cout minimal. Construis le point du forage et délimite le champ.

Situation 3 : (09 points) les partie A et B sont indépendantes

A) On considère la fonction h définie par :

$$h(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$$

- 1) a) Détermine l'ensemble de définition de h.
- b) Etudie la parité de h.
- 2) a) Dresse le tableau de variation de h.
- b) Montre que h est une bijection de D_h vers un intervalle J que l'on précisera. Explicite sa bijection réciproque notée h^{-1} .

B) On considère la fonction numérique f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}$ On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 3 cm) .

- 1) a) Dresse le tableau de variation de f.
- b) Construis la courbe (C), on fera figure la tangente au point d'abscisse 0.
- c) Calcule l'aire en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. (on donnera la valeur exacte puis une valeur arrondie à 10^{-3} près).

2) a) Montre que la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$ est strictement décroissante.

b) En déduis que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α sur $[0; +\infty[$ et que l'on a : $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$

3) a) Utilise le sens de variation de f pour montrer que $f(x)$ appartient à $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

b) Montre que : $\forall u \in [0; 1], 0 \leq u(1-u) \leq \frac{1}{4}$. En déduis que l'on a :

$\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. (on pourra poser $u = e^{-x}$).

4) On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n)$

a) Démontre que pour tout entier naturel n, U_n est élément de $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

b) Démontre en utilisant l'inégalité des accroissements finis que pour tout entier naturel n, on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |U_n - \alpha|$

En déduis : $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. Quelle est la limite de la suite (U_n) ?

c) Trouve le plus petit entier naturel k tel que $\frac{1}{2^{2k+1}} \leq 10^{-3}$. En déduis une valeur approchée de α à 10^{-3} près.