

EXERCICES DE TRIGONOMETRIE

Exercice 1

Résoudre, sur $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$$\sin^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\sin(2x) = \cos x$$

Exercice 2

Simplifier au maximum les expressions suivantes :

$$A(x) = \cos(x + \pi) \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin^2(-x)$$

$$B(x) = \tan(x + \pi) - \tan x \quad (\text{pour } x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[)$$

$$C(x) = \sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi - x) \cdot \sin(-x)$$

$$D(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{3}{4} - \sin^2 x$$

Généralisation :

$$\sin(a + b) \sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b$$

Exercice 3

En utilisant les formules d'addition, calculer la valeur exacte de $\sin \frac{7\pi}{12}$ et $\cos \frac{7\pi}{12}$.

$$(\text{On pourra utiliser l'égalité } \frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})$$

Exercice 4

Démontrer que pour tout réel x :

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$$

Exercice 5

Démontrer que, pour tout réel x différent de $k \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) :

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$$

Exercice 6

Démontrer que la représentation graphique de la fonction f définie, sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \cos(2x) + \sin x - 1$$

est située entre les droites d'équation $y = -3$ et $y = 1$.

Exercice 7

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation :

$$2\sin^3 x - 17\sin^2 x + 7\sin x + 8 = 0$$

Exercice 8

1. θ est un angle (situé dans $]-\pi; \pi]$) dont on sait que $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{1}{2}$. Que vaut θ (en radians) ?
2. θ est un angle situé dans $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ tel que $\sin \theta = \frac{4}{5}$. Calculer $\cos \theta$ et $\tan \theta$.
3. θ est un angle situé dans $]-\pi; 0]$ tel que $\cos \theta = \frac{2}{3}$. Calculer $\sin \theta$ et $\tan \theta$.
4. θ est un angle situé dans $]-\pi; 0]$ tel que $\tan \theta = 2$. Calculer $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

Exercice 9

Résoudre, dans $]-\pi; \pi]$, les équations :

$$2\cos^3 x - 7\cos^2 x + 2\cos x + 3 = 0$$

$$2\sin^3 x + \cos^2 x - 5\sin x - 3 = 0$$

Exercice 10

Dans cet exercice, on dispose de la donnée suivante : $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

On rappelle que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ pour tout $x \in D$ où $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$

1. Démontrer que pour tout $x \in D$: $\tan(\pi + x) = \tan x$

En déduire la valeur exacte de $\tan \frac{9\pi}{8}$.

2. Démontrer que pour tout $x \in D$: $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{8}$ puis de $\sin \frac{\pi}{8}$.

3. Calculer la valeur exacte de $\cos \frac{5\pi}{8}$.

Exercice 11

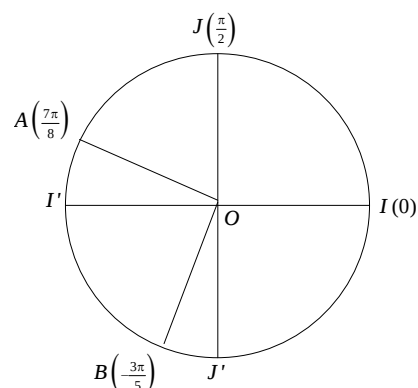
Sur un cercle trigonométrique $\mathcal{C}$, on considère les points A et B tels que :

$$(\vec{OI}, \vec{OA}) = \frac{7\pi}{8} \text{ et } (\vec{OI}, \vec{OB}) = -\frac{3\pi}{5}$$

Déterminer la mesure principale des angles suivants :

$$(\vec{OA}, \vec{OJ}) ; (\vec{OJ}, \vec{OB}) ; (\vec{OB}, \vec{OA})$$

(On pourra utiliser la relation de Chasles)



Exercice 12

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A et B dont les **coordonnées polaires** sont :

$$A(2 ; 0) \quad B\left(2 ; \frac{\pi}{6}\right)$$

On considère également le point C dont les **coordonnées cartésiennes** sont : $C(-\sqrt{3} ; -1)$

1. Préciser, sans justification les coordonnées cartésiennes de A .
2. Calculer les coordonnées cartésiennes de B .
3. Calculer les coordonnées polaires de C .
4. Justifier que les points A , B et C sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.
5. Placer, précisément, les points A , B et C sur une figure.
6. Quelle est la nature du triangle ABC ? (Justifier)

Exercice 13

Dans cet exercice, on dispose de la donnée suivante : $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

1. Soit $x \in]0 ; \frac{\pi}{2} [$.

Démontrer que :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$$

2. En déduire que :

$$\tan \frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}.$$

Exercice 14

1. Résoudre, dans $]-\pi ; \pi]$, l'équation : $\sin x = \sin(2x)$
Représenter les éventuelles solutions sur le cercle trigonométrique.
2. Existe-t-il un angle aigu θ , non nul, ayant même sinus que 2θ ?

Exercice 15

Dans cet exercice, on donne : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ puis de $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.

Exercice 16

1. Démontrer que, pour tout $x \in]0 ; \frac{\pi}{2} [$: $\tan x = \frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)}$
2. En déduire les valeurs exactes de $\tan \frac{\pi}{8}$ et $\tan \frac{\pi}{12}$.

Exercice 17

ABC est un triangle non rectangle.

1. Démontrer que : $\tan(A + B) = -\tan C$

2. À l'aide de la relation $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ (que l'on pourra redémontrer au passage), prouver que :

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$$