

~ LIMITES : Méthodes, Astuces et Vérifications ~

1) DÉFINITION :

$\lim f(x) = L$ quand $x \rightarrow a$ signifie que $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de L quand x est suffisamment proche de a (sans être égal à a).

2) MÉTHODE GÉNÉRALE :

- Étudier le domaine.
- Remplacer x par la valeur.
- Si on obtient une forme indéterminée : transformer.
- Calculer la limite.
- Vérifier le résultat (toujours !)

FORMES INDÉTERMINÉES :

- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\infty - \infty$
- $0 \times \infty$
- 1^∞
- 0^0
- ∞^0

3) ASTUCES POUR LEVER L'INDÉTERMINATION :

★ Factoriser : $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2 \quad \lim_{x \rightarrow 2}$

★ Conjugué : $\frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \times \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$ [illisible]

★ Limites remarquables :

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

4) VÉRIFICATIONS INTELLIGENTES :

① Tester avec des valeurs proches :

Remplacer x par des valeurs proches de a et voir si $f(x)$ se rapproche de L .

② Vérifier le signe :

Si $f(x) > 0$ près de a , alors la limite ne peut pas être négative.

③ Vérifier le domaine :

Toujours vérifier si la fonction est définie autour de a .

④ Vérifier le comportement logique :

- Dénominateur $\rightarrow 0$ et numérateur $\neq 0 \Rightarrow$ limite $= \pm \infty$

- Pour $x \rightarrow \infty$: garder les termes dominants.

Toujours se poser ces 3 questions :

- Le domaine est-il respecté ?
- Le signe est-il logique ?
- Le comportement est-il logique ?

Si oui $\rightarrow$ limite correcte ! 😊

5) MÉTHODE INTELLIGENTE DE REMPLACEMENT (TRIGO) :

Pour les limites trigonométriques, remplacer x par des valeurs spéciales proches de 0 pour simplifier les calculs.

VALEURS SPÉCIALES TRÈS UTILES (en radians):									
x	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	—	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

COMMENT UTILISER :

→ Si la limite est en 0, tester avec $x = 10^{-1}, 10^{-2}, -10^{-1}, -10^{-2} \dots$

→ Ou utiliser les valeurs du tableau (en radians).

→ Regarder le comportement de l'expression.

EXEMPLE : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

Tester avec $x = 0.1 \rightarrow \frac{\sin(0.1)}{0.1} \approx 0.998 \dots$

$x = 0.01 \rightarrow \frac{\sin(0.01)}{0.01} \approx 0.99998 \dots$

Donc la limite est 1.

ASTUCE :
Plus x est proche de 0, plus $\sin x \approx x$

6) TECHNIQUES EXTRAORDINAIRES :

★ Pour $\frac{\infty}{\infty}$: diviser par le terme de plus haut degré.

★ Pour $\infty - \infty$: mettre au même dénominateur ou multiplier par le conjugué.

★ Pour $\frac{0}{0}$ avec des trigonométries : utiliser les limites remarquables.

EXEMPLE :

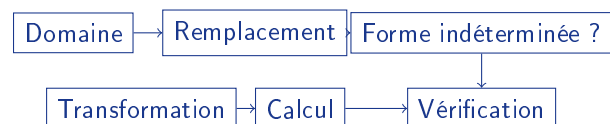
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Preuve rapide :

$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$

Donc $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$

7) MÉTHODE RÉSUMÉ (À SUIVRE À CHAQUE LIMITE) :



RAPPEL FINAL :

- ★ Ne jamais oublier le domaine.
- ★ Toujours vérifier avec des valeurs proches.
- ★ Le signe et le comportement sont tes meilleurs amis.
- ★ En trigonométrie : le tableau des valeurs spéciales est une arme secrète !

La pratique rend parfait ! 😊

~ LIMITES : Méthodes, Astuces et Vérifications ~

EXEMPLES SUPPLÉMENTAIRES (Fonctions trigonométriques)

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x}$$

$$\frac{\sin(2x)}{x} = 2 \cdot \frac{\sin(2x)}{2x}$$

$$= 2 \cdot 1 = \boxed{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{x}$$

$$\frac{\tan(3x)}{x} = 3 \cdot \frac{\tan(3x)}{3x}$$

$$= 3 \cdot 1 = \boxed{3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2}$$

$$1 - \cos(2x) = 2 \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = 2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 1^2 = \boxed{2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$$

$$\sin x - x \sim -\frac{x^3}{6}$$

(développement)

$$\Rightarrow \frac{-x^3/6}{x^3} = -\frac{1}{6} \quad \boxed{-\frac{1}{6}}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)}$$

$$\frac{\sin(5x)}{\sin(2x)} = \frac{\sin(5x)}{5x} \cdot \frac{5x}{2x} \cdot \frac{2x}{\sin(2x)}$$

$$= 1 \cdot \frac{5}{2} \cdot 1 = \boxed{\frac{5}{2}}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$$

$$\tan x - x \sim \frac{x^3}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3/3}{x^3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{bx}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{\sin(ax)}{ax}$$

$$= \boxed{\frac{a}{b}}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

$$\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2/2}{x^2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

Limites classiques à connaître (par cœur) :

$$\star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$$

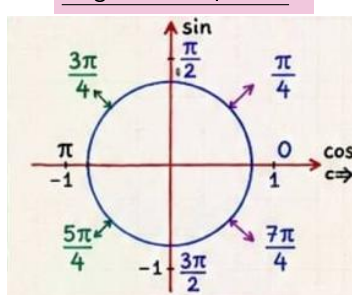
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Angles remarquables :



Exemples avec angles :

$$\star \lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x = 0$$

$$\star \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1}{\cos x} = +\infty$$

$$\star \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1}{\cos x} = -\infty$$

$$\star \lim_{x \rightarrow \pi} \sin x = 0$$

Astuces selon les formes indéterminées :

0/0

- ✓ Factoriser
- ✓ Conjuguer
- ✓ Limites usuelles
- ✓ Développer

Ex:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$$

∞/∞

- ✓ Garder les termes dominants
- ★ Diviser par x^n

Ex: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x + 1}{2x^2 - 5x}$

$$\sim \frac{3x^2}{2x^2} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$\infty - \infty$

- ✓ Même dénominateur
- ✓ Conjuguer
- ★ Développer

Ex: $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x})$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} \xrightarrow{[illisible]} 1$$

$0 \times \infty$

- ✓ Réécrire en fraction
- ★ Utiliser limites usuelles

Ex: $\lim_{x \rightarrow 0} x \tan \frac{1}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = 1$$

$0/0$ (trigo)

- ✓ $\sin x \sim x$
- ★ $\tan x \sim x$
- ★ $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

Ces équivalences sont très puissantes !

Vérifications intelligentes (3 contrôles)

- Domaine :**
 - L'expression est-elle définie près de a ?
 - Ex : $\ln(x-1) \Rightarrow x > 1$ ✓
- Signe :**
 - Le signe de la limite est-il logique ?
 - Ex : $\frac{1}{(x-2)^2} > 0 \Rightarrow \lim_{[illisible]} \neq \text{négative}$ ✓
- Comportement :**
 - Si dénominateur $\rightarrow 0$ et numérateur $\neq 0$ alors la limite $= \pm\infty$
 - Tester gauche et droite
 - Comparer avec le graphe ✓

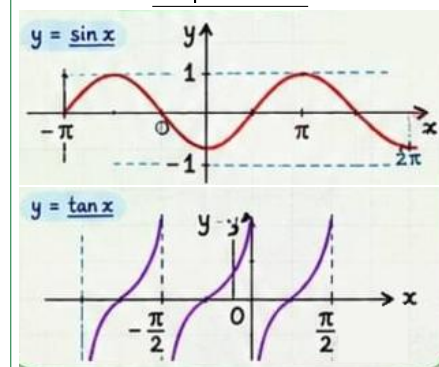
Test rapide (valeurs proches)

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$?

x	$\sin x \cdot x$	Résultat
0.1	0.998334...	≈ 1
0.01	0.9999833...	≈ 1
-0.1	0.998334...	≈ 1
-0.01	0.9999833...	≈ 1

$\Rightarrow$ La limite est confirmée ☑

Graphes utiles



Développements limités (autour de 0)

- ★ $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$
- ★ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$
- ★ $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
- ★ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- ★ $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

Règle en 6 étapes

1. Domaine
 2. Remplacement
 3. Forme indéterminée ?
 4. Transformation (astuces)
 5. Calcul de la limite
 6. Vérification (3 contrôles)
- ☑ Limite CORRECTE

La pratique rend parfait !
Plus d'exemples = plus de maîtrise
Ne t'arrête jamais