

Cours de Mathématiques

Terminale Sciences Exactes (TSE)

Compatible Terminale Sciences Expérimentales (TSExp)

Programme du Mali

Un cours interactif pour apprendre en autonomie

Inspiré des œuvres de **Adama Traoré**, Professeur Lycée Technique Bamako

Comment utiliser ce cours ?

Ce document est conçu pour que tu puisses travailler **en autonomie**. Voici comment l'utiliser :

1. **Les Activités** : chaque notion est introduite par une activité guidée avec espace de réponse.
2. **Les Mini-Synthèses** : après chaque activité, compare ta réponse avec la synthèse.
3. **Définitions, Théorèmes, Méthodes** : encadrés et clairement identifiés.
4. **Les Exemples détaillés** : chaque notion est illustrée par des exemples résolus.
5. **La Synthèse Générale** : résumé complet en fin de chapitre.
6. **Les estimations de temps** ☺ : pour planifier tes séances de travail.

Bon courage et bon travail !

Table des matières

1	Nombres Complexes	7
1.1	Forme algébrique – Opérations	7
1.2	Conjugué d'un nombre complexe	9
1.3	Module d'un nombre complexe	9
1.4	Argument d'un nombre complexe	10
1.5	Forme trigonométrique et forme exponentielle	11
1.6	Formule de Moivre et linéarisation	12
1.7	Racines n -ièmes	13
1.8	Racine carrée d'un nombre complexe	14
1.9	Équations du second degré dans $\mathbb{C}$	15
1.10	Applications géométriques des nombres complexes	16
1.11	Nombres complexes et transformations du plan	17
1.11.1	Translation	18
1.11.2	Homothétie	18
1.11.3	Rotation	18
2	Arithmétique	21
2.1	Propriétés de $\mathbb{N}$ et raisonnement par récurrence	21
2.2	Division euclidienne	22
2.3	Systèmes de numération	23
2.4	Nombres premiers	24
2.5	PGCD, PPCM et algorithme d'Euclide	24
2.6	Congruences	26
2.7	Résolution d'équations diophantiennes	27
3	Fonctions Numériques	29
3.1	Ensemble de définition	29
3.2	Limites de fonctions	30
3.3	Continuité	32
3.4	Dérivation	32
3.5	Étude complète de fonctions	33
4	Primitives et Calcul Intégral	37
4.1	Primitives d'une fonction	37
4.2	Intégrale définie	39
4.3	Intégration par parties	40
4.4	Applications du calcul intégral	41
4.5	Changement de variable et méthode des rectangles	42
5	Fonction Logarithme Népérien	45
5.1	Définition et propriétés algébriques	45
5.2	Dérivation et primitives logarithmiques	46
5.3	Étude de la fonction $\ln$	47
5.4	Logarithme de base a	48

6	Fonction Exponentielle Népérienne	49
6.1	Définition et propriétés	49
6.2	Limites et croissance comparée	50
6.3	Extension aux complexes et nouvelles primitives	51
7	Fonction Puissance	53
7.1	Définition et propriétés	53
8	Suites Numériques	55
8.1	Généralités	55
8.2	Suites arithmétiques et géométriques	55
8.3	Convergence	56
8.4	Raisonnement par récurrence	57
9	Équations Différentielles	59
9.1	Généralités	59
9.2	Premier ordre : $y' + ay = 0$	59
9.3	Second ordre : $ay'' + by' + cy = 0$	59
9.4	Avec second membre	60
10	Dénombrement et Probabilités	63
10.1	Analyse combinatoire	63
10.2	Probabilités	63
10.3	Variable aléatoire et loi binomiale	63
11	Géométrie Plane – Transformations du Plan	65
11.1	Isométries du plan	65
11.2	Similitudes	65
11.3	Barycentre	66
11.4	Applications affines	67
12	Coniques	69
12.1	Définition unifiée	69
12.2	L'ellipse	69
12.3	L'hyperbole	69
12.4	La parabole	69

Planning prévisionnel

Estimation du temps de travail par séquence

Séq.	Titre	Cours	Exercices
1	Nombres Complexes	5h00	6h00
2	Arithmétique	3h30	4h00
3	Fonctions Numériques (limites, continuité, dérivation, étude)	4h00	5h00
4	Primitives et Intégration	3h30	4h30
5	Fonction Logarithme Népérien	3h00	3h30
6	Fonction Exponentielle Népérienne	3h00	3h30
7	Fonction Puissance	2h00	2h30
8	Suites Numériques	3h30	4h30
9	Équations Différentielles	3h00	3h30
10	Dénombrement et Probabilités	3h30	4h00
11	Géométrie Plane – Transformations du Plan (Isométries, Similitudes)	4h00	4h30
12	Coniques	3h00	3h00
	TOTAL ESTIMÉ	~ 41h	~ 48h

Ces durées sont indicatives. L'idéal est de travailler régulièrement par séances de 1h30 à 2h, en alternant cours et exercices.

Chapitre 1

Nombres Complexes

⊙ **Durée estimée :** 5h00 – 6h00

8 activités + cours détaillé + synthèse

Introduction

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ne permet pas de résoudre toutes les équations polynomiales : $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Pour remédier à cela, on étend $\mathbb{R}$ en un ensemble plus grand, $\mathbb{C}$, où l'on ajoute un nombre i tel que $i^2 = -1$.

1.1 Forme algébrique – Opérations

Activité 1.1 : Découvrir les nombres complexes ⊙ 20 min

On définit le nombre i (appelé **unité imaginaire**) tel que $i^2 = -1$. Tout nombre complexe s'écrit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

- Calcule $(2 + 3i) + (4 - i)$ et $(2 + 3i) \times (4 - i)$.
- Soit $z = 3 + 2i$ et $z' = 3 - 2i$. Calcule $z \times z'$. Que remarques-tu ?
- Calcule i^2, i^3, i^4, i^5 . Quelle régularité observes-tu ?
- Mets sous forme algébrique $\frac{3+2i}{1-i}$.

Ta réponse :

✓ Opérations dans $\mathbb{C}$

$$(2 + 3i) + (4 - i) = 6 + 2i. \quad (2 + 3i)(4 - i) = 8 - 2i + 12i - 3i^2 = 11 + 10i.$$

$z\bar{z} = (3 + 2i)(3 - 2i) = 9 + 4 = 13 \in \mathbb{R}^+$. Le produit d'un complexe par son conjugué est toujours un réel positif.

$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \dots$ Période 4.

$$\frac{3+2i}{1-i} = \frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+3i+2i-2}{2} = \frac{1+5i}{2}.$$

Nombre complexe – Forme algébrique

On appelle **nombre complexe** tout élément z de la forme $z = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$.

— $a = \operatorname{Re}(z)$: **partie réelle**. $b = \operatorname{Im}(z)$: **partie imaginaire**.

— Si $b = 0$: z est **réel**. Si $a = 0, b \neq 0$: z est **imaginaire pur**.

— **Égalité** : $a + ib = a' + ib' \iff a = a'$ et $b = b'$ (identification).

Opérations :

— Addition : $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$.

— Multiplication : $(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$.

— Division : $\frac{a+ib}{a'+ib'} = \frac{(a+ib)(a'-ib')}{a'^2+b'^2}$ (on multiplie par le conjugué).

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un **corps commutatif**.

1.2 Conjugué d'un nombre complexe

Conjugué

Le **conjugué** de $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$.

Propriétés du conjugué

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$:

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad (z' \neq 0)$
- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}^+$
- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
- $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$
- z imaginaire pur $\iff \bar{z} = -z$
- $\overline{\bar{z}} = z$
- $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

Exemples

$z = 2 - 3i \Rightarrow \bar{z} = 2 + 3i$. $z = -1 + 5i \Rightarrow \bar{z} = -1 - 5i$.
 $z\bar{z} = (2 - 3i)(2 + 3i) = 4 + 9 = 13$. $\operatorname{Re}(z) = \frac{(2-3i)+(2+3i)}{2} = 2$. $\operatorname{Im}(z) = \frac{(2-3i)-(2+3i)}{2i} = \frac{-6i}{2i} = -3$.

1.3 Module d'un nombre complexe

Module

Le **module** de $z = a + ib$ est le réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$.

Propriétés du module

- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- $|z^n| = |z|^n$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)
- $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$
- Si $z = a$ réel, $|z| = |a|$

Exemple

$z = 1 - i\sqrt{3} : |z| = \sqrt{1+3} = 2$. $z = -7 : |z| = 7$. $z = 2i : |z| = 2$.

1.4 Argument d'un nombre complexe

Représentation géométrique et argument

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

À tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on associe le point $M(a, b)$ appelé **image** de z , et le vecteur $\overrightarrow{OM}(a, b)$ appelé **vecteur image**.

Le nombre z est l'**affixe** du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Pour $z \neq 0$, un **argument** de z est tout réel θ tel que :

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|}, \quad \sin \theta = \frac{b}{|z|}$$

On note $\theta = \arg(z)$. L'argument est défini modulo 2π .

Activité 1.2 : Calculer modules et arguments ☉ 20 min

Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes :

- a) $z_1 = 1 + i$
- b) $z_2 = -\sqrt{3} + i$
- c) $z_3 = -2 - 2i$
- d) $z_4 = 3$ (réel positif)
- e) $z_5 = -5i$ (imaginaire pur négatif)

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$$z_1 : |z_1| = \sqrt{2}, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \theta = \frac{\pi}{4}.$$

$$z_2 : |z_2| = 2, \cos \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}, \sin \theta = \frac{1}{2}, \theta = \frac{5\pi}{6}.$$

$$z_3 : |z_3| = 2\sqrt{2}, \theta = -\frac{3\pi}{4}. \quad z_4 : |z_4| = 3, \theta = 0. \quad z_5 : |z_5| = 5, \theta = -\frac{\pi}{2}.$$

Propriétés de l'argument

Pour $z, z' \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$:

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}$
- $\arg(z^n) = n \arg(z) \pmod{2\pi}$
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \pmod{2\pi}$
- $z \in \mathbb{R}^{+*} \iff \arg(z) = 0 \pmod{2\pi}$
- $z \in \mathbb{R}^{-*} \iff \arg(z) = \pi \pmod{2\pi}$
- $z \text{ imag. pur} \iff \arg(z) = \pm \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$

1.5 Forme trigonométrique et forme exponentielle

Formes d'un nombre complexe

Tout $z \in \mathbb{C}^*$ s'écrit :

- **Forme trigonométrique** : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r = |z| > 0$ et $\theta = \arg(z)$.
- **Forme exponentielle** : $z = re^{i\theta}$ (notation d'Euler : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$).

Formules d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Activité 1.3 : Formes trigonométrique et exponentielle ⌚ 20 min

- a) Écris sous forme trigonométrique puis exponentielle : $z_1 = 1+i$, $z_2 = -\sqrt{3}+i$, $z_3 = -2$.
- b) Calcule $z_1 \times z_2$ en utilisant les formes exponentielles.
- c) Démontre que $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ en utilisant $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ et $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$.
- d) En déduis la formule de linéarisation : $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$.

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$$z_1 = \sqrt{2} e^{i\pi/4}, z_2 = 2e^{i5\pi/6}, z_3 = 2e^{i\pi}.$$

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2} e^{i(\pi/4+5\pi/6)} = 2\sqrt{2} e^{i13\pi/12}.$$

$$\cos^2 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}}{4} = \frac{2\cos(2\theta) + 2}{4} = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}.$$

1.6 Formule de Moivre et linéarisation

Formule de Moivre

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad \text{soit} \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Application : développement de $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta).$$

Développons le membre de gauche par Newton :

$$\begin{aligned} & \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta \\ &= (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta) + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta). \end{aligned}$$

$$\text{Par identification : } \cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\sin(3\theta) = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta.$$

Linéarisation

Pour **linéariser** $\cos^n \theta$ ou $\sin^n \theta$ (les exprimer en termes de $\cos(k\theta)$, $\sin(k\theta)$), on utilise les formules d'Euler :

$$\cos^n \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^n, \quad \sin^n \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^n$$

On développe par le binôme de Newton puis on regroupe les termes conjugués.

Linéarisation de $\sin^4 \theta$

$$\begin{aligned} \sin^4 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^4 = \frac{1}{16} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^4 \\ &= \frac{1}{16} (e^{4i\theta} - 4e^{2i\theta} + 6 - 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}) \\ &= \frac{1}{16} (2 \cos 4\theta - 8 \cos 2\theta + 6) = \frac{1}{8} (\cos 4\theta - 4 \cos 2\theta + 3). \end{aligned}$$

1.7 Racines n -ièmes

Racines n -ièmes de l'unité

Les solutions de $z^n = 1$ sont les n nombres : $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.
Ils forment un **polygone régulier** à n côtés inscrit dans le cercle unité.

Racines n -ièmes d'un complexe

Les solutions de $z^n = w$ où $w = |w|e^{i\alpha}$ sont :

$$z_k = |w|^{1/n} e^{i(\alpha+2k\pi)/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Méthode : si z_0 est une racine particulière de $z^n = w$, toutes les racines sont $z_0 \times \omega_k$ où ω_k sont les racines n -ièmes de l'unité.

Activité 1.4 : Racines n -ièmes ⌚ 25 min

- Résous $z^3 = 1$. Place les solutions dans le plan.
- Résous $z^4 = -1$ en écrivant $-1 = e^{i\pi}$.
- Résous $z^3 = 8i$.
- Détermine les racines quatrièmes de $8(1 - i\sqrt{3})$.

Racine carrée de $-5 - 12i$

On cherche $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = -5 - 12i$.

$$|\delta|^2 = \sqrt{25 + 144} = 13. \text{ Donc : } \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = -12 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

$$(1) + (3) : 2x^2 = 8, x^2 = 4, x = \pm 2.$$

Si $x = 2 : y = -12/(2 \times 2) = -3, \delta_1 = 2 - 3i.$

Si $x = -2 : y = 3$, $\delta_2 = -2 + 3i$.

Vérification : $(2 - 3i)^2 = 4 - 12i + 9i^2 = 4 - 12i - 9 = -5 - 12i \checkmark$.

1.9 Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Activité 1.5 : Équations du second degré ◉ 25 min

- a) Résous $z^2 - 2z + 5 = 0$ (coefficients réels, $\Delta < 0$).
- b) Résous $z^2 - (5 + 3i)z + 4 + 7i = 0$ (coefficients complexes).
- c) Résous $z^2 + 3(1 + i)z + 5i = 0$.

✓ Ce qu'il faut retenir

- a) $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$. $z = \frac{2 \pm 4i}{2}$. $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 1 + 2i = \bar{z}_1$.
 b) $\Delta = (5 + 3i)^2 - 4(4 + 7i) = 25 + 30i - 9 - 16 - 28i = 2i$. Racines de $2i : \delta^2 = 2i$,
 $x^2 + y^2 = \sqrt{4} = 2$, $x^2 - y^2 = 0$, $2xy = 2$. Donc $x = y = 1 : \delta = 1 + i$. $z = \frac{5 + 3i \pm (1 + i)}{2}$.
 $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 2 + i$.

Résolution de $az^2 + bz + c = 0$ dans $\mathbb{C}$

Cas 1 : $a, b, c \in \mathbb{R}$. $\Delta = b^2 - 4ac$.

- $\Delta > 0$: $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ (deux racines réelles).
- $\Delta = 0$: $z_0 = -\frac{b}{2a}$ (racine double réelle).
- $\Delta < 0$: $z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ (racines complexes conjuguées).

Cas 2 : $a, b, c \in \mathbb{C}$. Calculer $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$, trouver δ tel que $\delta^2 = \Delta$, puis $z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$.

1.10 Applications géométriques des nombres complexes

Interprétation géométrique

Soient A, B, C des points d'affixes z_A, z_B, z_C .

- $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$, et $AB = |z_B - z_A|$.
- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$ et $\frac{AC}{AB} = \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right|$.
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires** $\iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.
- $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est **imaginaire pur**.

Activité 1.6 : Nature d'un triangle ⦿ 20 min

Soient $A(-1 - i)$, $B(1 + i)$, $C(-1 + i)$.

- a) Calcule $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. Détermine $|Z|$ et $\arg(Z)$.
- b) Dédus-en la nature du triangle ABC .
- c) Calcule de même les rapports aux sommets B et C .

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$z_A = -1 - i$, $z_B = 1 + i$, $z_C = -1 + i$. $Z = \frac{(-1+i)-(-1-i)}{(1+i)-(-1-i)} = \frac{2i}{2+2i} = \frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{2} = \frac{i+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.
 $|Z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\arg(Z) = \frac{\pi}{4}$. Donc $\hat{A} = \frac{\pi}{4}$ et $\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 $AC = |2i| = 2$, $AB = |2 + 2i| = 2\sqrt{2}$, $BC = |2| = 2$. Triangle rectangle isocèle en C ($AC = BC = 2$, $\hat{C} = \frac{\pi}{2}$).

Lieux géométriques classiques

- $|z - z_A| = r$: **cercle** de centre A et de rayon r .
- $|z - z_A| = |z - z_B|$: **médiatrice** du segment $[AB]$.
- $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \theta_0 \ [2\pi]$: **arc de cercle** capable d'angle θ_0 .
- $\frac{z-z_A}{z-z_B} \in \mathbb{R}$: A , B , M **alignés** (droite (AB) privée de B).
- $\frac{z-z_A}{z-z_B}$ imaginaire pur : **cercle de diamètre** $[AB]$ (privé de A et B).

1.11 Nombres complexes et transformations du plan

C'est l'une des applications les plus puissantes des nombres complexes : écrire les transformations géométriques sous forme d'équations sur les affixes.

1.11.1 Translation

Écriture complexe de la translation

La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe z_0 s'écrit :

$$z' = z + z_0$$

Le point M' d'affixe z' est l'image de M d'affixe z par la translation.

Exemple

Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_0 = 2 + i$. Écriture complexe : $z' = z + 2 + i$.
Image de $A(3 - 2i)$: $z'_A = (3 - 2i) + (2 + i) = 5 - i$. Donc $A'(5, -1)$.

1.11.2 Homothétie

Écriture complexe de l'homothétie

L'homothétie de centre Ω (d'affixe z_Ω) et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ s'écrit :

$$z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega) \quad \text{soit} \quad z' = kz + (1 - k)z_\Omega$$

Preuve

$$M' = h_{\Omega, k}(M) \iff \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} \iff z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega) \iff z' = kz + (1 - k)z_\Omega.$$

Exemple

Homothétie de centre $\Omega(2 + i)$ et de rapport $k = -2$.

$$z' = -2z + (1 - (-2))(2 + i) = -2z + 3(2 + i) = -2z + 6 + 3i.$$

Image de $A(0)$: $z'_A = 6 + 3i$. Image de $B(1 + i)$: $z'_B = -2(1 + i) + 6 + 3i = 4 + i$.

1.11.3 Rotation

Écriture complexe de la rotation

La rotation de centre Ω (d'affixe z_Ω) et d'angle θ s'écrit :

$$z' - z_\Omega = e^{i\theta}(z - z_\Omega) \quad \text{soit} \quad z' = e^{i\theta}z + (1 - e^{i\theta})z_\Omega$$

Preuve

$$M' = r_{\Omega, \theta}(M) \iff \begin{cases} \overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M} \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases} \iff \frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} \text{ est de module 1 et d'argument } \theta, \text{ soit } \frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} = e^{i\theta}.$$

Activité 1.7 : Transformations en écriture complexe ◉ 25 min

- Détermine l'écriture complexe de la rotation r de centre $A(3i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- Détermine l'écriture complexe de l'homothétie h de centre $\Omega(1+i)$ et de rapport 3.
- Soit f définie par $z' = (1+i)z + 2$. Démontre que f est une **similitude directe**. Détermine son rapport, son angle et son centre.
- Soit g définie par $z' = iz + 1 + 2i$. Identifie la nature de g .

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

✓ Ce qu'il faut retenir

- a) $z' - 3i = e^{i\pi/2}(z - 3i) = i(z - 3i)$, donc $z' = iz + 3i(1 - i) = iz + 3 + 3i$.
b) $z' = 3z + (1 - 3)(1 + i) = 3z - 2 - 2i$.
c) $z' = (1 + i)z + 2$. $|1 + i| = \sqrt{2} \neq 1$: c'est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ et angle $\frac{\pi}{4}$.
Centre : $\omega = (1 + i)\omega + 2 \Rightarrow \omega(1 - (1 + i)) = 2 \Rightarrow \omega(-i) = 2 \Rightarrow \omega = \frac{2}{-i} = 2i$.
d) $z' = iz + 1 + 2i$. $|i| = 1$, $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$: c'est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Centre : $\omega = i\omega + 1 + 2i \Rightarrow \omega(1 - i) = 1 + 2i \Rightarrow \omega = \frac{(1+2i)(1+i)}{2} = \frac{-1+3i}{2}$.

Similitude directe – Écriture complexe

Toute similitude directe s'écrit $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.

— **Rapport** : $k = |a|$.

- **Angle** : $\theta = \arg(a)$.
- Si $|a| = 1$: **isométrie** (rotation si $a \neq 1$, translation si $a = 1$).
- Si $\arg(a) = 0$ (i.e. $a \in \mathbb{R}^*$) : **homothétie**.
- Si $a \neq 1$: le **centre** est $\omega = \frac{b}{1-a}$.

Comment reconnaître une transformation à partir de $z' = az + b$

Condition	Transformation	Éléments
$a = 1$	Translation	Vecteur d'affixe b
$a \in \mathbb{R}^*, a \neq 1$	Homothétie	Centre $\frac{b}{1-a}$, rapport a
$ a = 1, a \neq 1$	Rotation	Centre $\frac{b}{1-a}$, angle $\arg(a)$
$ a \neq 1$	Similitude directe	Centre $\frac{b}{1-a}$, rapport $ a $, angle $\arg(a)$

Synthèse générale – Nombres Complexes

1. Formes d'un nombre complexe

— Algébrique : $z = a + ib$. Trigonométrique : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. Exponentielle : $z = re^{i\theta}$.

2. Conjugué et module

$$\bar{z} = a - ib, |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, z\bar{z} = |z|^2.$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.$$

3. Euler et Moivre

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

$$\text{Linéarisation : utiliser } \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

4. **Racine carrée de $a + ib$** : résoudre $x^2 - y^2 = a$, $2xy = b$, $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$.

5. **Équation du 2nd degré** : $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta < 0$ (coeff. réels) : $z = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$. Si $\Delta \in \mathbb{C}$: chercher $\delta^2 = \Delta$.

6. **Racines n -ièmes de $w = |w|e^{i\alpha}$** : $z_k = |w|^{1/n} e^{i(\alpha + 2k\pi)/n}$, $k = 0, \dots, n-1$.

7. Géométrie

$$AB = |z_B - z_A|, (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}.$$

Colinéaires $\iff$ quotient réel. Perpendiculaires $\iff$ quotient imaginaire pur.

8. Transformations

— **Translation** : $z' = z + z_0$.

— **Homothétie** : $z' = kz + (1-k)z_\Omega$, $k \in \mathbb{R}^*$.

— **Rotation** : $z' = e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$.

— **Similitude directe** : $z' = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$. Rapport $|a|$, angle $\arg(a)$, centre $\frac{b}{1-a}$ si $a \neq 1$.

Chapitre 2

Arithmétique

⊙ **Durée estimée :** 3h30 – 4h00

6 activités + cours détaillé + synthèse

Introduction

L'arithmétique étudie les propriétés des entiers. Divisibilité, nombres premiers, PGCD, théorème de Bézout, congruences : ces outils sont fondamentaux et très présents au baccalauréat malien.

2.1 Propriétés de $\mathbb{N}$ et raisonnement par récurrence

Principe du raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une propriété dépendant de $n \in \mathbb{N}$.

Si : (1) $P(n_0)$ est vraie (initialisation), et (2) pour tout $k \geq n_0$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ (hérédité), alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Activité 2.1 : Raisonnement par récurrence ⊙ 20 min

- a) Démontre par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- b) Démontre par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

Activité 2.2 : Division euclidienne et divisibilité ⌚ 15 min

- Effectue la division euclidienne de 2024 par 17.
- Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n^2 + n$ est pair.
- Écris 157 en base 2 et en base 16.

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$2024 = 17 \times 119 + 1$. $n^2 + n = n(n+1)$: produit de deux entiers consécutifs, l'un est pair, donc le produit est pair.

$157 = 128 + 16 + 8 + 4 + 1 = 10011101_2$. $157 = 9 \times 16 + 13 = 9D_{16}$.

2.3 Systèmes de numération

Écriture en base b

Tout entier $x > 0$ s'écrit de façon unique : $x = a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_1b + a_0$ avec $0 \leq a_i < b$ et $a_n \neq 0$.

On note $x = (a_na_{n-1} \dots a_1a_0)_b$.

Conversion de base

Base 10 $\rightarrow$ base b : divisions successives par b , on lit les restes de bas en haut.

Base $b \rightarrow$ base 10 : on développe : $a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + \dots$

2.4 Nombres premiers

Nombre premier

Un entier $p \geq 2$ est **premier** s'il n'admet que deux diviseurs : 1 et p .
Exemples : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...

Théorème fondamental de l'arithmétique

Tout entier $n \geq 2$ se décompose de façon unique en produit de facteurs premiers :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$$

Test de primalité

Pour tester si n est premier : vérifier qu'il n'est divisible par aucun premier $p \leq \sqrt{n}$.

2.5 PGCD, PPCM et algorithme d'Euclide

PGCD et PPCM

- $\text{pgcd}(a, b)$: le plus grand diviseur commun à a et b .
- $\text{ppcm}(a, b)$: le plus petit multiple commun à a et b .
- Relation : $\text{pgcd}(a, b) \times \text{ppcm}(a, b) = |ab|$.

Activité 2.3 : Algorithme d'Euclide et Bézout ⌚ 25 min

- a) Calcule $\text{pgcd}(252, 198)$ par l'algorithme d'Euclide.
- b) En remontant les calculs, exprime $\text{pgcd}(252, 198)$ comme combinaison linéaire de 252 et 198.
- c) Décompose 360 et 504 en facteurs premiers. Déduis-en $\text{pgcd}(360, 504)$ et $\text{ppcm}(360, 504)$.
- d) Trouve $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $7u + 5v = 1$.

✓ Ce qu'il faut retenir

$23 = 7 \times 3 + 2$, $7 = 2 \times 3 + 1$. Remontée : $1 = 7 - 2 \times 3 = 7 - 3(23 - 7 \times 3) = 10 \times 7 - 3 \times 23$.

Donc $23 \times (-3) + 7 \times 10 = 1$. Multiplier par 6 : $23 \times (-18) + 7 \times 60 = 6$.

Solution particulière : $(x_0, y_0) = (-18, 60)$.

Solution générale : $x = -18 + 7k$, $y = 60 - 23k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Synthèse générale – Arithmétique

1. **Division euclidienne** : $a = bq + r$, $0 \leq r < b$.
2. **Divisibilité** : $b|a \iff \exists k, a = kb$. Propriétés de linéarité.
3. **Nombres premiers** : $p \geq 2$ premier si ses seuls diviseurs sont 1 et p . Décomposition unique en facteurs premiers.
4. **PGCD** : Algorithme d'Euclide (divisions successives). $\text{pgcd} \times \text{ppcm} = |ab|$.
5. **Bézout** : $\exists u, v, au + bv = \text{pgcd}(a, b)$. Premiers entre eux $\iff au + bv = 1$.
6. **Gauss** : $a|bc$ et $\text{pgcd}(a, b) = 1 \Rightarrow a|c$.
7. **Congruences** : $a \equiv b [n] \iff n|(a - b)$. Compatible avec $+$, $\times$, puissances.
8. **Équations diophantiennes** : $ax + by = c$ solvable $\iff \text{pgcd}(a, b)|c$.
9. **Systèmes de numération** : écriture en base b par divisions successives.

Chapitre 3

Fonctions Numériques

⊙ **Durée estimée :** 4h00 – 5h00

6 activités + cours détaillé + synthèse

Introduction

Ce chapitre regroupe les outils fondamentaux d'analyse : ensemble de définition, limites, continuité, dérivation, étude complète de fonctions. La maîtrise de ces notions est indispensable pour tous les chapitres suivants.

3.1 Ensemble de définition

Définition

L'ensemble de définition D_f d'une fonction f est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est défini.

Règles pour déterminer D_f

- Polynôme : $D_f = \mathbb{R}$.
- Fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{x : Q(x) = 0\}$.
- $\sqrt{u(x)}$: $D_f = \{x : u(x) \geq 0\}$.
- $\ln(u(x))$: $D_f = \{x : u(x) > 0\}$.

Activité 3.1 : Ensembles de définition ⊙ 15 min

Déterminer D_f pour :

a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$

b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

c) $h(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2+x-6}$

d) $p(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{3-2x}}$

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

- a) $x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.
 b) $x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 2) \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$ ou $x \geq 2$. $D_g =] - \infty, 1] \cup [2, +\infty[$.
 c) $x - 1 \geq 0$ et $x^2 + x - 6 \neq 0$. $x \geq 1$ et $x \neq 2$ (car $x = -3$ est exclu par $x \geq 1$).
 $D_h = [1, 2[\cup]2, +\infty[$.
 d) $3 - 2x > 0 \Rightarrow x < 3/2$. $D_p =] - \infty, 3/2[$.

3.2 Limites de fonctions

Limite finie en un point et à l'infini

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ signifie que $f(x)$ s'approche aussi près que l'on veut de L quand x tend vers a .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ signifie que $f(x)$ tend vers L quand x devient infiniment grand.

Règles de calcul des limites

Polynômes : la limite en $\pm\infty$ ne dépend que du monôme de plus haut degré.

Fractions rationnelles : la limite en $\pm\infty$ ne dépend que du rapport des termes de plus haut degré.

Formes indéterminées : $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 .

Activité 3.2 : Calcul de limites ⦿ 25 min

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{x^3 + 3x^2}$ (FI $\frac{\infty}{\infty}$)

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ (FI $\frac{0}{0}$)

3.3 Continuité

Définition

f est **continue** en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, ce qui nécessite : (1) $f(x_0)$ existe, (2) la limite existe, (3) elles sont égales.

f est continue sur I si elle est continue en tout point de I .

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Si f est continue sur $[a, b]$ et si $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Si de plus f est **strictement monotone**, ce zéro est **unique**.

Utilisation du TVI pour encadrer un zéro

1. Montrer que f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$.
2. Vérifier que $f(a) \cdot f(b) < 0$.
3. Conclure : $\exists ! \alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
4. Pour affiner : calculer f au milieu de l'intervalle et réitérer.

3.4 Dérivation

Nombre dérivé et fonction dérivée

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

La tangente à (C_f) en x_0 a pour équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Dérivées usuelles et règles

$f(x)$	$f'(x)$	Règle	Formule
k	0	$(u + v)'$	$u' + v'$
x^n	nx^{n-1}	$(ku)'$	ku'
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$(uv)'$	$u'v + uv'$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\frac{u}{v})'$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(u^n)'$	$nu'u^{n-1}$
e^x	e^x	$(e^u)'$	$u'e^u$
$\sin x$	$\cos x$	$(\ln u)'$	$\frac{u'}{u}$
$\cos x$	$-\sin x$	$(\sqrt{u})'$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$		

Activité 3.3 : Dérivation – exercices ⦿ 25 min

- a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. Calcule $f'(x)$.
- b) $g(x) = (2x^3 - x)^4$. Calcule $g'(x)$.
- c) $h(x) = x\sqrt{x^2+1}$. Calcule $h'(x)$.

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= \frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}. \\ \text{b) } g'(x) &= 4(6x^2-1)(2x^3-x)^3. \\ \text{c) } h'(x) &= \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}. \\ \text{d) } p'(x) &= \frac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}. \end{aligned}$$

1. **Ensemble de définition** D_f .
2. **Parité / périodicité** : $f(-x)$ vs $f(x)$; $f(x + T)$ vs $f(x)$.
3. **Limites aux bornes** de D_f . Asymptotes.
4. **Dérivée** $f'(x)$, signe de f' , points critiques.
5. **Tableau de variations** complet.
6. **Points remarquables** : intersections axes, extrema, inflexion.

7. Tracé de la courbe.

Activité 3.4 : Étude complète ☉ 40 min

Soit $f(x) = \frac{x^2-2x+3}{x-1}$ pour $x \neq 1$.

Étape 1 : Ensemble de définition.

Étape 2 : Division euclidienne : écris $f(x)$ sous forme $q(x) + \frac{r}{x-1}$.

Étape 3 : Limites et asymptotes.

Étape 4 : Dérivée, signe, tableau de variations.

Étape 5 : Position par rapport à l'asymptote oblique.

Étape 6 : Points particuliers et tracé.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

✓ Ce qu'il faut retenir

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

$$x^2 - 2x + 3 = (x-1)(x-1) + 2, \text{ donc } f(x) = x - 1 + \frac{2}{x-1}.$$

$$\text{AV : } x = 1. \text{ AO : } y = x - 1.$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 2}{(x-1)^2}. f' = 0 \iff x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

$$f(1 - \sqrt{2}) = -1 - 2\sqrt{2} \text{ (max local)}. f(1 + \sqrt{2}) = -1 + 2\sqrt{2} \text{ (min local)}.$$

$$\text{Position : } f(x) - (x-1) = \frac{2}{x-1}. \text{ Au-dessus si } x > 1, \text{ en dessous si } x < 1.$$

Activité 3.5 : Convexité et point d'inflexion ◉ 20 min

$$\text{Soit } f(x) = x^3 - 3x + 2.$$

- Calcule $f''(x)$. Résous $f''(x) = 0$.
- Étudie le signe de $f''(x)$ et déduis-en la convexité de f .
- Détermine le point d'inflexion.

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$$f'(x) = 3x^2 - 3, f''(x) = 6x. f''(x) = 0 \iff x = 0.$$

$$f'' < 0 \text{ pour } x < 0 \text{ (concave)}, f'' > 0 \text{ pour } x > 0 \text{ (convexe)}.$$

$$\text{Point d'inflexion : } (0, f(0)) = (0, 2).$$

Synthèse générale – Fonctions Numériques

1. Limites : polynôme $\sim$ terme dominant. Fraction rationnelle $\sim$ rapport des termes dominants.

FI : $\frac{0}{0}$ (factoriser), $\frac{\infty}{\infty}$ (diviser), $\infty - \infty$ (conjugué ou factoriser).

$$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1, \frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}, \frac{\tan x}{x} \rightarrow 1.$$

2. Continuité : f continue en $x_0 \iff \lim_{x_0} f = f(x_0)$. TVI : zéro entre valeurs de signes opposés.

3. Dérivation : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Tangente : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
 $f' > 0 \Rightarrow f \nearrow$. $f' < 0 \Rightarrow f \searrow$. $f'(x_0) = 0$ avec changement de signe $\Rightarrow$ extremum.

4. Convexité : $f'' > 0$: convexe (courbe au-dessus des tangentes). $f'' < 0$: concave.
 $f'' = 0$ avec changement de signe : point d'inflexion.

5. Asymptotes : $\lim_a f = \pm\infty$: AV $x = a$. $\lim_{\pm\infty} f = L$: AH $y = L$. $\lim_{\pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$: AO $y = ax + b$.

Chapitre 4

Primitives et Calcul Intégral

⊙ **Durée estimée** : 3h30 – 4h00

5 activités + cours détaillé + synthèse

Introduction

Le calcul intégral est l'outil fondamental pour calculer des aires, des volumes, des moyennes. Il repose sur la notion de primitive.

4.1 Primitives d'une fonction

Primitive

F est une **primitive** de f sur I si $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Si F est une primitive, toutes les autres sont de la forme $G(x) = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$.

Activité 4.1 : Retrouver des primitives ⊙ 20 min

Trouve une primitive de :

a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 9x + 1$

b) $f(x) = (2x - 1)(x^2 - x + 4)^3$ (remarque que $(x^2 - x + 4)' = 2x - 1$)

c) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x-1}$

d) $f(x) = \frac{3x^2}{(x^3+1)^5}$

e) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^4 x}$

f) $f(x) = (5x + 1)^7$

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

- a) $F(x) = \frac{3x^5}{5} - x^4 + \frac{5x^3}{3} - \frac{9x^2}{2} + x$.
- b) Type $u'u^n$: $F(x) = \frac{(x^2-x+4)^4}{4}$.
- c) Type $\frac{u'}{u}$: $F(x) = \ln|x^2 + 3x - 1|$.
- d) $u = x^3 + 1$, $u' = 3x^2$. $F(x) = \frac{(x^3+1)^{-4}}{-4} = -\frac{1}{4(x^3+1)^4}$.
- e) $u = \sin x$, $u' = \cos x$. $F(x) = \frac{\sin^{-3} x}{-3} = -\frac{1}{3\sin^3 x}$.
- f) $F(x) = \frac{(5x+1)^8}{5 \times 8} = \frac{(5x+1)^8}{40}$.

Tableau des primitives fondamentales

$f(x)$	Primitive	$f(x)$	Primitive
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$u'u^n \ (n \neq -1)$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\frac{u'}{u}$	$\ln u $
e^x	e^x	$u'e^u$	e^u
$\cos x$	$\sin x$	$u' \cos u$	$\sin u$
$\sin x$	$-\cos x$	$u' \sin u$	$-\cos u$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$(ax+b)^n$	$\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}$

4.2 Intégrale définie

Intégrale définie

Si F est une primitive de f continue sur $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \left[F(x) \right]_a^b$$

Propriétés de l'intégrale

- **Linéarité** : $\int_a^b [\alpha f + \beta g] = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.
- **Chasles** : $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$.
- **Positivité** : si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f \geq 0$.
- **Inégalité** : si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- $\int_a^a f = 0$ et $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Activité 4.2 : Calcul d'intégrales ◉ 25 min

Calcule :

- a) $\int_0^1 (3x^2 + 2x - 1) dx$
- b) $\int_0^\pi \sin x dx$
- c) $\int_1^e \frac{dx}{x}$
- d) $\int_0^1 (x^2 + 1)(2x^3 + 6x)^2 \cdot x dx$ (aide : poser $u = x^2$)
- e) $\int_0^{\pi/4} \tan x dx$

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

- a) $[x^3 + x^2 - x]_0^1 = 1$. b) $[-\cos x]_0^\pi = 2$. c) $[\ln x]_1^e = 1$.
 e) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx = [-\ln |\cos x|]_0^{\pi/4} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} + \ln 1 = \frac{1}{2} \ln 2$.

4.3 Intégration par parties

Intégration par parties (IPP)

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

Activité 4.3 : IPP et décomposition ⌚ 30 min

- a) $\int_0^1 xe^x dx$ ($v = x$, $u' = e^x$)
 b) $\int_0^\pi x \sin x dx$
 c) $\int_1^e x \ln x dx$ ($v = \ln x$, $u' = x$)
 d) $\int_1^e (\ln x)^2 dx$ (double IPP)
 e) Décompose $\frac{1}{x^2-1}$ en éléments simples et calcule $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1}$.

Activité 4.4 : Calcul d'aires ☉ 20 min

- a) Aire entre $y = x^2$ et $y = x$ sur $[0, 1]$.
 b) Aire entre $y = xe^{-x}$ et l'axe (Ox) sur $[0, 2]$.
 c) Valeur moyenne de $f(x) = \sin x$ sur $[0, \pi]$.

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

- a) $\int_0^1 (x - x^2) dx = [\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{6}$.
 b) IPP : $\int_0^2 xe^{-x} dx = [-xe^{-x}]_0^2 + \int_0^2 e^{-x} dx = -2e^{-2} + [-e^{-x}]_0^2 = -2e^{-2} - e^{-2} + 1 = 1 - 3e^{-2}$.
 c) $\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{1}{\pi} \times 2 = \frac{2}{\pi}$.

4.5 Changement de variable et méthode des rectangles**Changement de variable affine**

Pour $\int f(ax + b) dx$, on pose $u = ax + b$, $du = a dx$:

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} \int f(u) du$$

Méthode des rectangles (valeur approchée)

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

Synthèse générale – Primitives et Calcul Intégral

1. **Primitives** : $F' = f$. Toutes : $F + C$. Fondamentales : $u'u^n \rightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$, $\frac{u'}{u} \rightarrow \ln|u|$, $u'e^u \rightarrow e^u$.
2. **Intégrale** : $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. Linéarité, Chasles, positivité.
3. **IPP** : $\int u'v = [uv] - \int uv'$.
4. **Éléments simples** : décomposer $\frac{P}{Q}$ en fractions partielles avant d'intégrer.
5. **Aire** : $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$. **Valeur moyenne** : $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$.

Chapitre 5

Fonction Logarithme Népérien

⊙ **Durée estimée :** 3h00 – 3h30

4 activités + cours détaillé + synthèse

5.1 Définition et propriétés algébriques

Définition

$\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 : $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$.

Propriétés algébriques fondamentales

Pour $a, b > 0$ et $r \in \mathbb{R}$:

- | | |
|------------------------------|--------------------------------------|
| — $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ | — $\ln(1/a) = -\ln a$ |
| — $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$ | — $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$ |
| — $\ln(a^r) = r \ln a$ | — $\ln a = \ln b \iff a = b$ |
| — $\ln 1 = 0, \ln e = 1$ | — $\ln a < \ln b \iff 0 < a < b$ |

Activité 5.1 : Propriétés du logarithme ⊙ 20 min

- Simplifie : $\ln 12 - \ln 3 + \ln 5, \quad 3 \ln 2 + \ln 5 - \ln 10, \quad \ln(e^3 \sqrt{e})$.
- Résous : $\ln(x-2) + \ln(x+1) = \ln(3x-5)$.
- Résous : $(\ln x)^2 - 7 \ln x + 6 = 0$.
- Résous : $\ln(x+5) + \ln(x+4) \leq \ln(x+13)$.

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$$\ln 12 - \ln 3 + \ln 5 = \ln \frac{12 \times 5}{3} = \ln 20. \quad 3 \ln 2 + \ln 5 - \ln 10 = \ln \frac{8 \times 5}{10} = \ln 4.$$

$$\ln(e^3 \sqrt{e}) = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

b) Dom. : $x > 2$. $\ln(x-2)(x+1) = \ln(3x-5)$. $x^2 - x - 2 = 3x - 5 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 3$. Seul $x = 3$ valide.

c) Poser $X = \ln x$: $X^2 - 7X + 6 = 0 \Rightarrow X = 1$ ou $X = 6$. $x = e$ ou $x = e^6$.

5.2 Dérivation et primitives logarithmiques

Théorème

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ pour } x > 0. \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u} \text{ pour } u > 0.$$

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x} \text{ pour } x \neq 0. \quad \text{Primitive de } \frac{u'}{u} : \ln |u| + C.$$

Activité 5.2 : Dérivées logarithmiques ⌚ 20 min

Calcule $f'(x)$ pour :

a) $f(x) = \ln(x^2 + 3x - 1)$

b) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

c) $f(x) = x^2 \ln x$

d) $f(x) = [\ln(3x + 1)]^5$

e) $f(x) = -\ln(\cos x)$

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

- a) $f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x-1}$. b) $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{-2}{x^2-1}$.
 c) $f'(x) = 2x \ln x + x$. d) $f'(x) = \frac{15}{3x+1} [\ln(3x+1)]^4$. e) $f'(x) = \tan x$.

5.3 Étude de la fonction $\ln$

Limites et croissance comparée

$$\lim_{0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{+\infty} \ln x = +\infty.$$

Croissance comparée : pour $\alpha > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$$

Activité 5.3 : Étude d'une fonction avec $\ln$ ⌚ 25 min

Étudie $f(x) = x - 1 - \ln x$ sur $]0, +\infty[$. Démontre que $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. $f' < 0$ sur $]0, 1[$, $f' > 0$ sur $]1, +\infty[$. Min en $x = 1$: $f(1) = 0$.
Donc $f(x) \geq 0$: $\boxed{\ln x \leq x - 1}$ avec égalité ssi $x = 1$.

5.4 Logarithme de base a

Définition

Pour $a > 0$, $a \neq 1$: $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.
En particulier : $\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$ (logarithme décimal).

Synthèse – Logarithme Népérien

Déf. : $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$. **Algèbre** : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln(a^r) = r \ln a$.

Dérivée : $(\ln x)' = 1/x$, $(\ln u)' = u'/u$.

Limites : $\lim_{0^+} = -\infty$, $\lim_{+\infty} = +\infty$. Croiss. comp. : $\ln x \ll x^\alpha$.

Inégalité : $\ln x \leq x - 1$. $\ln$ **strictement croissante, concave**.

Chapitre 6

Fonction Exponentielle Népérienne

⊙ **Durée estimée :** 3h00 – 3h30

4 activités + cours détaillé + synthèse

6.1 Définition et propriétés

Définition

$\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est la bijection réciproque de $\ln$. On note $e^x = \exp(x)$.
 $y = e^x \iff x = \ln y$ ($y > 0$). $\ln(e^x) = x$ et $e^{\ln x} = x$.

Propriétés algébriques

$e^0 = 1$, $e^1 = e \approx 2,718$. Pour $a, b \in \mathbb{R}$:
 $e^{a+b} = e^a e^b$, $e^{a-b} = e^a / e^b$, $(e^a)^r = e^{ra}$, $e^{-a} = 1/e^a$.
 $e^a = e^b \iff a = b$. $e^a < e^b \iff a < b$.

Dérivation

$(e^x)' = e^x$ (la seule fonction égale à sa dérivée avec $f(0) = 1$).
 $(e^u)' = u'e^u$. Primitive de e^x : $e^x + C$. Primitive de $u'e^u$: $e^u + C$.

Activité 6.1 : Équations et inéquations avec $\exp$ ⊙ 25 min

Résous dans $\mathbb{R}$:

- a) $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$
- b) $e^{3x} - 2e^{2x} - 8e^x = 0$
- c) $3e^{2x} + e^x - 10 \geq 0$
- d) $e^{x+3} \times e^{x-2} = e^3$
- e) $e^x - 10e^{-x} = 3$
- f) $-4e^{3x} + 17e^{2x} + 16e^x - 5 = 0$

Synthèse – Fonction Exponentielle

$e^x = \exp(x)$, réciproque de $\ln$. $(e^x)' = e^x$, $(e^u)' = u'e^u$.

$e^{a+b} = e^a e^b$. $\lim_{+\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{-\infty} e^x = 0$.

Croiss. comp. : $e^x \gg x^n$. Asymptote $y = 0$ en $-\infty$.

Équations : poser $X = e^x > 0$. Base a : $a^x = e^{x \ln a}$.

Chapitre 7

Fonction Puissance

⦿ Durée estimée : 2h00 – 2h30

3 activités + synthèse

7.1 Définition et propriétés

Définition

Pour $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$: $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Croissance comparée générale

En $+\infty$: $e^x \gg x^\alpha \gg (\ln x)^\beta$ pour $\alpha, \beta > 0$.

En 0^+ : $x^\alpha |\ln x|^\beta \rightarrow 0$ pour $\alpha > 0$.

Activité 7.1 : Limites avec fonctions puissance ⦿ 20 min

Calcule :

a) $\lim_{+\infty} \frac{(\ln x)^3}{\sqrt{x}}$ b) $\lim_{0^+} x^2 \ln x$ c) $\lim_{+\infty} x^{1/x}$ d) $\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x^{100}}$

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

a) 0 (ln dominé par toute puissance). b) 0. c) $x^{1/x} = e^{\ln x/x} \rightarrow e^0 = 1$. d) $+\infty$.

Synthèse – Fonction Puissance

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Primitive ($\alpha \neq -1$) : $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Hierarchie en $+\infty$: $e^x \gg x^\alpha \gg \ln^\beta x$.

Chapitre 8

Suites Numériques

⊙ **Durée estimée** : 3h30 – 4h00

5 activités + cours détaillé + synthèse

8.1 Généralités

Définition

Une **suite** (u_n) est une application $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto u_n$.

Définition **explicite** : $u_n = f(n)$. Définition par **réurrence** : $u_{n+1} = g(u_n)$.

8.2 Suites arithmétiques et géométriques

Formules

Suite arithmétique (raison r) : $u_{n+1} = u_n + r$, $u_n = u_0 + nr$, $S_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$.

Suite géométrique (raison q) : $u_{n+1} = qu_n$, $u_n = u_0 q^n$, $S_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ ($q \neq 1$).

Activité 8.1 : Suite auxiliaire ⊙ 20 min

Soit (u_n) : $u_0 = -4$, $u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{5}$.

- Pose $v_n = u_n - 2$. Montre que (v_n) est géométrique.
- Exprime v_n puis u_n .
- Étudie la convergence.
- Calcule $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Ta réponse :

✓ Ce qu'il faut retenir

$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{u_n+8}{5} - 2 = \frac{u_n-2}{5} = \frac{v_n}{5}$. Géométrique de raison $1/5$, $v_0 = -6$.
 $v_n = -6(1/5)^n$, $u_n = 2 - 6(1/5)^n$. $|1/5| < 1$ donc $u_n \rightarrow 2$.

8.3 Convergence

Théorèmes de convergence

- Toute suite croissante et majorée converge.
- Toute suite décroissante et minorée converge.
- Suite géométrique : converge si $|q| < 1$.
- Si $u_{n+1} = f(u_n)$ et $(u_n) \rightarrow \ell$ avec f continue, alors $\ell = f(\ell)$.

Activité 8.2 : Convergence de suite récurrente ⌚ 25 min

Soit (u_n) : $u_0 = 2$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

- a) Calcule u_1, u_2, u_3 .
- b) Montre par récurrence que $u_n \leq 3$ pour tout n .
- c) Montre que (u_n) est croissante.
- d) Dédus que (u_n) converge. Trouve la limite.

Chapitre 9

Équations Différentielles

⊙ Durée estimée : 3h00 – 3h30

4 activités + synthèse

9.1 Généralités

Définition

Une équation différentielle est une équation liant x , $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$, etc.
L'**ordre** est le plus haut degré de dérivation.

9.2 Premier ordre : $y' + ay = 0$

Théorème

Les solutions de $y' + ay = 0$ sont $f(x) = Ce^{-ax}$, $C \in \mathbb{R}$.

9.3 Second ordre : $ay'' + by' + cy = 0$

Résolution par équation caractéristique

Équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$.

- $\Delta > 0$ (racines $r_1 \neq r_2$) : $f(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$.
- $\Delta = 0$ (racine double r_0) : $f(x) = (Ax + B)e^{r_0x}$.
- $\Delta < 0$ (racines $\alpha \pm i\beta$) : $f(x) = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$.

Activité 9.1 : Résolution d'équations différentielles ⊙ 30 min

- Résous $y'' - 5y' + 6y = 0$ et détermine la solution avec $f(0) = 1$, $f'(0) = -8$.
- Résous $y'' + 4y' + 4y = 0$ avec $f(0) = 4$, $f'(0) = 1$.
- Résous $y'' + 4y = 0$ avec $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$.
- Résous $y'' - 2y' + 5y = 0$ avec $f(0) = 3$, $f'(0) = 5$.

Activité 9.2 : Équation avec second membre $\odot$ 25 min

$$(E) : y'' + 4y' + 4y = 4x + 12 \text{ et } (E_0) : y'' + 4y' + 4y = 0.$$

- Trouve a, b tels que $g(x) = ax + b$ soit solution de (E) .
- Intègre (E_0) .
- Détermine la solution de (E) avec $f(0) = 2, f'(0) = 0$.

✓ Ce qu'il faut retenir

$$g(x) = ax + b : 0 + 4a + 4(ax + b) = 4x + 12. 4a = 4, 4a + 4b = 12. a = 1, b = 2. g(x) = x + 2.$$

$(E_0) : r = -2$ double. Sol. gén. de $(E) : f = (Ax + B)e^{-2x} + x + 2.$

$$f(0) = B + 2 = 2 \Rightarrow B = 0. \quad f'(0) = A - 2B + 1 = A + 1 = 0 \Rightarrow A = -1. \quad f = -xe^{-2x} + x + 2.$$

Synthèse – Équations Différentielles

1er ordre : $y' + ay = 0 : f = Ce^{-ax}$.

2nd ordre : $ar^2 + br + c = 0$. $\Delta > 0$: somme d'exponentielles. $\Delta = 0$: $(Ax + B)e^{r_0x}$.

$$\Delta < 0 : e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x).$$

Avec 2nd membre : sol. gén. (E_0) + sol. part. (E) .

Chapitre 10

Dénombrement et Probabilités

⦿ Durée estimée : 3h30 – 4h00

5 activités + synthèse

10.1 Analyse combinatoire

Formules de dénombrement

Factorielle : $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$. $0! = 1$.

Permutations de n objets : $n!$.

Arrangements (ordre compte, p parmi n) : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Combinaisons (ordre ne compte pas) : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$.

Propriétés : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ (Pascal).

10.2 Probabilités

Définition

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ (équiprobabilité). $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Si $A \cap B = \emptyset$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Probabilité conditionnelle

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. **Formule des prob. totales** : $P(B) = \sum P(B|A_i)P(A_i)$.

Bayes : $P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{P(B)}$.

A et B indépendants $\iff P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

10.3 Variable aléatoire et loi binomiale

Théorème

$E(X) = \sum x_i P(X = x_i)$, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. $E = np$, $V = np(1-p)$.

Chapitre 11

Géométrie Plane – Transformations du Plan

⊙ Durée estimée : 4h00 – 4h30

5 activités + synthèse

11.1 Isométries du plan

Définition

Une **isométrie** est une application qui conserve les distances. $|f(A)f(B)| = |AB|$.

Déplacement (isométrie directe) : conserve les angles orientés. $z' = az + b$, $|a| = 1$.

Antidéplacement : $z' = a\bar{z} + b$, $|a| = 1$.

Classification des isométries

Déplacements :

- $a = 1$: **translation** de vecteur d'affixe b .
- $a \neq 1$, $|a| = 1$: **rotation** de centre $\omega = \frac{b}{1-a}$, angle $\arg(a)$.

Antidéplacements :

- Symétrie orthogonale (réflexion), symétrie glissée.

11.2 Similitudes

Définition

f est une **similitude** de rapport $k > 0$ si $|f(A)f(B)| = k|AB|$ pour tous A, B .

Similitude directe : $z' = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$. Rapport $k = |a|$, angle $\theta = \arg(a)$.

Similitude indirecte : $z' = a\bar{z} + b$, $a \in \mathbb{C}^*$. Rapport $k = |a|$.

Activité 11.1 : Caractériser une transformation ⊙ 30 min

- $z' = iz + 1 + 2i$. Nature ? Éléments ?
- $z' = (1 + i\sqrt{3})z - 2$. Nature ? Rapport, angle, centre ?
- $z' = -2z + 6 + 3i$. Nature ? Centre, rapport ?
- $z' = \bar{z}$. Nature ? Axe ?

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

a) $|i| = 1$, $\arg(i) = \pi/2$. Rotation de centre $\omega = \frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{2} = \frac{-1+3i}{2}$, angle $\pi/2$.
b) $|1+i\sqrt{3}| = 2$, $\arg = \pi/3$. Similitude directe, rapport 2, angle $\pi/3$. Centre : $\omega = \frac{-2}{1-(1+i\sqrt{3})} = \frac{-2}{-i\sqrt{3}} = \frac{2}{i\sqrt{3}} = \frac{-2i\sqrt{3}}{3}$.
c) $a = -2 \in \mathbb{R}$, $|a| = 2$. Homothétie de rapport -2 . Centre : $\omega = \frac{6+3i}{1+2} = 2 + i$.
d) Symétrie orthogonale par rapport à l'axe réel.

Définition

G barycentre de $(A_i, \alpha_i)_{i=1}^n$ ($\sum \alpha_i \neq 0$) : $\sum \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.
 Coordonnées : $x_G = \frac{\sum \alpha_i x_i}{\sum \alpha_i}$, $y_G = \frac{\sum \alpha_i y_i}{\sum \alpha_i}$.

11.4 Applications affines

Définition

f est une **application affine** si elle conserve le barycentre de tout système de points pondérés.

Toute similitude est une application affine.

Synthèse – Géométrie Plane

Isométries : $z' = az + b$ ($|a| = 1$) ou $z' = a\bar{z} + b$. Translation ($a = 1$), rotation ($|a| = 1, a \neq 1$).

Similitude directe : $z' = az + b$. Rapport $|a|$, angle $\arg a$, centre $\frac{b}{1-a}$.

Homothétie : $z' = kz + (1-k)z_\Omega$. **Rotation** : $z' - z_\Omega = e^{i\theta}(z - z_\Omega)$.

Barycentre : $\sum \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

Chapitre 12

Coniques

⊙ **Durée estimée** : 3h00 – 3h30

4 activités + synthèse

12.1 Définition unifiée

Définition

Une **conique** est l'ensemble des points M tels que $\frac{MF}{d(M,\mathcal{D})} = e$ (excentricité), où F est le foyer et $\mathcal{D}$ la directrice.

$e < 1$: **ellipse**. $e = 1$: **parabole**. $e > 1$: **hyperbole**.

12.2 L'ellipse

Théorème

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$). Foyers $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ avec $c^2 = a^2 - b^2$.
 $MF_1 + MF_2 = 2a$. Sommets $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$. Excentricité $e = c/a < 1$.

12.3 L'hyperbole

Théorème

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. $c^2 = a^2 + b^2$. $|MF_1 - MF_2| = 2a$. $e = c/a > 1$.
Asymptotes : $y = \pm \frac{b}{a}x$. Sommets $(\pm a, 0)$.

12.4 La parabole

Théorème

$y^2 = 4px$. Foyer $F(p, 0)$, directrice $x = -p$. $MF = d(M, \mathcal{D})$, $e = 1$.

Activité 12.1 : Étude de coniques ⊙ 25 min

- Étudie l'ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.
- Étudie l'hyperbole $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

