

Séquence 9 : Probabilité

Classe : TSE – TSEXP

Durée : 20 heures

Discipline : Mathématiques

UA : 2

1- Domaine : SMT (Sciences – Mathématiques et Technologiques)

2- Compétences :

- Résoudre une situation problème.
- Mettre à profit ses connaissances scientifiques et technologiques.
- Communiquer à l'aide de langages mathématique, scientifique et technologique.

Composantes et manifestations

Composantes	Manifestations
Diagnostiquer la situation-problème.	- Sélectionner les données mathématiques, scientifiques et technologiques qui sont en rapport avec la situation. - Etablir des relations entre les données retenues. - Comparer cette situation-problème avec des situations semblables déjà résolues. - Former le problème.
Mettre à l'essai des pistes de solutions.	- Inventorier les différentes pistes de solutions. - Choisir une piste parmi un éventail de possibilités. - Appliquer cette piste.
Partager les informations relatives à la démarche scientifique et mathématique.	Se servir de contre – exemples pour ajuster des démarches. -Expliquer des résultats -Tirer une conclusion.

3- Contenu (s) : Probabilité

4- Ressources éducatives :

- Ressources humaines (Elèves – Professeur et surtout les ressources externes)
- Ressources matérielles (Craie – Chiffon -Règle – Tableau)
- Ressources financières : (RAS)

Cours

Objectif : Cette séquence vise à :

- Apprendre à calculer l'union, l'intersection et le produit cartésien de deux ensembles ;
- Apprendre à dénombrer un ensemble ;
- Apprendre à calculer la probabilité des événements simples ;
- Apprendre à calculer la probabilité des événements indépendants ;
- Utiliser la loi binomiale et l'épreuve de Bernoulli pour résoudre des problèmes.

Evaluation-diagnostic :

Calcule les expressions suivantes : $5!$; A_8^3 ; C_7^2 ; A_{10}^5

Situation – Problème :

Dans une classe de 40 élèves, 25 aiment la mathématique ; 30 aiment le français et 17 aiment la mathématique et le français.

Calcule le nombre d'élève qui aiment :

a- Uniquement le français.

b- Uniquement la mathématique.

c- La mathématique ou le français

Synthèse

NB : Tout d'abords, faisons une traduction mathématique des affirmations ci-dessus :

- Une classe comporte 40 élèves alors $Card(E) = 40$
- 25 aiment la mathématique alors $Card(Maths) = 25$
- 30 aiment le français alors $Card(Franc) = 30$
- 17 aiment les maths et le Français alors $Card(Maths \cap Franc) = 17$

1) Calculons le nombre d'élève qui aiment :

a) Uniquement le français

Soit $Card(A)$ cet ensemble tel que :

$$Card(A) = Card(franc) - card(Maths \cap franc) \Rightarrow Card(A) = 30 - 17 = 13$$

b) Uniquement les mathématiques

Soit $Card(B)$ cet ensemble tel que :

$$Card(B) = Card(maths) - Card(maths \cap franc) \Rightarrow Card(B) = 25 - 17 = 8$$

c) Les mathématiques ou le Français.

Soit $Card(C)$ cet ensemble tel que :

$$Card(C) = Card(maths) + Card(franc) - Card(Maths \cap français)$$

$$\Rightarrow Card(C) = 25 + 30 - 17 = 38$$

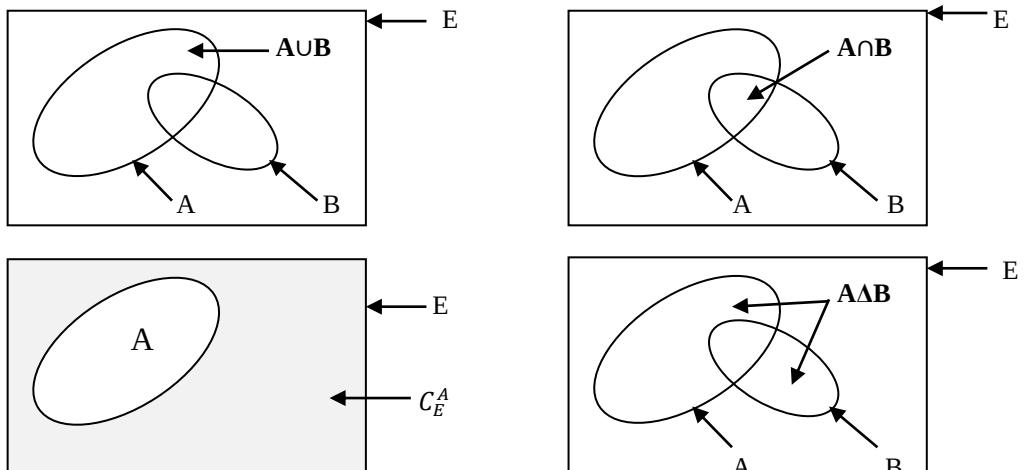
I- Dénombrement :

1) Vocabulaire de la théorie des ensembles :

Soit E un ensemble et soient A et B deux sous-ensembles de E .

- **Expérience aléatoire** : expérience dont le résultat dépend du hasard.
- **Eventualité** : résultat possible d'une expérience aléatoire.
- **Univers ou CardE** = n : ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire.
- **Événement** : sous-ensemble de l'univers.
- **Événement élémentaire** : événement réduit à un seul élément.
- **Union de deux ensembles** : Soient A et B deux ensembles finis. On appelle Union de A et B , l'ensemble des éléments de A ou B . On note : $A \cup B = \{x/x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- **Intersection de deux ensembles** : L'intersection de deux ensembles A et B regroupent les éléments communs à A et B . On note : $A \cap B = \{x/x \in A \text{ et } x \in B\}$.
- **Différence A moins B** : On appelle différence A moins B , l'ensemble noté $A - B$ tel que : $A - B = \{x \in E; x \in A \text{ et } x \notin B\}$.
- **Différence symétrique de A et B** : On appelle différence symétrique de A et B , l'ensemble noté $A \Delta B$ tel que : $A \Delta B = \{(A - B) \cup (B - A)\}$
- **Produit cartésien de A par B** : On appelle produit cartésien de A par B l'ensemble des couples $(x; y)$ tel que : x appartient à A et y appartient à B . On note : $A \times B = \{(x; y)/ x \in A \text{ et } y \in B\}$.
- **Évènement contraire de A ou complémentaire de A dans E** : On appelle évènement contraire de A , l'ensemble de toutes les issues de E n'appartenant pas à A . On la note : $\bar{A}$ tel que : $\bar{A} = C_E(A) = \{x/x \in E \text{ et } x \notin A\} = \{x/x \in E \text{ et } x \in \bar{A}\}$.

Illustration



2) Propriétés sur les ensembles finis

Soient A ; B et C trois ensembles finis. On admet les propriétés suivantes :

- Propriétés relatives à $\cup$

$$P_1 : A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A \quad ; \quad P_2 : A \cup A = A \quad ; \quad P_3 : A \cup B = B \cup A$$

- **Propriétés relatives à $\cap$**

$$P_1: A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = A ; \quad P_2: A \cap A = A ; \quad P_3: A \cap B = B \cap A$$

- **Propriétés relatives à $A-B$; $C_F(A)$ et $A \Delta B$**

$$P_1: A - B \Leftrightarrow A \subset B ; \quad P_2: A \Delta B = B \Delta A ; \quad P_3: A \Delta \emptyset = A$$

- **Propriétés relatives à $A \times B$**

$$P_1: A \times B \neq B \times A ; \quad P_2: A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset$$

Evaluation

Soient A et B deux ensembles finis tels que : $A = \{1; a; c\}$ et $B = \{b; 1; c; 2\}$

1) Détermine : $A \cap B$; $A \cup B$; $A \times B$.

2) Détermine : $Card(A)$; $Card(B)$; $Card(A \cap B)$; $Card(A \cup B)$; $Card(A \times B)$.

3) **Permutation – Arrangement – combination – P-liste**

a) **Permutation** :

• **Définition** :

On appelle permutation de n éléments d'un ensemble fini E , le nombre entier noté **$n!$ et on lit :**

$\ll$ Factorielle $n \gg$ tel que : **$n! = n(n-1)(n-2) \dots \times 2 \times 1$.**

• **Propriétés** : $P_1: 0! = 1$; $P_2: 1! = 1$; $P_3: 2! = 2$

b) **Arrangement** :

• **Définition** :

Soient n et p deux entiers naturels ($n \geq p$).

On appelle arrangement de n éléments pris p à p distinct, l'entier noté A_n^p et on lit :

$\ll A ; n ; p \gg$ tel que : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ ou $A_n^p = n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)$

• **Propriétés** :

$$P_1: A_n^0 = 1 ; \quad P_2: A_n^1 = n ; \quad P_3: A_n^n = n! ; \quad P_4: A_n^{n-1} = n!$$

c) **Combinaison** :

• **Définition** :

Soient n et p deux entiers naturels ($n \geq p$).

On appelle combinaison de n éléments pris p à p distinct, l'entier noté C_n^p et on lit :

$\ll C ; n ; p \gg$ tel que : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ ou $A_n^p = n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)$

• **Propriétés** :

$$P_1: C_n^0 = 1 ; \quad P_2: C_n^1 = n ; \quad P_3: C_n^n = 1 ; \quad P_4: C_n^{n-1} = n ; \quad P_5: C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$$

d) **Nombre d'application d'un ensemble fini dans un autre ensemble fini (P-liste)**

• **Définition** :

Soient n et p deux entiers naturels ($n \geq p$).

On appelle nombre d'application de n éléments pris p à p distinct, l'entier noté $A_n^{\widehat{p}}$ et on lit :

$\ll A ; n ; p \text{ chapeau} \gg$ tel que : $A_n^{\widehat{p}} = (n)^p$

• **Propriétés** :

$$P_1: A_n^{\widehat{0}} = n^0 = 1 ; \quad P_2: A_n^{\widehat{1}} = n^1 = n$$

Evaluation

1) Calcule : $5! + 3(4!)$; $\frac{8!}{3!}$; $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$; A_8^3 ; C_7^4 ; $A_8^{\widehat{5}}$

2) Résous dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes :

a) $A_n^2 = n(2n+5)$; b) $C_n^2 = 5n$; c) $C_n^{n-2} = 28$

4) Les différents types de tirages

a- Tirages successifs et sans remise :

Si l'énoncé contient les mots **successifs et sans remise**, cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments a de l'importance mais que tous les éléments considérés sont distincts (ou **qu'il n'y a pas de répétition d'éléments**).

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **l'arrangement** : A_n^P

b- Tirages successifs et avec remise :

Si l'énoncé contient les mots **successifs et avec remise**, cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments a de l'importance et qu'un élément peut éventuellement être répété.

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **la P-liste**: $A_n^{\hat{P}}$

c- Tirage simultané :

Si l'énoncé contient le mot **simultanément**, cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments n'a pas d'importance.

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **la combinaison** : C_n^P

d- Tirage successif :

Si l'énoncé contient le mot **successif**, il faut en tenir compte de tous les ordres dans lesquels on peut obtenir un événement donné.

On doit souvent multiplier par le nombre d'ordres possibles le résultat trouvé pour un ordre déterminé.

NB : En probabilité :

- Le nombre total d'éléments qui constitue l'univers est noté : ***n***.
- Le nombre de tirage parmi ces ***n*** éléments est noté : ***p***.
- La conjonction de coordination << ***et*** >> se traduit par la multiplication << ***x*** >>.
- La conjonction de coordination << ***ou*** >> se traduit par l'addition << ***+*** >>.

Attention : les affirmations ci-dessus ne sont que des indications, elles admettent donc des exceptions.

Evaluation

Un sac contient 25 boules dont 9 rouges, 6 vertes et 10 jaunes. On tire 5 boules du sac.

I// Dénombrer les cas possibles à cette épreuve si :

- 1) Le tirage est simultané.
- 2) Le tirage est successif et sans remise.
- 3) Le tirage est successif et avec remise.

II// Dénombrer les cas favorables à cette épreuve si :

- 1) Le tirage est simultané et le résultat contient exactement 3 boules rouges.
- 2) Le tirage est successif et sans remise et le résultat contient 2 boules vertes et 2 jaunes.
- 3) Le tirage est successif et avec remise et le résultat contient 1 boule jaune ou 3 vertes.
- 4) Le tirage est simultané et le résultat contient 2 boules rouges, 2 vertes et 1 jaune.
- 5) Le tirage est simultané et le résultat contient au moins 4 boules rouges.
- 6) Le tirage est successif et sans remise et le résultat contient au plus 3 boules jaunes.

II- Probabilité simple :

1) Définition :

Dans une épreuve où tous les événements élémentaires d'un univers Ω sont équiprobables, la probabilité d'un événement **A** est le nombre réel défini par le rapport entre le Nombre de Cas Favorable à l'évènement A et le Nombre de Cas Possibles. On note P_A ou $P(A)$.

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Nombre de Cas Favorables à la réalisation de } A}{\text{Nombre Total de Cas Possibles à la réalisation de } A}$$

2) Propriétés :

Soit Ω l'univers ou événement certain. Soient A et B deux événements élémentaires de Ω .

On a les propriétés suivantes :

- $P(\Omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- Si $A \cap B \neq \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

3) Equiprobabilité :

On parle d'équiprobabilité si la probabilité de réalisation de chaque événement élémentaire est le même.

Exemple : Le lancer du dé est un événement équiprobable car la probabilité d'apparition de chaque face est $\frac{1}{6}$

Evaluation

On dispose d'un jeu de 32 cartes ordinaires.

On tire simultanément et au hasard trois cartes du jeu.

Calcule la probabilité des événements suivants :

- 1) A : « le tirage contient deux cartes noires ».
- 2) B : « le tirage contient trois cartes rouges ».
- 3) C : « le tirage contient deux piques et un trèfle ».
- 4) D : « le tirage contient un carreau ou un cœur ».
- 5) E : « le tirage contient un as ».

Synthèse

On dispose d'un jeu de 32 cartes ordinaire $\Rightarrow n = 32$

On tire 3 cartes du sac $\Rightarrow p = 3$

Le tirage est simultané $\Rightarrow \text{card}(\Omega) = C_n^p = C_{32}^3 = 4960$

Calculons la probabilité des événements suivants :

- 1) A : « le tirage contient deux cartes noires ».

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_{16}^2 \times C_{16}^1}{C_{32}^3} = \frac{1920}{4960} = 0,38$$

- 2) B : « le tirage contient trois cartes rouges ».

$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_{16}^3 \times C_{16}^0}{C_{32}^3} = \frac{560}{4960} = 0,11$$

- 3) C : « le tirage contient deux piques et un trèfle ».

$$P(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_8^2 \times C_8^1}{C_{32}^3} = \frac{224}{4960} = 0,40$$

- 4) D : « le tirage contient un carreau ou un cœur ».

$$P(D) = \frac{\text{card}(D)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_8^1 + C_8^1}{C_{32}^3} = \frac{16}{4960} = 0,003$$

- 5) E : « le tirage contient un as ».

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_4^1 \times C_{28}^2}{C_{32}^3} = \frac{1512}{4960} = 0,30$$

III- Probabilités conditionnelles et Indépendance

1) Définition :

Soient A et B deux événements de probabilité non nulles tels que $A \cap B \neq \emptyset$.

La probabilité de réalisation de A quand B est réalisé s'appelle probabilité conditionnelle de A par rapport à B ou probabilité de A sachant B. $P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

2) Indépendance :

Deux événements A et B sont indépendants si la réalisation de l'un ne modifie pas la réalisation de l'autre.

On a alors :

- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

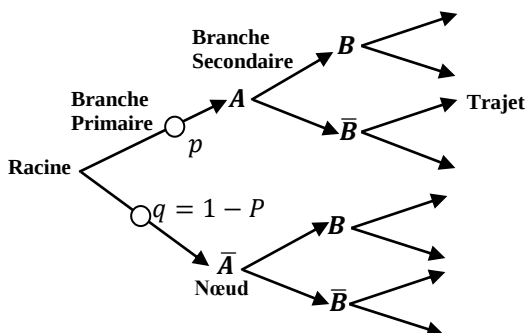
3) Construction d'un arbre pondéré :

Méthode :

Pour construire un arbre pondéré, on applique les règles suivantes :

- Les événements qui se trouvent aux extrémités des branches primaires forment une partition de l'univers Ω .
- Le poids d'une branche primaire est la probabilité de l'événement qui se trouve à son extrémité.
- La somme des poids des branches primaires vaut 1.
- Le poids d'une branche secondaire est la probabilité conditionnelle de l'événement qui se trouve à son extrémité sachant que le trajet menant à son origine a été réalisé.
- La somme des poids des branches secondaires issues d'un même nœud vaut 1.
- Le poids ou la probabilité d'un trajet est le produit des probabilités le constituant.
- La probabilité d'un événement associé à plusieurs trajets complets est la somme des probabilités de ces trajets.

Illustration



Evaluation

Une maladie touche 3% d'une population.

Un test de dépistage donne les résultats suivants :

- Chez les individus malades, 95% de tests sont positifs.
- Chez les individus non malades, 1% de tests sont positifs.

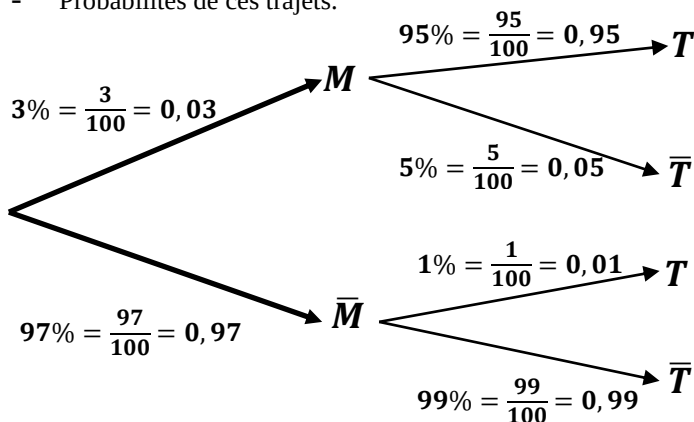
On note **M** l'évènement : « être malade » et **T** l'évènement : « le test est positif »

Construis un arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.

Synthèse

Construisons un arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.

L'arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire est :



IV- Loi de probabilité

1) Variable aléatoire :

On appelle variable aléatoire réelle, toute application x de Ω dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des valeurs prises par x , noté $x(\Omega)$ et s'appelle l'univers image de Ω par x .

2) Loi de probabilité d'une variable aléatoire X

On appelle loi de probabilité d'une variable aléatoire X , la fonction : $P : x \mapsto P(X = x)$ qui à toute valeur image on associe la probabilité $P_i = P(X = x_i)$.

N.B : Une loi de probabilité se présente sous forme d'un tableau de valeurs

x_i	x_1	x_2	x_3		x_n
$p_i(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3		p_n

Remarque : La somme de toutes les lois de probabilités est toujours égale à **1** c'est-à-dire :

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

3) Valeurs caractéristiques d'une variable aléatoire :

a) Espérance mathématique E(X)

On appelle espérance mathématique, le nombre noté : $E(X)$ tel que :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n$$

NB : C'est la moyenne pondérée des valeurs images x_i pondérées par les probabilités P_i Car :

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

Propriétés :

$$P_1 : E(X - E(X)) = 0 \quad ;$$

$$P_3 : E(X + k) = E(X) + k \quad \text{avec } (k \in \mathbb{R})$$

$$P_2 : E(k) = k \quad \text{avec } (k \in \mathbb{R})$$

$$P_4 : E(kX) = k E(X). \quad \text{avec } (k \in \mathbb{R})$$

b) Variance:

On appelle variance d'une variable aléatoire X , le nombre réel noté $V(X)$ tel que :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - [E(X)]^2 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 + \dots + x_n^2 p_n - [E(X)]^2$$

Propriétés :

P₁: $V(k) = 0$; **P₂:** $V(X+k) = V(x)$; **P₃:** $V(kx) = k^2V(x)$ avec $(k \in \mathbb{R})$

c) Ecart – type:

On appelle écart-type, le nombre réel noté $\delta(X)$ tel que : $\delta(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriété : $\delta(kX) = k\delta(X)$ avec $(k \in \mathbb{R})$

4) Partie associée à une valeur image :

Etant donnée une valeur image x_i ; on désigne par " $X = x_i$ ", l'évènement constitué par l'ensemble des éventualités e_k de Ω ayant pour image x_i par X . On note " $X(e_k) = x_i$ " ou " $X = x_i$ ".

N.B : L'ensemble des évènements " $X = x_i$ ", constitue une partition de Ω et forme un système complet d'évènements.

On définit également les notations : $X > a$; $X \geq a$; qui désigne l'ensemble des éventualités de Ω dont l'image est strictement supérieure à a , supérieure ou égale à a ,.....

5) Fonction de répartition d'une variable aléatoire X

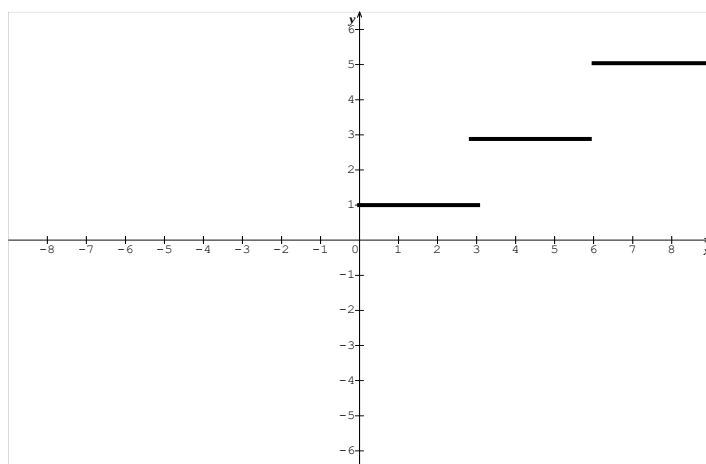
On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire x , la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F : x \mapsto P(X \leq x)$$

N.B : Si $X_i \leq X \leq X_{i+1}$, alors $F(x) = P_1 + P_2 + \dots + P_i$

En particulier : $F(x) = 0$ pour $x < x_1$ et $F(x) = 1$ pour $x > x_n$

La fonction F est une fonction en escalier, croissante de 0 à 1

**Evaluation**

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	5	10	15	30
$P(X = x_i)$	0,1	a	$2a$	0,3

- 1) Calcule a .
- 2) En déduis les valeurs de :
 - a- L'espérance mathématique $E(X)$.
 - b- La variance $V(X)$ et L'écart-type $\delta(X)$

V- Epreuve de Bernoulli – Loi Binomiale

1) Epreuve de Bernoulli

On appelle épreuve de Bernoulli, toute épreuve ne conduisant qu'à deux éventualités : L'une de ces deux éventualités est appelée **succès** avec pour probabilité p et l'autre est appelée **échec** avec pour probabilité $q = 1 - p$.

2) Loi binomiale :

Soit une suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Soit p la probabilité du succès et $q = 1 - p$ celle de l'échec.

Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de succès.

La probabilité d'avoir exactement k succès est : $p(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

Evaluation

On suppose que la probabilité de faire un garçon est $\frac{1}{4}$. Une famille a 5 enfants.

Calcule la probabilité pour qu'il y ait exactement 3 garçons.

Synthèse

On suppose que la probabilité de faire un garçon est $\frac{1}{4}$. Une famille a 5 enfants.

Calculons la probabilité pour qu'il y ait exactement 3 garçons.

Avoir une naissance simple conduit à 2 éventualités : soit on a un garçon, soit on a une fille.

C'est donc une épreuve de Bernoulli. On pourrait considérer l'épreuve « avoir un garçon »

comme le succès de probabilité $p = \frac{1}{4}$ et l'épreuve « avoir une fille » comme l'échec de

probabilité $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Cinq naissances successives constituent une succession de 5 épreuves de Bernoulli.

Pour calculer la probabilité d'avoir exactement 3 garçons, on utilise alors la loi binomiale de

paramètre 5 et $\frac{3}{4}$ tel que : $P(x = 3) = C_5^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 10 \times \frac{1}{64} \times \frac{9}{16} = \frac{90}{1024}$

$\Rightarrow P(x = 3) = \frac{45}{512} = 0,088$