

30) Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants

$$a) \begin{cases} 3e^x - 2\ln y = 13 \\ 5e^x + 3\ln y = 9 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} e^{\frac{x+\ln 2}{2}} - e^{\frac{y+\ln 3}{2}} = 1 \\ e^{\frac{x+\ln 3}{2}} - e^{\frac{y+\ln 2}{2}} = 4 \end{cases}$$

Problème (9 points)

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par:

$$g(x) = -x^2 - 4 + 4\ln x$$

- 1°) a) Étudier les variations de g . (on ne calculera pas les limites aux bornes de $]g[$).
- b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

2°) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par:

$$f(x) = -x + 2 - 4 \frac{\ln x}{x}.$$

(C) est sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (OIJ) d'unités graphiques: 2cm sur (OI) et 1cm sur (OJ).

- a) Montrer que pour $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. Donner alors les variations de f après avoir déduit le signe de $f'(x)$ de la question 1.

- b) Préciser les limites de f en 0 et en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f .

3°) Soit la droite (D) d'équation $y = -x + 2$

- a) Montrer que (D) est asymptote à (C) en $+\infty$.
- b) Étudier les positions relatives de (C) et de (D).
- c) Montrer que f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur son ensemble image l'on précisera et que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0, +\infty[$.

Prouver que $1 < \alpha < 1,4$

- d) Tracer (C) et (D) dans le repère (O, I, J).

Exercice 1 : (6 points)

Pour tout x de $\mathbb{R}$ on pose : $P(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$

1°) a) vérifier que $P(-1) = 0$

b) Écrire $P(x)$ sous la forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.

c) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $P(x) \leq 0$.

2°) En utilisant les résultats de la question 1°) résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 5\ln x - 2 \leq 0$

b) $2 \ln x + \ln(2x-1) \leq \ln(5x+2)$

c) $2e^x - 1 - 5e^{-x} - 2e^{-2x} \leq 0$

3°) Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$

par : $f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{(x-1)(x+3)^2}$

a) vérifier que : $\forall x \in \mathcal{D}, f(x) = \frac{1}{8(x-1)} + \frac{15}{8(x+3)} - \frac{7}{2(x+3)^2}$

b) En déduire les primitives de f sur $\mathcal{D}$.

Exercice 2 (5 points)

1°) on pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1) \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1) \sin^2 x dx$.

Calculer $I+J$ et $I-J$. En déduire I et J .

2°) a) Calculer $\int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 3)e^x dx$

b) linéariser $\sin^2 x \cos^4 x$. En déduire $\int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos^4 x dx$.