

Devoir de mathématiques	Établissement : LMASE
	Classe : TSE Durée : 3h

Exercice 1 :

- Détermine la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

$$Z_1 = 5 \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) e^{i \frac{-5\pi}{6}} ; Z = \frac{(1+i\sqrt{3})(1+i \tan \alpha)}{2(1-i)(1-i \tan \alpha)} ; Z_2 = 1 + \cos \alpha - i \sin \alpha ;$$

$$Z_3 = e^{i \frac{\pi}{4}} + e^{i \frac{2\pi}{3}}$$

- Linéariser : $\cos^4 x$, $\sin^3 x \cos^2 x$; $\cos^2 3x$

- Soit $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i$.

- Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2 .

- Écrire sous forme algébrique et trigonométrique le quotient $Z = \frac{z_1}{z_2}$

- En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

- Calculer $(Z)^{2008}$

- On donne le nombre complexe Z tel que : $Z = 2 + 3i$

- Vérifier que $Z^4 = -119 - 120i$

- Déterminer les racines quatrièmes de l'unité.

- En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $Z^4 = -119 - 120i$

Exercice 2 :

Dans le plan P muni de son repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on considère l'équation à variable complexe notée et déterminée par : $(E) z^3 - (2 + 2i)z^2 + (2 + 4i)z - 4i = 0$

- Prouver que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on notera z_0 .
- Achever la résolution de l'équation (E). On notera z_1 et z_2 les autres solutions trouvées telles que $\text{im}(z_1) < \text{im}(z_2)$
- Donner les écritures exponentielles de z_1 et de z_2 .
- On considère E, G et F, les points du plan d'abscisses respectives de z_0 , z_1 et z_2 .
Donner l'expression algébrique du complexe $Z = \frac{z_1 - z_2}{z_0 - z_2}$.
- Déterminer z_3 d'abscisse de D pour que EDGF soit un parallélogramme.

Problème :

Les points A, B, M et M' du plan complexe ont pour abscisses respectives : $4+2i$, $-i$, z et z' avec

$$z' = \frac{z-4-2i}{z+i}$$

- Exprime les coordonnées (x', y') de M' en fonction de celles (x, y) de M.
- Détermine et construis l'ensemble des points M' tels que :
 - z' soit réel.
 - z' soit imaginaire pur ;
 - $|z'| = 1$;
 - $|z'| = \frac{2}{3}$
- Soient A, B, C et D les points d'abscisses $Z_A = -1 - i$; $Z_B = i$; $Z_C = 1 + 3i$; $Z_D = 5 + i$.

Soit S la similitude directe transformant A en C et B en D.

- Déterminer l'écriture complexe associée à S.
 - Déterminer les éléments caractéristiques de S
- Soient A, B, C, D quatre points d'abscisses respectifs : $-1 + i$; $-1 - i$; $2i$; $2 - 2i$.
Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.