

Cours – Fiches diverses

Fiche de synthèse

2^{ème} Baccalauréat

Pc / Svt / Eco

Fiche de synthèse

Formules à apprendre par cœur

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0^\pm$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$

$(\forall x \in]0; +\infty[) : (\ln(x))' = \frac{1}{x}$
$(\forall x \in]0; +\infty[) : (\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$(\forall x \in]0; 1[) : \ln(x) < 0$
$\ln(1) = 0$
$(\forall x \in]1; +\infty[) : \ln(x) > 0$

$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$	$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$
$\ln\left(\frac{d}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$	$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
$\ln(a^n) = n \ln(a)$	$\ln(1) = 0$ $\ln(e) = 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	$e \approx 2,71828182846$ $e^0 = 1$ $e^1 = e$

$(\forall x \in]-\infty; +\infty[) : (e^x)' = e^x$
$(\forall x \in]-\infty; +\infty[) : (e^u)' = u' e^u$

$$(\forall x \in]-\infty; +\infty[) : e^x > 0$$

$e^a \times e^b = e^{a+b}$	$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$	$(e^a)^b = e^{a \times b}$

$\ln(x) = a \iff x = e^a$
$e^x = a \iff x = \ln(a) \quad (a > 0)$

$\ln(x) = \ln(y) \iff x = y$
$e^x = e^y \iff x = y$

L'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse x_0 :

$$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Définition	$v_{n+1} - v_n = r \in \mathbb{R}$	$v_{n+1} = q \times v_n$
(v_n) en fonction de n	$v_n = v_p + (n - p) \times r$	$v_n = v_p \times q^{n-p}$
	Avec p est la 1 ^{ère} valeur de n	
Somme des termes $v_p + v_{p+1} + \dots + v_n$	$(n - p + 1) \times \frac{v_p + v_n}{2}$	$v_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$

(u_n) est majorée par $M \iff u_n \leq M$
(u_n) est minorée par $m \iff u_n \geq m$
(u_n) est bornée $\iff m \leq u_n \leq M$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n =$	$+\infty$ si $q > 1$
	0 si $-1 < q < 1$
	1 si $q = 1$
	Non définie si $q < -1$

Etude de la monotonie de (u_n)
(u_n) est croissante $\iff u_{n+1} - u_n \geq 0$
(u_n) est décroissante $\iff u_{n+1} - u_n \leq 0$
(u_n) est convergente
$\downarrow$ (u_n) est minorée et décroissante $\downarrow$ (u_n) est majorée et croissante

f	f'
k	0
x	1
kx	k
x^n	nx^{n-1}
1	0
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$u \pm v$	$u' \pm v'$
$u \times v$	$u'v + v'u$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$
u^n	$nu^{n-1}u'$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
e^u	$u'e^u$

f	F
k	kx
x	$\frac{1}{2}x^2$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
e^n	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'e^u$	e^u

Etude des variations d'une fonction

Calcul de $f'(x)$
 $\downarrow$
 Etude du signe de $f'(x)$
 $f'(x) \geq 0$ $f'(x) \leq 0$
 $\downarrow$ $\downarrow$
 f est f est
 croissante décroissante

LEÇON : MATRICES – SÉRIE S

RÉSUMÉ

1. DÉFINITION

Une matrice est un tableau de nombres rangés en lignes et en colonnes.

2. ORDRE D'UNE MATRICE

Si une matrice a m lignes et n colonnes, son ordre est $m \times n$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ordre } 2 \times 3$$

3. ÉGALITÉ DE MATRICES

Deux matrices sont égales si :

- elles ont le même ordre
- leurs éléments correspondants sont égaux.

4. ADDITION DE MATRICES

On peut additionner deux matrices de même ordre.

L'addition se fait élément par élément.

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

5. MULTIPLICATION PAR UN SCALAIRE

Soit k un nombre réel.

On multiplie chaque élément de A par k.

$$(kA)_{ij} = k \times A_{ij}$$

6. PRODUIT DE DEUX MATRICES

Le produit $A \times B$ est défini si :

- le nombre de colonnes de A
= nombre de lignes de B

Le résultat est une matrice d'ordre

$$(\text{lignes de A}) \times (\text{colonnes de B})$$

Attention :

$$\text{En général } A \times B \neq B \times A$$

7. MATRICE IDENTITÉ

La matrice identité d'ordre n, notée I_n , vérifie :

$$A \times I_n = I_n \times A = A$$

Exemple :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. DÉTERMINANT (MATRICE 2×2)

$$\text{Pour } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = ad - bc$$

9. MATRICE INVERSE (2×2)

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

A est inversible si et seulement si

$$\det(A) = ad - bc \neq 0$$

Son inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

10. PROPRIÉTÉS IMPORTANTES

- $A + B = B + A$ (commutative)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associative)
- $A(B + C) = AB + AC$ (distributive)
- En général : $AB \neq BA$

11. PUISSANCE D'UNE MATRICE

Pour une matrice carrée A :

$$A^2 = A \times A$$

$$A^n = A \times A \times \dots \times A \text{ (n fois)}$$

12. APPLICATIONS

- Résolution de systèmes linéaires
- Transformations géométriques
- Modélisation de situations réelles

À RETENIR POUR LE BAC

- ☒ Toujours vérifier l'ordre des matrices.
- ☒ Vérifier si le produit est possible.
- ☒ Vérifier le déterminant avant de chercher l'inverse.

ENSEMBLE DES POINTS M AVEC BARYCENTRE DONNÉ : LIGNE DE NIVEAU (CERCLE)

1. RAPPEL : BARYCENTRE

Soit (A, α) et (B, β) deux points affectés de masses α et β avec $\alpha + \beta \neq 0$.

Le barycentre G vérifie :

$$\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0}$$

En particulier, si $\alpha = \beta$, alors G est le milieu de $[AB]$.

2. PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE

Pour tout point M du plan, on a :

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 = (\alpha + \beta) MG^2 + \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} AB^2$$

Démonstration :

✓ Écrivons $\vec{MA} = \vec{MG} + \vec{GA}$ et $\vec{MB} = \vec{MG} + \vec{GB}$.

Alors :

$$\begin{aligned} \alpha MA^2 + \beta MB^2 &= \alpha \|\vec{MG} + \vec{GA}\|^2 + \beta \|\vec{MG} + \vec{GB}\|^2 \\ &= (\alpha + \beta) MG^2 + 2\vec{MG} \cdot (\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB}) + \alpha \|\vec{GA}\|^2 + \beta \|\vec{GB}\|^2 \end{aligned}$$

Or, $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0}$ d'après la propriété du barycentre.

✓ Donc $\alpha \vec{GA}^2 + \beta \vec{GB}^2 = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} AB^2$

Etant :

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 = (\alpha + \beta) MG^2 + \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} AB^2 \quad \checkmark$$

3. LIGNE DE NIVEAU CIRCULAIRE

Soit $k \in \mathbb{R}$. Considérons l'ensemble :

$$E_k = \{ M ; \alpha MA^2 + \beta MB^2 = k \}$$

En utilisant la propriété précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) MG^2 + \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} AB^2 &= k \\ \Leftrightarrow MG^2 &= \frac{k}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} AB^2 \end{aligned}$$

✓ Si $\frac{k}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} AB^2 > 0$,
alors $MG = R$ où

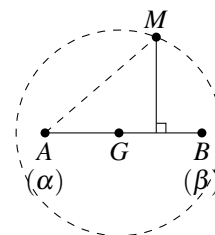
$$R = \sqrt{\frac{k}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} AB^2} > 0$$

et E_k est le cercle de centre G et de rayon R .

✓ Si $\frac{k}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} AB^2 = 0$,
alors $E_k = \{G\}$ (un seul point).

× Si $\frac{k}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} AB^2 < 0$,
alors $E_k = \emptyset$ (ensemble vide).

Cercle (centre G , rayon R)



4. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE (CAS CIRCULAIRE)

Lorsque k est tel que $\frac{k}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} AB^2 > 0$,

l'ensemble des points M vérifiant

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k$$

est le cercle de centre G et de rayon

$$R = \sqrt{\frac{k}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} AB^2}.$$

LÉGENDE

✓ $G = \text{bar} \{ (A, \alpha), (B, \beta) \}$

✓ $\alpha + \beta \neq 0$

✓ Si $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k$ (avec k bien choisi), alors l'ensemble des M est un cercle.

5. CAS PARTICULIER :

$\alpha = \beta \neq 0$

G est le milieu I de $[AB]$.

La formule devient :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

Donc pour $k > \frac{AB^2}{2}$, l'ensemble $\{ M ; MA^2 + MB^2 = k \}$

est le cercle de centre I et de rayon

$$R = \sqrt{\frac{k}{2} - \frac{AB^2}{4}}.$$

6. REMARQUE IMPORTANTE

L'ensemble des points M tel que le barycentre de (A, α) et (B, β) soit précisément le point M lui-même c'est-à-dire :

$$\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} = \vec{0}$$

équivalent à : $M = G$.

Il ne s'agit donc pas d'un cercle mais d'un seul point.

7. FORMULE DU RAYON

(FORME PRATIQUE)

Pour obtenir un cercle non trivial ($R > 0$), il faut choisir k tel que :

$$\frac{k}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} AB^2 > 0$$

et le rayon est alors :

$$R = \sqrt{\frac{k}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} AB^2}$$

ou encore

$$R = \frac{\sqrt{(\alpha + \beta)k - \alpha\beta AB^2}}{|\alpha + \beta|}.$$

Conclusion : L'ensemble des points M vérifiant $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k$ (avec $\alpha + \beta \neq 0$) est un cercle de centre $G = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ et de rayon

$$R = \sqrt{\frac{k}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} AB^2}, \text{ à condition que } \frac{k}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} AB^2 > 0.$$

Les maths rendent tout plus clair !

① DIVISIBILITÉ DANS $\mathbb{Z}$

a divise b s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$b = ak$$

On note : $a \mid b$

Exemples :

- $3 \mid 12$
- $5 \nmid 18$

② DIVISION EUCLIDIENNE

Pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et tout $b \in \mathbb{Z}^*$, il existe des entiers uniques q et r tels que :

$$a = bq + r \text{ avec } 0 \leq r < |b|$$

q : quotient, r : reste

Exemple : $23 = 5 \times 4 + 3$

③ PGCD – PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR

Le PGCD de a et b est le plus grand entier positif divisant a et b .

On note : $\gcd(a, b)$

Méthode d'Euclide : divisions successives jusqu'à obtenir un reste nul.

Le dernier reste non nul est le PGCD.

Exemple :

$$45 = 30 \times 1 + 15$$

$$30 = 15 \times 2 + 0$$

Donc : $\gcd(45, 30) = 15$

④ NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX

Deux entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement si :

$$\gcd(a, b) = 1$$

Exemple : 8 et 15

⑤ THÉORÈME DE BÉZOUT

Les entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$au + bv = 1$$

Exemple : $3 \times 5 + (-2) \times 7 = 1$

Donc 5 et 7 sont premiers entre eux.

⑥ THÉORÈME DE GAUSS

Si $a \mid bc$ et $\gcd(a, b) = 1$

alors $a \mid c$

Très important dans les démonstrations.

⑦ PPCM – PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE

Le PPCM de a et b est le plus petit entier positif multiple de a et de b .

On note : $\text{ppcm}(a, b)$

Relation fondamentale :

$$\gcd(a, b) \times \text{ppcm}(a, b) = |ab|$$

⑧ NOMBRES PREMIERS

Définition : Un entier naturel $p \geq 2$ est premier s'il possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et p .

Exemples : 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

⑨ DÉCOMPOSITION EN FACTEURS PREMIERS

Tout entier $n \geq 2$ peut s'écrire sous la forme :

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

où les p_i sont des nombres premiers.

Exemple : $84 = 2^2 \times 3 \times 7$

⑩ CONGRUENCE MODULO n

a est congru à b modulo n si :

$$a \equiv b \pmod{n}$$

c'est-à-dire $n \mid (a - b)$

Exemple : $17 \equiv 5 \pmod{12}$ car $17 - 5 = 12$

⑪ PROPRIÉTÉS DES CONGRUENCES

Si $a \equiv b \pmod{n}$ et $c \equiv d \pmod{n}$ alors :

- Addition : $a + c \equiv b + d \pmod{n}$
- Soustraction : $a - c \equiv b - d \pmod{n}$
- Multiplication : $ac \equiv bd \pmod{n}$
- Puissance : $a^p \equiv b^p \pmod{n}$

⑫ ÉQUATIONS DIOPHANTIENNES

Équation de la forme :

$$ax + by = c \quad (a, b, c \in \mathbb{Z})$$

Condition d'existence :

L'équation admet des solutions entières si et seulement si :

$$\gcd(a, b) \mid c$$

Méthode : utiliser l'algorithme d'Euclide et le théorème de Bézout.

⑬ RÉSUMÉ DES OUTILS ESSENTIELS

- ☐
- ✓ Division euclidienne
- ☐
- ✓ Algorithme d'Euclide (PGCD)
- ☐
- ✓ Théorème de Bézout
- ☐
- ✓ Théorème de Gauss
- ☐
- ✓ Calcul du PGCD et du PPCM
- ☐
- ✓ Congruences modulo n
- ☐
- ✓ Équations diophantiennes

FORMULES À RETENIR

- $a = bq + r$ avec $0 \leq r < |b|$
- $\gcd(a, b) \times \text{ppcm}(a, b) = |ab|$

⑭ CLASSES D'ÉQUIVALENCE DANS $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Relation de congruence :

$$a \equiv b \pmod{n}$$

C'est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique, transitive).

⑮ CLASSE D'ÉQUIVALENCE DE a

La classe d'équivalence de a modulo n est :

$$\bar{a} = \{ k \in \mathbb{Z} / k \equiv a \pmod{n} \}$$

On la note : $\bar{a}$ ou $a + n\mathbb{Z}$

Exemple dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

$$\bar{2} = \{ \dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots \}$$

⑯ ENSEMBLE QUOTIENT $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

L'ensemble des classes d'équivalence modulo n est :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n-1} \}$$

Il contient exactement n classes.

Exemple : $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3} \}$

⑰ ÉGALITÉ DE DEUX CLASSES

Deux classes sont égales si :

$$\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n}$$

Exemple dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$:

$$\bar{8} = \bar{2} \text{ car } 8 \equiv 2 \pmod{6}$$

⑱ OPÉRATIONS DANS $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

- **Addition :** $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$
- **Multiplication :** $\bar{a} \times \bar{b} = \overline{ab}$
- **Opposé :** $-\bar{a} = \overline{-a}$
- **Neutres :** $\bar{0}$ (pour +), $\bar{1}$ (pour $\times$)

⑲ INVERSIBLE DANS $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$\bar{a}$ est inversible s'il existe $\bar{b}$ telle que :

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{1}$$

Condition fondamentale :

$$\bar{a} \text{ est inversible } \Leftrightarrow \gcd(a, n) = 1$$

Exemple dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$:

$$\bar{3}^{-1} = \bar{5} \text{ car } 3 \times 5 = 15 \equiv 1 \pmod{7}$$

⑳ RÉOLUTION D'ÉQUATIONS DANS $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Exemple : $\bar{3}x = \bar{2}$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

Comme $\bar{3}^{-1} = \bar{5}$, on multiplie par $\bar{5}$:

$$x = \bar{5} \times \bar{2} = \bar{10} = \bar{3}$$

Donc $\boxed{x = \bar{3}}$

CONSEILS POUR LE BAC

- ☐
- ✓ Bien maîtriser les démonstrations.
- ☐
- ✓ Toujours utiliser : Bézout, Gauss, divisibilité et congruences.
- ☐
- ✓ Vérifier les conditions avant d'appliquer un théorème.
- ☐
- ✓ Soigner la rédaction logique.

RÉSUMÉ RAPIDE

- $a \equiv b [n] \Leftrightarrow n \mid (a - b)$
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{ \bar{0}, 1, \dots, n-1 \}$
- $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow a \equiv b [n]$
- $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$
- $\bar{a} \times \bar{b} = \overline{ab}$
- $\bar{a}$ inversible $\Leftrightarrow \gcd(a, n) = 1$
- $ax + by = c$ (solutions si $\gcd(a, b) \mid c$)

EXEMPLE COMPLET RAPIDE

Dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

- **Classes** : $\{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4} \}$
- $\bar{2} + \bar{4} = \bar{6} = \bar{1}$
- $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{6} = \bar{1}$
- **Inversibles** : $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ (car $\gcd(k, 5) = 1$)
- $\bar{2}^{-1} = \bar{3}$ car $2 \times 3 = 6 \equiv 1 [5]$

ARITHMÉTIQUE – Les 7 théorèmes fondamentaux de l'arithmétique

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$a|b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, b = ak$$

$$\text{PGCD}(a, b) = d$$

Divisibilité • Congruences • Nombres premiers • Algorithmes •
Cryptographie

1 LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE

Énoncé

Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 peut être écrit comme un produit de nombres premiers de façon unique, à l'ordre des facteurs près.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \quad n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$$

Où les p_i sont des nombres premiers distincts et les α_i sont des entiers naturels non nuls.

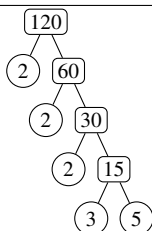
Exemple

Le nombre 120 se décompose de manière unique sous la forme :

$$120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$$

Nombres premiers (P)

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...



2 LE THÉORÈME DE BACHET-BÉZOUT

Énoncé

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls, et $d = \text{PGCD}(a, b)$.

Il existe deux entiers relatifs u et v tels que :

$$au + bv = \text{PGCD}(a, b)$$

Corollaire

(Théorème de Bézout pour les nombres premiers entre eux)

Deux entiers a et b sont premiers entre eux ($\text{PGCD}(a, b) = 1$) si et seulement s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que :

$$au + bv = 1$$

Exemple explicite

Trouvons les coefficients pour $a = 15$ et $b = 26$.

$$\text{PGCD}(15, 26) = 1$$

Algorithme d'Euclide

étendu :

$$\begin{aligned} 15 \times (-7) + 26 \times 4 &= -105 + 104 \\ &= -1 \end{aligned}$$

En inversant les

signes :

$$\begin{aligned} 15 \times 7 + 26 \times (-4) &= 105 - 104 = 1 \end{aligned}$$

Ici, $u = 7$ et $v = -4$.

3 LE LEMME DE GAUSS

Énoncé

Soient a , b et c trois entiers relatifs.

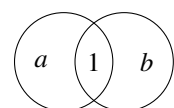
Si a divise le produit bc , et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c .

$$\left. \begin{array}{l} a | bc \\ \text{PGCD}(a, b) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a | c$$

Exemple

Si 4 divise $3x$, puisque

$\text{PGCD}(4, 3) = 1$, alors 4 divise nécessairement x .



$$\text{PGCD}(a, b) = 1$$

4 LE PETIT THÉORÈME DE FERMAT

Énoncé

Soit p un nombre premier et a un entier non divisible par p . Alors :

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Forme générale

Pour tout entier a et tout nombre premier p :

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

✓ p premier	✓ a non divisible par p	✓ Conclusion
Ex : 7	Ex : $\text{gcd}(3, 7) = 1$ $\neq 0 \pmod{7}$	$3^6 \equiv 1 \pmod{7}$

Exemple numérique

Calculons $3^6 \pmod{7}$. Ici $p = 7$ (premier) et $a = 3$ (non divisible par 7).

Le théorème assure que $3^{7-1} = 3^6 \equiv 1 \pmod{7}$.

Vérification : $3^6 = 729$.

Or, $729 = 7 \times 104 + 1$.

Le reste est bien 1.

5 LE THÉORÈME DES RESTES CHINOIS (TRC)

Énoncé

Soient $m_1, m_2, \dots, m_k$ des entiers deux à deux premiers entre eux. Pour tous entiers $a_1, a_2, \dots, a_k$, le système de congruences suivant admet une unique solution modulo

Condition clé :

$$\gcd(m_i, m_j) = 1$$

pour tout $i \neq j$

$$M =$$

$$m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$$

$$M = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k :$$

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \vdots \\ x \equiv a_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

Exemple

Cherchons x tel que :

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

Les solutions de la deuxième équation sont $x = 3, 8, 13, \dots$

Parmi elles, $x = 8$ vérifie la première équation car

$$8 = 2 \times 3 + 2 \equiv 2 \pmod{3}.$$

La solution unique modulo 15 (3×5) est

$$x \equiv 8 \pmod{15}.$$

6 LE THÉORÈME D'EULER

Énoncé

Ce théorème généralise le Petit Théorème de Fermat aux nombres composés.

Soit n un entier supérieur à 1 et a un entier premier avec n . Alors :

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

Où $\varphi(n)$ est la fonction indicatrice d'Euler, représentant le nombre d'entiers inférieurs à n et premiers avec n .

Propriétés de $\varphi(n)$

- Si p est premier, $\varphi(p) = p - 1$.
- Si $n = p \times q$ avec p et q premiers, $\varphi(n) = (p - 1)(q - 1)$.

Cette propriété est le pilier du système de chiffrement RSA.

7 LE THÉORÈME DE WILSON

Énoncé

Un entier $n > 1$ est un nombre premier si et seulement si :

$$(n - 1)! \equiv -1 \pmod{n}$$

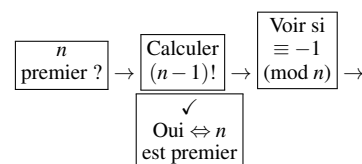
Exemple

Pour $n = 5$ (premier) :

$$(5 - 1)! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

$$\text{Or } 24 = 5 \times 5 - 1 \equiv -1 \pmod{5}.$$

Le théorème est vérifié.



SYNTHÈSE DES APPLICATIONS

Théorème	Domaine d'application principal	
Fondamental	Simplification de fractions, cryptographie, calcul de diviseurs.	Fermat / Euler
Bézout	Résolution d'équations diophantiennes ($ax + by = c$).	Restes Chinois

Ces outils sont au cœur :

- ✓ de l'algèbre modulaire
- ✓ de la théorie des nombres
- ✓ de la cryptographie moderne
- ✓ des algorithmes efficaces

CONCLUSION Ces théorèmes forment l'armature de l'arithmétique modulaire. Ils permettent de simplifier des calculs sur des nombres gigantesques et sécurisent la quasi-totalité de nos échanges numériques actuels via les protocoles de chiffrement.

Valeurs remarquables, élémentaires, angles associés, formules d'addition

◆ Valeurs remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0



◆ Les élémentaires:

$\forall x \in \mathbb{R}$	$-1 \leq \cos x \leq 1$ $-1 \leq \sin x \leq 1$	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

◆ Angles associés à x :

	Tour	
	$\cos(x + 2\pi) = \cos x$ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ $\tan(x + 2\pi) = \tan x$	
Angle opposé	Demi-tour	Quart de tour direct
$\cos(-x) = \cos x$ $\sin(-x) = -\sin x$ $\tan(-x) = -\tan x$	$\cos(x + \pi) = -\cos x$ $\sin(x + \pi) = -\sin x$ $\tan(x + \pi) = \tan x$	$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan x}$
Quart de tour indirect	Angle supplémentaire	Angle complémentaire
$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$ $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$ $\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan x}$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\sin(\pi - x) = \sin x$ $\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$

◆ Formules d'addition :

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$	$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Résolution d'équations trigonométriques

Soient a donné et x une inconnue

• 1^{ère} cas : $\begin{cases} \cos x = \cos a \\ \sin x = \sin a \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = a + 2k\pi} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Exemple : $\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \\ \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi} \quad (k \in \mathbb{Z})$

• 2^{ème} cas : $\begin{cases} \cos x = -\cos a \\ \sin x = \sin a \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = \pi - a + 2k\pi} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Exemple : $\begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -\cos \frac{\pi}{4} \\ \sin x = \sin \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

• 3^{ème} cas : $\begin{cases} \cos x = \cos a \\ \sin x = -\sin a \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = -a + 2k\pi} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Exemple : $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \cos \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -\sin \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \quad (k \in \mathbb{Z})$

• 4^{ème} cas : $\begin{cases} \cos x = -\cos a \\ \sin x = -\sin a \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = \pi + a + 2k\pi} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Exemple : $\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -\cos \frac{\pi}{3} \\ \sin x = -\sin \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Autres cas utiles

• $\cos x = \cos a$ $\Rightarrow x = 2k\pi + a$ ou $x = 2k\pi - a$ ($k \in \mathbb{Z}$) <u>Exemple</u> : $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$	• $\sin x = \sin a$ $\Rightarrow x = 2k\pi + a$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) <u>Exemple</u> : $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$	
• $\cos x = -\cos a$ $\Rightarrow x = \pi + 2k\pi + a$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) <u>Exemple</u> : $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$	• $\sin x = -\sin a$ $\Rightarrow x = -a + 2k\pi$ ou $x = \pi + a + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) <u>Exemple</u> : $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$	
• $\tan x = \tan a$ $\Rightarrow x = a + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) <u>Exemple</u> : $\tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$	• $\tan x = -\tan a$ $\Rightarrow x = -a + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) <u>Exemple</u> : $\tan x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$	• $\tan x = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$ $\Rightarrow x = a - b + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) <u>Exemple</u> : $\tan x = \tan(a - b) \Rightarrow x = a - b + k\pi$
• $\cot x = \cot a$ $\Rightarrow x = a + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) <u>Exemple</u> : $\cot x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$	• $\cot x = -\cot a$ $\Rightarrow x = -a + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) <u>Exemple</u> : $\cot x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$	• $\cot x = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot b + \cot a}$ $\Rightarrow x = a + b + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) <u>Exemple</u> : $\cot x = \cot(a + b) \Rightarrow x = a + b + k\pi$

Exercices

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 11. $\cos x = 0$ |
| 2. $\sin x = \frac{1}{2}$ | 12. $\sin x = 1$ |
| 3. $\cos x = -\frac{1}{2}$ | 13. $\tan x = \sqrt{3}$ |
| 4. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 14. $\cot x = 1$ |
| 5. $\tan x = 1$ | 15. $\cot x = -\sqrt{3}$ |
| 6. $\tan x = -1$ | 16. $2 \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| 7. $\cos x = \cos \frac{\pi}{6}$ | 17. $\sin 2x = \frac{1}{2}$ |
| 8. $\cos x = -\cos \frac{\pi}{4}$ | 18. $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ |
| 9. $\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$ | 19. $\tan(x + \frac{\pi}{4}) = 1$ |
| 10. $\sin x = -\sin \frac{\pi}{6}$ | 20. $\tan(x - \frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3}$ |

Corrigés

- | | |
|--|---|
| 1. $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ | 11. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ |
| 2. $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ | 12. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ |
| 3. $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ | 13. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ |
| 4. $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ | 14. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ |
| 5. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ | 15. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ |
| 6. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ | 16. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ |
| 7. $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ | 17. $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ |
| 8. $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ | 18. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ |
| 9. $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ | 19. $x = k\pi$ |
| 10. $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ | 20. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ |

Domaine de définition

- $\sin x$ défini sur $\mathbb{R}$
- $\cos x$ défini sur $\mathbb{R}$
- $\tan x$ défini sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- $\cot x$ défini sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Rappels

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Les Équations Différentielles

1) Équation différentielle du 1^{er} ordre

$$y' = ay + b \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Solution générale :

$$y(x) = \alpha e^{ax} - \frac{b}{a}, \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Astuce :

On divise par a et on utilise le facteur intégrant e^{-ax}

$$y' = ay \quad (a \in \mathbb{R})$$

Solution générale :

$$y(x) = \alpha e^{ax}, \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Astuce :

Séparable : $\frac{dy}{y} = a dx \Rightarrow \ln|y| = ax + C$

a) $\Delta < 0$

$\Delta < 0 \Rightarrow$ deux racines complexes

$$r_1 = p + iq, \quad r_2 = p - iq$$

$$\text{avec : } p = -\frac{b}{2a} \text{ et } q = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Solution générale :

$$y(x) = e^{px} (\alpha \cos qx + \beta \sin qx) \\ (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

Astuce :

Pense à Euler :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Exemples

Ex 1 : $y' = 2y + 4$

$$a = 2, \quad b = 4$$

$$y(x) = \alpha e^{2x} - \frac{4}{2} = \alpha e^{2x} - 2$$

b) $\Delta = 0$

$\Delta = 0 \Rightarrow$ racine double

$$r_0 = -\frac{b}{2a}$$

Solution générale :

$$y(x) = e^{r_0 x} (\alpha x + \beta) \\ (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

Astuce :

Quand $\Delta = 0$, on multiplie la solution par x

Ex 2 : $y'' - 4y = 0$

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -4$$

$$\Delta = 0^2 - 4(1)(-4) = 16 > 0$$

$$r_1 = 2, \quad r_2 = -2$$

$$y(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x}$$

Sois régulier, curieux et positif !
Tu vas y arriver

2) Équation différentielle du 2^{ème} ordre

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0)$$

Équation caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0$$

Astuce :

On cherche les racines $\Delta = b^2 - 4ac$

· Si $\Delta < 0 \rightarrow$ 2 racines complexes

· Si $\Delta = 0 \rightarrow$ 1 racine double

· Si $\Delta > 0 \rightarrow$ 2 racines réelles distinctes

Équations Différentielles

c) $\Delta > 0$

$\Delta > 0 \Rightarrow$ deux racines réelles distinctes

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Solution générale :

$$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x} \\ (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

Astuce :

Utilise bien les formules pour r_1 et r_2 , ne te trompe pas de signes !

Ex 3 : $y'' + 4y = 0$

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 4$$

$$\Delta = 0^2 - 4(1)(4) = -16 < 0$$

$$p = 0, \quad q = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$$

$$y(x) = \alpha \cos 2x + \beta \sin 2x$$

Les maths, c'est logique
et tout le monde peut comprendre !

✗ Crois en toi ✗

Chapitre 5 LES FONCTIONS PRIMITIVES

DEFINITION

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit que la fonction F est une primitive de f sur I si : F est dérivable sur I et $(\forall x \in I), F'(x) = f(x)$

$$F \text{ est dérivable sur } I \text{ et } (\forall x \in I), F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I$$

PROPRIETES

- 1- Toute fonction continue sur un intervalle I admet une fonction primitive définie sur cet intervalle .
- 2- Si F est une primitive de f sur I alors les primitives de f sur I sont les fonctions: $x \mapsto F(x) + c, (c \in \mathbb{R})$
- 3- Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f sur I vérifiant : $F(x_0) = y_0$

OPERATIONS SUR LES PRIMITIVES

- Si F et G sont respectivement des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I alors :
 - $F + G$ est une fonction primitive de la fonction $f + g$.
 - Pour tout $k \in \mathbb{R}$, kF est une fonction primitive de la fonction kf .
- Si F et G sont des primitives de la fonction f sur un intervalle I alors : $(\exists c \in \mathbb{R}), F(x) = G(x) + c$

TABEAU DES PRIMITIVES USUELLES

La fonction f	Les primitives de f
a	$ax + c$
$x^n \ (n \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{Arctan}(x) + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x) + c$
$\frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \cotan^2(x)$	$\cotan(x) + c$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$
$1 + \tan^2(ax+b)$	$\frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$
e^x	$e^x + c$

La fonction f	Les primitives de f
$u'(x) + v'(x)$	$u(x) + v(x) + c$
$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$	$u(x)v(x) + c$
$\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$	$\frac{u(x)}{v(x)} + c$
$u'(x)(u(x))^n \ (n \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$\frac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + c$
$\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$	$-\frac{1}{u(x)} + c$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + c$
$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$	$\text{Arctan}(u(x)) + c$
$u'(x)\sin(u(x))$	$-\cos(u(x)) + c$
$u'(x)\cos(u(x))$	$\sin(u(x)) + c$
$u'(x)(1 + \tan^2(u(x))) = \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$	$\tan(u(x)) + c$
$u'(x)(1 + \cotan^2(u(x))) = \frac{u'(x)}{\sin^2(u(x))}$	$\cotan(u(x)) + c$
$u'(x) \cdot v'(u(x))$	$uov(x) + c$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) + c$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + c$

logarithme népérien

△ Attention !

1. DÉFINITION

Le logarithme népérien est la fonction notée $\ln(x)$.

Elle est définie pour tout $x > 0$ et vérifie :

$$e^{\ln(x)} = x$$

où $e \approx 2,71828$ est le nombre d'Euler.

2. DOMAINE DE DÉFINITION

$$D_{\ln} =]0, +\infty[$$

- La fonction n'existe pas pour $x \leq 0$.
- $\ln(0)$ n'existe pas
- $\ln(x)$ n'existe pas pour $x < 0$.

3. RELATIONS IMPORTANTES

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$

avec : $a > 0, b > 0$

4. RAPPEL

La fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

$$y = \ln(x) \iff x = e^y$$

5. VARIATIONS

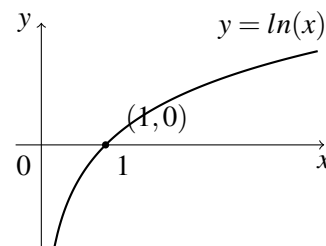
La fonction $\ln(x)$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Car :

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x} > 0$$

pour tout $x > 0$.

9. COURBE REPRÉSENTATIVE



Au voisinage de $+\infty$:

branche parabolique de direction (ox)

- Passe par le point $(1, 0)$.
- Croissante sur $]0, +\infty[$.
- Admet une asymptote verticale : $x = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

6. LIMITES

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
-
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x-1} = 0$

7. DÉRIVÉES

- $(\ln(x))' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$
 - $(u(x))' = u'(x)$
 - $(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$
- si $u(x) > 0$ et dérivable

10. PROPRIÉTÉS

SUPPLÉMENTAIRES

- La fonction $\ln$ est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.
- $\ln$ est strictement croissante et réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
- $\ln(x) > 0 \iff x > 1$
- $\ln(x) < 0 \iff 0 < x < 1$

8. MÉTHODES UTILES

✓ Résoudre : $\ln(x) = a$

On obtient : $x = e^a$

(avec $x > 0$)

✓ Résoudre : $\ln(f(x)) = 0$

On utilise : $\ln(1) = 0$

donc : $f(x) = 1$

Toujours vérifier que $f(x) > 0$ avant d'appliquer $\ln$.

12. ATTENTION !

Toujours vérifier que
l'argument du logarithme est
strictement positif :

$$u(x) > 0$$

avant d'utiliser $\ln(u(x))$.

13. EN RÉSUMÉ

Domaine	Variations	Limites	Dérivée	Point remarquable	Asymptote
$]0, +\infty[$		$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} +\infty$	$\frac{1}{x}$	$(1, 0)$	$x = 0$