

Nombres complexes

20 situations à résoudre – TSE et TSExp

Lycée Bouillagui FADIGA – Bamako

Dans chaque sujet, les repères sont orthonormés directs et $i^2 = -1$. Justifie tes réponses et indique les unités. Les données sont conçues pour ces exercices ; plusieurs sujets s'inspirent des rénovations scolaires liées au projet MIQRA.

Situation 1 – Forme algébrique et affixes de vecteurs

Réparer une erreur dans le relevé d'une cour

1. Contexte :

Avant de refaire le sol de la cour, Moussa relève la position de quatre bornes. En reportant ses mesures, il constate que le tracé ne revient pas exactement au point de départ. Il te confie son carnet pour retrouver l'erreur.

2. Support :

L'unité représente un mètre. Le point de départ A a pour affixe $a = 2 + i$. Les déplacements sont enregistrés ainsi :

Déplacement	Affixe du vecteur
A vers B	$12 + 3i$
B vers C	$-2 + 8i$
C vers D	$-12 - 3i$
D vers A	$2 - 7i$

Les trois premiers déplacements ont été vérifiés. Seul le dernier enregistrement peut être modifié. La correction est acceptable si le module du vecteur correctif, défini comme la valeur corrigée moins la valeur enregistrée, ne dépasse pas 1,5 m.

3. Fonction :

Ton relevé doit permettre à Moussa de corriger son carnet avant de tracer le contour définitif.

4. Consigne :

Corrige le relevé de Moussa et indique si la modification reste acceptable. Présente les affixes des sommets et les calculs qui justifient ta réponse, puis joins un croquis du contour.

Situation 2 – Égalité de complexes et géométrie

Valider l'emprise d'un local informatique

1. Contexte :

À l'occasion des travaux de rénovation du lycée, un local informatique est prévu dans la cour. Deux dessins ont été remis au proviseur. Avant de choisir, il demande au club de mathématiques de vérifier leurs dimensions.

2. Support :

L'unité représente un mètre. Trois sommets sont fixés :

$$a = 1 + i, \quad b = 9 + 3i, \quad d = -1 + 9i.$$

B et D sont les deux sommets voisins de A . Le quatrième sommet C est proposé sous deux formes :

$$c_1 = 7 + 11i, \quad c_2 = 8 + 10i.$$

Le cahier des charges impose que $ABCD$, pris dans cet ordre, soit un rectangle et que chacun des deux côtés issus de A mesure entre 8 m et 9 m, bornes incluses. Un rectangle dont les côtés ont la même longueur est admis.

3. Fonction :

Ton avis aidera le proviseur à retenir le dessin qui respecte les dimensions prévues.

4. Consigne :

Quel dessin faut-il retenir ? Rédige une réponse justifiée, avec un croquis, montrant qu'il respecte la forme et toutes les dimensions demandées.

Situation 3 – Conjugué, module et symétrie**Restaurer un motif décoratif de façade****1. Contexte :**

Une artisane prépare le décor d'un mur du lycée. Elle souhaite reproduire la partie supérieure de son motif sous l'axe horizontal. En regardant le dessin reçu, elle pense qu'un point a été mal placé.

2. Support :

L'unité représente 20 cm. L'axe réel est l'axe de symétrie du motif. Les points supérieurs ont pour affixes :

$$a = 1 + 2i, \quad b = 3 + 4i, \quad c = 5 + i.$$

Les points correspondants de la partie inférieure sont enregistrés ainsi :

$$a' = 1 - 2i, \quad b' = -3 - 4i, \quad c' = 5 - i.$$

Le motif doit être entièrement contenu dans le disque fermé de centre O et de rayon 6 unités. Ses traits sont les segments reliant successivement A, B, C, C', B', A', A .

3. Fonction :

Ton dessin servira à l'artisane pour reproduire le motif sans erreur.

4. Consigne :

Prépare le dessin corrigé pour l'artisane. Explique les modifications et justifie que le motif entier, y compris ses segments, tient dans le disque prévu.

Situation 4 – Quotient et module

Choisir un module pour une maquette électrique

1. Contexte :

Au club scientifique, Aminata monte un circuit de démonstration. Elle dispose de deux modules, mais ne sait pas lequel respecte les réglages demandés par son professeur. Tu l'aides à comparer les deux possibilités.

2. Support :

Dans le modèle fourni, les grandeurs complexes vérifient

$$\underline{U} = Z\underline{I}.$$

La tension est $\underline{U} = 12 + 6i$ volts. Les impédances sont :

$$Z_A = 4 + i \text{ ohms}, \quad Z_B = 2 + 2i \text{ ohms}.$$

Les valeurs numériques des courants sont exprimées en ampères. Un module convient si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

$$|\underline{I}| \leq 4, \quad \operatorname{Re}(\underline{I}) > 0, \quad \operatorname{Im}(\underline{I}) \geq 0.$$

Les deux dernières conditions décrivent le réglage demandé relativement à la référence de phase choisie.

3. Fonction :

Ta comparaison doit permettre à Aminata de choisir le module adapté à sa maquette.

4. Consigne :

Quel module conseilles-tu à Aminata ? Présente les courants obtenus sous forme algébrique, compare-les aux trois critères et justifie ton choix.

Situation 5 – Somme, module et interprétation géométrique**Corriger un signal de démonstration****1. Contexte :**

Pendant la préparation d'une journée scientifique à Bamako, trois générateurs alimentent un dispositif de démonstration. Le signal obtenu ne correspond pas au réglage souhaité. L'équipe peut ajouter une correction, mais veut la garder aussi faible que possible.

2. Support :

Les amplitudes complexes, exprimées dans une même unité normalisée, sont :

$$s_1 = 4 + 3i, \quad s_2 = -1 + 2i, \quad s_3 = 2 - i.$$

Le signal total est leur somme. Un correcteur peut ajouter un complexe c tel que $|c| \leq 5$. Après correction, le signal total doit être réel et appartenir à $[6; 8]$.

Parmi les corrections admissibles, l'équipe recherche celle de plus petit module.

3. Fonction :

Ta proposition doit donner à l'équipe un réglage qui convient avec la plus petite correction possible.

4. Consigne :

Propose la correction de plus petit module qui permet d'obtenir le signal demandé. Justifie ton choix par des calculs et un dessin dans le plan complexe.

Situation 6 – Formes trigonométrique et algébrique**Retrouver une borne de cour****1. Contexte :**

Une borne doit être retrouvée avant les travaux dans la cour. Le gardien connaît le point de départ du relevé et possède le carnet des déplacements. Deux fiches donnent pourtant des positions différentes pour la même borne.

2. Support :

L'unité représente un mètre. Le départ A a pour affixe $a = 2 + i$. Le carnet indique deux déplacements successifs :

$$u = 6 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right),$$

$$v = 4 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right).$$

Le point d'arrivée est la borne M . Deux fiches proposent :

$$m_1 = 5 + 2\sqrt{3} + i(3\sqrt{3} - 1),$$

$$m_2 = 5 + 2\sqrt{3} + i(3\sqrt{3} + 1).$$

La borne doit se trouver à moins de 8 m de A .

3. Fonction :

Ta réponse doit permettre de marquer la bonne position de la borne sur le plan de la cour.

4. Consigne :

Indique au gardien quelle fiche est correcte et si la borne respecte la distance imposée. Donne sa position exacte et accompagne ta réponse d'un croquis des déplacements.

Situation 7 – Forme exponentielle et arguments

Contrôler un alternateur pédagogique

1. Contexte :

Au laboratoire, votre groupe utilise une maquette d'alternateur. Boubacar remarque que le dessin des tensions ne semble pas correspondre à toutes les indications affichées. Avant de recopier les résultats, vous décidez de les vérifier.

2. Support :

Les tensions complexes, exprimées en volts, sont :

$$\underline{U}_1 = 12, \quad \underline{U}_2 = 12e^{2i\pi/3}, \quad \underline{U}_3 = 12e^{-2i\pi/3}.$$

Dans ce modèle, on appelle équilibrage la condition $\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 0$. La tension entre les sorties 1 et 2 est définie par

$$\underline{V} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2.$$

Le logiciel affiche : « Système équilibré ; $\underline{V}$ a pour module $12\sqrt{3}$ et pour argument principal $\pi/6$. »

L'argument principal est choisi dans $] -\pi; \pi]$.

3. Fonction :

Ta vérification doit permettre au groupe de corriger les indications erronées dans son compte rendu.

4. Consigne :

Vérifie le message affiché et rédige la version corrigée. Fais apparaître les formes algébrique et exponentielle de la tension entre les sorties 1 et 2, ainsi qu'un schéma des tensions.

Situation 8 – Somme et correction de phase**Réduire la vibration d'une maquette****1. Contexte :**

Pour la journée scientifique du lycée, votre groupe présente une petite passerelle en maquette. Lors d'un essai, elle vibre. Trois réglages peuvent réduire cette vibration : il faut choisir celui qui suffit, sans employer une correction inutilement forte.

2. Support :

En unités normalisées, le modèle donne :

$$v_1 = 3, \quad v_2 = 3e^{2i\pi/3}.$$

L'amplitude résultante est le module de la somme. Trois corrections sont disponibles :

$$c_A = 3e^{-2i\pi/3}, \quad c_B = 3e^{i\pi/3}, \quad c_C = 2e^{-2i\pi/3}.$$

Un réglage est satisfaisant si

$$|v_1 + v_2 + c| \leq 1.$$

Si plusieurs réglages conviennent, on retient celui dont le module est le plus faible.

3. Fonction :

Ton choix doit permettre au groupe de préparer la démonstration avec un réglage satisfaisant.

4. Consigne :

Choisis le réglage à utiliser pour la démonstration. Présente une comparaison des trois possibilités, puis justifie ta décision à partir des amplitudes obtenues.

Situation 9 – Équation du second degré et implantation

Choisir l'emplacement d'une borne numérique

1. Contexte :

Le lycée veut installer une borne numérique pour les élèves. Le fichier transmis par le dessinateur décrit les emplacements possibles par une équation. Le responsable souhaite connaître leur position sur le plan avant de faire son choix.

2. Support :

L'unité représente un mètre. Les affixes des emplacements possibles sont les solutions de :

$$z^2 - (8 + 4i)z + 9 + 12i = 0.$$

L'entrée principale est représentée par E , d'affixe $e = 2$. L'emplacement retenu doit satisfaire simultanément :

- $\operatorname{Re}(z) \geq 4$;
- une distance de E comprise entre 4 m et 6 m, bornes incluses.

3. Fonction :

Ton plan doit permettre au responsable de choisir un emplacement qui ne gêne pas l'accès.

4. Consigne :

Retrouve tous les emplacements proposés et indique celui à retenir. Justifie ta décision au regard des deux contraintes et reporte les points sur un croquis.

Situation 10 – Racines carrées complexes et localisation**Reconstituer deux points de fixation****1. Contexte :**

Dans un atelier de menuiserie métallique, deux repères ont disparu du dessin d'un panneau décoratif. Le menuisier a conservé une relation permettant de les retrouver. Il veut savoir où percer, sans sortir du panneau et en respectant l'écartement demandé.

2. Support :

L'unité représente 10 cm. Le centre Ω du panneau a pour affixe $\omega = 4 + 3i$. Les affixes des fixations vérifient :

$$(z - \omega)^2 = 3 + 4i.$$

Le panneau occupe la zone fermée :

$$1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 7, \quad 1 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 5.$$

Les deux fixations doivent être distantes d'au moins 40 cm.

3. Fonction :

Tes indications doivent permettre au menuisier de reporter correctement les deux fixations.

4. Consigne :

Prépare les indications à remettre au menuisier : position des fixations, schéma du panneau et vérification de toutes les contraintes. Justifie les valeurs annoncées.

Situation 11 – Équation polynomiale et configuration

Vérifier trois points d'implantation

1. Contexte :

Des élèves proposent un coin de lecture dans la cour. Leur dessin repose sur trois points enregistrés dans un fichier de calcul. Avant de montrer le projet au proviseur, ils doivent retrouver ces points et vérifier la forme obtenue.

2. Support :

L'unité représente un mètre. On pose $w = z - (1 + i)$. Les affixes recherchées correspondent aux solutions de :

$$w^3 - (4 + 4i)w^2 + 16iw = 0.$$

Le projet convient si les trois points forment un triangle rectangle isocèle dont les deux côtés de l'angle droit mesurent 4 m.

Le sommet de l'angle droit doit être clairement identifié sur le plan.

3. Fonction :

Ton travail doit permettre aux élèves de présenter un plan vérifié au proviseur.

4. Consigne :

Le plan correspond-il au coin de lecture prévu ? Présente les affixes des trois points, un dessin et une justification de la forme et des dimensions obtenues.

Situation 12 – Racines complexes et motif régulier**Concevoir une rosace à six points****1. Contexte :**

Un atelier de Bamako prépare une rosace pour une fresque scolaire. Le dessin sera réalisé à partir de six points. L'artisan veut s'assurer que le fichier fourni donnera un motif régulier et assez espacé pour être peint proprement.

2. Support :

L'unité représente 10 cm. Le centre Ω a pour affixe $\omega = 5 + 4i$. Le logiciel définit les points par :

$$(z - \omega)^6 = 64.$$

Le cahier des charges demande :

- six points distincts sur un cercle de rayon 20 cm ;
- un point horizontalement à droite de Ω ;
- une distance d'au moins 18 cm entre deux points voisins, mesurée en ligne droite.

3. Fonction :

Ta vérification doit permettre à l'artisan d'utiliser le dessin pour réaliser la fresque.

4. Consigne :

Vérifie que le fichier permet de réaliser la rosace demandée. Donne les six affixes sous la forme $z = \omega + re^{i\theta}$, représente les points et justifie le respect des trois exigences.

Situation 13 – Quotient, angle et rapport de longueurs**Contrôler l'équerrage d'un préau****1. Contexte :**

Un préau est prévu dans le projet de rénovation du lycée. Trois repères figurent déjà sur le plan, mais les deux copies reçues ne placent pas le quatrième au même endroit. Le responsable demande une vérification avant de retenir un dessin.

2. Support :

L'unité représente un mètre. Les affixes sont :

$$a = 2 + i, \quad b = 8 + 3i, \quad c = 1 + 4i.$$

Le cahier des charges impose :

$$(AB) \perp (AC), \quad AB = 2AC.$$

Un point D doit compléter le rectangle $ABDC$, dans cet ordre. Deux valeurs sont proposées :

$$d_1 = 7 + 6i, \quad d_2 = 9 + 6i.$$

3. Fonction :

Ton avis doit permettre de retenir les bons repères pour le préau.

4. Consigne :

Indique quel plan du préau il faut conserver. Justifie l'angle et le rapport des longueurs à l'aide d'un quotient complexe, puis donne la position du quatrième repère sur un croquis.

Situation 14 – Lieux définis par des modules**Installer un point d'eau****1. Contexte :**

Au conseil des élèves, deux classes demandent que le nouveau point d'eau soit placé à la même distance de leurs bâtiments. Une autre contrainte limite les emplacements possibles. Tu es chargé de proposer une position au comité scolaire.

2. Support :

L'unité représente un mètre. Les accès sont les points d'affixes :

$$a = 2 + 2i, \quad b = 10 + 2i.$$

Le point d'eau M , d'affixe z , doit :

- être équidistant de A et de B ;
- se trouver à 5 m de A ;
- appartenir à la zone $\text{Im}(z) \geq 2$.

Une fiche descriptive précise également que le bâtiment A possède six salles.

3. Fonction :

Ta proposition doit permettre au comité de choisir un emplacement qui respecte les demandes des deux classes.

4. Consigne :

Propose au comité une position pour le point d'eau. Présente un plan et des calculs utilisant les modules ; explique pourquoi les contraintes ne laissent qu'un seul emplacement possible.

Situation 15 – Translation et conservation d’une configuration**Déplacer un abri sans modifier son plan****1. Contexte :**

Une partie de la cour doit rester libre pendant les travaux. On envisage donc de déplacer un abri léger. Le responsable veut conserver sa forme et ses dimensions, tout en respectant la zone disponible près d’un arbre.

2. Support :

L’unité représente un mètre. Les sommets initiaux sont :

$$a = 1 + i, \quad b = 5 + i, \quad c = 5 + 3i, \quad d = 1 + 3i.$$

Le sommet A doit être envoyé sur A' d’affixe $a' = 8 + 5i$. Le déplacement est une translation unique. La zone d’accueil est :

$$7 \leq x \leq 13, \quad 4 \leq y \leq 8.$$

Le centre de l’abri déplacé doit rester à au moins 2 m d’un arbre représenté par T , d’affixe $t = 13 + 6i$.

Cette dernière règle porte uniquement sur le centre de l’abri, et non sur la distance de l’arbre à toute son emprise.

3. Fonction :

Ton plan doit montrer où replacer l’abri en respectant les contraintes fixées.

4. Consigne :

Prépare le plan de déplacement de l’abri. Donne l’écriture complexe de la translation et les nouveaux sommets, puis vérifie la conservation des dimensions et le respect des deux contraintes d’accueil.

Situation 16 – Rotation de centre quelconque**Vérifier le débattement d'un portail****1. Contexte :**

Le lycée prévoit de remplacer son portail. Un équipement se trouve à proximité de la zone d'ouverture. Avant de retenir le plan, le responsable veut vérifier que le portail pourra s'ouvrir complètement en gardant l'écart demandé.

2. Support :

L'unité représente un mètre. Le portail est le segment $[HA]$, où

$$h = 2 + i, \quad a = 6 + i.$$

L'ouverture complète est une rotation de centre H et d'angle $\pi/2$. Pendant l'ouverture, le portail occupe tous les segments issus de H , de longueur 4, dont la direction varie de 0 à $\pi/2$.

L'équipement est représenté par le point P d'affixe $p = 5 + 4i$. Il doit rester à au moins 0,20 m de toute position du portail. Épaisseur du portail et dimensions de l'équipement sont négligées dans ce modèle plan.

3. Fonction :

Ton avis doit permettre de décider si l'emplacement de l'équipement convient au mouvement prévu.

4. Consigne :

L'équipement peut-il rester à sa place ? Rédige un avis justifié avec l'écriture complexe de la rotation, la position finale du portail et la plus petite distance pendant l'ouverture. Ajoute un dessin de la zone balayée.

Situation 17 – Homothétie et adaptation d'un dessin**Agrandir un emblème pour une façade****1. Contexte :**

Le club artistique a dessiné un emblème triangulaire pour la façade du lycée. L'artisan doit l'agrandir autour d'un point fixé. Il souhaite vérifier que le motif agrandi tient sur le mur et qu'aucun côté ne dépasse la longueur autorisée.

2. Support :

L'unité représente 10 cm. Le centre Ω a pour affixe $\omega = 1 + i$. Les sommets du modèle sont :

$$a = 2 + i, \quad b = 1 + 3i, \quad c = 3 + 2i.$$

Le point A doit avoir pour image A' d'affixe $a' = 4 + i$. L'agrandissement est une homothétie de centre Ω et de rapport positif.

La zone disponible est

$$0 \leq x \leq 8, \quad 0 \leq y \leq 8.$$

Aucun côté de l'emblème agrandi ne doit dépasser 70 cm.

3. Fonction :

Tes indications doivent permettre à l'artisan de préparer l'emblème aux bonnes dimensions.

4. Consigne :

Prépare le plan de l'emblème agrandi. Précise le rapport et l'écriture complexe de l'homothétie, puis vérifie que les nouveaux sommets et les longueurs respectent les limites données.

Situation 18 – Détermination d'une similitude directe**Recaler un ancien plan numérisé****1. Contexte :**

En préparant les travaux, une équipe retrouve un ancien plan du lycée. Il faut l'ajuster au nouveau dessin. Deux repères sont bien identifiés, mais deux positions différentes ont été proposées pour un troisième point.

2. Support :

Les coordonnées des deux dessins sont exprimées dans le même espace graphique orthonormé direct ; les échelles des dessins peuvent différer. Sur l'ancien dessin :

$$a = 0, \quad b = 2, \quad c = 1 + 3i.$$

Sur le nouveau, les points homologues connus sont :

$$a' = 8 + 2i, \quad b' = 10 + 4i.$$

Le recalage est une similitude directe $z' = \alpha z + \beta$, avec $\alpha \neq 0$. Deux positions sont proposées pour l'image de C :

$$c'_1 = 6 + 6i, \quad c'_2 = 10 + 6i.$$

3. Fonction :

Ta formule doit permettre de replacer les points de l'ancien dessin sur le nouveau sans les traiter un par un.

4. Consigne :

Retrouve la transformation qui ajuste les deux dessins et indique quelle position de C' est correcte. Dans ta réponse, précise le rapport, l'angle, le centre et la formule permettant de revenir du nouveau dessin à l'ancien.

Situation 19 – Composition et ordre des transformations**Corriger une commande de dessin****1. Contexte :**

Deux élèves préparent la signalétique du lycée sur un logiciel de dessin. Ils utilisent les mêmes commandes, mais pas dans le même ordre. Leurs triangles n'arrivent pas au même endroit. Ils te demandent de les départager et de proposer une correction.

2. Support :

L'unité est graphique. Le motif initial est le triangle d'affixes

$$a = 0, \quad b = 2, \quad c = i.$$

Les transformations disponibles sont :

$$T(z) = z + 3 + i, \quad R(z) = iz.$$

La procédure A applique T puis R ; la procédure B applique R puis T .

Le point A doit arriver au point d'affixe $3 + i$. Le motif final doit être entièrement contenu dans la zone fermée :

$$2 \leq x \leq 4, \quad 1 \leq y \leq 3.$$

3. Fonction :

Ton explication doit aider les deux élèves à utiliser les commandes dans le bon ordre et à réparer le dessin décalé.

4. Consigne :

Explique aux deux élèves quelle procédure respecte la demande. Appuie ta réponse sur les écritures complexes et les images des sommets, puis indique la translation qui amène le dessin de la procédure A sur celui de la procédure B.

Situation 20 – Synthèse : équation et similitude**Valider un espace scientifique dans un lycée rénové****1. Contexte :**

Dans le cadre des réflexions sur la rénovation du lycée, le club scientifique propose un espace triangulaire dans la cour. Deux plans sont présentés au comité. Il faut choisir celui qui convient, puis y placer une borne destinée aux activités des élèves.

2. Support :

L'unité représente un mètre. Le modèle a pour sommets :

$$a = 0, \quad b = 2, \quad c = 2i.$$

Deux transformations sont proposées :

$$S_1(z) = (1 + i)z + 6 + 4i, \quad S_2(z) = 2iz + 6 + 4i.$$

Le triangle transformé doit être contenu dans

$$3 \leq x \leq 9, \quad 3 \leq y \leq 9.$$

Les deux côtés issus de l'image de A doivent mesurer entre 2,5 m et 3 m, bornes incluses. L'ordre orienté des sommets doit être conservé.

Une borne d'affixe p doit vérifier

$$(p - 6 - 4i)^2 = -4.$$

On retient la position au-dessus de $y = 4$. Elle doit appartenir au triangle choisi, frontière comprise, et se trouver à au moins 1,5 m de chacun de ses sommets.

3. Fonction :

Ton dossier doit permettre au comité de retenir un seul plan et de connaître la position de la borne.

4. Consigne :

Prépare une proposition complète pour le comité : choix du plan, position de la borne et dessin final annoté. Justifie toutes les contraintes et précise le centre, le rapport et l'angle de la similitude retenue.